

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

N° d'ordre :

Série :

Thèse présentée par :

BENKHAOUA Larbi

en vue de l'obtention de diplôme de doctorat 3^{ème} cycle LMD en Électronique

Option : hyperfréquences et Télécommunications

Thème :

*Contribution à l'élaboration d'un Modèle Electromagnétique
de Supports de Transmission Non-Uniformes*

Soutenu le : 05 Mai 2016

Devant le jury :

<i>Mme. Saïda Rebiai</i>	<i>Professeur UFM Constantine</i>	<i>Président</i>
<i>M. Mohamed Taoufik Benhabiles</i>	<i>Maitre de Conférences UFM Constantine</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>M. Karim Mansour</i>	<i>Professeur Université Constantine 3</i>	<i>Examinateur</i>
<i>M. Noureddine Doghmane</i>	<i>Professeur Université UBM Annaba</i>	<i>Examinateur</i>
<i>M. Fouad Kerrouf</i>	<i>Maitre de Conférences UFM Constantine</i>	<i>Examinateur</i>

*À mes chers parents qui prient pour moi tous les jours (loin de mes yeux
mais proche de mon cœur),*

À la mémoire de mon frère

À mes nièces et mes neveux,

À mes sœurs,

À mes amis.

Remerciements

Le travail de recherche, présenté dans ce manuscrit a été effectué au sein du Laboratoire d'Electromagnétisme et Télécommunications (LET) Université des Frères Mentouri Constantine.

Je commence par remercier mon directeur de thèse Docteur Mohamed Taoufik Benhabiles, qui m'a fait entrer dans le monde de la recherche. Je tiens à le remercier encore une fois pour son encadrement, son expérience, sa disponibilité, son aide, son soutien et ses conseils précieux et avisés tout au long de cette thèse. J'ai appris une multitude de choses à ses côtés pendant mes années de thèse. Les discussions que nous avons eues ces dernières années vont me manquer. Un grand merci encore d'avoir corrigé le manuscrit avec autant de soin.

Je remercie également le Professeur Mohamed Lahdi Riabi ainsi que Monsieur Smaïl Mouissat dont la présence et les discussions autour de cette thèse ne démeritent pas.

Mes profondes gratitude vont également aux membres du jury :

À Madame Saida Rebiai, professeur à l'université des Frères Mentouri Constantine, qui m'a fait l'honneur d'accepter de juger ce travail et de présider mon jury de thèse.

À Monsieur Fouad Kerrou, Maître de Conférences à l'université des Frères Mentouri Constantine, pour avoir accepté de juger le travail de cette thèse.

À Monsieur Karim Mansour, Professeur à l'université Constantine 3, pour avoir accepté de juger mon travail.

À Monsieur Noureddine Doghmane, Professeur à l'Université UBM Annaba, pour avoir accepté de juger mon travail.

SOMMAIRE

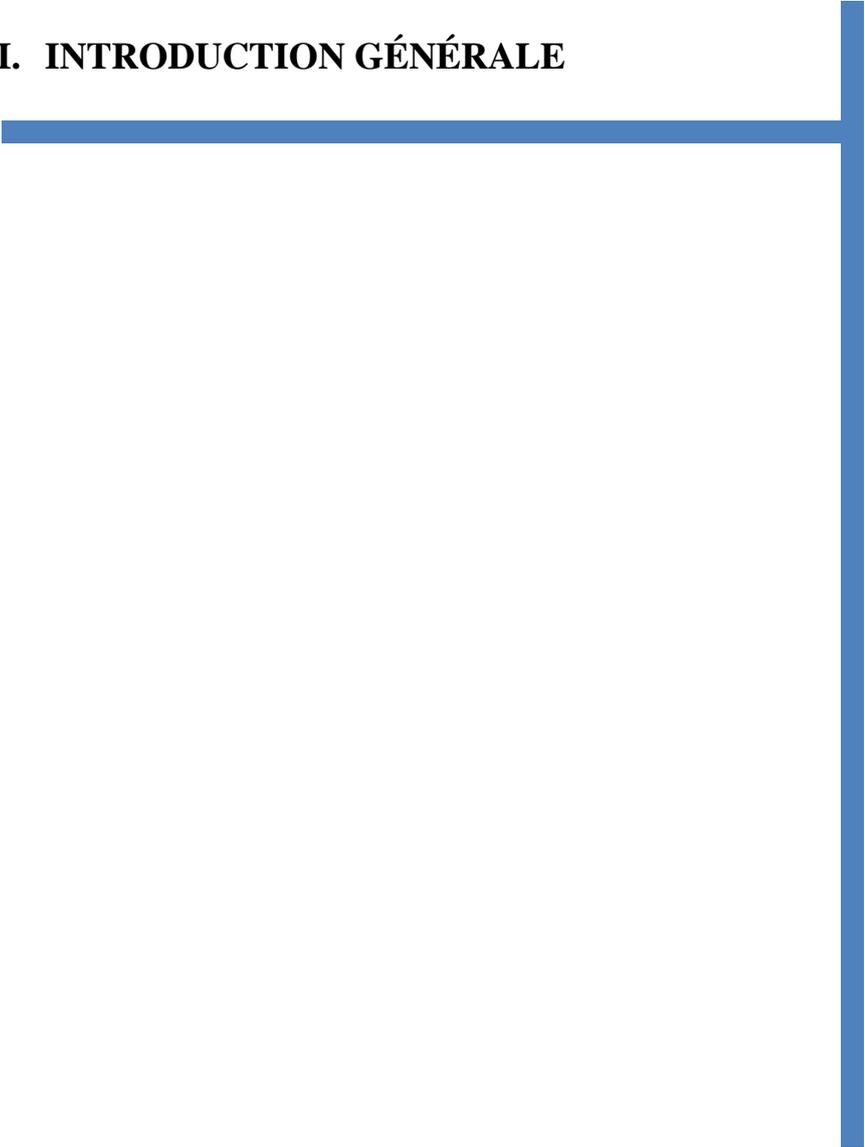
I. INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
I.1. INTRODUCTION	2
I.2. ORGANISATION DE LA THESE	5
I.3. ÉTAT DE L'ART DES METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES AUX LTNU _s	6
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES I	8
II. LA THÉORIE DES LIGNES DE TRANSMISSION NON UNIFORMES	12
II.1. EVOLUTION DES MODELES DES LIGNES DE TRANSMISSIONS	13
II.2. LES EQUATIONS DES TELEGRAPHISTES DE HEAVISIDE	14
II.2.1. MODELE EQUIVALENT DE LA LIGNE DE TRANSMISSION	14
II.2.2. LA SIGNIFICATION PHYSIQUE DES PARAMETRES LINEIQUES DE LA LIGNE DE TRANSMISSION	18
II.3. MODELE DE LA LIGNE DE TRANSMISSION NON UNIFORME	19
II.4. SOLUTIONS ANALYTIQUES CLASSIQUES DES EQUATIONS DES TELEGRAPHISTES POUR LES LTNU _s	20
II.4.1. SOLUTIONS BASEES SUR LA RESOLUTION DIRECTE DES EQUATIONS DU 2 ^{ieme} ORDRE	20
II.4.1.1. SOLUTION DES LTNU _s AVEC $Z(x) = Z(0) x^a$ et $Y(x) = Y(0) x^b$	22
II.4.1.1.1. SOLUTION DE LA LIGNE DE BESSEL	23
II.4.1.1.2. SOLUTION DE LA LIGNE LINEAIRE TRAITEE PAR ARNOLD.....	23
II.4.1.2. SOLUTION POUR LA LIGNE EXPONENTIELLE	24
II.4.2. SOLUTIONS BASEES SUR LA TRANSFORMATION A UNE EQUATION DE RICCATI	24

II.4.2.1. FORMULATION DU COEFFICIENT DE REFLEXION PAR L'EQUATION DE RICCATI	24
II.4.2.2. TYPES DE LTNU _s PARTICULIERES	26
II.4.2.2.1. LA LIGNE A PROFIL D'IMPEDANCE EXPONENTIEL	26
II.4.2.2.2. LA LIGNE A PROFIL D'IMPEDANCE TRIANGULAIRE	26
II.4.2.2.3. LA LIGNE DE KLOPFENSTEIN	27
II.4.2.3. EXEMPLE DES TRANSITIONS DE 50 Ω :100 Ω	27
II.5. METHODES CLASSIQUES D'ANALYSE TEMPORELLE DES LTNU _s ..	29
II.5.1. METHODE DES DIFFERENCES FINIES (FDTD)	29
II.5.2. METHODE DES CARACTERISTIQUES	30
II.5.3. METHODE DU PROPAGATEUR	33
II.5.4. METHODE DU PLONGEMENT INVARIANT	39
II.6. CONCLUSION	45
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES II	46
III. LES MÉTHODES SANS MAILLAGE	51
III.1. INTRODUCTION	52
III.2. HISTORIQUE DES METHODES SANS MAILLAGE	52
III.3. LES METHODES D'INTERPOLATION DE POINT	54
III.3.1. DISCRETISATION TEMPORELLE DES EQUATIONS DES TELEGRAPHISTES	55
III.3.2. METHODE D'INTERPOLATION DE POINT POLYNOMIALE (LA METHODE PIM)	58

III.3.2.1. FORMULATION DE LA METHODE PIM	58
III.3.2.2. LES PROPRIETES DE LA FONCTION DE FORME DE LA METHODE PIM	60
III.3.2.3. LES AVANTAGES ET LES INCONVENIENTS DE LA METHODE PIM.....	62
III.3.3. LA METHODE SANS MAILLAGE BASEE SUR LES FONCTIONS DE BASE RADIALES (LA METHODE RBF-MLM)	62
III.3.3.1. FORMULATION DE LA METHODE RBF-MLM	62
III.3.3.2. LES AVANTAGES ET LES INCONVENIENTS DE LA METHODE RBF-MLM	66
III.3.4. METHODE D'INTERPOLATION DE POINT RADIALE (METHODE RPIM	67
III.3.4.1. FORMULATION DE LA METHODE RPIM	67
III.3.4.2. LES AVANTAGES ET LES INCONVENIENTS DE LA METHODE RPIM	69
III.4. PROCEDE DE SOLUTION DES METHODES D'INTERPOLATION DE POINT	70
III.5. CONCLUSION	71
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES III	72
IV. EXEMPLES NUMÉRIQUES	75
IV.1. INTRODUCTION	76
IV.2. LTNU DE TYPE LINEAIRE "TAPER LINE"	76
IV.3. LTNU DE TYPE BALUN	80
IV.3.1. IMPACT DU NOMBRE DE SEGMENTS	83
IV.3.2. IMPACT DE LA TAILLE DU DOMAINE DE SUPPORT LOCAL ...	85

IV.3.3. IMPACT DU NOMBRE DES MONOMES DANS LA METHODE RPIM	86
IV.4. CONCLUSION	88
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES IV	88
CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	89
RESUMES	92
LISTE DES PUBLICATIONS	96

I. INTRODUCTION GÉNÉRALE



I.1. INTRODUCTION

Les modèles de lignes de transmission et guides d'ondes sont généralement basés sur l'hypothèse d'invariance de la section transversale dans la direction de propagation de l'onde. Cette hypothèse a été à la base des concepts fondamentaux de l'ensemble de la théorie des lignes de transmission, avec un impact largement établi sur la technologie et les standards. Dans le cas où la section droite d'une ligne de transmission ou d'un guide d'onde n'est pas uniforme, des notions aussi fondamentales que l'impédance caractéristique et la vitesse de phase sont remises en cause, voire ambiguës dans leur définition même.

La ligne non-uniforme, loin de présenter l'imperfection vis-à-vis de la théorie générale, se rapproche plus de la réalité technologique, et donne même lieu à des applications utiles dans le domaine des circuits passifs microondes, notamment des adaptateurs d'impédance, coupleurs, et déphaseurs.

L'intérêt pratique porté sur les lignes non-uniformes remonte à l'année 1921 avec le travail de John Renshaw Carson [1], et jusqu'à ce jour il existe une littérature très dense en la matière. Mais il y a lieu de constater qu'elle est très éparse dans les approches, et surtout que les modèles établis sont quasi-analytiques, inspirés de la représentation classique tension-courant. Cette dernière est plus appropriée aux circuits à éléments discrets qu'aux phénomènes de propagation dans les structures micro-ondes.

Bien que les sources documentaires qui jalonnent son lent développement remontent aussi loin que 1855 à l'article de Lord Kelvin, "Theory of the Electric Telegraph", ce thème de recherche reste pertinent et toujours en évolution, par l'entremise des défis posés par les progrès de la technologie et des promesses annoncées par les moyens de calcul.

L'existence d'une matière immense étalée sur un siècle et demi de travaux d'égale importance, fait que tout travail de recherche ne peut se dispenser de retracer le parcours de cette science très éparse dans ses modèles comme dans ses applications.

Les méthodes d'analyse spécifiques à la résolution de l'équation des télégraphistes dans le cas de la ligne de transmission non-uniforme, qui sont confirmées comme classiques dans la littérature sont la Méthode de d'Alembert (Equation de Riccati), la Méthode des Caractéristiques (Darboux-Hadamard), et la Méthode du Propagateur (Tenseur de Green)

Ces méthodes pourraient s'apprêter pour une éventuelle extrapolation à une formulation par champ électromagnétique, mais c'est sûrement très difficile.

L'apparente absence d'un modèle unifié, et surtout la mise en arrière plan de la théorie du champ dans les modèles existants, ont présenté une raison valide d'engager la présente thèse, mais la logique de la recherche scientifique pousserait à envisager la prospective d'un modèle innovant, qui prenne en considération les évolutions les plus récentes notamment en calcul numérique.

Avec le développement des télécommunications et le besoin de la miniaturisation des circuits et des composants hyperfréquences, les lignes uniformes ont été remplacées par des lignes de transmissions non-uniformes (LTNUs) dans beaucoup d'applications, comme l'adaptation d'impédance [2], les antennes [3], les filtres [4], et la formation d'impulsions [5]. Quant aux domaines où la fonction et les modèles des LTNUs sont importants, outre les télécommunications, il y a les circuits VLSI, les systèmes à fibres optiques, le transport de l'énergie électrique, les générateurs très haute tension notamment comme élément terminal des accélérateurs de particules et les torches plasma.

Grâce à leur capacité d'assurer une bonne adaptation sur une large bande fréquentielle avec une taille très réduite, les LTNUs ont fait l'objet de différentes investigations. Avec la présence des discontinuités difficiles à modéliser par les méthodes classiques, ces structures exigent une technique puissante de conception et de modélisation, surtout quand l'uniformité est arbitraire.

Différentes techniques ont été développées pour analyser les LTNUs au cours des 60 dernières années. Ces techniques peuvent se regrouper sous deux approches d'analyse : électromagnétique, et Quasi-TEM.

L'approche électromagnétique est basée sur la résolution des équations de Maxwell afin de trouver les valeurs des champs électrique E et magnétique H à chaque position le long de la ligne.

Par contre, l'approche Quasi-TEM est basée sur la résolution des équations des télégraphistes afin de trouver les valeurs des tensions et courants à chaque position. La propagation le long de la ligne est supposée de type transverse électromagnétique (TEM) ou quasi-TEM.

L'analyse électromagnétique des LTNUs par des méthodes numériques comme la méthode des différences finies (FDTD), la méthode des moments, ou la méthode des éléments finis (FEM), fournit des résultats plus précis que l'analyse quasi-TEM. D'autre part les coûts informatiques de l'approche électromagnétique en termes du temps de calcul et ressources mémoire sont considérablement plus élevés que celles de l'analyse quasi-TEM. En conséquence, la mise en œuvre de l'approche électromagnétique reste difficile et coûteuse, et ses limitations font de l'approche Quasi-TEM la candidate idéale pour l'analyse des LTNUs.

Pour l'analyse quasi-TEM, le coefficient de réflexion vu de l'entrée de la LTNU est régi par l'équation différentielle non linéaire de Riccati, dont la solution générale n'existe pas analytiquement [6]. D'autre part, pour certaines LTNUs ayant des variations régulières telles les lignes de type exponentiel [2],[7],[8], parabolique [9],[10], ou linéaire [11], les théories sont bien établies. L'absence des solutions analytiques générales pour les lignes à variations quelconques a poussé l'utilisation des différentes techniques numériques afin de trouver les solutions approximatives des lignes non-uniformes dans les domaines temporels et fréquentiels.

Les techniques fréquentielles peuvent facilement traiter les lignes de transmission uniformes ou même des lignes dont les paramètres linéiques dépendent de la fréquence. Malgré cela, elles deviennent compliquées pour le traitement des LTNUs à cause des variations des paramètres linéiques, qui restent inadéquates avec beaucoup d'algorithmes. D'autre part, dû à l'augmentation des fréquences, il est devenu nécessaire de prédire les réponses temporelles pour estimer directement les performances des circuits hyperfréquences sur des larges bandes fréquentielles. Autrement dit, l'analyse dans le domaine temporel a l'avantage de pouvoir obtenir les caractéristiques d'un circuit sur une large bande par une seule et simple utilisation de la transformée de Fourier.

C'est dans ce contexte que cette thèse prend place. Elle retiendra la résolution des équations des télégraphistes par l'approche quasi-TEM dans le domaine temporel afin d'analyser les LTNUs de forme quelconque par une nouvelle méthode numérique flexible, et puissante. L'exigence d'investir dans une technique numérique des plus actuelles en vue d'aspirer à une contribution originale qui concorderait avec ce qui se fait au même moment dans le monde, a été exaucée par les méthodes sans maillage qui, par cette occasion ont été abordées pour la première fois dans le laboratoire LET.

Les méthodes sans maillage ont été appliquées en électromagnétisme essentiellement aux modèles bâtis sur les équations de Maxwell, et c'était un des desseins à un moment donné dans l'avancement de cette thèse d'envisager une éventuelle extrapolation des modèles classiques de la LTNU à une formulation par la théorie du champ, avec résolution par une méthode sans maillage. C'est dans le cours de l'évolution de notre recherche et de façon fortuite que nous avons constaté que l'équation des télégraphistes fait toujours l'objet aujourd'hui d'une recherche très active, où les techniques numériques les plus évoluées sont déployées comme nous le présenteront plus loin dans ce manuscrit. En recherche scientifique, l'étape suivante s'impose toujours d'elle-même. Sans nous écarter aucunement du plan de travail établi à un moment où nous n'avions pas une vision exhaustive des découvertes en cours, notre contribution a en définitive trouvé sa voie.

I.2. Organisation de la thèse

Ce manuscrit se compose de quatre chapitres. Le premier chapitre présente l'état de l'art des différentes méthodes d'analyse pour résoudre les équations des télégraphistes des LTNUs dans le domaine temporel. La plupart de ces dernières suivent la méthodologie des différences finies. Nous présentons aussi les limitations de ces techniques et le problème d'utilisation d'une grille de discrétisation espacée uniformément. Ce qui nous permet ensuite de bien présenter les avantages des méthodes proposées dans ce travail.

Le second chapitre est un rappel de la théorie des lignes de transmission qui retrace son progrès depuis les origines jusqu'à nos jours, en mettant l'accent sur les équations des LTNUs et leurs méthodes de résolution. Les étapes importantes qui ont influencé de façon décisive les connaissances relatives aux LTNUs, ainsi que les méthodes d'analyse spécifiques qui sont confirmées comme classiques, sont décrites avec le niveau de profondeur approprié.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes sans maillage. Nous commençons par un historique de ces méthodes. Ensuite des généralités et des fondements mathématiques d'une famille spéciale de méthodes sans maillage sont présentés pour la résolution des équations des télégraphistes dans le cas des LTNUs.

Le dernier chapitre est consacré aux simulations numériques de deux exemples de LTNUs de complexités variables en utilisant les méthodes présentées dans le troisième chapitre. Dans un premier temps, une comparaison des résultats de calcul d'une LTNU de type linéaire a été

conduite entre la méthode FDTD, la méthode d'expansion par ondelettes, et les méthodes que nous proposons. Ensuite, afin de montrer les avantages potentiels de ces dernières, tel que la discrétisation irrégulière et la convergence rapide, une comparaison avec les résultats de la méthode FDTD est discutée pour le deuxième exemple.

I.3. État de l'art des méthodes numériques appliquées aux LTNUs

L'approche numérique la plus répandue dans la littérature pour l'analyse de la LTNU est de la ramener à une mise en cascade de sections de longueur réduite qui sont traitées chacune comme une ligne uniforme. Le nombre immense de sections nécessaire pour avoir une précision acceptable implique une consommation énorme des ressources de mémoire et du temps d'exécution par l'ordinateur.

Le principal progrès dans l'analyse temporelle des LTNUs est venu avec le déploiement de techniques numériques d'avant-garde dont la plupart suivent la méthodologie des différences finies, et qui pourraient représenter un état de l'art officiel pour notre thèse. Afrooz et Abdipour [12] ont développé un algorithme explicite de différences finies inconditionnellement stable pour résoudre les équations des télégraphistes pour les LTNUs. La condition de Courant, Friedrich et Levy (CFL) est surmontée en approchant la dérivée spatiale de la tension par une différence avant du premier ordre, et la dérivée spatiale du courant par une différence arrière du premier ordre. Les valeurs de la tension et du courant sont calculés en alternance après un pas temporel entier et de façon itérative. Watanabe *et al* [13] appliquent une technique qu'ils ont désignée par expansion en ondelettes des différences finies. Ils utilisent les fonctions B-splines cardinales du second ordre comme fonctions d'échelle spatiales pour la tension et le courant, un schéma explicite de type Leapfrog est utilisé pour les itérations en temps. Phan Tu Vu *et al* [14] appliquent l'algorithme Leapfrog en utilisant des fonctions de base radiales de type multiquadrique pour l'approximation des dérivés partielles spatiales, et ils ont de ce fait presque introduit la méthode sans maillage. Tang *et al* [15] résolvent les équations des télégraphistes en appliquant la discrétisation par différences finies aux dérivés spatiales uniquement. Afin d'éviter la limitation de la condition Courant-Friedrich-Levy, l'intégration en temps est effectuée analytiquement. Dans [16] Lei Jia *et al* suivent une méthodologie similaire, sauf qu'ils utilisent une grille irrégulière pour la discrétisation de l'espace. A l'opposée, Jeong et Nevels [17] expriment les équations des télégraphistes par l'application d'un procédé d'intégration connu sous le nom de méthode du propagateur explicite (explicit propagator method) que nous présenteront dans le Chapitre II,

qui donne une solution analytique dans l'espace, suivie d'une intégration numérique pour la variable temps. Un procédé appelé expansion spectrale du noyau intégrant (integrating kernel spectral expansion) est employé par Antonini dans [18] qui l'applique en utilisant des fonctions de base plein-domaine pour les dérivés spatiales, et qui donne lieu à une formulation analytique simple pour l'intégration par rapport au temps. L'approche spectrale du noyau intégrant est présente également dans le travail de Chernobryvko *et al* [19], qui développent une méthode fréquentielle, les données des résultats obtenus sont exportées vers un logiciel professionnel pour les transformer dans le domaine temporel. La plus récente publication pour la résolution numérique de l'équation des télégraphistes est due à Zhuang et al [20] qui évitent à la fois la condition de stabilité CFL et la dispersion numérique par un schéma temporel qu'ils désignent par *spectral deferred correction*, correction retardée spectrale. L'équation des télégraphistes est d'abord réduite à une équation différentielle ordinaire par une discrétisation spatiale, ensuite un algorithme prédicteur-correcteur est appliqué pour l'intégration dans le temps.

Bien que la plupart de ces méthodes suivent la méthodologie des différences finies, l'étude des LTNUs par cette méthodologie nécessite parfois des moyens informatiques très importants. C'est notamment le cas lorsque la ligne présente des variations d'impédance caractéristique quelconques, détails géométriques arbitraires, différentes régions de la LTNU peuvent demander des niveaux très différents de résolution de la grille utilisée. Dans un tel cas, l'utilisation d'une grille de discrétisation espacée uniformément produit des surcoûts de calcul inutiles. Autrement dit, les dimensions des cellules de Yee doivent être inférieures aux dimensions des détails géométriques les plus fins, ce qui revient à considérer un très grand nombre de cellules de Yee, surtout lorsque la LTNU est très longue. Ce qui demande en conséquence une consommation énorme des ressources de mémoire et du temps d'exécution. En effet, la condition de stabilité de Courant, Friedrich et Levy exige que le plus grand pas de temps permis doit être très petit quand deux nœuds de la grille de discrétisation sont très proches l'une de l'autre. Malheureusement, cela donne en conséquence une simulation très longue. Dans le passé, deux alternatives différentes ont été proposées pour résoudre ce problème : la première était d'utiliser une méthode de discrétisation multi-résolution dans le temps en employant les ondelettes [21]-[22], et la seconde était d'introduire une grille non-uniforme [23]-[24].

D'autre part, une famille spéciale des méthodes sans maillage a émergé dans la dernière décennie pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Ces méthodes sont basées sur un schéma d'interpolation purement polynomial [25], ou bien elles utilisent des fonctions de base radiales [26]-[27]. Elles n'utilisent que des nœuds sur le domaine de calcul. En effet, grâce à la capacité de déplacer ou d'ajouter des nœuds, ces méthodes fournissent une grande flexibilité géométrique par rapport aux méthodes conventionnelles telles que la méthode des différences finies FDTD, ou la méthode des éléments finis FEM. Par conséquent, ces méthodes sans maillage ont les avantages d'une distribution nodale arbitraire et d'une détermination conforme des paramètres linéiques de la LTNU. Pour ces raisons, le but de notre travail est de proposer des codes de calcul permettant l'analyse et la simulation des LTNUs à forme quelconque dans le domaine temporel par des méthodes sans maillage sous environnement MATLAB. L'étude a été réalisée par le traitement des équations des télégraphistes pour différents types des LTNUs utilisant les trois méthodes sans maillage construites à partir des interpolations de point suivantes :

- La méthode **PIM** (*Point Interpolation Method*)
- La méthode **RBF-MLM** (*MeshLess Method based on Radial Basis Functions*) ;
- La méthode **RPIM** (*Radial Point Interpolation Method*).

Pour clôturer ce chapitre introductif, nous aimerions souligner que notre travail [28], est au mieux de notre connaissance, le tout premier dans la littérature où les méthodes sans maillage PIM et RPIM ont été appliquées à l'équation des télégraphistes pour l'analyse d'une LTNU.

Références bibliographiques I

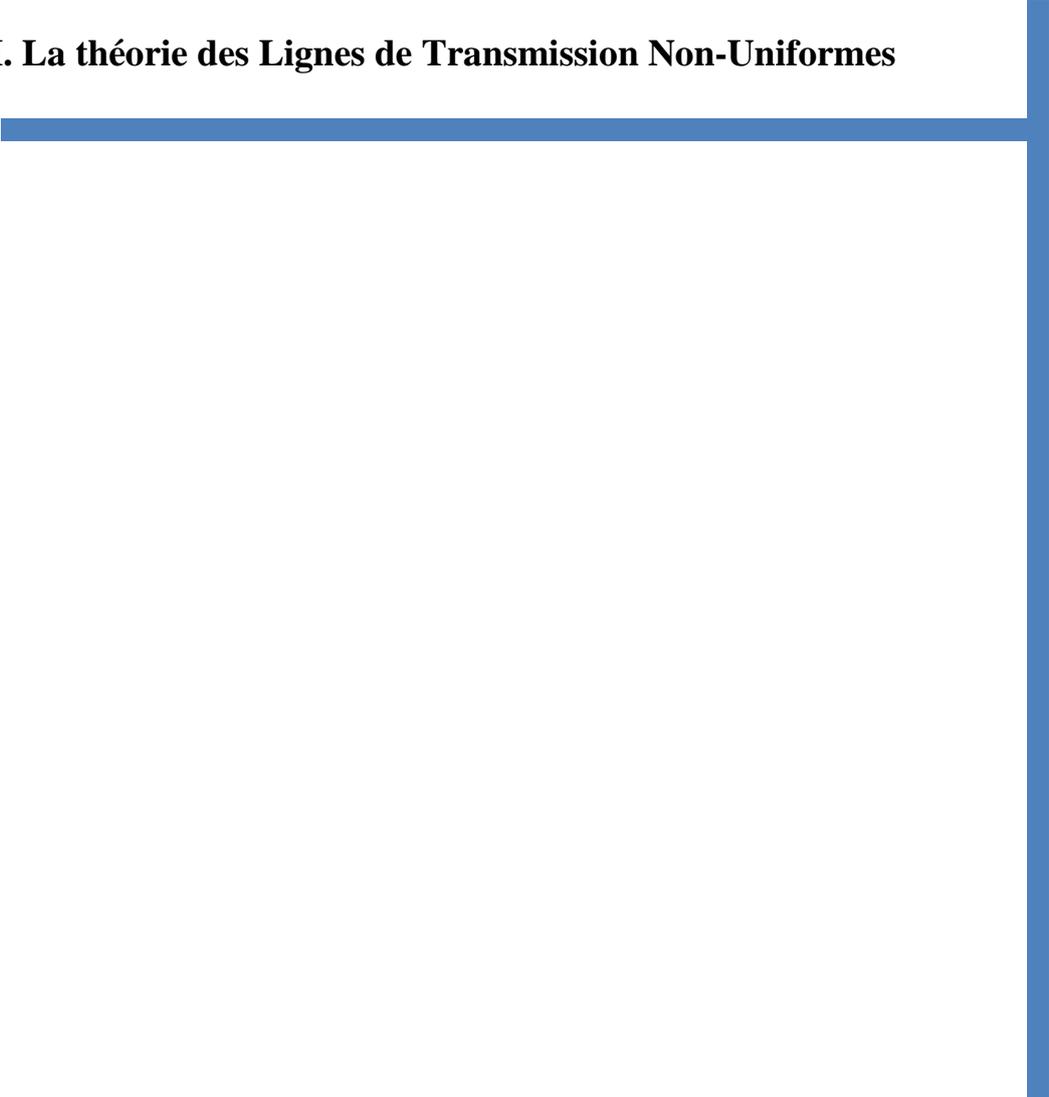
- [1] CARSON, John R. Propagation of periodic currents over non-uniform lines. *The Electrician*, 1921, vol. 86, p. 272-273.
- [2] COLLIN, Robert E. *Foundations for microwave engineering*. John Wiley& Sons, 2007.
- [3] YOUNAN, Nicholas H., COX, Bobby L., TAYLOR, Clayborne D., *et al.* An exponentially tapered transmission line antenna. *IEEE transactions on electromagnetic compatibility*, 1994, vol. 36, no 2, p. 141-144.
- [4] MISRA, Devendra. *Radio-frequency and microwave communication circuits: analysis and design*. John Wiley& Sons, 2004.

- [5] RULIKOWSKI, Pawel et BARRETT, John. Application of nonuniform transmission lines to ultra wideband pulse shaping. *Microwave and Wireless Components Letters, IEEE*, 2009, vol. 19, no 12, p. 795-797.
- [6] KLOPFENSTEIN, R. W. A transmission line taper of improved design. *Proceedings of the IRE*, 1956, vol. 44, no 1, p. 31-35.
- [7] HSUE, Ching-Wen et HECHTMAN, Charles D. Transient analysis of nonuniform, high-pass transmission lines. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 1990, vol. 38, no 8, p. 1023-1030.
- [8] HSUE, Ching-Wen. Time-domain scattering parameters of an exponential transmission line. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 1991, vol. 39, no 11, p. 1891-1895.
- [9] P. Bouchard and R. J. Gagne, "Transient analysis of lossy parabolic transmission lines with nonlinear loads," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 43, no. 6, pp. 1330–1333, Jun. 1995.
- [10] AHMED, M. Jamil. Impedance Transformation Equations for Exponential, Cosine-Squared, and Parabolic Tapered Transmission Lines. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 1981, vol. 29, no 1, p. 67-68.
- [11] EDWARDS, Clinton L., EDWARDS, M. Lee, CHENG, Sheng, *et al.* A simplified analytic CAD model for linearly tapered microstrip lines including losses. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 2004, vol. 52, no 3, p. 823-830.
- [12] AFROOZ, Kambiz et ABDIPOUR, Abdolali. Efficient method for time-domain analysis of lossy non uniform multi conductor transmission line driven by a modulated signal using FDTD technique. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 2012, vol. 54, no 2, p. 482-494.
- [13] WATANABE, Kazunori, SEKINE, Toshikazu, et TAKAHASHI, Yasuhiro. A FDTD method for Nonuniform Transmission Line Analysis Using Yee's-lattice and Wavelet Expansion. In : *Signal Integrity and High-Speed Interconnects, 2009. IMWS 2009. IEEE MTT-S International Microwave Workshop Series on*. IEEE, 2009. p. 83-86.

- [14] VU, Phan Tu, HUYNH, Nhat Ben, et NGUYEN, Dang Khoa. Simulation of lightning-transient responses of grounding systems using the RBF-FDTD method. In : *IPEC, 2012 Conference on Power & Energy*. IEEE, 2012. p. 568-572.
- [15] TANG, Min et MAO, Junfa. A precise time-step integration method for transient analysis of lossy non uniform transmission lines. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 2008, vol. 50, no 1, p. 166-174.
- [16] JIA, Lei, SHI, Wei, et GUO, Jie. Arbitrary-difference precise-integration method for the computation of electromagnetic transients in single-phase nonuniform transmission line. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 2008, vol. 23, no 3, p. 1488-1494.
- [17] JEONG, Jaehoon et NEVELS, Robert. Time-domain analysis of a lossy nonuniform transmission line. *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, 2009, vol. 56, no 2, p. 157-161.
- [18] ANTONINI, Giulio. Spectral models of lossy non uniform multi conductor transmission lines. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 2012, vol. 54, no 2, p. 474-481.
- [19] CHERNOBRYVKO, Mykola, DE ZUTTER, Daniel, et GINSTE, Dries Vande. Non uniform multi conductor transmission line analysis by a two-step perturbation technique. *Components, Packaging and Manufacturing Technology, IEEE Transactions on*, 2014, vol. 4, no 11, p. 1838-1846.
- [20] ZHUANG, Chijie; ZENG, Rong; ZHANG, Bo; Jinliang He, "Spectral Deferred Correction Method for FDTD," in *Magnetics, IEEE Transactions on* , 2015, vol.51, no.3, pp.1-4.
- [21] GRIVET-TALOCIA, S. et CANAVERO, Flavio. Wavelet-based high-order adaptive modeling of lossy interconnects. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 2001, vol. 43, no 4, p. 471-484.
- [22] BARMADA, Sami et RAUGI, Marco. Transient numerical solutions of nonuniform MTL equations with nonlinear loads by wavelet expansion in time or space domain. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 2000, vol. 47, no 8, p. 1178-1190.

- [23] MONK, Peter. Sub-gridding FDTD schemes. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, 1996, vol. 11, p. 37-46.
- [24] XIAO, Kai, POMMERENKE, David J., et DREWNIAK, James L. A three-dimensional FDTD subgridding method with separate spatial and temporal subgridding interfaces. In : *Electromagnetic Compatibility, 2005. EMC 2005. 2005 International Symposium on*. IEEE, 2005. p. 578-583.
- [25] LIU, Gui-Rong et GU, YuanTong. A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol. 50, no 4, p. 937-951.
- [26] KANSA, Edward J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivatives estimates. *Computers & Mathematics with applications*, 1990, vol. 19, no 8, p. 127-145.
- [27] WANG, J. G. et LIU, G. R. A point interpolation Meshless method based on radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 54, no 11, p. 1623-1648.
- [28] BENKHAOUA, L., BENHABILES, M. T., et RIABI, M. L. A meshless point interpolation method for time domain analysis of lossy nonuniform transmission lines. In : *Numerical Electromagnetic Modeling and Optimization for RF, Microwave, and Terahertz Applications (NEMO), 2014 International Conference on*. IEEE, 2014. p. 1-4.

II. La théorie des Lignes de Transmission Non-Uniformes

A decorative blue L-shaped line is positioned on the right side of the page. It consists of a vertical line segment on the right edge and a horizontal line segment that extends from the vertical one towards the left, ending under the section header.

II.1. Evolution des modèles des lignes de transmissions

La transmission des signaux électriques par des fils métalliques est l'une des contributions les plus importantes au développement de la technologie moderne. Samuel F.B. Morse a inventé le télégraphe électrique en 1838 et la première ligne de transmission commerciale a été installée en 1844, entre New York, Baltimore, et Washington. Néanmoins, à ce moment-là la théorie des circuits électriques était à son début et à peine quelque chose était connu au sujet de la propagation des signaux électriques le long des lignes de transmissions. En 1845 G. Kirchhoff a formulé ses lois bien connues. Le développement rapide de la transmission des signaux électriques par des lignes sur terre et des câbles sous-marins a encouragé l'apparition d'une longue série de recherches théoriques sur les lignes transmissions. Le premier câble sous-marin a été installé entre la France et l'Angleterre en 1851 et le premier câble qui traverse l'océan Atlantique a été installé en 1853. Lord Kelvin a étudié les effets des transitions dans les lignes de transmissions et a formulé le premier modèle des paramètres distribués pour un câble électrique en 1855. Il a supposé que dans une ligne de longueur élémentaire les effets du champ magnétique sont négligeables, et il a modélisé les effets du champ électrique par une capacité et les effets des pertes par une résistance, obtenant ainsi l'équation de la diffusion de tension de Lord Kelvin. Peu de temps après, Kirchhoff en 1857 a analysé la transmission des signaux électriques par deux fils avec une conductivité finie. Il a inclus les effets du champ magnétique, pour obtenir ce que nous pouvons appeler le premier modèle de la ligne de transmission [1].

Les bases de la théorie électromagnétique moderne ont été formulées en 1873 par James Clerk Maxwell, qui a pu prouver mathématiquement par quatre équations la propagation de l'onde électromagnétique et l'idée que la lumière est une forme d'énergie électromagnétique. Les équations de Maxwell décrivent le couplage entre les champs électriques, et magnétiques. En plus elles montrent les interactions de l'onde électromagnétique avec le milieu environnant.

Oliver Heaviside (1880-1887) était le premier qui a étudié la propagation guidée des signaux électriques à travers des paires de fils droits et parallèles, avec une conductivité finie, immergées dans un diélectrique homogène avec pertes. En utilisant la théorie électromagnétique de Maxwell, Heaviside a développé la théorie des lignes de transmissions telle qu'on la connaît aujourd'hui [2]. Les efforts d'Oliver Heaviside ont éliminé plusieurs complexités mathématiques de la théorie de Maxwell. De même, la théorie des lignes de

transmissions établit le lien entre la théorie d'électromagnétique de Maxwell et la théorie des circuits de G. Kirchhoff, donc cette méthode à une importance significative dans l'analyse des circuits et des dispositifs microondes [3].

Actuellement, le modèle de Heaviside s'appelle le modèle standard des lignes de transmissions *Standard Transmission Line model* (STL). Heaviside, a obtenu son modèle à partir d'une formulation basée directement sur une approximation de propagation quasi transversale (quasi-TEM) à l'aide de la théorie des champs de Maxwell. Le modèle STL a été étendu à des interconnexions, même à des interconnexions non-uniformes.

Le modèle STL pour des interconnexions conventionnelles est basé sur les hypothèses suivantes :

- Les fils quasi-parallèles d'interconnexion sont des métaux, dont le comportement électrique est régi par la loi d'Ohm
- La structure des champs électromagnétiques qui entourent les fils est de type quasi-TEM
- Le courant total traversant chaque section transversale est égal à zéro.

II.2. Les équations des télégraphistes de Heaviside

La propagation des ondes électromagnétiques à travers les lignes de transmissions peut être appréhendée selon deux points de vue : soit un prolongement de la théorie des circuits, soit une conséquence des équations de Maxwell ; dans cette section, nous présenterons l'établissement des équations de la ligne de transmission à partir de la théorie des circuits [4].

II.2.1. Modèle équivalent de la ligne de transmission

Comme on a mentionné au-dessus, les équations de la ligne de transmission pourraient être obtenues directement à travers les équations de Maxwell, mais pour convenance nous procéderons ici en termes de circuit.

Une ligne de transmission de longueur élémentaire dx est représentée schématiquement comme une ligne à deux fils parce que les lignes de transmission ont toujours au moins deux

conducteurs qui est une condition nécessaire pour la propagation des ondes TEM. V et I désignent la tension et le courant respectivement à l'entrée de cette ligne figure II.1.

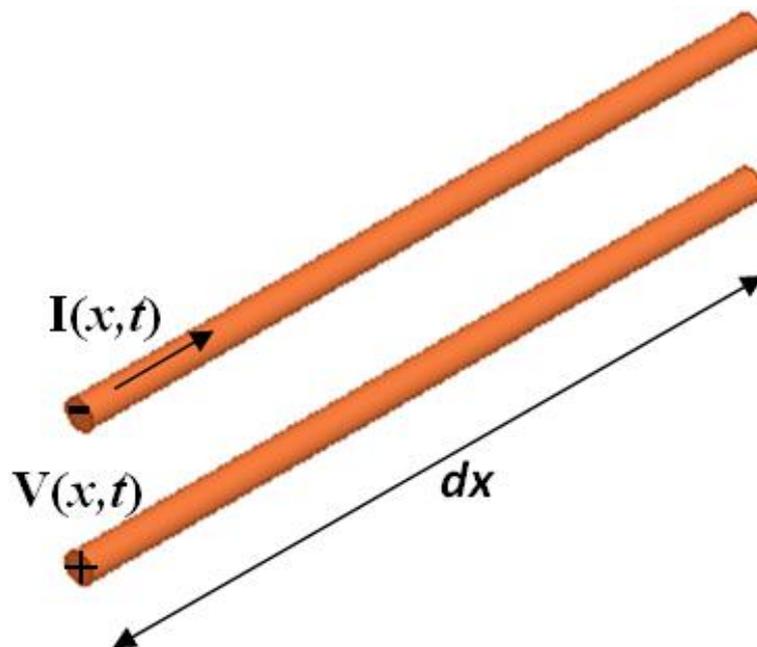


Figure II. 1. Représentation schématique d'une ligne de transmission de longueur élémentaire.

Ce tronçon de ligne peut être modélisé par un quadripôle, où ce dernier est un réseau constitué des quatre éléments suivants Figure II.2 :

R : résistance linéique Ω/m .

G : conductance linéique S/m.

C : capacité linéique F/m.

L : inductance linéique H/m.

L'inductance en série L représente la self-inductance des deux conducteurs, et la capacité C est due à la proximité entre les deux conducteurs. R représente la résistance due à la conductivité des conducteurs, et la conductance G est due aux pertes diélectriques dans le matériau séparant les conducteurs. R et G représentent donc les pertes. Une longueur finie d'une ligne de transmission peut être regardée comme la cascade de sections de la forme représentée sur la figure II.2. Le domaine de validité de ce modèle est limité aux supports de transmissions qui favorisent la propagation des modes TEM (câble coaxial) purs ou quasi-TEM (lignes coplanaire et microruban).

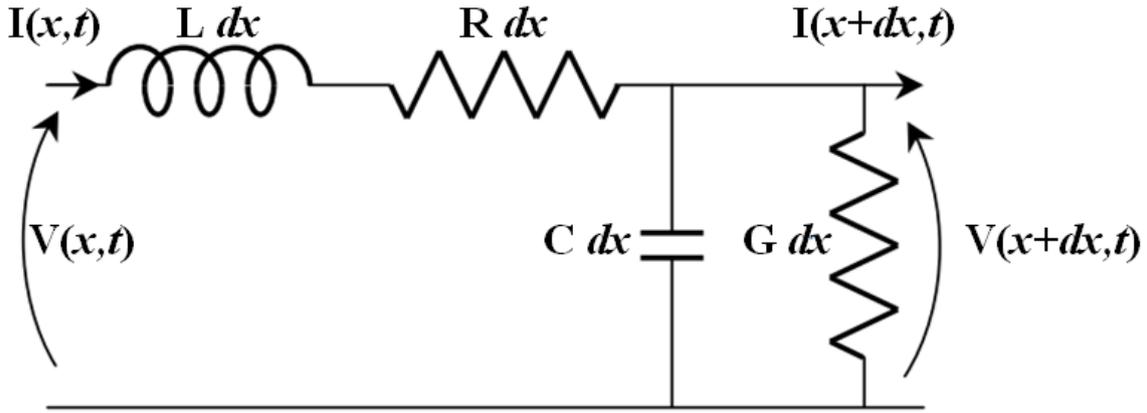


Figure II. 2. Modèle équivalent de la ligne de transmission uniforme de longueur élémentaire.

Noter que la tension et le courant dans une ligne de transmission sont des fonctions de deux variables, la position x et le temps t . à partir de la Figure II.2, pour une ligne de longueur dx , la loi de la tension de Kirchhoff peut être appliquée pour donner :

$$V(x+dx, t) - V(x, t) = -R dx I(x, t) - L dx \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

Et la loi du courant de Kirchhoff conduit à :

$$I(x+dx, t) - I(x, t) = -G dx V(x+dx, t) - C dx \frac{\partial V(x+dx, t)}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

La division de (II.1) et (II.2) par $-dx$, où $dx \rightarrow 0$ donne les équations de la ligne de transmission suivantes, également connues sous le nom des équations des télégraphistes de Heaviside 1880 :

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R I(x, t) \quad (\text{II.3})$$

$$-\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + G V(x, t) \quad (\text{II.4})$$

Dans le cas où le régime est sinusoïdal, avec la notion des phaseurs (II.3) et (II.4) se simplifient à

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x} = Z I(x) \quad (\text{II.5})$$

$$-\frac{\partial I(x)}{\partial x} = Y V(x) \quad (\text{II.6})$$

dans lesquels l'impédance linéique $Z = R + j\omega L$, et l'admittance linéique $Y = G + j\omega C$.

D'autre part, de (II.5) et (II.6) on peut obtenir les équations suivantes:

$$I(x) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \quad (\text{II.7})$$

$$V(x) = -\frac{1}{Y} \frac{\partial I(x)}{\partial x} \quad (\text{II.8})$$

En effet à l'aide de ces deux dernières équations et par une différentiation et élimination entre les équations (II.7) et (II.8) les équations de la propagation d'ondes dans les lignes de transmission uniformes sont présentés comme suit:

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \underbrace{YZ}_{\gamma^2} V(x) = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \underbrace{YZ}_{\gamma^2} I(x) = 0 \quad (\text{II.10})$$

Dans le cas des lignes de transmission uniformes où Z et Y sont indépendants de x , les équations (II.9) et (II.10) possèdent les deux solutions exponentielles suivantes :

$$V(x) = V^+(x) + V^-(x) \quad (\text{II.11})$$

$$I(x) = I^+(x) + I^-(x) \quad (\text{II.12})$$

$$\text{où} \quad I^+(x) = A e^{-\gamma x + j\omega t}, \quad V^+(x) = Z_c I^+(x) \quad (\text{II.13})$$

$$I^-(x) = B e^{\gamma x + j\omega t}, \quad V^-(x) = -Z_c I^-(x) \quad (\text{II.14})$$

$\gamma = a + j\beta = \sqrt{ZY}$ représente le facteur de propagation où, la partie réelle a est la constante d'atténuation et la partie imaginaire β représente la constante de phase.

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad \text{est l'impédance caractéristique.}$$

Il faut noter que, V^+ et I^+ représentent une onde qui se propage vers la direction positive de x , par contre V^- et I^- représentent une onde qui propage vers la direction opposée.

II.2.2. La signification physique des paramètres linéiques de la ligne de transmission

Les paramètres linéiques par unité de longueur sont des éléments essentiels pour la détermination des solutions de la tension et du courant. En référence à la figure II.3 :

L'inductance par unité de longueur est le rapport du flux magnétique ψ pénétrant la boucle entre les deux fils, sur le courant dans les fils I [4] :

$$L = \frac{\psi}{I} \quad (\text{II.15})$$

La capacité par unité de longueur est le rapport entre la charge distribuée sur les conducteurs q et la tension entre les deux conducteurs V [4] :

$$C = \frac{q}{V} \quad (\text{II.16})$$

La conductance par unité de longueur est le rapport du courant de fuite transversal dans le diélectrique J , et la tension entre les deux conducteurs V [4] :

$$G = \frac{J_t}{V} \quad (\text{II.17})$$

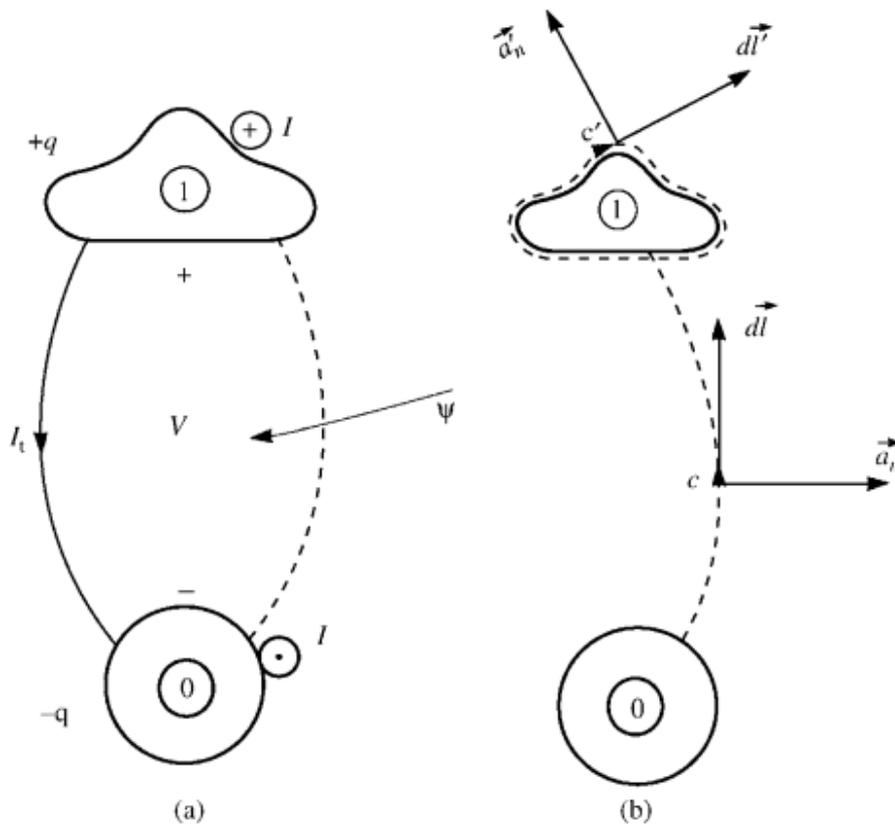


Figure II. 3. (a) définitions de la charge, du courant, de la tension, du flux magnétique, et du courant transversal, et (b) des contours et des surfaces utilisées dans la formulation [4].

II.3. Modèle de la ligne de transmission non-uniforme

Les paramètres linéiques d'une ligne de transmission uniforme (R , L , C , et G) restent constants le long de cette ligne. Cependant, dans le cas d'une LTNU ces paramètres sont variables en fonction de la position le long de la ligne, c'est à dire sont des fonctions de la variable x . ce qui nous conduit au circuit équivalent de la forme représentée sur la Figure II. 4. Les équations (II.3) - (II.4) deviennent :

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = L(x) \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + R(x) I(x,t) \quad (\text{II.18})$$

$$-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = C(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + G(x) V(x,t) \quad (\text{II.19})$$

(II.18) et (II.19) sont les équations des télégraphistes pour la tension et le courant le long d'une LTNU dans le domaine temporel.

De même, les équations (II.5) - (II.6) deviennent :

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x} = Z(x) I(x) \quad (\text{II.20})$$

$$-\frac{\partial I(x)}{\partial x} = Y(x) V(x) \quad (\text{II.21})$$

Ces deux dernières équations sont les équations des télégraphistes pour la tension et le courant le long d'une LTNU dans le domaine fréquentiel.

Par différentiation et élimination entre les équations (II.20) et (II.21), les équations de propagation des ondes dans les lignes de transmissions non-uniformes peuvent être représentées comme suit [5]:

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} \frac{dV(x)}{dx} - \underbrace{Y(x)Z(x)}_{\gamma^2} V(x) = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{Y(x)} \frac{dY(x)}{dx} \frac{dI(x)}{dx} - \underbrace{Y(x)Z(x)}_{\gamma^2} I(x) = 0 \quad (\text{II.23})$$

Alors les six dernières équations présentées ci-dessus représentent les différentes formes des équations des télégraphistes pour la tension et le courant le long des LTNUs.

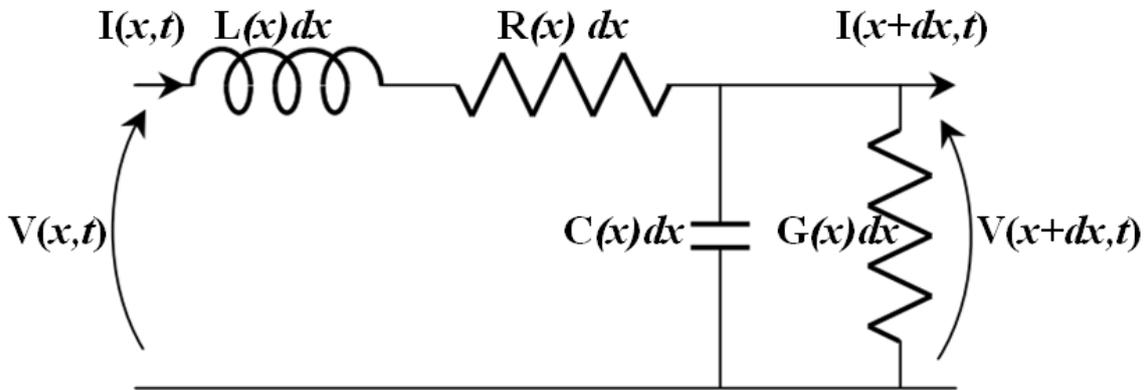


Figure II. 4. Modèle équivalent de la ligne de transmission non-uniforme de longueur élémentaire.

L'impédance caractéristique $Z_c(x)$ des LTNUs s'écrit comme celle des lignes uniformes :

$$Z_c(x) = \sqrt{\frac{Z(x)}{Y(x)}} = \sqrt{\frac{R(x) + j\omega L(x)}{G(x) + j\omega C(x)}} \quad (\text{II.24})$$

La résolution de (II.18)-(II.19), (II.20)-(II.21) ou (II.22)-(II.23) nous permettra de décrire la propagation le long des LTNUs. Nous allons discuter maintenant l'existence des solutions analytiques de ces systèmes d'équations des télégraphistes.

II.4. Solutions analytiques classiques des équations des télégraphistes pour les LTNUs

Comme on a vu ci-dessus, la résolution analytique des équations des télégraphistes est facile à trouver quand Z et Y sont constants où la ligne est uniforme. Par contre dans les LTNUs où Z et Y sont variables, les équations des télégraphistes pour la tension et le courant ne sont plus linéaires, et n'ont pas une solution analytique générale. Une solution analytique existe uniquement pour certains profils réguliers de non-uniformité : exponentielle, parabolique, linéaire, etc...

II.4.1. Solutions basées sur la résolution directe des équations du 2^{ième} ordre

La méthode la plus immédiate de traitement des LTNUs consiste en la résolution des équations des télégraphistes du second ordre pour trouver la tension et le courant le long de la ligne. Cette façon de procéder est souvent désignée par Méthode de D'Alembert. La résolution des équations (II.22) et (II.23) a été un domaine de recherche depuis le début des

années 1920 [6] jusqu'à nos jours [7-8]. Afin de trouver une formule fixe pour la solution générale, nombreuses tentatives d'analyse mathématique ont échoué. Parce que pour ce type d'équations différentielles, une solution analytique est possible seulement quand l'impédance caractéristique varie d'une manière spécifique.

Au départ en 1920, une solution générale a été obtenue par Ravut [6] sous forme d'une série infinie. Mais Ravut suppose que $Z(x)$ et $Y(x)$ sont continues et différentiables le long de la ligne. C'est naturellement une restriction importante dans la pratique.

Après en 1921, Carson a obtenu dans [9] une solution plus générale sous forme de série infinie d'intégrales où les discontinuités sont permises. D'autre part, il est difficile de calculer cette solution pour une LTNU quelconque, dans laquelle les paramètres linéiques $Z(x)$ et $Y(x)$ ne sont pas intégrables.

En conséquence, des solutions analytiques pour plusieurs cas spéciaux de LTNUs ont été données dans la littérature, avec une attention particulière portée sur la ligne de Bessel [5], le profil linéaire et le profil exponentiel [10] à cause de la facilité d'utiliser les solutions analytiques trouvées par rapport à d'autres lignes non-uniformes. Généralement, ces solutions sont obtenues sous forme des séries ou exprimées en termes de fonctions de Bessel.

En 1927 Ballantine [5] a résolu le cas d'une ligne de transmission dans laquelle l'impédance linéique Z , et l'admittance linéique Y ont la forme :

$$Z(x) = Z(0) x^a \tag{II.25}$$

$$Y(x) = Y(0) x^\beta \tag{II.26}$$

avec $a = -\beta$, cette solution est exprimée en termes de fonctions de Bessel. En effet cette ligne est appelée la ligne de Bessel. Ensuite en 1931 dans [11] Arnold et Bechberger ont trouvé une solution sous forme de série infinie d'une ligne linéaire, en supposant $Y(x)$ constante. Un an après Arnold et Taylor [12] ont trouvé une solution pour la même ligne mais cette fois exprimée en termes de fonctions de Bessel comme dans le travail de Ballantine. D'autre part, pour des cas beaucoup plus généraux, une solution analytique en termes des fonctions de Bessel, qui rassemble les solutions de Ballantine et de Arnold en tant que cas particuliers, a été proposé par Starr en 1932 [13] où a et β sont arbitraires. Nous allons voir dans la section suivante l'obtention mathématique de cette solution analytique, et quelque cas particuliers.

II.4.1.1. Solution des LTNUs avec $Z(x) = Z(0)x^a$ et $Y(x) = Y(0)x^\beta$

La substitution d'équations (II.25)-(II.26) dans l'équation des télégraphistes de second ordre (II.22) nous donne:

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \frac{a}{x} \frac{dV(x)}{dx} - (Y(0)Z(0)x^{a+\beta})V(x) = 0 \quad (\text{II.27})$$

soit l'hypothèse $V(x) = x^p u$ (II.28)

et $W = x^q$ (II.29)

La substitution de (II.28)-(II.29) dans (II.27) donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + \frac{2p+q-a-1}{q} \frac{du}{wdw} + \left[\frac{p(p-a-1)}{q^2 w^2} - \frac{Z(0)Y(0)}{q^2} x^{a+\beta+2-2q} \right] u = 0 \quad (\text{II.30})$$

soit $\frac{2p+q-a-1}{q} = 1$ (II.31)

$$a + \beta + 2 - 2q = 0 \quad (\text{II.32})$$

donc $p = \frac{1+a}{2}$ (II.33)

$$q = \frac{a + \beta + 2}{2} \quad (\text{II.34})$$

Alors l'équation (II.30) est réduite à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + \frac{1}{w} \frac{du}{dw} + \left[\frac{-4Z(0)Y(0)}{(a+\beta+2)^2} - \left(\frac{1+a}{a+\beta+2} \right)^2 \frac{1}{w^2} \right] u = 0 \quad (\text{II.35})$$

La solution de cette équation est :

$$u = J_{\pm(1+a)/(a+\beta+2)} \left[\frac{2j\sqrt{Z(0)Y(0)}}{(a+\beta+2)^2} w \right] \quad (\text{II.36})$$

où $J_{(1+a)/(a+\beta+2)}$ est la fonction de Bessel d'ordre $(1+a)/(a+\beta+2)$

Finalement de (II.28), (II.29), (II.33) et (II.34) Starr [11] a prouvé que la solution générale des équations des télégraphistes du second ordre (II.22)-(II.23) pour une LTNU dans laquelle $Z(x) = Z(0)x^a$ et $Y(x) = Y(0)x^\beta$ est:

$$V(x) = Af_1(x) + Bf_2(x) \quad (\text{II.37})$$

$$I(x) = Af_3(x) + Bf_4(x) \quad (\text{II.38})$$

où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions aux limites. Les fonctions $f_i(x)$ sont données par [13]:

$$f_1(x) = x^{(1+a)/2} J_{(1+a)/(a+\beta+2)} \left[\frac{2j\sqrt{Z(0)Y(0)}}{(a+\beta+2)} x^{(a+\beta+2)/2} \right] \quad (\text{II.39})$$

$$f_2(x) = x^{(1+a)/2} J_{-(1+a)/(a+\beta+2)} \left[\frac{2j\sqrt{Z(0)Y(0)}}{(a+\beta+2)} x^{(a+\beta+2)/2} \right] \quad (\text{II.40})$$

$$f_3(x) = -j\sqrt{\frac{Y(0)}{Z(0)}} x^{(1+\beta)/2} J_{-(1+\beta)/(a+\beta+2)} \left[\frac{2j\sqrt{Z(0)Y(0)}}{(a+\beta+2)} x^{(a+\beta+2)/2} \right] \quad (\text{II.41})$$

$$f_4(x) = j\sqrt{\frac{Y(0)}{Z(0)}} x^{(1+\beta)/2} J_{(1+\beta)/(a+\beta+2)} \left[\frac{2j\sqrt{Z(0)Y(0)}}{(a+\beta+2)} x^{(a+\beta+2)/2} \right] \quad (\text{II.42})$$

II.4.1.1.1. Solution de la ligne de Bessel

Dans ce type de ligne on a $a = -\beta$ les équations (II.39)- (II.42) deviennent:

$$f_1(x) = x^{(1+a)/2} J_{(1+a)/2} \left[j\sqrt{Z(0)Y(0)} x \right] \quad (\text{II.43})$$

$$f_2(x) = x^{(1+a)/2} J_{-(1+a)/2} \left[j\sqrt{Z(0)Y(0)} x \right] \quad (\text{II.44})$$

$$f_3(x) = -j\sqrt{\frac{Y(0)}{Z(0)}} x^{(1-a)/2} J_{-(1-a)/2} \left[j\sqrt{Z(0)Y(0)} x \right] \quad (\text{II.45})$$

$$f_4(x) = j\sqrt{\frac{Y(0)}{Z(0)}} x^{(1-a)/2} J_{(1-a)/2} \left[j\sqrt{Z(0)Y(0)} x \right] \quad (\text{II.46})$$

II.4.1.1.2. Solution de la ligne linéaire traitée par Arnold

Un autre cas spécial qui admet une solution relativement simple, est la ligne linéaire traitée par Arnold *et al* [11],[12]. Cette ligne a une admittance linéique constante $Y(x)=Y(0)$ et une impédance linéique qui varie comme $Z(x) = Z(0)x^a$. Dans le cas où $a=1$ et $\beta=0$, les équations (II.39)- (II.42) prennent les formes suivantes:

$$f_1(x) = x J_{2/3} \left[\frac{2}{3} j\sqrt{Z(0)Y(0)} x^{3/2} \right] \quad (\text{II.47})$$

$$f_2(x) = x J_{-2/3} \left[\frac{2}{3} j\sqrt{Z(0)Y(0)} x^{3/2} \right] \quad (\text{II.48})$$

$$f_3(x) = -j\sqrt{\frac{Y(0)}{Z(0)}} x^{1/2} J_{-1/3} \left[\frac{2}{3} j\sqrt{Z(0)Y(0)} x^{3/2} \right] \quad (\text{II.49})$$

$$f_4(x) = j\sqrt{\frac{Y(0)}{Z(0)}} x^{1/2} J_{1/3} \left[\frac{2}{3} j\sqrt{Z(0)Y(0)} x^{3/2} \right] \quad (\text{II.50})$$

II.4.1.2. Solution pour la ligne exponentielle

Dans le cas des LTNUs de type exponentiel où l'admittance linéique et l'impédance linéique varient comme $Z(x) = Z(0) e^{ax}$ et $Y(x) = Y(0)e^{-ax}$, par une substitution directe dans les équations des télégraphistes Milnor [10] a formulé explicitement la solution analytique par :

$$V(x) = \frac{A(\theta + a/2)e^{(-\theta+a/2)x}}{Y(0)} + \frac{B(-\theta + a/2)e^{(\theta+a/2)x}}{Y(0)} \quad (\text{II.51})$$

$$I(x) = Ae^{(-\theta-a/2)x} + Be^{(\theta-a/2)x} \quad (\text{II.52})$$

où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions aux limites, et θ est donné par :

$$\theta = \sqrt{Z(0)Y(0) + \frac{a^2}{4}} \quad (\text{II.53})$$

Pour conclure ce paragraphe, il est utile de signaler qu'actuellement de nombreux auteurs continuent encore à s'attaquer à la résolution directe de l'équation du second ordre, en déployant des méthodes de l'analyse fonctionnelle hautement sophistiquées [7],[8]

II.4.2. Solutions basées sur la transformation à une équation de Riccati

Afin d'éviter la résolution du système d'équations non linéaires (II.22)-(II.23), en 1943 dans [14] Pierce a montré que l'impédance d'entrée d'une LTNU satisfait l'équation différentielle du premier ordre de Riccati. Trois ans après en 1946 dans [15] Walker et Wax ont établi l'équation différentielle non linéaire de Riccati du premier ordre pour le coefficient de réflexion ρ en fonction de l'impédance caractéristique $Z_c(x)$ de la LTNU. Ces auteurs ont également développé une méthode itérative pour la solution approchée à cette équation.

II.4.2.1. Formulation du coefficient de réflexion par l'équation de Riccati

On définit le coefficient de réflexion ρ a chaque point de la LTNU par :

$$\rho(x) = \frac{\frac{V(x)}{I(x)} - Z_c(x)}{\frac{V(x)}{I(x)} + Z_c(x)} \quad (\text{II.54})$$

Se servant des équations (II.20)-(II.21) et (II.54) Walker et Wax ont montré que ρ satisfait l'équation non linéaire de Riccati du premier ordre suivante [15]:

$$\frac{d\rho}{dx} - 2\gamma\rho + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\frac{d \ln Z_c}{dx} = 0 \quad (\text{II.55})$$

où, γ représente le facteur de propagation. $\gamma = \sqrt{ZY}$ (II.56)

Il faut noter que Collin [16] a appliqué la théorie des petites réflexions (*Theory of Small Reflections*) pour avoir une formule du coefficient ρ similaire à celle de Walker et Wax.

L'équation (II.55) est non linéaire et elle n'a pas de solution générale connue. Cette limitation peut être évitée si on suppose que $\rho \ll 1$.

L'adaptation d'impédance est l'application potentielle majeure des LTNUs. Par un heureux concours de circonstance, le critère exigé pour l'adaptation est justement que les réflexions doivent être très faibles $\rho \ll 1$, à cette condition l'équation (II.55) devient

$$\frac{d\rho}{dx} - 2\gamma\rho + \frac{1}{2}\frac{d \ln Z_c}{dx} = 0 \quad (\text{II.57})$$

Dans le cas d'une LTNU sans pertes le facteur de propagation devenu imaginaire pur $\gamma=j\beta$. Tous calculs faits, la réflexion en $x = 0$ d'une LTNU de longueur d est

$$\rho = \int_0^d \frac{1}{2} \frac{d(\ln Z_c)}{dx} e^{-j2\beta x} dx \quad (\text{II.58})$$

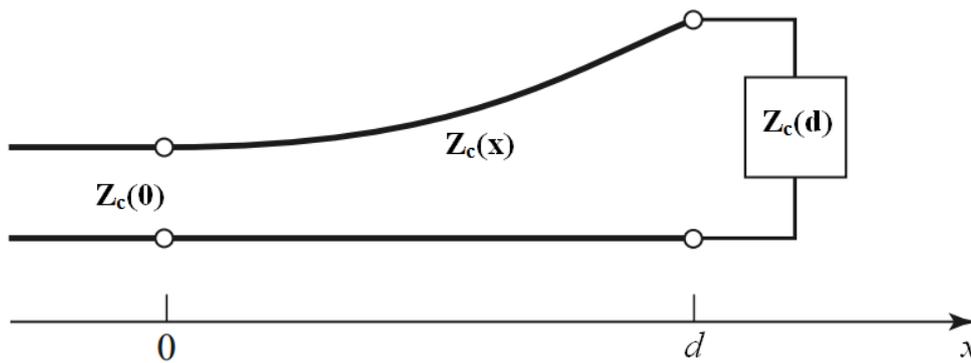


Figure II. 5. Ligne de transmission non-uniforme d'impédance caractéristique $Z(x)$

Un moment important dans l'histoire de l'analyse des lignes non-uniformes est la publication de Bollinder [18], où il fait l'observation que (II.58) est une intégrale de Fourier, permettant ainsi à ceux qui sont venus après de mettre à profit toute la puissance de la théorie spectrale pour l'analyse des lignes non-uniformes.

Donc de (II.58), si $Z_c(x)$ est connu, le coefficient de réflexion $\rho(\beta d)$ peut être trouvé en fonction de la fréquence. Alternativement, si $\rho(\beta d)$ est spécifié, alors en principe $Z_c(x)$ peut être trouvé par inversion. Dans la pratique, la conception des transitions non-uniformes par ce procédé est difficile. Cependant, cette technique est applicable à des formes particulières. Dans la section suivante nous considérerons les trois transitions de $Z_c(x)$ les plus utilisées dans les circuits microondes ; exponentiel, triangulaire, et la ligne de Klopfenstein.

II.4.2.2. Types de LTNUs particulières

II.4.2.2.1. La ligne à profil d'impédance exponentiel

L'impédance caractéristique en fonction de la distance x le long de la ligne exponentielle est donnée par

$$Z_c(x) = Z_c(0)e^{ax} \quad \text{pour } 0 < x < d \quad (\text{II.59})$$

où la valeur constante de a est donnée par:
$$a = \frac{1}{d} \ln \left(\frac{Z_c(d)}{Z_c(0)} \right) \quad (\text{II.60})$$

En utilisant (II.59) et (II.60) dans (II.58) on trouve la formule du coefficient de réflexion $\rho(\beta d)$ suivante :

$$\rho(\beta d) = \frac{1}{2} e^{-j\beta d} \ln \left(\frac{Z_c(d)}{Z_c(0)} \right) \frac{\sin(\beta d)}{\beta d} \quad (\text{II.61})$$

II.4.2.2.2. La ligne à profil d'impédance triangulaire

L'impédance caractéristique en fonction de la distance x le long de la ligne triangulaire est donnée par [3] :

$$Z_c(x) = \begin{cases} Z_c(0) e^{2(x/d)^2 \ln(Z_c(0)/Z_c(d))} & \text{pour } 0 < x < d/2 \\ Z_c(0) e^{\left(\frac{4x}{(d-2x^2/d^2-1)} \right) \ln(Z_c(d)/Z_c(0))} & \text{pour } d/2 < x < d \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

Par l'utilisation de (II.62) dans (II.58) on trouve $\rho(\beta d)$:

$$\rho(\beta d) = \frac{1}{2} e^{-j\beta d} \ln \left(\frac{Z_c(d)}{Z_c(0)} \right) \left(\frac{\sin(\beta d/2)}{\beta d/2} \right)^2 \quad (\text{II.63})$$

II.4.2.2.3. La ligne de Klopfenstein

La ligne que Klopfenstein a introduit en 1956 dans [19] est jusqu'à aujourd'hui le dispositif dominant dans la technologie des LNTU, en tant que transition optimale pour l'adaptation d'impédance. Les propriétés de ce type de LTNU sont

- Le coefficient de réflexion est minimum dans la bande passante.
- Le taux d'ondulation est constant dans la bande passante, voir Figure II.7
- La longueur minimale de la transition est assurée pour une valeur maximale permise du coefficient de réflexion

La variation de l'impédance caractéristique le long de ce type des lignes non-uniformes est donnée par :

$$\ln Z_c(x) = \frac{1}{2} \ln(Z_c(0)Z_c(d)) + \frac{\rho_s}{\cosh A} A^2 \Theta\left(\frac{2x}{d} - 1, A\right) \quad \text{pour } 0 < x < d \quad (\text{II.64})$$

où la fonction $\Theta(y, A)$ est définie par:

$$\Theta(y, A) = -\Theta(-y, A) = \int_0^y \frac{I_1(A\sqrt{1-\kappa^2})}{A\sqrt{1-\kappa^2}} d\kappa \quad \text{pour } |y| \leq 1 \quad (\text{II.65})$$

et ρ_s est le coefficient de réflexion en régime statique (*fréquence égale zéro*):

$$\rho_s = \left(\frac{Z_c(d) - Z_c(0)}{Z_c(d) + Z_c(0)} \right) \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{Z_c(d)}{Z_c(0)} \right) \quad (\text{II.66})$$

I_1 est la fonction de Bessel modifiée. La fonction $\Theta(y, A)$ a les valeurs particulières suivantes :

$$\begin{aligned} \Theta(0, A) &= 0 \\ \Theta(y, 0) &= \frac{y}{2} \\ \Theta(1, A) &= \frac{\cosh A - 1}{A^2} \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

II.4.2.3. Exemples des transitions de 50 Ω : 100 Ω

Nous allons montrer les différences entre les trois LTNUs précédentes sur un circuit très en pratique : adaptation de $Z_c(0) = 50 \Omega$ à $Z_c(d) = 100 \Omega$. Les figures II.6 et II.7 montrent les impédances caractéristiques $Z_c(x)$ et les modules du coefficient de réflexion $\rho(\beta d)$

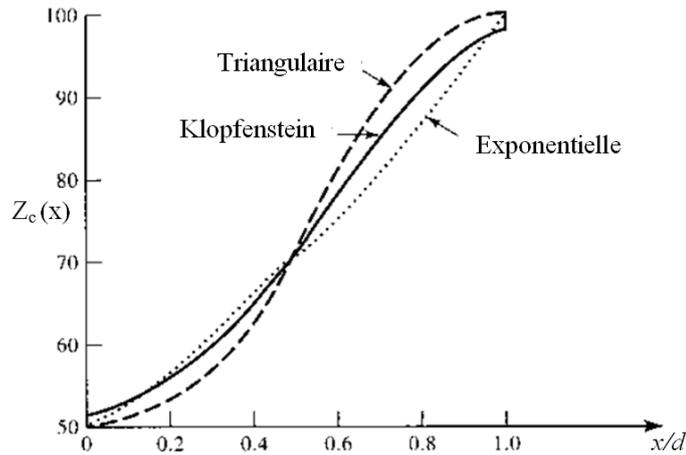


Figure II. 6 Profils des impédances caractéristiques des LTNUs $50 \Omega:100 \Omega$ de types Exponentielle, Triangulaire, et Klopfenstein [3].

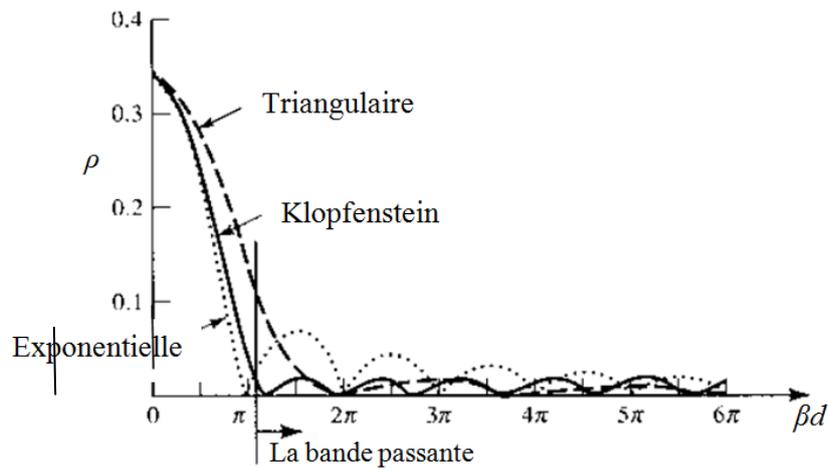


Figure II. 7 Coefficient de réflexion aux entrées des LTNUs $50 \Omega:100 \Omega$ de types Exponentielle, Triangulaire et Klopfenstein [3].

De la Figure II.7, pour une longueur identique d , la ligne exponentielle donne la pente de coupure la plus abrupte mais avec le plus haut taux d'ondulation dans la bande passante. La ligne triangulaire a la plus mauvaise pente de coupure avec une ondulation dans la bande passante qui décroît rapidement avec la longueur d'onde. La ligne de Klopfenstein donne la pente optimale, avec un taux d'ondulation dans la bande passante minimal et constant. Noter que sur la Figure II. 6 on voit clairement que l'impédance caractéristique de la ligne de Klopfenstein subit des discontinuités aux deux extrémités de la ligne, qui peuvent donner des effets indésirables dans certaines applications. Ce problème a été résolu en 1972 par Hecken, il a proposé dans [21] une formule améliorée pour la ligne de Klopfenstein.

II.5. Méthodes classiques d'analyse temporelle des LTNUs

Comme nous venons de le constater dans la section précédente, une solution générale analytique des équations des télégraphistes pour les LTNUs n'existe pas, excepté pour quelques profils particuliers. Pour pallier à ce manque, nous devons employer des techniques qui donnent des solutions approximatives, parmi lesquels nous allons discuter quelques-unes seulement, vu la richesse du sujet.

II.5.1. Méthode des Différences Finies (FDTD)

Après une étude bibliographique sur les méthodes approximatives adaptées aux LTNUs, nous avons remarqué que la plupart des méthodes numériques utilisées suivent la méthodologie des différences finies pour discrétiser les équations différentielles aux dérivées partielles (II.18) et (II.19) dans l'espace et en temps. D'autre part la méthode FDTD a été employée dans beaucoup d'articles [22]-[27] parce qu'elle est relativement robuste, rapide, et simple à implémenter.

Pour trouver la solution des équations (II.18) et (II.19) par la méthode FDTD, on doit suivre les deux étapes suivantes ; la première est la division des domaines spatial x et temporel t pour avoir deux grilles de pas spatial Δx et temporel Δt . Dans la seconde étape, nous devons effectuer la discrétisation des dérivées spatiales et temporelles. Finalement, par l'application d'un procédé itératif sur les équations résultant de la seconde étape on peut évaluer la tension et le courant à chaque point de la grille (Figure II.8).

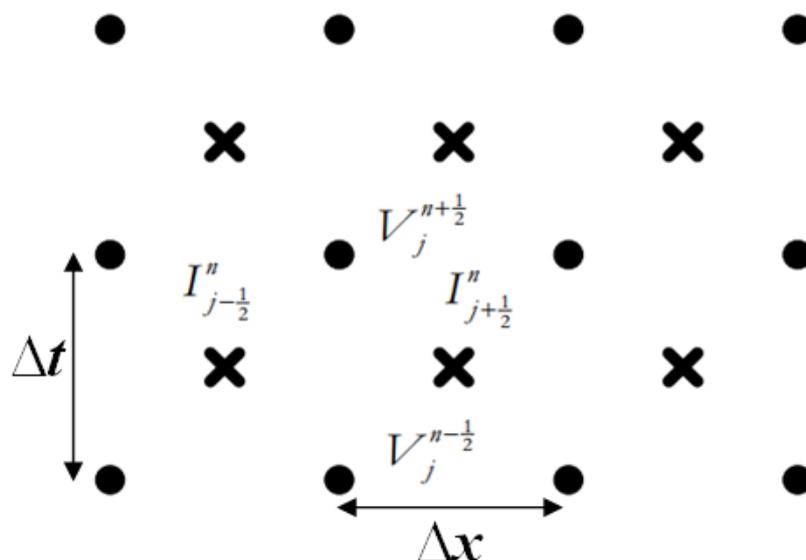


Figure II. 8. grille spatio-temporelle utilisée dans la méthode FDTD de Δx le pas de l'espace et Δt le pas de temps.

Néanmoins, dans la méthode FDTD, le pas spatial Δx doit être assez petit devant la longueur d'onde (habituellement de $10 \Delta x/\lambda$ à $20 \Delta x/\lambda$) afin de réduire les erreurs numériques dues à la dispersion. Ce pas doit être aussi inférieures aux dimensions des détails géométriques les plus fins, ce qui revient à considérer un très grand nombre de cellules [23], surtout lorsque la LTNU a des variations quelconques, existence des zones ayant des niveaux de variation très différents. Donc pour obtenir une bonne approximation, il faut multiplier le nombre de cellules par la miniaturisation du pas spatial Δx , ce qui alourdit considérablement la procédure de calcul.

D'autre part, le pas de temps Δt doit être assez petit pour remplir la condition de stabilité de Courant-Friedrich-Levy (CFL). En effet, cette condition exige que le plus grand pas de temps permis doive être très petit quand le pas spatial est très petit.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v_p} \quad (\text{II.68})$$

où v_p est la plus grande vitesse de phase des ondes présentes dans l'espace de calcul.

Malheureusement l'utilisation d'un pas de temps très petit se traduit par un grand nombre d'itérations, et en conséquence une simulation très longue.

II.5.2. Méthode des Caractéristiques

La méthode des caractéristiques est une technique introduite en 1870 par Darboux [28] pour la résolution du problème de Cauchy dans le cas général, en observant que le phénomène de la propagation des ondes est en rapport direct avec la théorie des surfaces caractéristiques des équations aux dérivées partielles. Une théorie générale des caractéristiques est exposée de façon magistrale par Hadamard dans le chapitre VII de son recueil de cours [29]. Il est important de signaler qu'en dépit de son âge, cette méthode fait encore de nos jours l'objet de publications au très haut niveau [30], [31]

Elle a d'abord été appliquée aux lignes de transmission sans perte par Branin en 1967 [32], et plus tard aux lignes avec pertes, avec des paramètres physiques indépendants de la fréquence par Dommel en 1969 [33], et par Gruodis en 1979 [34]. Elle a été appliquée aux lignes non-uniformes par Liu en 1968 [35] et par Dvorak en 1970 [36] et en 1973 [37].

La méthode des caractéristiques ne sera bien sûr pas détaillée ici. Mais il faut noter que cette méthode part des équations des télégraphistes précédentes (II.18) - (II.19). Où quand on impose une certaine relation entre les variables t et x , les équations différentielles aux dérivées partielles (II.18) - (II.19) se transforment en deux équations différentielles ordinaires (EDO) ne comportant que des dérivées par rapport au temps.

Pour éliminer les dérivées partielles nous devons choisir $x = x(t)$ tels que [35] :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{II.69})$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{II.70})$$

Ces deux dernières équations représentent les courbes caractéristiques. Pour le cas des lignes de transmission uniforme ces courbes sont des lignes droites comme on peut les voir dans la Figure II.9.

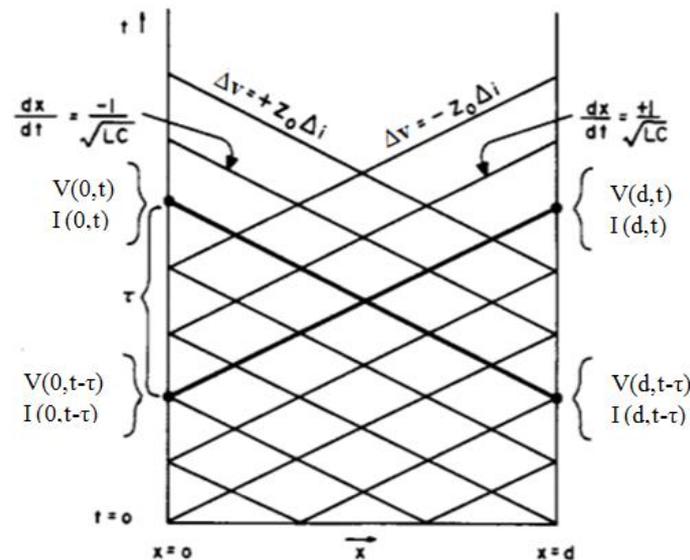


Figure II. 9. Courbes caractéristiques dans le plan (x,t) pour une ligne de transmission uniforme [32].

Dans cette figure d représente la longueur de la ligne de transmission, Z_0 l'impédance caractéristique, Δv représente la différence des tensions entre deux points quelconques sur la courbe caractéristique et Δi la différence correspondante entre les courants pour les mêmes deux points.

Dans le cas des LTNUs $L(x)$ et $C(x)$ ne sont pas constantes en fonction de x , donc les courbes caractéristiques ne sont pas des lignes droites, et un calcul additionnel est exigé pour déterminer la position et le temps de chaque nouveau point par la résolution de (II.69) - (II.70) [35], voir la Figure. 10.

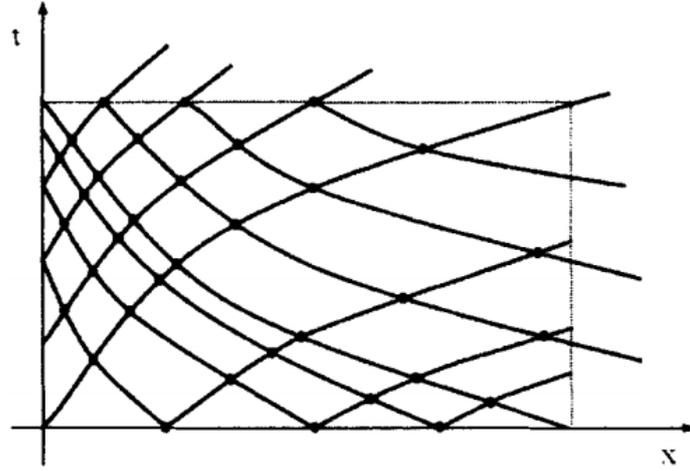


Figure II. 10. Courbes caractéristiques dans le plan (x,t) pour une ligne de transmission non uniforme [38].

A partir les équations des télégraphistes (II.18)-(II.19), on peut écrire les deux équations ordinaires suivantes le long de la courbe caractéristique (II.69) comme:

$$\frac{d}{dt} \left[V(x,t) + \sqrt{\frac{L}{C}} I(x,t) \right] = - \left[\frac{G}{C} V(x,t) + \frac{R}{\sqrt{LC}} I(x,t) \right] \quad (\text{II.71})$$

et le long de la courbe caractéristique (II.70) comme:

$$\frac{d}{dt} \left[V(x,t) - \sqrt{\frac{L}{C}} I(x,t) \right] = - \left[\frac{G}{C} V(x,t) - \frac{R}{\sqrt{LC}} I(x,t) \right] \quad (\text{II.72})$$

Les équations (II.71)-(II.72) ne sont pas directement intégrables. Elles peuvent être résolues facilement par des techniques numériques, telles que la méthode de Runge-Kutta du second ordre [35].

la méthode des caractéristiques nécessite une discrétisation spatiale de la ligne en plus de la discrétisation temporelle. Ceci rend cette méthode lente comme la méthode FDTD.

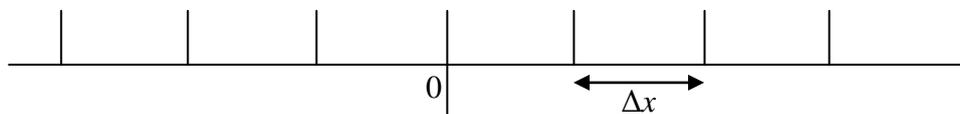
II.5.3. Méthode du Propagateur

En 1956, Mark Kac a expliqué avec une extrême clarté dans [39] que la formulation mathématique du processus aléatoire bien connu Random-Walk, que l'on pourrait traduire par *Promenade Aléatoire*, conduit à l'équation des Télégraphistes. En conséquence, il a annoncé la conjecture que la solution des équations des télégraphiques peut être obtenue au moyen du processus de Poisson aléatoire, voire à travers tous les concepts du calcul stochastique, notamment en utilisant la Méthode de Monte Carlo qui avec la démonstration explosive du Trinity Test, nom de code du premier essai nucléaire réussi par l'armée américaine le 16 juillet 1945 dans le cadre du Manhattan Project à Los Alamos, a donné la meilleure preuve de son efficacité computationnelle. Une démonstration mathématique de la conjecture de Kac a été donnée par Griego en 1971 en utilisant la théorie des groupes. Les techniques de calcul stochastique ayant considérablement progressé depuis lors, un regain d'intérêt particulier est actuellement en cours pour cette approche [40-44].

La méthode du propagateur a été appliquée pour la première fois par Nevels et Miller en 2001 [42] pour l'analyse des LTNUs sans pertes dans le domaine temporel. En 2005 cette analyse a été étendue pour inclure les LTNUs avec pertes [43]. L'avantage majeur de cette méthode appelée méthode du propagateur explicite (*explicit propagator method*) est qu'elle ne souffre pas de la dispersion numérique comme la méthode des différences finies.

Principe de l'approche

Le problème est le suivant : soit une grille de points discrets équidistants (Fig II.10)



Une particule part de l'origine $x = 0$, elle se déplace toujours à la vitesse v . Elle peut aller soit dans la direction positive, soit négative, déterminée par le jet d'une pièce de monnaie. Chaque étape dure Δt et couvre une distance Δx , avec $\Delta x = v\Delta t$. En chaque point de la grille il y a une probabilité $\alpha\Delta t$ d'inverser la direction. Donc $1-\alpha\Delta t$ est la probabilité que la direction de déplacement soit gardée.

Pour ce problème, il faut déterminer la probabilité avec laquelle après un certain temps t la particule se trouve dans un certain intervalle.

Si on part de l'origine, le déplacement après n étapes est S_n . C'est le déplacement après un temps $n\Delta t$. Nous prenons une fonction «arbitraire» $\varphi(x)$. Nous devons trouver la moyenne $\langle \varphi(x + S_n) \rangle$. Par exemple $\varphi(x)$ pourrait être la fonction caractéristique d'un intervalle. Dans ce cas cette moyenne est simplement la probabilité que la particule soit dans cet intervalle après n étapes si elle est partie du point x . Mais on peut prendre une fonction plus générale.

On introduit la variable aléatoire

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 1 - \alpha\Delta t \\ -1 & \text{avec probabilité } \alpha\Delta t \end{cases} \quad (\text{II.73})$$

Et considérons la séquence des variables aléatoires indépendantes $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}$. Chacune de ces variables a la distribution (II.73) et elles sont toutes indépendantes. En d'autres termes, les ϵ_i sont le résultat de n jets de pièce de monnaie, la pièce est fortement biaisée.

Le déplacement est facile à écrire. Si on part de l'origine dans la direction positive

$$S_n = v\Delta t(1 + \epsilon_1 + \epsilon_1\epsilon_2 + \dots + \epsilon_1\epsilon_2 \dots \epsilon_{n-1}) \quad (\text{II.74})$$

En effet le premier pas déplace la particule avec certitude à la distance $v\Delta t$ dans la direction positive, après le premier jet de la pièce de monnaie, la vitesse change de v à $\epsilon_1 v$, ie elle sera maintenue ou inversée selon que le résultat du jet est pile ou face, et elle se déplace d'une distance additionnelle $\epsilon_1 v\Delta t$, un deuxième jet de pièce change la vitesse de $\epsilon_1 v$ à $\epsilon_2 \epsilon_1 v$ et elle se déplace d'une distance additionnelle $\epsilon_1 \epsilon_2 v\Delta t, \dots$ et ainsi de suite.

Si on était parti dans la direction négative, le résultat aurait été

$$S_n^{-1} = -v\Delta t(1 + \epsilon_1 + \epsilon_1\epsilon_2 + \dots + \epsilon_1\epsilon_2 \dots \epsilon_{n-1}) = -S_n \quad (\text{II.75})$$

On va considérer les fonctions $F_n^+(x) = \langle \varphi(x + S_n) \rangle$ (II.76)

$$F_n^-(x) = \langle \varphi(x - S_n) \rangle \quad (\text{II.77})$$

C'est-à-dire $F_n^+(x) = \langle \varphi(x + v\Delta t + v\Delta t\epsilon_1(1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_2 \dots \epsilon_{n-1})) \rangle$ (II.78)

Remarquer la mise en facteur de ε_1 , et en utilisant la distribution (II.73)

$$F_n^+(x) = \alpha\Delta t \langle \varphi(x + v\Delta t - v\Delta t(1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1})) \rangle \\ + (1 - \alpha\Delta t) \langle \varphi(x + v\Delta t + v\Delta t(1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1})) \rangle \quad (\text{II.79})$$

On peut avoir la forme récursive

$$F_n^+(x) = (1 - \alpha\Delta t)F_{n-1}^+(x + v\Delta t) + \alpha\Delta tF_{n-1}^-(x + v\Delta t) \quad (\text{II.80})$$

On procédant de la même manière on a

$$F_n^-(x) = (1 - \alpha\Delta t)F_{n-1}^-(x - v\Delta t) + \alpha\Delta tF_{n-1}^+(x - v\Delta t) \quad (\text{II.81})$$

Essayons de changer l'écriture de (II.80) à l'équation aux différences

$$\frac{F_n^+(x) - F_{n-1}^+(x)}{\Delta t} = \frac{F_{n-1}^+(x + v\Delta t) - F_{n-1}^+(x)}{\Delta t} - \alpha F_{n-1}^+(x + v\Delta t) + \alpha F_{n-1}^-(x + v\Delta t) \quad (\text{II.82})$$

Le calcul de la limite de l'équation (II.82) lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ donne

$$\frac{\partial F^+}{\partial t} = v \frac{\partial F^+}{\partial x} - \alpha F_{n-1}^+ + \alpha F_{n-1}^- \quad (\text{II.83})$$

De la relation (II.81), on obtient

$$\frac{\partial F^-}{\partial t} = -v \frac{\partial F^-}{\partial x} + \alpha F^+ - \alpha F^- \quad (\text{II.84})$$

On définit

$$F = \frac{1}{2}(F^+ + F^-) \quad G = \frac{1}{2}(F^+ - F^-) \quad (\text{II.85})$$

En additionnant (II.83) + (II.84) on a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = v \frac{\partial G}{\partial x} \quad (\text{II.86})$$

En soustrayant (II.83) - (II.84)

$$\frac{\partial G}{\partial t} = v \frac{\partial F}{\partial x} - 2\alpha G \quad (\text{II.87})$$

En différentiant (II.86) par rapport à t et (II.87) par rapport à x on a l'équation des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{II.88})$$

Modèle continu et processus de Poisson

On va reprendre le schéma d'établissement de l'équation des télégraphistes en supposant que le mouvement de la particule est continu, avec à tout intervalle de temps dt une probabilité spontanée de changer de direction adt , et la probabilité $1-adt$ de ne pas changer de direction.

Nous aurons aussi besoin de connaître le nombre de changements de direction que la particule subit dans un intervalle de temps donné. Pour cela on définit $N(t)$ une variable aléatoire pour chaque instant t , à valeurs entières uniquement $0, 1, 2, \dots$. La probabilité pour que $N(t)$ soit égale à k à l'instant t est donnée par la formule de Poisson

$$Prob \{N(t) = k\} = e^{-at} \frac{(at)^k}{k!} \quad (\text{II.89})$$

$$\text{Si pour une séquence d'instants croissants} \quad t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n \quad (\text{II.90})$$

$$\text{les incréments} \quad N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) \quad (\text{II.91})$$

sont indépendants, alors $N(t)$ est un processus de Poisson

La définition académique du processus de Poisson : supposons un évènement qui a une probabilité adt de se produire entre t et $t+dt$, et $1-adt$ de ne pas se produire, alors le nombre d'évènements qui se produisent jusqu'à l'instant t est un processus de Poisson. Le nombre de collisions que la particule subit jusqu'à l'instant t est un processus de Poisson. Chaque collision inverse la vitesse de la particule entre $+v$ et $-v$. Une façon de l'écrire serait

$$v(t) = v(-1)^{N(t)} \quad (\text{II.92})$$

Ce qui veut simplement dire qu'après un nombre pair de collisions la particule a sa vitesse initiale, après un nombre impair de collisions elle a la négation de sa vitesse initiale. Le déplacement est simplement

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = v \int_0^t (-1)^{N(t)} dt \quad (\text{II.93})$$

C'est l'analogie continue de S_n

L'analogie avec le cas discret suggère que la solution de l'équation des télégraphistes est

$$f(x, t) = \frac{1}{2} \langle \varphi \left(x + v \int_0^t (-1)^{N(t)} dt \right) \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi \left(x - v \int_0^t (-1)^{N(t)} dt \right) \rangle \quad (\text{II.94})$$

Sous cette forme, l'utilisation de la Méthode de Monte Carlo est entièrement faisable. Il suffit de prendre une centaine d'échantillons du processus de Poisson, calculer pour chacun

l'intégrale (II.93), faire la moyenne sur tous les échantillons, et on a la solution de l'équation des télégraphistes.

Dans l'article de Kac cité, il est démontré mathématiquement que (II.94) est solution de l'équation des télégraphistes dans le cas où $\varphi(x)$ est une intégrale de Fourier, ou en termes de calcul des probabilités, la fonction caractéristique génératrice des moments

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \phi(k) dk \quad (\text{II.95})$$

En pratique, la construction de $\varphi(x)$ est une procédure assez complexe, comme on peut en avoir un aperçu au paragraphe suivant, mais c'est justement cette complexité analytique qui est à l'origine de la performance numérique et de la précision du résultat.

Méthode du propagateur explicite

Les équations des télégraphistes (II.18) - (II.19) peuvent être arrangées sous une forme utile en isolant les dérivés par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{G}{C} & \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} \quad (\text{II.96})$$

Cette dernière peut être aisément exprimé sous forme d'équation matricielle :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \bar{S} F \quad (\text{II.97})$$

où

$$F = \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} \quad (\text{II.98})$$

$$\bar{S} = - \begin{bmatrix} \frac{G}{C} & \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{II.99})$$

On peut trouver la solution de (II.97), si on trouve un noyau intégrant, une forme spécifique de tenseur de Green qui est désignée dans la présente méthode par *propagateur* \bar{K} , qui satisfait :

$$\frac{\partial \bar{K}(x,t)}{\partial t} = \bar{S} \bar{K}(x,t) \quad (\text{II.100})$$

avec la condition initiale $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{K}(x, t) = \bar{I} \delta(x - x')$ (II.101)

où δ est la fonction de Dirac, x' est la position initiale de la tension et du courant à $t = 0$, et I est la matrice identité. La solution de (II.100) est une exponentielle matricielle

$$\bar{K} = e^{\bar{S}t} \delta(x - x') \quad (\text{II.102})$$

Le propagateur (II.102) est ramené à une intégrale de Fourier de la forme (II.95) en développant l'exponentielle en une série géométrique et en utilisant la transformée de Fourier de la fonction de Dirac $\delta(x - x')$

$$\bar{K} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{S_f t} e^{jk_z(z' - z)} dk_z \quad (\text{II.103})$$

L'intégrale (II.103) est une intégrale de chemin. Ce type d'expression et tous les calculs inhérents est très coutumier en probabilités, où il est communément désigné par *procédure des moments*, dont Jeong et Nevels [44] usent pour obtenir la valeur explicite du tenseur \bar{K} qu'il serait rébarbatif de retranscrire ici vu sa longueur.

Le propagateur \bar{K} transforme les valeurs initiales connues de $V(x)$ et $I(x)$ en des valeurs $V(x, t)$ et $I(x, t)$ à l'instant actuel t dans un intervalle fixe de temps

$$\begin{bmatrix} V(x, t) \\ I(x, t) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{K} \cdot \begin{bmatrix} V(x') \\ I(x') \end{bmatrix} dx' \quad (\text{II.104})$$

Mathématiquement cette opération est une convolution spatiale du propagateur avec les valeurs initiales de la tension et du courant, qui permet de connaître la tension et le courant en tous les points x à l'instant t . L'expression finale de la solution est

$$\begin{aligned} V(x, t) \approx \frac{e^{-at}}{2} \left\{ \left[1 - \frac{(bt)}{3} + \frac{(bt)^2}{6} \right] [V(x + tv_p) + V(x - tv_p)] \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 + \frac{(bt)^2}{6} \right] [I(x + tv_p) - I(x - tv_p)] \right. \\ \left. + \frac{4(bt)}{3} [I_1(bt) - I_0(bt)] V(x) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.105})$$

$$\begin{aligned} I(x, t) \approx \frac{e^{-at}}{2} \left\{ \left[1 - \frac{(bt)}{3} + \frac{(bt)^2}{6} \right] [I(x + tv_p) + I(x - tv_p)] \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 + \frac{(bt)^2}{6} \right] [V(x + tv_p) - V(x - tv_p)] \right. \\ \left. + \frac{4(bt)}{3} [I_1(bt) - I_0(bt)] I(x) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.106})$$

II.5.4. Méthode du Plongement Invariant

Cette méthode de traitement des équations mathématiques de la physique d'un haut niveau d'ingéniosité a été introduite en 1860 par George G. Stokes [45] et rendue célèbre par Richard Bellman [46] sur une série de 124 articles publiés entre 1957 et 1974, et deux livres, dans lesquels il l'a exposée sous tous ses angles, avec une multitude d'applications allant du réacteur nucléaire à la ligne de transmission uniforme. Mais il y a lieu de constater qu'avec notre meilleure volonté nous n'avons trouvé aucune application dans la littérature en ce qui concerne les lignes non-uniformes. Ceci est assez surprenant, mais nous ne sommes pas en mesure de fournir une explication convaincante à cet état de fait. Est-ce que la méthode est inapplicable à la ligne non-uniforme, ou alors personne n'a tenté de l'appliquer jusqu'ici et là nous sommes devant une opportunité extraordinaire de publication, moyennant un effort substantiel.

Nous avons jugé indispensable que cette méthode figure dans ce chapitre d'abord par esprit de complétude de notre étude des modèles, mais aussi parce que c'est une méthode qui sort de l'ordinaire, et puis elle a été développée dans le cadre du Manhattan Project par des savants d'exception qui ont marqué la science du vingtième siècle.

Mathématiquement parlant, la méthode du plongement invariant est une technique rigoureusement élaborée qui consiste à transformer un problème avec conditions aux frontières en un problème avec condition initiale dans lequel les points frontières sont les seules variables indépendantes du problème. Cette particularité fait de cette méthode un excellent préalable pour les problèmes de caractérisation inverse.

Principe de l'approche

En 1942, V. Ambarzumian a montré comment l'énergie réfléchie de manière diffuse par une atmosphère plan-parallèle peut être calculée directement, sans déterminer le flux radiatif interne [47]. Ceci grâce à l'utilisation de principes d'invariance, qui conduisent à des équations non linéaires, par opposition aux équations de transport linéaires pour les flux radiatifs internes. Bellman [46] a mis à nu de manière rigoureuse la relation entre les équations de transport pour les flux radiatifs internes et les équations de plongement invariant pour les flux réfléchis, dans le cas d'un processus de transport unidimensionnel. Nous allons illustrer cette approche par un modèle physique simple. Nous avertissons au préalable qu'il n'y a pas lieu de

s'alarmer si l'exemple traite de particules. En fait, tout au long de sa série d'articles, Bellman adhère à fond au principe de dualité onde-corpuscule, tout ce qu'il dit pour une particule est aussi vrai pour une onde.

Considérons une "tige" – Figure II.11 – un segment de droite qui va de 0 à x - et désignons un point générique dans la tige par z . Des "particules" vont à droite et à gauche le long de cette tige sans interagir entre elles, autrement dit sans collision. Ces particules peuvent interagir avec le matériau de la tige elle-même. De telles interactions se traduisent par la disparition des particules et la génération de nouvelles particules, qui diffèrent des premières seulement en ce que leur direction de mouvement peut avoir changé. L'objectif est de connaître la densité du faisceau de particules en fonction de la position z .

La probabilité pour qu'une particule en z interagisse avec la tige tout en se déplaçant (dans n'importe quel sens) sur une distance $\Delta > 0$ est donnée par l'expression

$$\sigma(z)\Delta + o(\Delta)$$

La notation $o(\Delta)$ signifie un terme qui tend vers zéro plus rapidement que Δ lorsque $\Delta \rightarrow 0$. La quantité σ est souvent appelée la section transversale macroscopique.

Comme conséquence d'une interaction de cette nature, une moyenne de $f(z)$ nouvelles particules sont générées au point z et elles vont dans la même direction que la particule originale, et une moyenne de $b(z)$ nouvelles particules allant dans la direction opposée. Toute particule générée à la frontière $z = x$ allant à droite est perdue, de même que toute particule allant à gauche qui est générée en $z = 0$. Enfin, il n'y a pas de source spontanée de particules dans la tige. Les particules injectées dans les extrémités de gauche et de droite de la tige, ainsi que les descendantes issues du processus d'interaction, forment la population totale des particules du système. On définit :

$u(z)$ = nombre espéré de particules allant à droite passant chaque seconde au point z

$v(z)$ = nombre espéré de particules allant à gauche passant chaque seconde au point z

Le mot «espéré» est nécessaire en raison de la nature stochastique du processus.

Nous devons maintenant établir les équations satisfaites par les fonctions $u(z)$ et $v(z)$. Pour ce faire, nous allons examiner une petite portion de la tige située entre z et $z + \Delta$, et essayer de relier la fonction $u(z + \Delta)$ à la fonction $u(z)$. Voir Figure II.11.

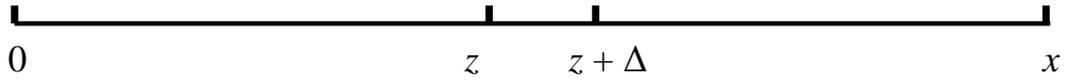


Figure II.11

Certaines des particules passant au point z vers la droite peuvent arriver jusqu'à $z + \Delta$ sans avoir à subir d'interaction avec la tige. La probabilité que cela se produise est $(1 - \sigma(z)\Delta) + o(\Delta)$, par hypothèse. D'où le nombre de ces particules passant au delà de z vers la droite qui contribuent à $u(z + \Delta)$ est

$$[(1 - \sigma(z)\Delta) + o(\Delta)]u(z) = (1 - \sigma(z)\Delta)u(z) + o(\Delta) \quad (\text{II.107})$$

Certaines des particules allant à droite en z vont interagir avec la tige avant d'atteindre le point $z + \Delta$. Chaque tel événement va produire un nombre $f(z)$ des particules dans la direction d'intérêt. La contribution à $u(z + \Delta)$ de ce type d'événement est

$$[\sigma(z)\Delta + o(\Delta)]f(z)u(z) = \sigma(z)f(z)u(z)\Delta + o(\Delta) \quad (\text{II.108})$$

Il y a aussi les particules qui vont à gauche. Certains de celles qui passent le point $z + \Delta$ vont interagir avec la tige avant d'atteindre le point z et donnent naissance à des particules se déplaçant vers la droite. Le nombre de ces particules passant au point $z + \Delta$ chaque seconde est

$$[\sigma(z)\Delta + o(\Delta)]b(z)v(z + \Delta) = \sigma(z)b(z)v(z)\Delta + o(\Delta) \quad (\text{II.109})$$

Par conséquent

$$u(z + \Delta) = (1 - \sigma(z)\Delta)u(z) + \sigma(z)\Delta f(z)u(z) + \sigma(z)\Delta b(z)v(z) + o(\Delta) \quad (\text{II.110})$$

En différenciant par rapport à z , on a

$$\frac{du}{dz} = \sigma(z)\{(f(z) - 1)u(z) + b(z)v(z)\} \quad (\text{II.111})$$

Si un processus similaire de "comptage de particules" est effectué avec l'attention axée sur les particules en mouvement vers la gauche, l'équation résultante serait

$$-\frac{dv}{dz} = \sigma(z)\{b(z)u(z) + (f(z) - 1)v(z)\} \quad (\text{II.112})$$

Les équations (II.111) et (II.112) sont les équations classiques pour ce type de problème. Elles peuvent être considérées comme une version simple de l'équation de Boltzmann. Notons, en particulier, que l'attention a été limitée à ce qui se passe au sein du système, pas sur ce qui émerge de lui. La manière habituelle de visualiser la plupart des modèles mathématiques des phénomènes physiques est analogue à l'angle de vision que nous venons d'adopter. Cette approche est abandonnée dans la méthode du plongement invariant.

Nous devons maintenant imposer des conditions aux limites compatibles avec cette hypothèse. Supposons que chaque seconde une particule allant à gauche est injectée dans la tige à son extrémité droite, $z = x$, tandis que aucune particule n'entre dans la tige à l'extrémité gauche, $z = 0$. Les équations (II.111) et (II.112) doivent se résoudre soumises à des conditions aux frontières

$$u(0) = 0 \qquad v(x) = 1 \qquad \text{(II.113)}$$

Pour mieux comprendre, nous choisissons des fonctions f , b , et σ simples qui assurent qu'une solution analytique soit obtenue pour ce problème. Nous prenons

$$f(z) = 1 \qquad b(z) = 1 \qquad \sigma(z) = 1 \qquad \text{(II.114)}$$

de sorte que les équations différentielles linéaires aient des coefficients constants. Ensuite, une procédure élémentaire donne

$$u(z) = \frac{\sin z}{\cos x} \qquad v(z) = \frac{\cos z}{\cos x} \qquad \text{(II.115)}$$

En utilisant la solution explicite (II.115), on peut très facilement déterminer le nombre de particules qui émergent du système. En vue de la physique de ce modèle, il est naturel de se référer aux particules se déplaçant vers la gauche à $z = 0$ comme «transmises» et à celles se déplaçant vers la droite à $z = x$ comme "réfléchies". On définit

$$t(x) = \text{nombre espéré de particules émergentes par seconde à } z = 0,$$

$$r(x) = \text{nombre espéré de particules émergentes par seconde à } z = x,$$

et on réfère à $t(x)$ et $r(x)$ par fonctions de transmission et de réflexion, respectivement. Remarquez que l'argument de chaque fonction se réfère à la longueur de la tige et non au point de génération des particules. En utilisant les résultats obtenus en (II.115), nous trouvons

$$t(x) = \sec(x) \qquad r(x) = \tan(x) \qquad \text{(II.116)}$$

La méthode ci-dessus fournit une information complète sur la distribution des particules dans la tige. En tant que sous-produit, nous avons également des informations

concernant les propriétés de réflexion et de transmission du système. Dans certains problèmes de réel intérêt physique, ce qui se passe à l'intérieur du système est de peu de valeur ; on est seulement intéressé par ce qui en émerge, les «observables». Il est donc raisonnable de se demander si on peut trouver des équations satisfaites directement par les fonctions r et t et éviter complètement la question de la distribution des particules dans le modèle interne.

Nous *plongeons* maintenant la tige dans une autre légèrement plus longue, disons de longueur $x+\Delta$, et ayant les mêmes paramètres physiques que l'originale. Nous définissons r et t précisément comme dans (II.116) et nous allons concentrer notre attention sur ces événements physiques, interactions de collision, qui ont lieu dans l'intervalle $x < z < x+\Delta$. Le but est de trouver des relations reliant $r(x)$, $r(x+\Delta)$, $t(x)$, et $t(x+\Delta)$.

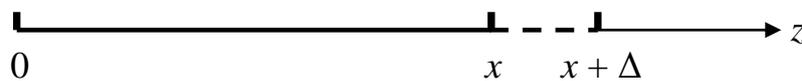


Figure II.12

Fixons notre attention sur $r(x+\Delta)$, le nombre de particules qui émergent chaque seconde à l'extrémité droite de la tige, en supposant la même entrée que dans la section précédente. Les événements physiques peuvent être énumérés comme suit :

- a.** La particule de source subit une collision en passant à travers le premier intervalle $x < z < x+\Delta$. Cela donne lieu à une moyenne de b particules chaque seconde se déplaçant vers la droite et émergeant à $x + \Delta$, contribuant ainsi à $r(x + \Delta)$. Elle produit également une moyenne de f particules se déplaçant vers la gauche qui vont empiéter la sous-tige qui va de 0 à x .
- b.** La particule de source ne subit pas de collision dans l'intervalle $x < z < x + \Delta$ et par conséquent, elle est aussi une particule source pour la sous-tige $0 < z < x$.

Le résultat de (a) et (b) est que la sous-tige "voit" maintenant une certaine entrée de particules; disons que la force de cette source est s particules par seconde. Le modèle physique est de nature à répondre linéairement à l'entrée. Donc $sr(x)$ particules en moyenne émergent chaque seconde à $z = x$. Là encore y a deux possibilités:

- a'.** Certaines de ces particules passent à travers $x < z < x + \Delta$ sans interaction et apportent ainsi une contribution directe à $r(x + \Delta)$.

b'. Le reste de ces particules $sr(x)$ subissent des collisions en passant par l'intervalle $x < z < x + \Delta$. Le résultat de chacun de ces événements est une moyenne de f particules se déplaçant vers la droite et donc contribuent à $r(x + \Delta)$, conjointement avec les b particules se déplaçant vers la gauche et réentrant dans la sous-tige $0 < z < x$. Ces particules fournissent encore une autre source pour la sous-tige, et résultent par encore plus de particules émergeant en $z = x$.

Compte tenu des événements décrits dans (a), la probabilité d'une interaction se produisant dans $x < z < x + \Delta$ est $\sigma\Delta + o(\Delta)$. D'où le nombre de particules qui émergent "immédiatement" en $x + \Delta$ est $\sigma b\Delta + o(\Delta)$, tandis qu'une moyenne de $\sigma f\Delta + o(\Delta)$ particules passent vers la gauche. La probabilité qu'aucune interaction ne se produise est $(1 - \sigma b\Delta) + o(\Delta)$. Par conséquent, un événement (b) contribue chaque seconde par $(1 - \sigma b\Delta) + o(\Delta)$ particules à la source en $z = x$. Nous avons $s = 1 + (f - 1)\sigma\Delta + o(\Delta)$.

En utilisant la probabilité de non-interaction en $x < z < x + \Delta$, on constate que (a') contribue par $sr(x)(f - \sigma\Delta) + o(\Delta)$ particules en $x + \Delta$. Les particules allant vers la droite (b') en nombre $sr(x)\sigma f\Delta + o(\Delta)$ par seconde. Celles vers la gauche en moyenne $sr(x)\sigma b\Delta + o(\Delta)$ par seconde, entrent de nouveau dans la sous-tige en $z = x$. Ceci est une source effective pour la sous-tige, et elle réagit en donnant en $z = x$ un total de $\{sr(x)\sigma b\Delta + o(\Delta)\}r(x)$ particules de plus à chaque seconde. Celles-ci ont une probabilité $(1 - \sigma\Delta) + o(\Delta)$ de passer à travers l'intervalle $x < z < x + \Delta$ sans autre interaction. La contribution totale à $r(x + \Delta)$ énumérée jusqu'ici donne la relation

$$r(x + \Delta) = \sigma b\Delta + sr(x)(1 - \sigma\Delta) + sr(x)\sigma f\Delta + sr^2(x)\sigma b\Delta + o(\Delta) \quad (\text{II.117})$$

$$\text{soit} \quad r(x + \Delta) = r(x) + \sigma\Delta\{b + 2(f - 1)r(x) + br^2(x)\} + o(\Delta) \quad (\text{II.118})$$

En utilisant (II.118) on obtient l'équation différentielle suivante pour r :

$$\frac{dr}{dx} = \sigma[b + 2(f - 1)r(x) + br^2(x)] \quad (\text{II.119})$$

Un raisonnement similaire conduit à l'équation suivante pour t :

$$\frac{dt}{dx} = \sigma\{(f - 1) + br(x)\}t(x) \quad (\text{II.120})$$

Ces équations sont de peu d'utilité sans les conditions initiales. Celles-ci sont très faciles à établir. Supposons que la tige d'origine est de longueur zéro; ainsi $x = 0$. Dans ce cas, il ne peut pas y avoir de particules réfléchies, et toutes les particules sont transmises.

$$\text{Donc} \quad r(0) = 0 \quad t(0) = 1 \quad (\text{II.121})$$

A titre de validation partielle de ce raisonnement considérons le cas particulier donné par l'équation (II.114). Des calculs simples donnent immédiatement les solutions de (II.119) - (II.121) :

$$r(x) = \tan(x) \quad t(x) = \sec(x) \quad (\text{II.122})$$

en parfait accord avec (II.116).

La variable z n'intervient jamais parce que toutes les interactions qui ont été prises en compte pour l'établissement de ce modèle se produisent dans l'intervalle $x < z < x + \Delta$, que l'on pourrait désigner le plongement de la tige.

A la différence de la démarche simpliste utilisée ici pour mettre en relief son fondement, pour son application cette méthode consiste à obtenir les équations de type (II.119) directement à partir des équations de type (II.111) sans référence au processus physique sous-jacent, avec toute la rigueur mathématique en utilisant le théorème d'unicité de la solution d'un problème aux limites linéaire.

II.6. Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre, les méthodes classiques de résolution des équations des télégraphistes que nous avons prospectées à un moment où nous ignorions que nous allions opter finalement pour les méthodes sans maillage.

L'inflexibilité des grilles spatio-temporelles espacées uniformément utilisées dans les méthodes des différences finies pures conduit à une certaine lourdeur des calculs pour l'analyse des LTNUs. Dans ces conditions, le coût de simulation sera extrêmement élevé. De ce fait, il est pertinent d'appliquer dans le contexte décrit ci-dessus une nouvelle méthode numérique flexible, puissante, qui prenne en considération les évolutions les plus récentes en calcul numérique. Cette méthode doit d'abord être suffisamment adaptée aux LTNUs à variations d'impédances quelconques.

La méthode de D'Alembert et la méthode des caractéristiques, dont l'idée a germé il y a plus d'un siècle et demi, restent encore d'une fraîcheur inaltérée et un moyen efficace pour modéliser des structures technologiques d'avant-garde.

La méthode du propagateur, par le biais de ses emprunts aux procédés du calcul stochastique qui est en constant progrès, présente actuellement l'une des voies les plus prometteuses pour la modélisation des LTNUs. Quant à la Méthode du Plongement qui s'en rapproche par l'époque de popularité, le milieu du vingtième siècle, et son usage des techniques de la physique mathématique, **elle reste au jour de notre rédaction une voie totalement inexplorée.**

Les méthodes sans maillage construites à partir des interpolations de point sont des nouvelles méthodes qui ont été récemment introduites en électromagnétisme. Elles utilisent des ensembles de nœuds dispersés pour représenter le domaine de calcul plutôt qu'une discrétisation par grille comme dans la méthode FDTD. En conséquence, ces méthodes n'ont pas les contraintes dues à l'utilisation d'un pas spatial constant. Avec une implémentation convenable, une discrétisation multi résolution du domaine spatial, et la possibilité de déplacer, d'ajouter, ou de supprimer des nœuds, ces méthodes peuvent contourner les limitations décrites précédemment, afin de résoudre les équations (II.18) et (II.19) des LTNUs dont l'impédance caractéristique est quelconque. Le chapitre suivant est consacré à l'application de telles méthodes sans maillage pour la résolution des équations des télégraphistes des LTNUs dans le domaine temporel.

Références bibliographiques II

- [1] RACHIDI, Farhad et TKACHENKO, Sergey. *Electromagnetic field interaction with transmission lines: from classical theory to HF radiation effects*. WIT press, 2008.
- [2] HEAVISIDE, Oliver. *Electromagnetic theory*. The Electrician Printing and Publishing Co: London, 1894.
- [3] POZAR, David M. *Microwave engineering*. John Wiley & Sons, 2009.
- [4] PAUL, Clayton R. *Analysis of multiconductor transmission lines*. John Wiley & Sons, 2008.
- [5] BALLANTINE, Stuart. Non-uniform lumped electric lines: I. The conical line. *Journal of the Franklin Institute*, 1927, vol. 203, no 4, p. 561-582.

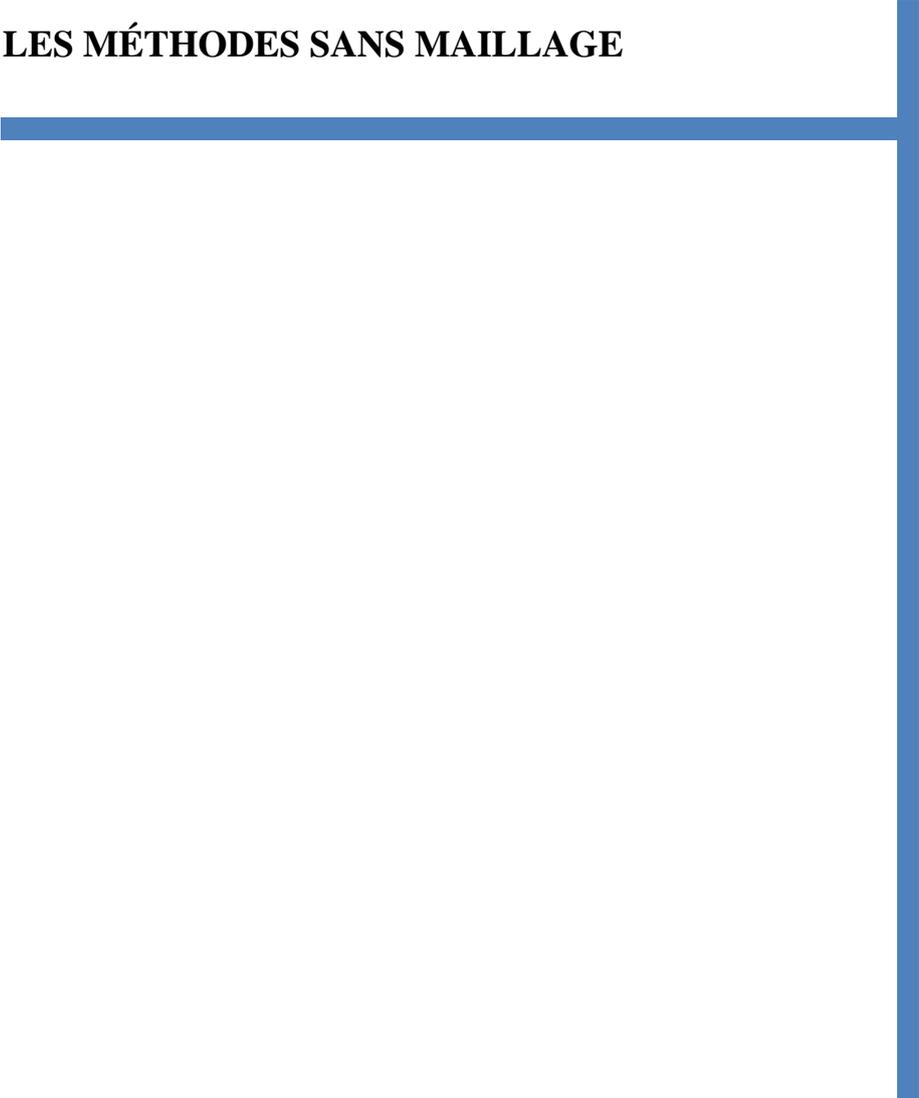
- [6] RAVUT, C. Propagation des courants sinusoïdaux sur des lignes quelconques. *Rev. gén. Elect*, 1920, vol. 7, No. 19, pp. 611-615.
- [7] JAVADZADEH, S., MARDY, Zahra, MEHRANY, Khashayar, *et al.* Fast and Efficient Analysis of Transmission Lines With Arbitrary Nonuniformities of Sub-Wavelength Scale. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 2012, vol. 60, no 8, p. 2378-2384.
- [8] CHERNOBRYVKO, Mykola, GINSTE, Dries Vande, et DE ZUTTER, Daniel. A two-step perturbation technique for nonuniform single and differential lines. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 2013, vol. 61, no 5, p. 1758-1767.
- [9] CARSON, John R. Propagation of periodic currents over non-uniform lines. *The Electrician*, 1921, vol. 86, p. 272-273.
- [10] MILNOR, J. W. The tapered transmission line. *Electrical Engineering*, 1945, vol. 64, no 6, p. 345-346.
- [11] ARNOLD, John W. et TAYLOR, Roland C. Linearly tapered loaded transmission lines. *Radio Engineers, Proceedings of the Institute of*, 1932, vol. 20, no 11, p. 1811-1817.
- [12] ARNOLD, John W. et BECHBERGER, Paul F. Sinusoidal currents in linearly tapered loaded transmission lines. *Radio Engineers, Proceedings of the Institute of*, 1931, vol. 19, no 2, p. 304-310.
- [13] STARR, A. T. The nonuniform transmission line. *Radio Engineers, Proceedings of the Institute of*, 1932, vol. 20, no 6, p. 1052-1063.
- [14] PIERCE, J. R. A note on the transmission line equation in terms of impedance. *Bell System Technical Journal*, 1943, vol. 22, no 2, p. 263-265.
- [15] WALKER, L. R. et WAX, N. Non-Uniform Transmission Lines and Reflection Coefficients. *Journal of Applied Physics*, 1946, vol. 17, no 12, p. 1043-1045.
- [16] COLLIN, Robert E. *Foundations for microwave engineering*. John Wiley & Sons, 2007.
- [17] SCOTT, Herbert J. The hyperbolic transmission line as a matching section. *Proceedings of the IRE*, 1953, vol. 41, no 11, p. 1654-1657.

- [18] BOLINDER, Folke. *Fourier transforms in the theory of inhomogeneous transmission lines*. H. Lindståhlsbo khandel i distribution, 1951.
- [19] KLOPFENSTEIN, R. W. A transmission line taper of improved design. *Proceedings of the IRE*, 1956, vol. 44, no 1, p. 31-35.
- [20] GROSSBERG, Milton A. Extremely rapid computation of the Klopfenstein impedance taper. *Proceedings of the IEEE*, 1968, vol. 56, no 9, p. 1629-1630.
- [21] HECKEN, Rudolf P. A near-optimum matching section without discontinuities. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 1972, vol. 20, no 11, p. 734-739.
- [22] AFROOZ, Kambiz, ABDIPOUR, Abdolali, TAVAKOLI, Ahad, *et al.* Time-domain analysis of lossy active transmission lines using FDTD method. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2009, vol. 63, no 3, p. 168-178.
- [23] AFROOZ, Kambiz et ABDIPOUR, Abdolali. Efficient method for time-domain analysis of lossy nonuniform multi conductor transmission line driven by a modulated signal using FDTD technique. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 2012, vol. 54, no 2, p. 482-494.
- [24] RODEN, J. Alan, PAUL, Clayton R., SMITH, William T., *et al.* Finite-difference, time-domain analysis of lossy transmission lines. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 1996, vol. 38, no 1, p. 15-24.
- [25] ORLANDI, Antonio et PAUL, Clayton R. FDTD analysis of lossy, multi conductor transmission lines terminated in arbitrary loads. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 1996, vol. 38, no 3, p. 388-399.
- [26] PAUL, Clayton R. Incorporation of terminal constraints in the FDTD analysis of transmission lines. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 1994, vol. 36, no 2, p. 85-91.
- [27] AFROOZ, Kambiz, ABDIPOUR, Abdolali, TAVAKOLI, Ahad, *et al.* Time domain analysis of lossy nonuniform transmission line using FDTD technique. In : *Proc Asia-Pacific Conf Applied Electromagnetics*. 2007.

- [28] DARBOUX, Gaston. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. In : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1870. p. 163-173.
- [29] HADAMARD, Jacques. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. 1903.
- [30] MARTINEZ, David, MORENO, Pablo, et LOO-YAU, Raul. A new model for non-uniform transmission lines. In : *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), 2015 12th International Conference on*. IEEE, 2015. p. 1-5.
- [31] ZHANG, Bo, MO, Jianghua, HE, Jinliang, *et al.* A Time-domain Approach of Ion Flow Field around AC-DC hybrid Transmission Lines Based on Method of Characteristics. *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.PP, no.99, pp.1-1, 2015.
- [32] BRANIN, F. H. Transient analysis of lossless transmission lines. *Proceedings of the IEEE*, 1967, vol. 55, no 11, p. 2012-2013.
- [33] DOMMEL, Hermann W. Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase. *Networks IEEE*, 1969, vol. 88, no 4, p. 388-399.
- [34] GRUODIS, A. J. Transient analysis of uniform resistive transmission lines in a homogeneous medium. *IBM Journal of Research and Development*, 1979, vol. 23, no 6, p. 675-681.
- [35] LIU, Y. K. Transient analysis of TEM transmission lines. *Proceedings of the IEEE*, 1968, vol. 56, no 6, p. 1090-1092.
- [36] DVORAK, V. Transient analysis of nonuniform transmission lines. *Proceedings of the IEEE*, 1970, vol. 58, no 5, p. 844-845.
- [37] DVORAK, V. Computer simulation of signal propagation through a nonuniform transmission line. *Circuit Theory, IEEE Transactions on*, 1973, vol. 20, no 5, p. 580-583.
- [38] ZAMORANO, Pablo Gómez et VILLALOBOS, Pablo Moreno. Simplified Method of Characteristics for Fast Transient Solution of Frequency and Space Dependent Transmission Lines. 2007.
<http://repositoriodigital.academica.mx/jspui/handle/987654321/183705>.

- [39] KAC, Marc. A stochastic model related to the telegrapher's equation. *Rocky Mountain J. Math*, 1974, vol. 4, p. 000.
- [40] R. JANASWAMY, "On random time and on the relation between wave and telegraph equations," *IEEE Trans. Antennas Propag*, May 2013, vol. 61, no. 5, pp. 2735–2744.
- [41] ACEBRÓN, J. A., & RIBEIRO, M. A. "A Monte Carlo method for solving the one-dimensional telegraph equations with boundary conditions". *Journal of Computational Physics*, 2016, 305, 29-43.
- [42] NEVELS, Robert et MILLER, Jeffrey. A simple equation for analysis of nonuniform transmission lines. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 2001, vol. 49, no 4, p. 721-724.
- [43] JEONG, Jaehoon and NEVELS, Robert. Novel time domain analysis technique for lossy nonuniform transmission lines. In : *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2005 IEEE*. IEEE, 2005. p. 848-851.
- [44] JEONG, Jaehoon and NEVELS, Robert. Time-domain analysis of a lossy nonuniform transmission line. *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, 2009, vol. 56, no 2, p. 157-161.
- [45] STOKES, George G. On the intensity of the light reflected from or transmitted through a pile of plates. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1860, vol. 11, p. 545-556.
- [46] BELLMAN, Richard, et WING, G. Milton. *An introduction to invariant imbedding*. New York: Wiley, 1975.
- [47] AMBARZUMIAN, V. A. Diffuse reflection of light by a foggy medium. In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1943. p. 257-261.

III. LES MÉTHODES SANS MAILLAGE

A decorative blue L-shaped line is positioned to the right of the section header. It consists of a horizontal bar extending from the left towards the right, and a vertical bar extending downwards from the right end of the horizontal bar.

III.1. INTRODUCTION

Les méthodes sans maillage forment un groupe générique de schémas de calcul scientifique qui ont été développés à partir des années 1970 pour se libérer des contraintes liées à une grille de discrétisation fixe pour l'approximation des équations du problème. L'idée a émergé en dynamique des fluides à partir de la double présomption que le calcul gagnerait en efficacité si les points d'évaluation des équations sont portées par la matière en mouvement, ou alors éparpillés de telle sorte que la précision globale des formules d'approximation est accrue avec un nombre minimum de points. Le principe de ces méthodes est de reconstruire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises sur un nuage de nœuds dispersés sélectivement ou aléatoirement. Parmi les avantages de ces méthodes, la facilité du raffinement de la discrétisation, puisqu'il est très simple de déplacer, d'ajouter, ou de supprimer des nœuds, ce qui fait de ces méthodes les candidates idéales pour analyser les LTNUs dont l'impédance varie de façon arbitraire.

III.2. Historique des méthodes sans maillage

Les méthodes sans maillage furent introduites en 1977 dans les travaux de Gingold et de Monaghan [1], ensuite Lucy [2], avec la méthode *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH). On pourrait traduire cette expression par «hydrodynamique des particules lissées», mais dans toute la littérature francophone c'est bien l'expression originale qui est usitée.

Bien que les méthodes sans maillage soient parfois définies par opposition aux techniques de discrétisation à grille figée qui sont les différences finies et les éléments finis, elles sont plutôt leur prolongement naturel comme il a été expressément déclaré par Nayroles *et al* dans [3] qui est perçu comme le véritable point de départ de ces méthodes dans la littérature. Par la suite, énormément de travaux de recherche ont été engagés en vue de leurs développements, en particulier en mécanique où les problèmes d'élasticité ont considérablement contribué au progrès de ces méthodes [4]-[5]. C'est à cause d'une impossibilité de programmer correctement par éléments finis le déplacement de points frontières dans un problème de membrane élastique que Gui Rong Liu [5] a abandonné la FEM et basculé définitivement dans les méthodes sans maillage, avec une contribution immense et l'édition de plusieurs livres. L'approche a montré une puissance spécifique et elle a vite été extrapolée à d'autres domaines en technologie et en sciences [6]. Elle a été appliquée à l'électromagnétisme à un stade assez précoce. Outre les travaux des précurseurs Maréchal *et al* [7], Cingoski *et al* [8],

Viana et Mesquita [9], et Ho *et al* [10], des contributions importantes ont considérablement développé les applications de l'approche sans maillage dans les microondes. Une liste non exhaustive d'auteurs inclut Kaufman *et al* [11], Lai *et al* [12], Yu *et al* [13], Afsari et al [14]-[15], et Yang *et al* [16].

L'unique critère requis pour qualifier une méthode par sans maillage, traduction des termes originaux *meshfree* ou *meshless*, est l'absence dans le domaine de calcul d'une grille de nœuds où sont évaluées les équations du problème, cela tombe sous le sens. Les méthodes sans maillage diffèrent les unes des autres par le type d'approximation utilisé pour la construction des fonctions de forme, tout en conservant leur avantage primaire commun de liberté du positionnement des nœuds.

Nous venons d'utiliser l'expression fonctions de forme, le terme est hérité de la méthode des éléments finis et garde sa signification, de même que les fonctions de base et les fonctions d'essai.

Donc il y a absence de grille ou de maille, mais présence de nœuds. Le nœud où est évaluée l'équation, désigné par nœud d'intérêt ou point de test, est situé à l'intérieur d'une région d'influence désigné par domaine de support, qui selon les méthodes peut être soit global soit local. Les autres nœuds du support sont désignés par voisins ou points de collocation

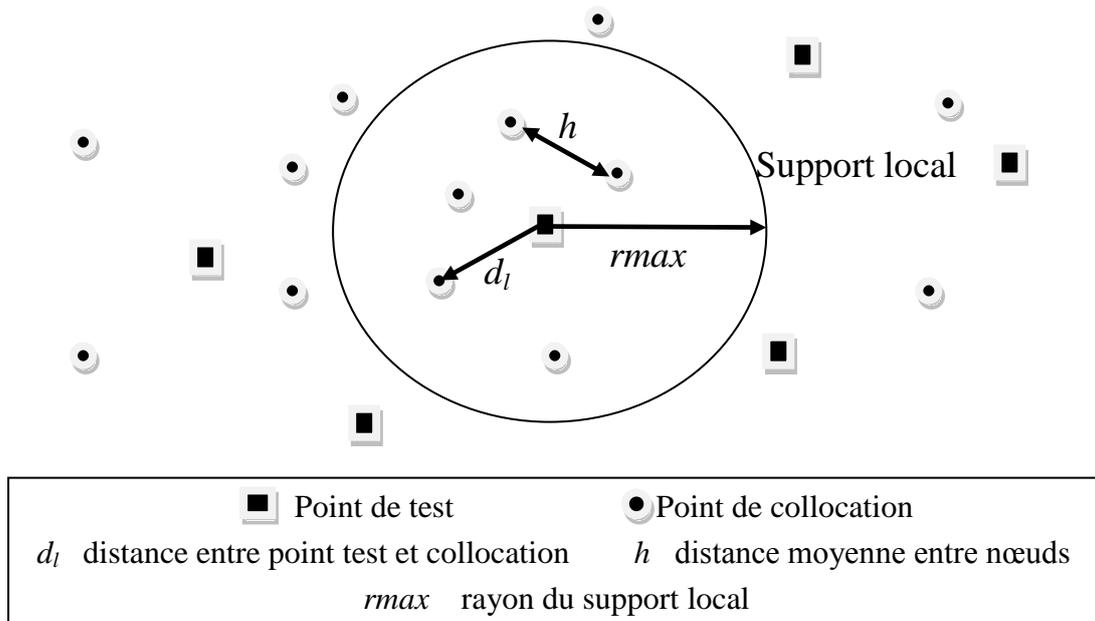


Figure III.1. Allure habituelle de l'espace de calcul

Dans cette thèse, nous nous intéressons à trois méthodes sans maillage de type collocation où l'intégration numérique ne se présente pas dans leur formulation. Elles sont classifiées sous la catégorie méthodes d'interpolation de point *Point Interpolation Methods* où, l'approximation utilisée pour la construction de ces fonctions de formes se fait par l'interpolation polynomiale (la méthode PIM), l'interpolation par des fonctions de base radiales (la méthode RBF-MLM), ou par un assemblage des fonctions de base radiales avec une interpolation polynomiale (la méthode RPIM).

III.3. les méthodes d'interpolation de point

Durant la dernière décennie, une catégorie spéciale des méthodes sans maillage appelées les méthodes d'interpolation de point a été introduites pour résoudre des équations différentielles aux dérivées partielles. Ces méthodes présentent une grande flexibilité qui leur confère en même temps des approximations très précises et un bon gain en temps de calcul par rapport aux méthodes conventionnelles telles que la méthode FDTD. Dans ces méthodes, les équations différentielles sont discrétisées à travers des techniques simples de collocation pour l'application d'un procédé itératif sur les équations résultantes. Les avantages de ces méthodes ont été démontrés à travers leur application à des problèmes bien connus dans la physique tels que l'équation de Laplace, l'équation d'Helmholtz, l'équation de Poisson, etc... D'autre parts, dû à la possibilité de la discrétisation multi résolution du domaine spatial, ces méthodes peuvent parfaitement résoudre les équations des télégraphistes (II.18) et (II.19) pour les LTNUs, tout en utilisant un nombre des nœuds très inférieur que celui requis par la méthode FDTD classique sur la même ligne. Dans la méthode FDTD l'utilisation d'une grille uniforme pour l'analyse des LTNUs produit des surcoûts informatiques inutiles. Autrement dit, la distribution non-uniforme des nœuds nous aide à déterminer les paramètres linéiques de la ligne $R(x)$, $L(x)$, $C(x)$, et $G(x)$ de manière conforme, ce qui minimise la consommation des ressources mémoire et du temps d'exécution.

Le principal résultat de cette thèse est l'implémentation des trois codes de calcul sous MATLAB, permettant l'analyse et la simulation des LTNUs à forme quelconque dans le domaine temporel par les trois méthodes d'interpolation de point suivantes :

- La méthode PIM (the *polynomial point interpolation method*), elle est construite à partir d'une interpolation purement polynomiale.

- La méthode RBF-MLM (the *meshless method based on Radial Basis Functions*), elle est construite à partir d'une interpolation avec des fonctions de bases radiales RBFs.
- La Méthode RPIM (the *Radial Point Interpolation Method*), c'est une méthode mixte assemblant des fonctions de base radiales, avec une interpolation polynomiale.

Nous sommes partis des équations des télégraphistes écrites dans le domaine temporel (II.18) et (II.19). Nous avons ensuite procédé à la discrétisation temporelle. Finalement nous avons développé les fonctions de formes des trois méthodes sans maillage pour approcher les dérivés spatiales des équations (II.18) et (II.19). Dans nos codes MATLAB, nous avons choisi d'utiliser la condition CFL, et le schéma explicite du Leapfrog pour la discrétisation temporelle.

III.3.1. Discrétisation temporelle des équations des télégraphistes

Dans le but de résoudre les équations des télégraphistes d'une LTNU représentée dans la figure III.2, cette section présente une méthodologie pour construire un équivalent discret de l'opérateur $\partial/\partial t$ permettant d'effectuer un calcul itératif. Nous supposons que $V(x, t)$ et $I(x, t)$ sont irrégulièrement dispersés dans les domaines de l'espace et du temps comme représenté dans les figures III.3 et III.4. Nous considérons que la ligne est terminée par des charges R_s, R_d , et excitée par une source de tension e_s , figure III.2. En effet les conditions aux limites de la ligne sont données par les équations suivantes :

$$e_s(t) = V(0, t) + R_s I(0, t) \quad (\text{III.1})$$

$$0 = V(d, t) - R_d I(d, t) \quad (\text{III.2})$$

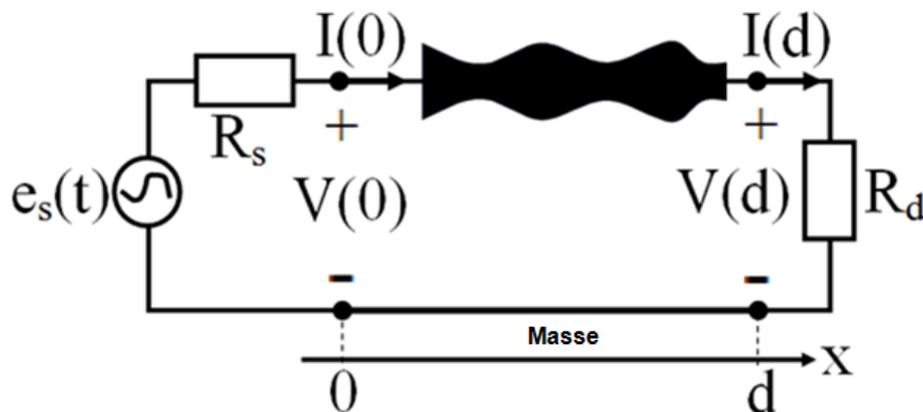


Figure III.2. Ligne de transmission non-uniforme à variation quelconque d'impédance.

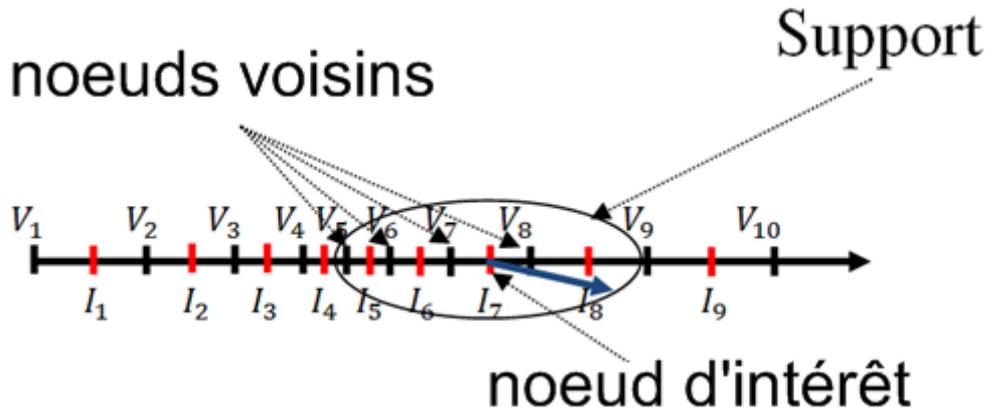


Figure III.3. Exemple de discrétisation irrégulière des tensions et des courants le long de la ligne.

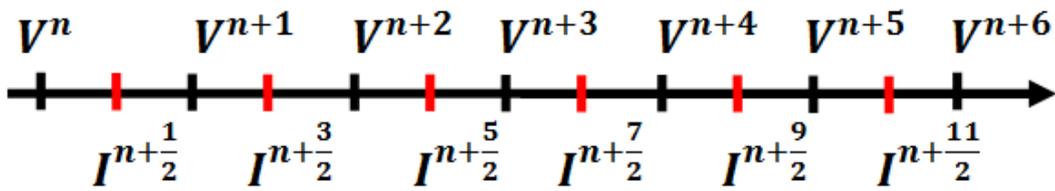


Figure III.4. Discrétisation temporelle des tensions et des courants.

Par l'utilisation de l'approximation classique de la dérivée centrée à travers les développements de Taylor limités à l'ordre deux, nous avons discrétisé les dérivées temporelles de la tension et du courant, ce qui donne :

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = \frac{I(x,t+\frac{\Delta t}{2}) - I(x,t-\frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \quad (\text{III.3})$$

$$\frac{\partial V(x,t+\frac{\Delta t}{2})}{\partial t} = \frac{V(x,t+\Delta t) - V(x,t)}{\Delta t} \quad (\text{III.4})$$

Maintenant en remplaçant ces dernières équations dans (II.18) et (II.19), et après quelques manipulations algébriques on peut écrire les représentations discrètes temporelles finales des équations des télégraphistes :

$$I_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\Delta t R_{i+\frac{1}{2}}}{2L_{i+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\Delta t R_{i+\frac{1}{2}}}{2L_{i+\frac{1}{2}}}} I_{i+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{\Delta t}{L_{i+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\Delta t R_{i+\frac{1}{2}}}{2L_{i+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial V_{i+\frac{1}{2}}^j}{\partial x} \quad (\text{III.5})$$

$$V_i^{j+1} = \frac{1 - \frac{\Delta t G_i}{2C_i}}{1 + \frac{\Delta t G_i}{2C_i}} V_i^j - \frac{\frac{\Delta t}{C_i}}{1 + \frac{\Delta t G_i}{2C_i}} \frac{\partial I_i^{j+\frac{1}{2}}}{\partial x} \quad (\text{III.6})$$

où i est l'indice de la position spatiale du nœud d'intérêt, et j est l'indice de temps.

Comme tous les schémas explicites de discrétisation en temps, le schéma du Leapfrog est limité par la condition de stabilité CFL :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_{\min}}{v_p} \quad (\text{III.7})$$

où v_p est la vitesse de propagation de l'onde (appelée aussi vitesse de phase) suivant la ligne de transmission, et Δx_{\min} est la plus petite distance entre les deux nœuds dispersés les plus proches l'un de l'autre (le plus petit pas de l'espace). En effet, cette condition exige que le plus grand pas de temps permis par la condition CFL doive être extrêmement petit quand deux nœuds de colocation infiniment proches entre eux sont présents dans le domaine de calcul. Ceci donne une simulation lourde et très longue en conséquence.

Pour contourner la limitation de la condition CFL, dans [13] les auteurs calculent numériquement un pas de temps en utilisant une technique de valeurs propres. Ceci a légèrement relaxé la condition CFL dont l'essence est la méthode des différences fines et pour laquelle en toute rigueur le correspondant sans maillage reste à découvrir. De même, pour les méthodes d'interpolation de point, des schémas inconditionnellement stables basés sur les techniques de directions alternées *Alternating-Direction Implicit* (ADI) et les polynômes de Laguerre ont été proposés respectivement dans [17] et [18]. Récemment dans [19], afin de surmonter en même temps les limitations de la condition CFL et l'erreur de dispersion numérique de la technique ADI, Zhuang *et al* ont proposé un schéma prédictor-correcteur de discrétisation en temps inconditionnellement stable appelée *Spectral Deferred Correction*

(SDC). Il est à retenir de ce paragraphe que pour les méthodes sans maillage, la condition de stabilité CFL ou tout autre critère équivalent n'a jamais été démontré mathématiquement.

Comme mentionné ci-dessus, dans ce travail nous avons appliqué le schéma de discrétisation en temps du Leapfrog et la condition de stabilité CFL pour leur simplicité. La première raison de ce travail est de rendre les méthodes sans maillage accessibles.

Revenons maintenant à la discrétisation des dérivées spatiales des deux équations dont nous parlions précédemment (III.5) et (III.6) par les trois méthodes sans maillage. L'approximation des fonctions $V(x)$ et $I(x)$ dans ces méthodes joue un rôle très important et crucial. $V(x)$ et $I(x)$ doivent être d'abord rapprochés par des fonctions d'essai, et après ceci les équations discrétisées (III.5) et (III.6) peuvent être établies et résolues. La qualité de la solution numérique dépend fortement de ces fonctions d'approximation.

Nous devrions mentionner que pour construire la fonction de forme dans les trois méthodes présentées dans ce travail, le domaine de support local (domaine d'influence) est défini au lieu du domaine de support global, où ce domaine d'influence enferme les n voisins qui sont employés pour l'interpolation à chaque nœud d'intérêt, voir figure III.3. Ceci a comme avantage d'obtenir la fonction de forme en inversant un grand nombre de petites matrices creuses, au lieu d'inverser une matrice pleine de grande taille qui rendra la méthode lourde et très coûteuse. La matrice finale assemblée est creuse, ce qui permet la modélisation des problèmes de grande taille [20].

III.3.2. Méthode d'interpolation de point polynomiale (la Méthode PIM)

III.3.2.1. Formulation de la méthode PIM

Le polynôme est l'une des premières fonctions de base utilisées pour l'interpolation. Comme son nom l'implique, la méthode PIM the *polynomial point interpolation method* construit une interpolation d'une fonction quelconque avec une base purement polynomiale, en effet, l'interpolation de $V(x)$ est donnée par [21] :

$$V(x, x_Q) \approx \sum_{k=1}^n p_k(x) \alpha_k(x_Q) = \mathbf{P}^T(x) \mathbf{a}(x_Q) \quad (\text{III.8})$$

où α_k sont les coefficients d'interpolation associés des monômes, $P_k(x)$ représente le monôme d'ordre k de la base polynomiale dans l'espace euclidien, k est l'indice du nœud voisin dans le domaine de support, n et x_Q sont respectivement le nombre et les coordonnées des nœuds voisins dans le domaine de support du nœud d'intérêt à la position x .

Le nombre de termes de la base polynomiale utilisés dans la méthode PIM devrait être égal au nombre des nœuds voisins du nœud d'intérêt. Les triangles de Pascal peuvent être employés pour déterminer l'expression de la base polynomiale, pour le cas bidimensionnel voir figure III.5. Dans des problèmes unidimensionnels comme les LTNU dans notre cas, les termes de la base polynomiale sont donnés par le vecteur suivant :

$$P^T = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} \quad (III.9)$$

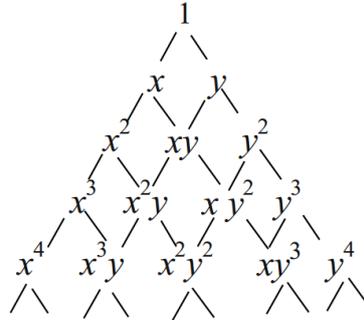


Figure III.5. Le triangle de Pascal (cas bidimensionnel).

Notons que V^e sont les valeurs interpolées de la tension aux nœuds voisins, c'est-à-dire :

$$v^e = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T \quad (III.10)$$

\mathbf{a} , le vecteur des coefficients associés d'interpolation des monômes de la base :

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T \quad (III.11)$$

et P_Q , la matrice carrée des moments définie par :

$$P_Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^{n-1} \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & \dots & x_4^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (III.12)$$

En remplace ces dernières équations dans la forme matricielle de l'équation (III.8), et on obtient :

$$v^e = \mathbf{P}_Q \mathbf{a} \quad (\text{III.13})$$

Si l'inverse de la matrice des moments existe (P_Q n'est pas singulière), nous pouvons obtenir les coefficients indéterminés a_k , par la résolution du système linéaire suivant :

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_Q^{-1} v^e \quad (\text{III.14})$$

On note que les coefficients a_k restent constants même si la coordonnée x du nœud d'intérêt change dans le domaine de support local, tant que le même ensemble des nœuds voisins n est employé dans l'interpolation, parce que la matrice P_Q est une matrice des constantes et dépend uniquement des coordonnées de cet ensemble des nœuds voisins.

En substituant (III.14) dans (III.8) on a :

$$V(x, x_Q) \approx \mathbf{P}^T(x) \mathbf{P}_Q^{-1} v^e = \Psi(x) v^e \quad (\text{III.15})$$

Avec $\Psi(x)$ est la fonction de forme définie par :

$$\Psi(x) = \mathbf{P}^T(x) \mathbf{P}_Q^{-1} = \{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)\} \quad (\text{III.16})$$

III.3.2.2. les propriétés de la fonction de forme de la méthode PIM

La fonction de forme de la PIM et autres méthodes d'interpolation de point partagent les propriétés suivantes avec les fonctions de forme de la méthode éléments finis [22] :

- **La partition unité**
$$\sum_{k=1}^n \psi_k(x) = 1 \quad (\text{III.17})$$

- **La propriété du delta de Kronecker**
$$\psi_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & (k = i) \\ 0 & (k \neq i) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Ce qui implique :
$$v(x_k, x_Q) = v_k \quad (\text{III.19})$$

- **La consistance linéaire**
$$x = \sum_{k=1}^n \Psi_k(x) x_k \quad (\text{III.20})$$

Enfin, les dérivées de $\Psi(x)$ sont directement calculables, parce que la base utilisée dans la méthode PIM a une forme polynomiale. En effet, de (III.15) la première dérivée spatiale de $V(x)$ est approchée par [21] :

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \approx \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} V^e = \sum_{k=1}^n \partial \psi_k(x) V_k \quad (\text{III.21})$$

Dans ce cas, l'approximation discrète de la dérivée spatiale de la tension est définie par :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}}^j \approx \sum_{k=1}^n \partial \psi_k \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) V_k^j \quad (\text{III.22})$$

De la même façon, l'approximation discrète de la dérivée spatiale du courant est définie par :

$$\frac{\partial I_i}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \approx \sum_{k=1}^n \partial \psi_k(x) I_k^{j+\frac{1}{2}} \quad (\text{III.23})$$

où i est l'indice de la position spatiale du nœud d'intérêt, j est l'indice de temps et k est l'indice des positions spatiales des nœuds voisins.

Dans ce cas, la discrétisation globale de l'équation des télégraphistes de tension sera exprimée par le remplacement de (III.22) dans (III.5) et on trouve :

$$I_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\Delta t R}{2L} \Big|_{i+\frac{1}{2}}}{1 + \frac{\Delta t R}{2L} \Big|_{i+\frac{1}{2}}} I_{i+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{\Delta t}{L} \Big|_{i+\frac{1}{2}}}{1 + \frac{\Delta t R}{2L} \Big|_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^n \partial \psi_k \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) V_k^j \quad (\text{III.23})$$

De la même façon, la discrétisation globale de l'équation des télégraphistes de courant sera exprimée par le remplacement de (III.23) dans (III.6) et on trouve :

$$V_i^{j+1} = \frac{1 - \frac{\Delta t G_i}{2C_i}}{1 + \frac{\Delta t G_i}{2C_i}} V_i^j - \frac{\frac{\Delta t}{C_i}}{1 + \frac{\Delta t G_i}{2C_i}} \sum_{k=1}^n \partial \psi_k(x) I_k^{j+\frac{1}{2}} \quad (\text{III.24})$$

À partir de la discrétisation globale des équations des télégraphistes (III.23) et (III.24) le courant et la tension en chaque point le long de la LTNU et à chaque instant t , sont calculés à l'aide d'un procédé itératif présenté sous forme d'organigramme dans la sous-section III.4.

III.3.2.3. Les avantages et les inconvénients de la méthode PIM

La méthode PIM présente certains avantages essentiellement la simplicité de mise en œuvre, la bonne précision, et elle est plus rapide que les autres méthodes d'interpolation de point comme nous le montreront par la suite. En revanche, contrairement à d'autres méthodes sans maillage, le problème de la singularité qui se produit dans un certain nombre de situations est l'inconvénient majeur de cette méthode, où la matrice des moments P_Q devient non inversible. Quelques techniques ont été proposées pour surmonter cet inconvénient par Liu *et al* dans [23-25], y compris la triangulation de la matrice des moments P_Q [23], déplacement aléatoire des nœuds voisins [24], transformation du système de coordonnées initial [22], et l'addition d'une fonction de base radiale (RBF) pour construire la fonction de forme de la méthode [25]. Dans [22] Liu, qui est l'inventeur des méthodes d'interpolation de point a recommandé que la technique la plus pratique pour surmonter le problème de la singularité est d'utiliser les RBFs pour la construction de la fonction de forme.

Certainement, l'addition des RBFs à la base polynomiale dans l'approximation est une très bonne idée afin de garantir une matrice des moments inversible pour n'importe quelle distribution des nœuds dans le domaine spatial. En effet ceci fait l'objet des deux sous-sections suivantes.

III.3.3. La méthode sans maillage basée sur les fonctions de base radiales (la méthode RBF-MLM)

III.3.3.1. Formulation de la méthode RBF-MLM

Parmi les différentes méthodes sans maillage, la méthode RBF-MLM *MeshLess Method based on Radial Basis Functions* est devenue un outil populaire pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDPs). Cette méthode est une simple généralisation de la méthode Multiquadrique RBF (la méthode MQ) présentée par Kansa [26] en 1990 pour résoudre des EDPs de type elliptique, parabolique, et hyperbolique.

Comme son nom le suggère, la méthode RBF-MLM construit une approximation d'une fonction quelconque par des fonctions de base radiale, en effet, l'interpolation de $V(x)$ est donnée par [26] :

$$V(x, x_Q) \approx \sum_{k=1}^n B_k(x) b_k(x_Q) = \mathbf{B}^T(x) \mathbf{b}(x_Q) \quad (\text{III.25})$$

où b_k sont les coefficients d'interpolation, $B_k(x)$ représente la fonction de base radiale dans l'espace euclidien, k est l'indice des nœuds voisins dans le domaine de support, n et x_Q sont respectivement le nombre et les coordonnées des nœuds voisins dans le domaine de support du nœud d'intérêt à la position x .

Le long du développement des méthodes sans maillage, plusieurs types des fonctions de base radiales ont été présentés. Les RBFs les plus utilisées sont présentées ci-après Figure III.6, où toutes ces fonctions sont commandées en terme de planéité par le paramètre positif c appelé le paramètre de forme. r est la distance euclidienne entre le nœud d'intérêt et son voisin :

✓ Gaussienne : $B(r, c) = e^{-c^2 r^2}$ (III.26)

✓ Multiquadrique (MQ) : $B(r, c) = \sqrt{1 + c^2 r^2}$ (III.27)

✓ Quadrique inverse (IQ) : $B(r, c) = \frac{1}{1 + c^2 r^2}$ (III.28)

✓ Multiquadrique Inverse (IMQ) $B(r, c) = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2 r^2}}$ (III.29)

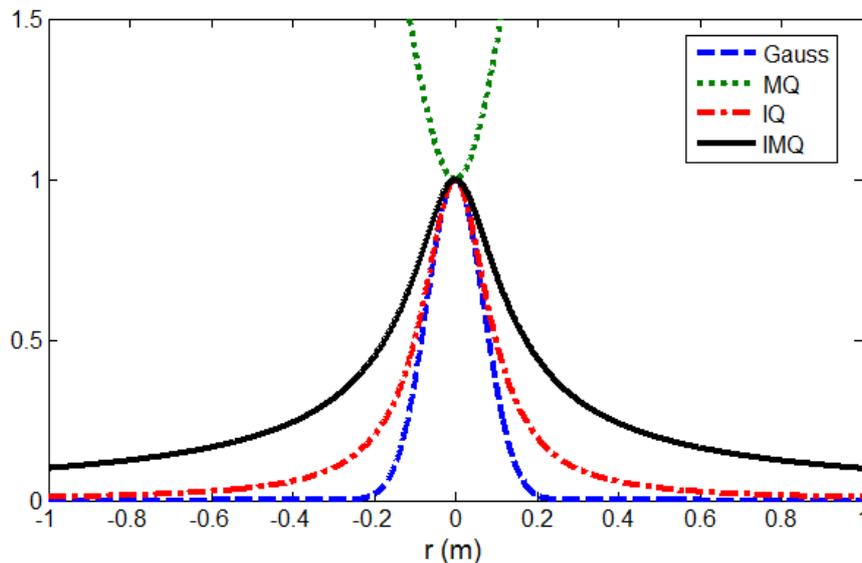


Figure III.6. Fonctions de base radiales usuelles avec $c=10$ dans 1D.

Dans nos travaux, nous avons utilisé la fonction IMQ comme fonction de base radiale. Pour des problèmes à une dimension comme les équations télégraphistes, la fonction IMQ peut être réduite à la forme suivante pour un nœud d'intérêt situé à x_i et un nœud voisin à x_k :

$$B_k(x_i, c) = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2 \|x_i - x_k\|^2}} \quad (\text{III.30})$$

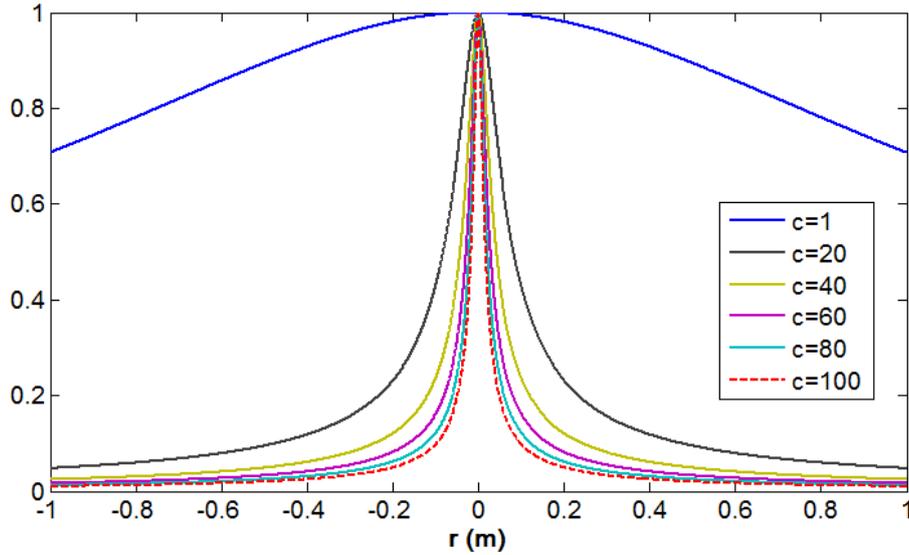


Figure III.7. Fonction de base radiale IMQ pour différentes valeurs du paramètre de forme c .

Notons par V^e les valeurs interpolées de la tension aux nœuds voisins, c'est-à-dire :

$$v^e = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T \quad (\text{III.31})$$

b , le vecteur des coefficients associés d'interpolation de la RBF :

$$\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}^T \quad (\text{III.32})$$

et B_Q , la matrice des moments définie par :

$$B_Q = \begin{bmatrix} B_1(\|x_1 - x_1\|) & B_1(\|x_1 - x_2\|) & \cdots & B_1(\|x_1 - x_n\|) \\ B_2(\|x_2 - x_1\|) & B_2(\|x_2 - x_2\|) & \cdots & B_2(\|x_2 - x_n\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n(\|x_n - x_1\|) & B_n(\|x_n - x_2\|) & \cdots & B_n(\|x_n - x_n\|) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (\text{III.33})$$

On remplace ces dernières équations dans la forme matricielle de l'équation (III.25), et on obtient :

$$\mathbf{v}^e = \mathbf{B}_Q \mathbf{b} \quad (\text{III.34})$$

Donc, nous pouvons obtenir les coefficients indéterminés b_k en résolvant le système linéaire suivant :

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{v}^e \quad (\text{III.35})$$

On note que les coefficients b_k restent constants même si la coordonnée x du nœud d'intérêt change dans le domaine de support local, tant que le même ensemble des nœuds voisins n sont employés dans l'interpolation, parce que la matrice B_Q est une matrice des constantes dépend seulement des distances euclidiennes entre les nœuds voisins.

La substitution de (III.35) dans (III.25) donne :

$$V(x, x_Q) \approx \mathbf{B}^T(x) \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{v}^e = \Psi(x) \mathbf{v}^e \quad (\text{III.36})$$

Avec $\Psi(x)$ la fonction de forme définie par :

$$\Psi(x) = \mathbf{P}^T(x) \mathbf{P}_Q^{-1} = \{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)\} \quad (\text{III.37})$$

Enfin, par l'utilisation de la première dérivée de la fonction IMQ présentée dans (III.29), on peut calculer facilement la première dérivée de $\Psi(x)$. En effet, la première dérivée spatiale de $V(x)$ est approchée par :

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \approx \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \mathbf{v}^e = \sum_{k=1}^n \partial \psi_k(x) \mathbf{v}_k \quad (\text{III.38})$$

Dans ce cas, l'approximation discrète de la dérivée spatiale de la tension est définie par :

$$\frac{\partial V^j}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} \approx \sum_{k=1}^n \partial \psi_k \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) \mathbf{v}_k^j \quad (\text{III.39})$$

De la même façon, l'approximation discrète de la dérivée spatiale du courant est définie par :

$$\frac{\partial I_i^{j+\frac{1}{2}}}{\partial x} \approx \sum_{k=1}^n \partial \psi_k(x) I_k^{j+\frac{1}{2}} \quad (\text{III.40})$$

où i est l'indice de la position spatiale du nœud d'intérêt, j est l'indice de temps et k est l'indice des positions spatiales des nœuds voisins.

Dans ce cas, la discrétisation globale de l'équation des télégraphistes de courant sera exprimée par le remplacement de (III.39) dans (III.5) et on trouve :

$$I_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\Delta t R_{i+\frac{1}{2}}}{2L_{i+\frac{1}{2}}}}{\Delta t R_{i+\frac{1}{2}}} I_{i+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{\Delta t}{L_{i+\frac{1}{2}}}}{\Delta t R_{i+\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^n \partial \psi_k(x_{i+\frac{1}{2}}) V_k^j \quad (III.41)$$

De la même façon, la discrétisation globale de l'équation des télégraphistes de tension sera exprimée par le remplacement de (III.40) dans (III.6) et on trouve :

$$V_i^{j+1} = \frac{1 - \frac{\Delta t G_i}{2C_i}}{\Delta t G_i} V_i^j - \frac{\frac{\Delta t}{C_i}}{\Delta t G_i} \sum_{k=1}^n \partial \psi_k(x) I_k^{j+\frac{1}{2}} \quad (III.42)$$

À partir de la discrétisation globale des équations des télégraphistes (III.41) et (III.42) le courant et la tension en chaque point le long de la LTNU et à chaque instant t , sont calculés à l'aide d'un procédé itératif présenté sous forme d'organigramme dans la sous-section III.4.

III.3.3.2. Les avantages et les inconvénients de la méthode RBF-MLM

Comme toutes les méthodes d'interpolation de point, la méthode RBF-MLM offre une grande liberté et flexibilité de la discrétisation du domaine spatial. Mais habituellement, cette méthode donne des résultats moins précis que celles de la méthode PIM, parce que la fonction radiale ne peut pas produire les polynômes linéaires avec exactitude. Cette méthode souffre aussi de la grande sensibilité aux variations du paramètre c , ce qui rend la détermination de ce dernier très difficile. D'autre part l'addition d'un polynôme à la RBF peut améliorer la précision des résultats, assurer l'inversibilité de la matrice des moments, et réduire l'effet du paramètre c sur l'exactitude des résultats [22]. Ceci fait l'objet la sous-section suivante.

III.3.4. Méthode d'interpolation de point radiale (METHODE RPIM)

III.3.4.1. Formulation de la méthode RPIM

Afin d'éviter les problèmes de la singularité et la faible précision d'interpolation des polynômes linéaires des méthodes PIM et RBF-MLM, des efforts ont été dépensés pour améliorer le schéma d'interpolation des nœuds. En effet, construire une fonction de base radiale et polynomiale simultanément par l'addition d'une RBF à la base polynomiale pourrait être l'une des meilleures techniques sans maillages. L'origine de cette méthode appelée la Méthode RPIM *the Radial Point Interpolation Methode* a été introduite par Liu et Gu [25]-[27] en 2001.

L'interpolation de $V(x)$ par l'approximation RPIM est donnée par [25] :

$$V(x, x_Q) \approx \sum_{k=1}^n B_k(x) b_k(x_Q) + \sum_{z=1}^m P_z(x) \alpha_z(x_Q) = \mathbf{B}^T(x) \mathbf{b}(x_Q) + \mathbf{P}^T(x) \mathbf{a}(x_Q) \quad (\text{III.43})$$

$B_k(x)$ représente la fonction radiale où, dans nos codes nous avons sélectionné la fonction IMQ, $P_z(x)$ représente le monôme d'ordre z de la base polynomiale, k est l'indice des nœuds voisins, n et x_Q sont respectivement le nombre et les coordonnées des nœuds voisins du nœud d'intérêt à la position x , b_k et α_z sont les coefficients d'interpolation, et m le nombre de monômes dans la base polynomiale P

Notons que V^e sont les valeurs interpolées de la tension aux nœuds voisins, c'est-à-dire :

$$\mathbf{v}^e = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T \quad (\text{III.44})$$

\mathbf{b} , le vecteur des coefficients associés d'interpolation de la RBF :

$$\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}^T \quad (\text{III.45})$$

\mathbf{a} , le vecteur des coefficients associés d'interpolation des monômes de la base polynomiale :

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T \quad (\text{III.46})$$

et \mathbf{B}_Q , la matrice des moments définie par :

$$\mathbf{B}_Q = \begin{bmatrix} B_1(\|x_1 - x_1\|) & B_1(\|x_1 - x_2\|) & \cdots & B_1(\|x_1 - x_n\|) \\ B_2(\|x_2 - x_1\|) & B_2(\|x_2 - x_2\|) & \cdots & B_2(\|x_2 - x_n\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n(\|x_n - x_1\|) & B_n(\|x_n - x_2\|) & \cdots & B_n(\|x_n - x_n\|) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (\text{III.47})$$

et \mathbf{P}_m , la matrice définie par :

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{m-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{m-1} \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & \cdots & x_4^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (\text{III.48})$$

On remplace ces dernières équations dans la forme matricielle de l'équation (III.43), et on obtient :

$$v^e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_Q & \mathbf{P}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (\text{III.49})$$

Afin de garantir une approximation unique (III.49) doit remplir la condition d'orthogonalité $\mathbf{P}_m \mathbf{a} = 0$. Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} v^e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_Q & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (\text{III.50})$$

où la matrice des moments \mathbf{G} est une matrice symétrique. De cette dernière nous pouvons obtenir les coefficients d'interpolation indéterminés en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} v^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.51})$$

Notez qu'habituellement l'ordre du polynôme utilisé dans la matrice des moments \mathbf{G} est relativement bas et la matrice \mathbf{G}^{-1} existe pour n'importe quelle distribution des nœuds, par conséquent, il n'y a aucun problème de singularité également si un nombre faible de nœuds est employé dans le domaine de support local.

La substitution de (III.51) dans (III.43) donne :

$$V(x, x_Q) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T(x) & \mathbf{P}^T(x) \end{bmatrix} \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} v^e \\ 0 \end{bmatrix} = \Psi''(x) v^e \quad (\text{III.52})$$

avec, $\Psi''(x)$ une fonction de forme préliminaire définie par :

$$\Psi''(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T(x) & \mathbf{P}^T(x) \end{bmatrix} \mathbf{G}^{-1} = \{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \psi_{n+1}(x), \dots, \psi_{n+m}(x)\} \quad (\text{III.53})$$

Pour la procédure itérative on ne doit prendre que les n premiers termes de (III.53) qui correspondent seulement au vecteur des nœuds voisins, ce qui donne la fonction de forme de la méthode RPIM :

$$\Psi(\mathbf{x}) = \{\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})\} \quad (\text{III.54})$$

Donc, comme en a vu précédemment la discrétisation globale de l'équation des télégraphistes de courant à la même expression que (III.41), et la discrétisation globale de l'équation des télégraphistes de tension a la même expression que (III.42). À partir des ces dernières, le courant et la tension à chaque point le long de la LTNU et à chaque instant t , sont calculés à l'aide d'un procédé itératif présenté sous forme d'organigramme dans la sous-section III.4.

III.3.4.2. Les avantages et les inconvénients de la méthode RPIM

La méthode RPIM est devenue la méthode la plus populaire parmi les méthodes d'interpolation de point, parce qu'elle a effectivement résolu le problème de la singularité de la méthode PIM, et la faible précision de la méthode RBF-MLM. De même, la méthode RPIM peut fournir une bonne approximation des polynômes linéaires contrairement à la méthode RBF-MLM.

Malgré cela, l'utilisation des RBFs dans les fonctions de forme des méthodes RPIM et RBF-MLM exige d'autres considérations, comment choisir :

- le type de RBF,
- la taille du domaine de support
- la valeur du paramètre de forme c .

Les deux méthodes radiales ont habituellement des couts en calcul plus élevés que la méthode PIM.

III.4. Procédé de solution des méthodes d'interpolation de point

Les trois méthodes précédentes suivent un procédé semblable une fois que la discrétisation globale des équations des télégraphistes est établie. Par conséquent, afin de trouver les valeurs du courant et de la tension en chaque point le long de la LTNU et à chaque instant t , le schéma du Leapfrog a été employé sur la discrétisation globale des équations des télégraphistes. L'organigramme de nos programmes Matlab est représenté sur la figure III.8.

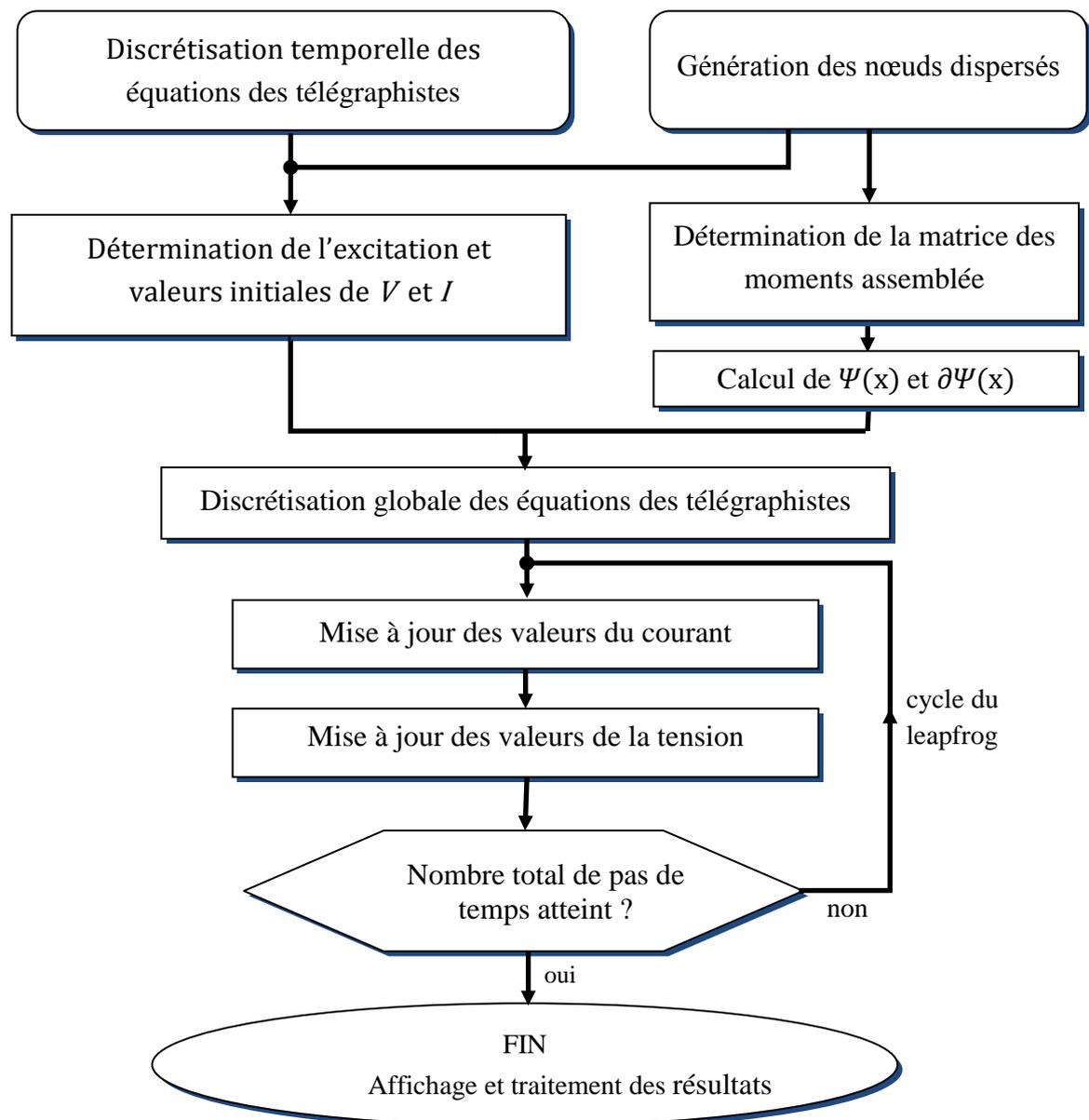


Figure III.8. Organigramme du procédé des méthodes d'interpolation de point pour résoudre les équations des télégraphistes du premier ordre dans le domaine temporel.

Cet Organigramme nous indique que ces méthodes :

- D'abord, discrétisent la LTNU par un ensemble de nœuds dispersés, et ensuite définissent les valeurs des paramètres linéiques en chaque nœud.
- Déterminent le domaine de support, trouvent les nœuds voisins dans ce domaine pour chaque nœud d'intérêt, et établissent la matrice des moments.
- Calculent la fonction de forme $\Psi(x)$ et sa première dérivée $\partial\Psi(x)$ par l'inversion de la matrice des moments.
- Discrétisent les dérivées temporelles de la tension et du courant par l'utilisation de l'approximation classique de la dérivée centrée à travers les développements de Taylor.
- Initialisent les valeurs de tension et de courant à 0 et déterminent l'excitation e_s .
- Mettent à jour I et V itérativement l'un à partir de l'autre en utilisant la discrétisation globale des équations des télégraphistes (Le schéma de Leapfrog).
- Affichent et traitent les résultats.

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les trois méthodes sans maillage d'interpolation de point. Nous avons choisi ces méthodes pour la résolution des équations des lignes de transmissions non-uniformes à cause de leur réputation dans d'autres domaines de la science, et de leur flexibilité et capacité à simuler des problèmes complexes. Elles demandent des coûts de calculs moindres que les méthodes numériques classiques. Les approximations de ces méthodes sont essentiellement basées sur des interpolations polynomiales, radiales, ou mixtes. La méthode PIM montre une simplicité de mise en œuvre, et elle est plus légère que les deux autres méthodes comme nous le montreront par la suite, mais, la matrice des moments de cette méthode souffre du problème de singularité. La méthode RBF-MLM ne présente pas ce problème, mais elle conduit généralement à une précision numérique moins bonne que celle des autres méthodes. Un moyen possible de remédier à ces deux problèmes est d'utiliser la méthode RPIM qui est basée sur une approximation mixte, polynomiale et radiale.

Dans le prochain chapitre, nous présentons une comparaison des performances numériques, essentiellement des points de vue de la convergence et la précision, entre ces méthodes pour deux cas d'application.

Références bibliographiques III

- [1] GINGOLD, Robert A. et MONAGHAN, Joseph J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 1977, vol. 181, no 3, p. 375-389.
- [2] LUCY, Leon B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The astronomical journal*, 1977, vol. 82, p. 1013-1024.
- [3] NAYROLES, B., TOUZOT, G., et VILLON, P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational mechanics*, 1992, vol. 10, no 5, p. 307-318.
- [4] BELYTSCJKO, Ted, LU, Yun Yun, et GU, Lei. Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 1994, vol. 37, no 2, p. 229-256.
- [5] LIU, Gui-Rong et GU, YuanTong. A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol. 50, no 4, p. 937-951.
- [6] KANSA, Edward J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with applications*, 1990, vol. 19, no 8, p. 127-145.
- [7] MARECHAL, Yves, COULOMB, J. L., MEUNIER, G., *et al.* Use of the diffuse element method for electromagnetic field computation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 1993, vol. 29, no 2, p. 1475-1478.
- [8] CINGOSKI, Vlatko, MIYAMOTO, Naoki, et YAMASHITA, Hideo. Element-free Galerkin method for electromagnetic field computations. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 1998, vol. 34, no 5, p. 3236-3239.
- [9] VIANA, Simone Aparecida et MESQUITA, Renato Cardoso. Moving least square reproducing kernel method for electromagnetic field computation. *IEEE transactions on magnetics*, 1999, vol. 35, no 3, p. 1372-1375.

- [10] HO, S. L., YANG, Shiyu, MACHADO, José Márcio, *et al.* Application of a meshless method in electromagnetics. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 2001, vol. 37, no 5, p. 3198-3202.
- [11] KAUFMANN, Thomas, FUMEAUX, Christophe, et VAHLDIECK, Rüdiger. The meshless radial point interpolation method for time-domain electromagnetics. In : *Microwave Symposium Digest, 2008 IEEE MTT-S International*. IEEE, 2008. p. 61-64.
- [12] LAI, S. J., WANG, B. Z., et DUAN, Yong. Meshless radial basis function method for transient electromagnetic computations. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 2008, vol. 44, no 10, p. 2288-2295.
- [13] YU, Yiqiang et CHEN, Zhizhang. A 3-D radial point interpolation method for meshless time-domain modeling. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 2009, vol. 57, no 8, p. 2015-2020.
- [14] AFSARI, Arman et MOVAHHEDI, Masoud. An adaptive radial point interpolation meshless method for simulation of electromagnetic and optical fields. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 2014, vol. 50, no 7, p. 1-8.
- [15] AFSARI, Arman, CHEHRAZI, Akram, et MOVAHHEDI, Masoud. Toward a computational multiresolution analysis for radial point interpolation meshless method. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 2015, vol. 28, no 1, p. 1-20.
- [16] YANG, Shunchuan, CHEN, Zhizhang, YU, Yiqiang, *et al.* A divergence-free meshless method based on the vector basis function for transient electromagnetic analysis. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 2014, vol. 62, no 7, p. 1409-1416.
- [17] YU, Yiqiang et CHEN, Zhizhang. Towards the development of an unconditionally stable time-domain meshless method. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 2010, vol. 58, no 3, p. 578-586.
- [18] CHEN, Xiaojie, CHEN, Zhizhang, YU, Yiqiang, *et al.* An unconditionally stable radial point interpolation meshless method with Laguerre polynomials. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 2011, vol. 59, no 10, p. 3756-3763.

- [19] ZHUANG, Chijie, ZENG, Rong, ZHANG, Bo, *et al.* Spectral Deferred Correction Method for FDTD. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 2015, vol. 51, no 3, p. 1-4.
- [20] KAUFMANN, T., YU, Y., ENGSTRÖM, Christian, *et al.* Recent developments of the meshless radial point interpolation method for time-domain electromagnetics. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 2012, vol. 25, no 5-6, p. 468-489.
- [21] LIU, Gui-Rong et GU, YuanTong. A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol. 50, no 4, p. 937-951.
- [22] LIU, G. R. et GU, Y. T. An introduction to meshfree methods and their programming. 2005. *Springer Berlin..*
- [23] LIU, G. R. et GU, Y. T. A matrix triangularization algorithm for the polynomial point interpolation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, vol. 192, no 19, p. 2269-2295.
- [24] LIU, Gui-Rong. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. Taylor & Francis, USA. 2009.
- [25] WANG, J. G. et LIU, G. R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 54, no 11, p. 1623-1648.
- [26] KANSA, Edward J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with applications*, 1990, vol. 19, no 8, p. 127-145.
- [27] LIU, G. R. et GU, Y. T. A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids. *Journal of Sound and vibration*, 2001, vol. 246, no 1, p. 29-46.

IV. EXEMPLES NUMÉRIQUES



IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, les différentes méthodes d'interpolation de point présentées précédemment sont testées sur deux exemples de LTNUs distincts. Dans un premier temps, une comparaison des résultats de calcul d'une LTNU de type linéaire a été conduite entre la méthode PIM, la méthode RBF-MLM, la méthode RPIM, la méthode FDTD, et la méthode d'expansion en ondelettes. Afin de montrer les avantages potentiels de la méthode RPIM, tels que la discrétisation irrégulière et la convergence rapide, une comparaison avec les résultats de la méthode FDTD est discutée dans le deuxième exemple.

IV.2. LTNU de type linéaire "taper Line"

Dans ce premier exemple les méthodes PIM, RBF-MLM, RPIM, FDTD, et la méthode d'expansion en ondelette ont été appliqués sur une LTNU de type linéaire, voir figure IV.1. Les données de cette transition sont celles de la référence [1], elles sont récapitulées dans le tableau 1. La figure IV.2 montre les profils spatiaux des paramètres linéiques. Cette ligne est excitée par la source de tension e_s , dont la dépendance en temps est donnée par :

$$e_s(t) = \begin{cases} 0 & (t < t_1) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right) & (t_1 < t < t_2) \\ 1 & (t_2 < t) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où $t_1 = 1 \text{ ns}$, $t_2 = 1.5 \text{ ns}$

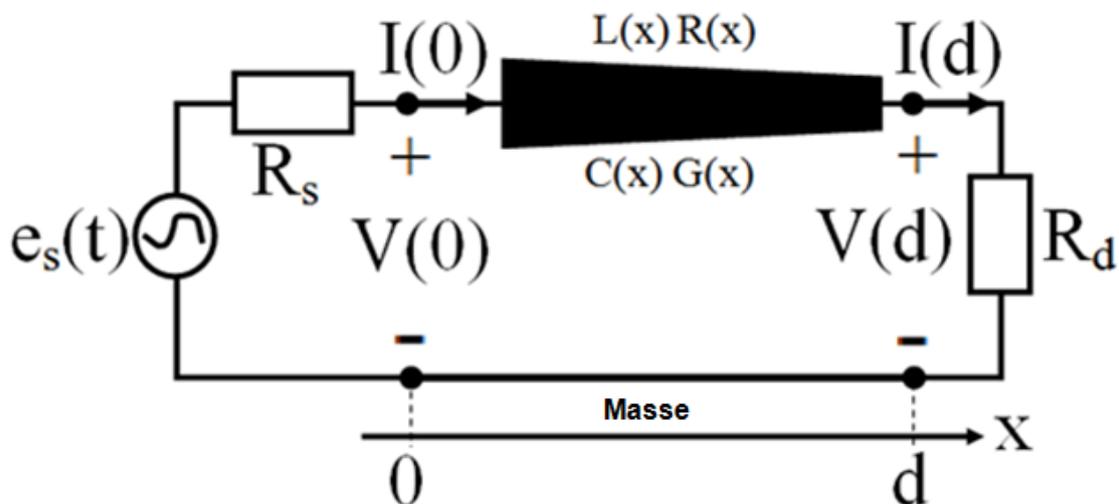


Figure IV.1. Ligne de transmission non-uniforme à variation linéaire d'impédance.

R_s	50Ω	R_d	100Ω
L_0	360 nH/m	R_0	$100 \Omega/\text{m}$
C_0	100 pF/m	G_0	0.01 S/m
$Z(0)$	60Ω	$Z(D)$	120Ω
$f(x)$	$1 + \varepsilon x$	D	8 cm
$L(x)$	$L_0 f(x)$	$R(x)$	$R_0 f(x)$
$C(x)$	$C_0 / f(x)$	$G(x)$	$G_0 / f(x)$
v_p	$(L_0 C_0)^{-1/2}$	ε	$1/D$

Tableau 1. Les paramètres de la ligne non-uniforme à variation linéaire d'impédance.

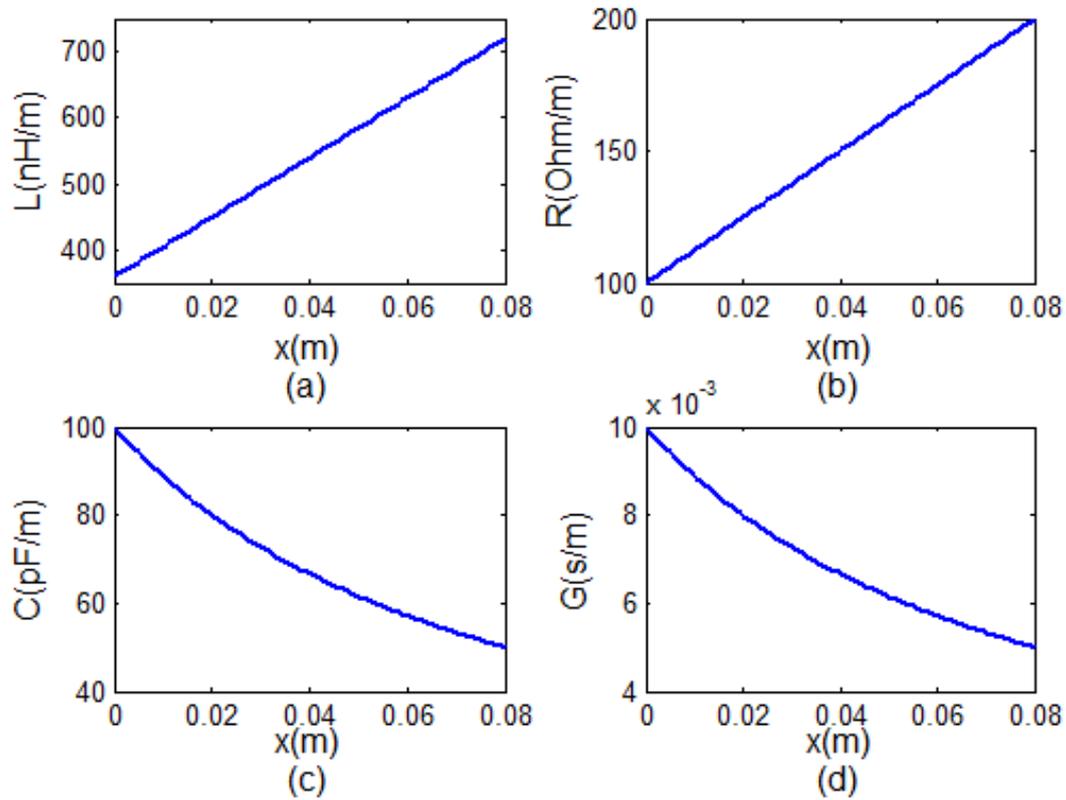


Figure IV.2. Profils spatiaux des paramètres linéiques de la ligne non-uniforme à variation linéaire d'impédance.

La figure IV.3 montre la tension à tous les points de la ligne, calculée par la méthode FDTD.

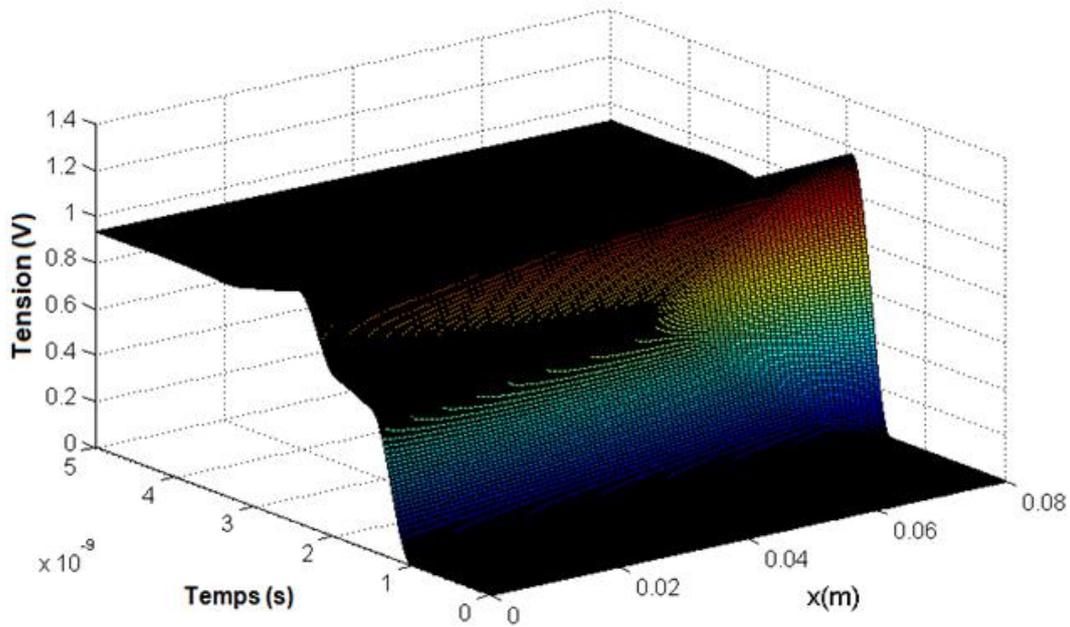


Figure IV.3. La tension à tous les points de la ligne non-uniforme à variation linéaire d'impédance, calculée par la méthode FDTD.

La ligne est divisée en sept segments $N = 7$, et le pas de temps $\Delta t = 0.08$ ns. La figure IV.4 montre les variations des tensions aux deux extrémités de la ligne $V(0)$, et $V(d)$, calculées par les trois méthodes présentées précédemment, et comparées aux résultats obtenus par la méthode FDTD et la méthode d'expansion en ondelettes [1]. On voit que les précisions de toutes ces méthodes sont d'un niveau équivalent, les courbes étant presque confondues.

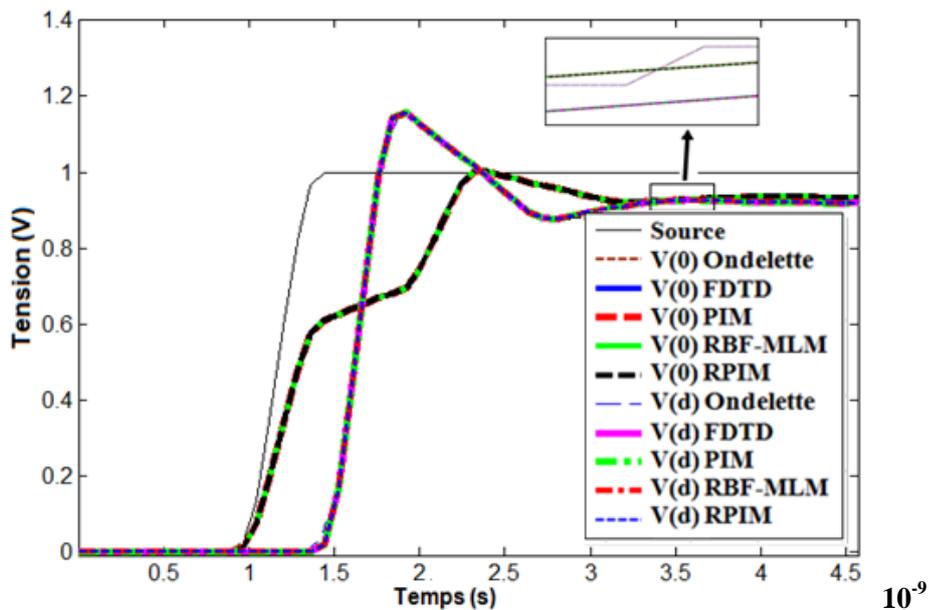


Figure IV.4. Comparaison entre les résultats des méthodes PIM, RBF-MLM, RPIM, FDTD, et la méthode d'expansion en ondelette, pour la ligne non-uniforme à variation linéaire d'impédance.

Dans cet exemple, les tailles du domaine du support local ont été choisies pour contenir seulement 2 points de collocation (les nœuds voisins), et le paramètre de forme $c = 0.1$. Dans le cas de la méthode RPIM, le nombre des monômes m de la fonction de base polynomiale est égal à 2.

À titre indicatif, nous fournissons dans le tableau 2 les erreurs relatives et les temps de calcul obtenus dans ce premier exemple en utilisant les différentes méthodes et prenant les résultats calculés par FDTD avec la résolution de $N = 100$ segments comme référence.

Méthode	erreurs relatives $V(0)$	erreurs relatives $V(d)$	temps de prétraitement (s)	temps de Solution (s)
PIM	1.28e-15	1.25e-15	0.0139	0.2966
<i>RBF-MLM</i>	6.87e-09	8.49e-08	0.2749	0.3140
RPIM	1.88e-15	4.71e-15	0.3272	0.3341

Tableau 2. Comparaison des résultats des méthodes PIM, RBF-MLM, et RPIM. en utilisant les résultats de la méthode FDTD avec $N = 100$ segments comme référence.

Les temps de prétraitement incluent la durée de la préparation des données, à savoir notamment la recherche des nœuds voisins et le calcul de la fonction de forme.

Les erreurs relatives sont définies comme suit :

$$relerr = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i^{ref} - v_i^{sans-maillage}|}{\sum_{i=1}^n |v_i^{ref}|} \quad (IV.2)$$

où n est le nombre de pas de temps.

Tous les temps d'exécution sont basés sur des codes MATLAB R2011a exécutés sur un processeur Intel Dual Core à 2.79 GHz fonctionnant sous Windows7 et 2 Go de RAM.

Comme il peut être vu clairement, la méthode PIM surpasse la méthode RPIM et la méthode RBF-MLM en termes de précision et de temps de calcul, où la méthode PIM gagne

plus de 58 % du temps CPU en comparaison avec la RPIM et la RBF-MLM ce qui la rend la plus rapide de toutes les méthodes; ceci grâce de l'utilisation d'une base polynomiale pure pour la construction de la fonction de forme. D'une autre part cette méthode peut souffrir du problème de singularité, voir section III.3.2.3. Par ailleurs, on remarque que la Méthode RPIM fournit le même niveau du temps de calcul que celui de la méthode RBF-MLM, mais elle a le plus haut niveau de précision. A notre avis, la méthode RPIM fournit un meilleur compromis entre l'exactitude et le temps de calcul, en plus la méthode RPIM peut surmonter les problèmes de singularité manifestés dans la méthode PIM et la faible précision de la méthode RBF-MLM. Par conséquent, la méthode RPIM est celle qui convient le mieux pour l'analyse des cas très complexes.

IV.3. LTNU de type Balun

La méthode RPIM améliore de manière significative l'efficacité du calcul numérique. Par conséquent, on la recommande pour l'analyse de n'importe quelle ligne de transmission de forme arbitraire, en particulier pour l'analyse des lignes de grande taille. Afin de montrer les avantages de cette méthode sans maillage, tel que la discrétisation irrégulière et la convergence rapide, des comparaisons entre les méthodes RPIM et FDTD ont été effectués sur un cas beaucoup plus complexe que la ligne à variation linéaire d'impédance. Il s'agit de la ligne balun, mot composé de l'anglais *balanced-unbalanced* qui désigne tout dispositif ayant des parties symétriques et d'autre non par rapport à la masse. Le balun a une longueur totale de 10 cm, il est terminée par une charge à l'entrée $R_s = 50 \Omega$, et une autre à la sortie $R_d = 50 \Omega$. La figure IV.5 montre le schéma du circuit de cet exemple.

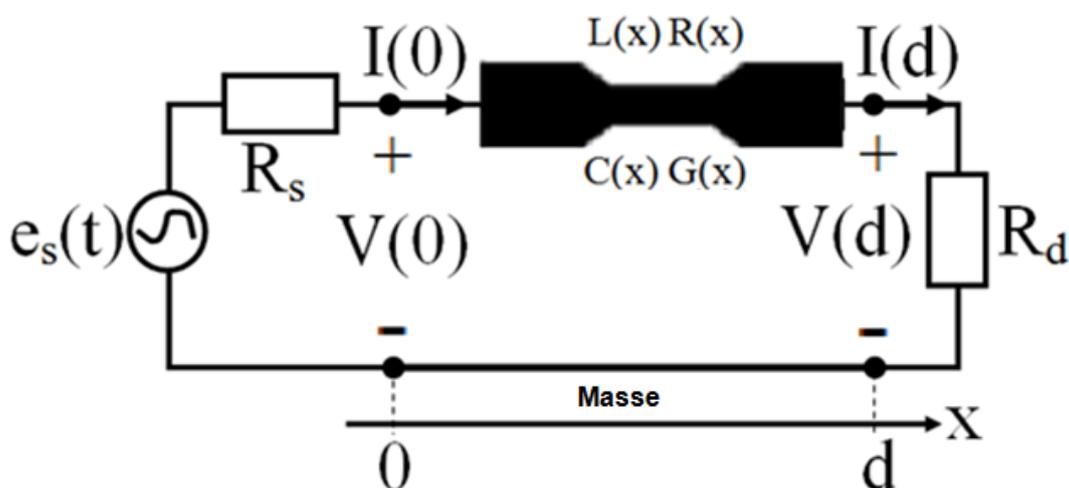


Figure IV.5. Ligne de transmission non-uniforme type Balun.

Ce Balun est excité par une impulsion gaussienne e_s , dont la dépendance en temps est donnée par

$$e_s(t) = \exp\left(-\frac{t-t_1}{t_w}\right)^2 \quad (\text{IV.3})$$

où $t_1 = 0.2$ ns, $t_w = 0.05$ ns.

La figure IV.6 et figure IV.7 montrent respectivement le profil de l'impédance caractéristique Z_0 qui varie entre 50Ω et 250Ω et les profils des paramètres linéiques.

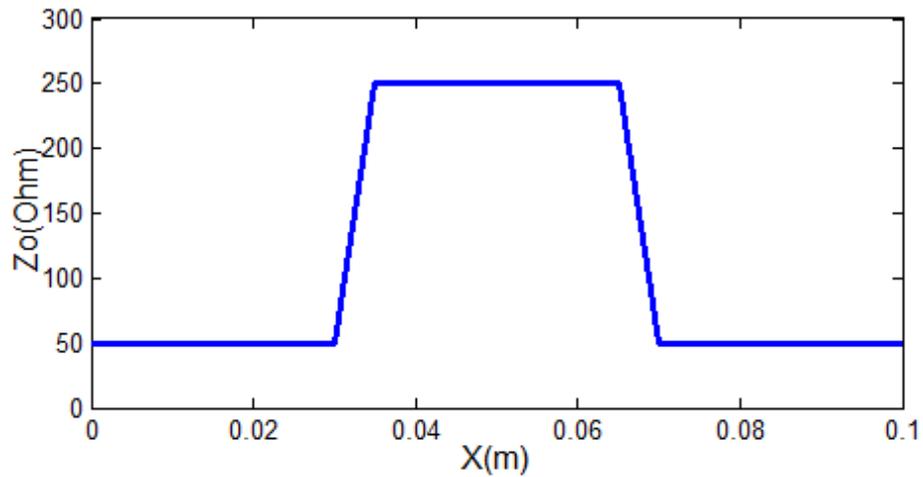


Figure IV.6. Profils spatiaux d'impédance caractéristique de la ligne non-uniforme type Balun.

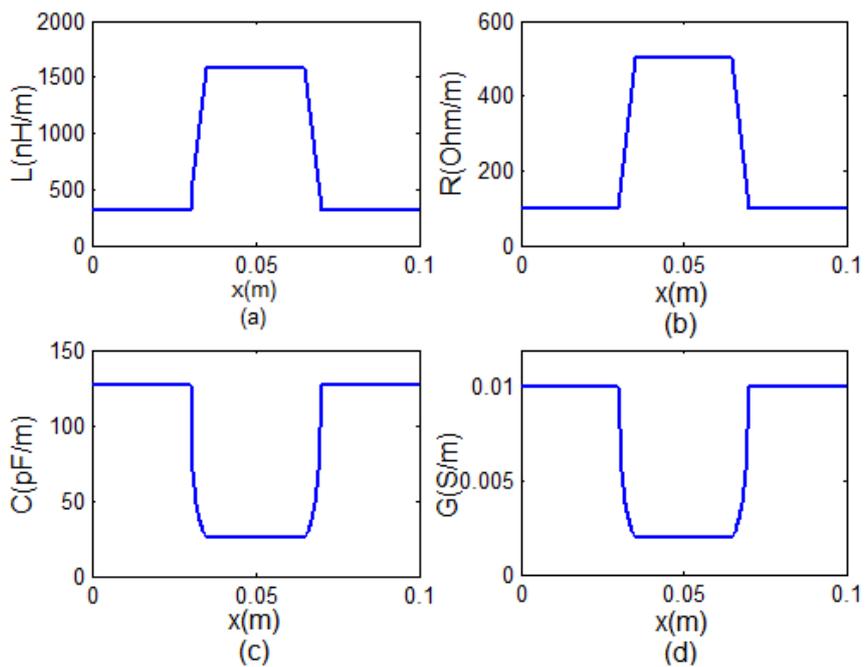


Figure IV.7. Profils spatiaux des paramètres linéiques de la ligne non-uniforme type Balun.

Dans un premier temps la ligne Balun a été analysée par la méthode RPIM. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par la méthode FDTD. Le pas de temps est égal à 0.0063 ns et la taille du domaine de support a été choisie pour contenir entre deux et cinq nœuds voisins. À la fin de ce chapitre, nous illustrons l'impact du nombre de voisins et de la taille du domaine de support local sur la précision de la méthode RPIM.

La figure IV.8 montre la tension à tous les points de la ligne Balun, calculée par la méthode FDTD. De même la figure IV.9 montre les variations des tensions aux deux extrémités de la ligne $V(0)$, et $V(d)$, calculées par la méthode RPIM et la méthode FDTD. La discrétisation spatiale dans la méthode RPIM est irrégulière de résolution $N=37$ segments, contre une résolution de $N = 100$ pour la méthode FDTD.

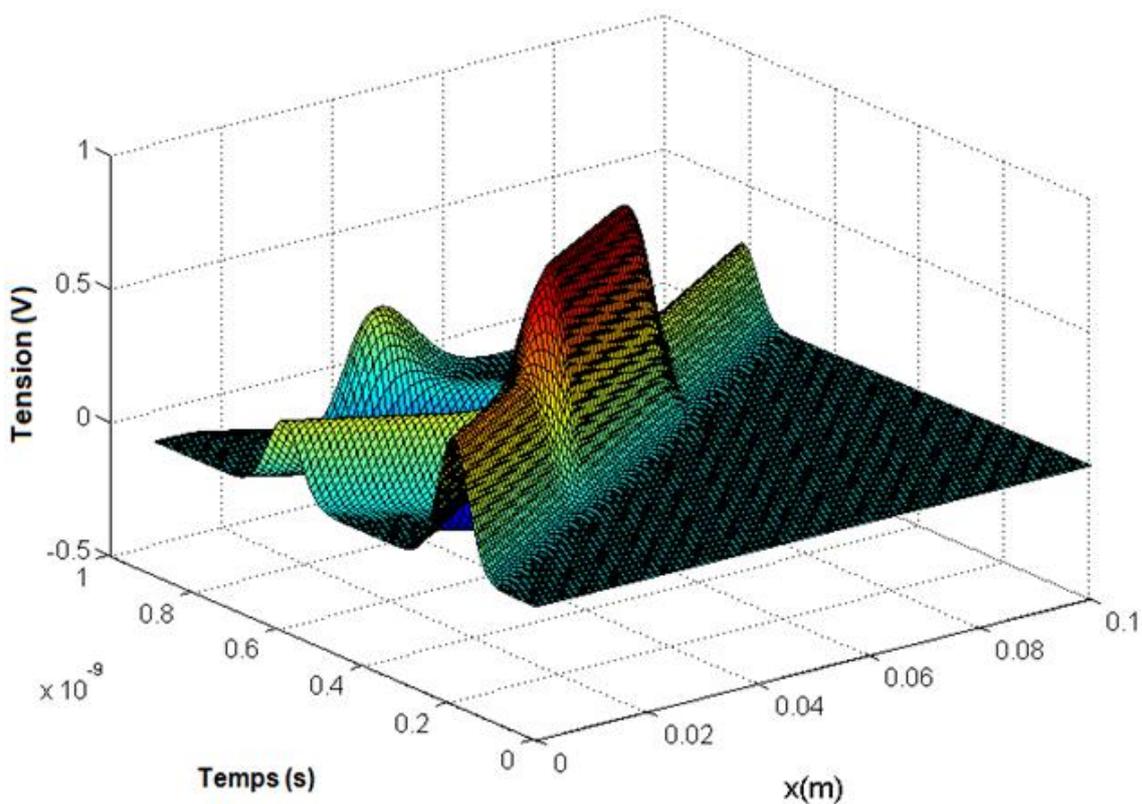


Figure IV.8. La tension à tous les points de la ligne non-uniforme type Balun, calculée par la méthode FDTD.

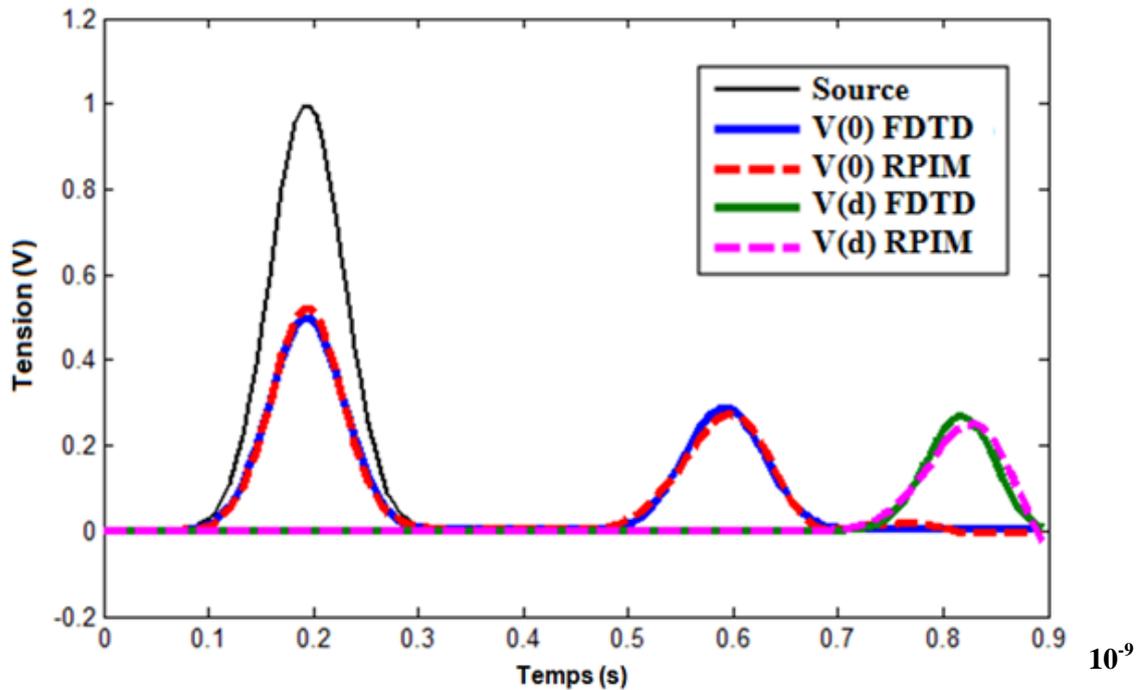


Figure IV.9. Comparaison entre les résultats des méthodes RPIM, et FDTD, aux deux extrémités de la ligne non-uniforme type Balun, ($N_{RPIM}=37$, $N_{FDTD}=100$).

On voit une bonne concordance entre les résultats obtenus. Ceci signifie que la méthode FDTD exige une grille beaucoup plus fine pour obtenir une exactitude semblable à celle de la méthode RPIM.

IV.3.1. Impact du nombre de segments

Pour illustrer l'impact du nombre de segments N sur l'exactitude et de la convergence de la méthode RPIM, la ligne Balun est analysée par la méthode FDTD et la méthode RPIM, utilisant différents nombres des distributions de nœuds. La figure IV.10 et la figure IV.11 présentent les erreurs relatives aux deux extrémités du Balun en fonction du nombre de segments, en prenant comme référence les résultats calculés par la méthode FDTD de résolution $N = 100$ segments.

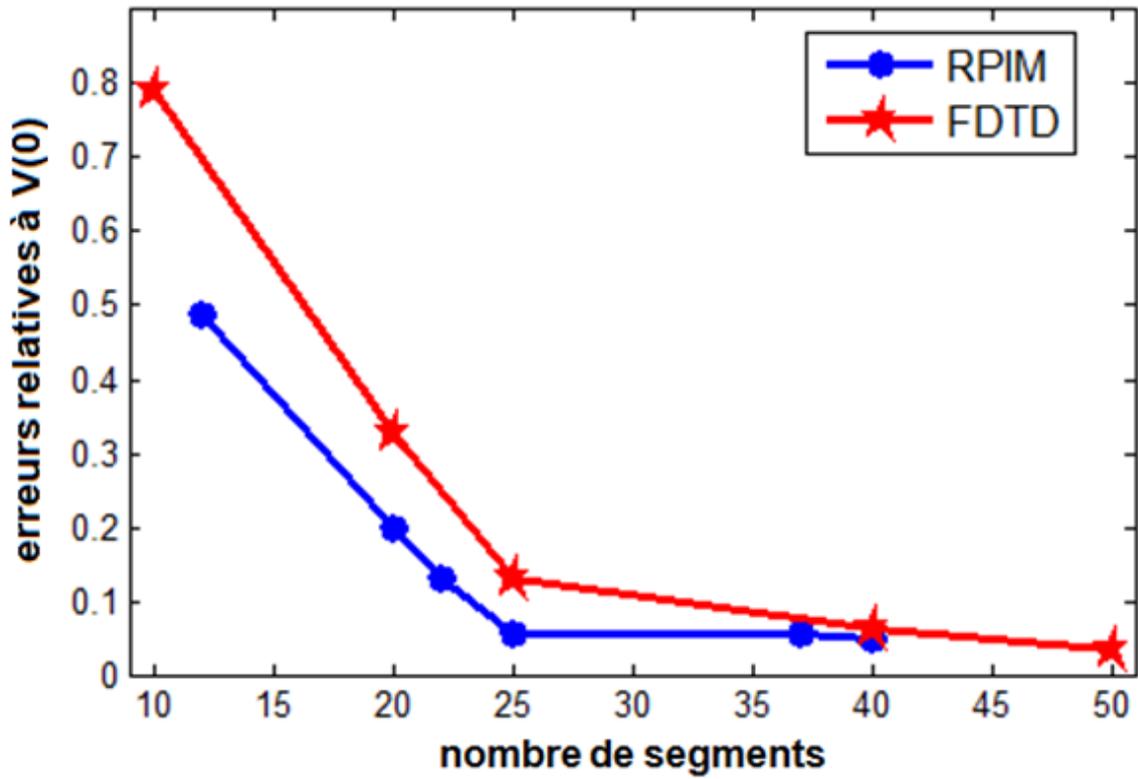


Figure IV.10. Convergence des méthodes RPIM et FDTD à l'extrémité entrée $V(0)$.

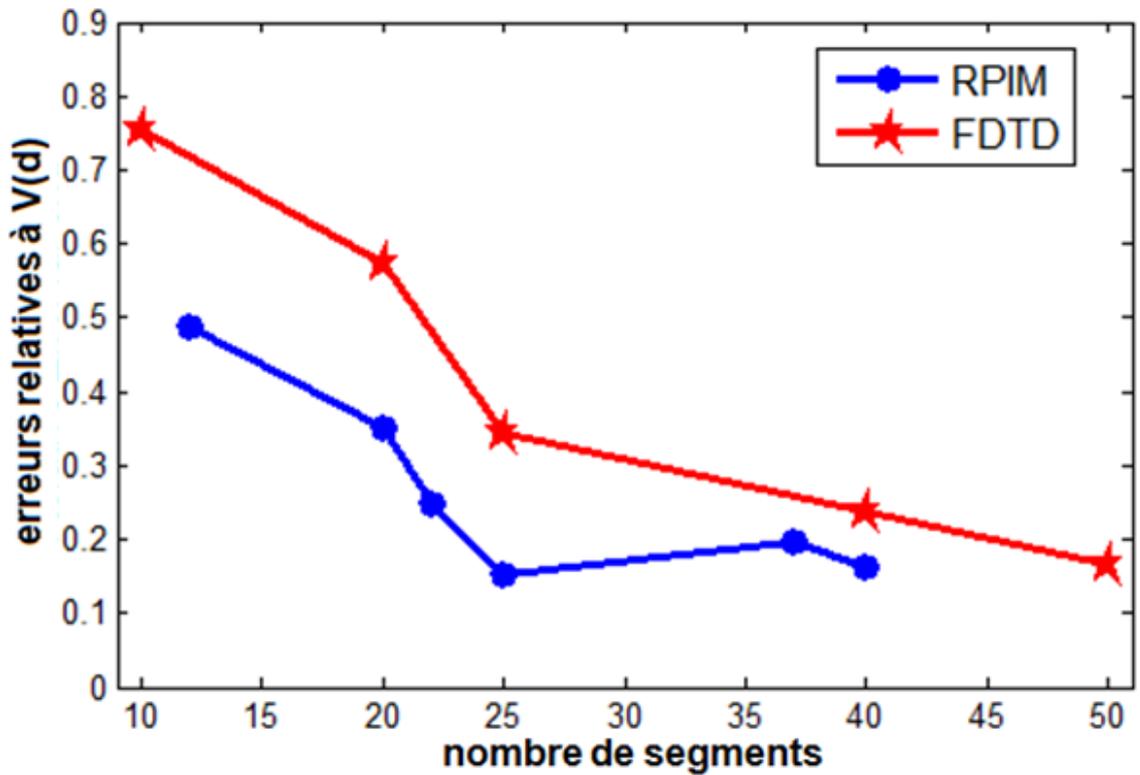


Figure IV.11. Convergence des méthodes RPIM et FDTD à l'extrémité sortie $V(d)$.

À partir des figures IV.10 et IV.11, trois effets peuvent être observés :

- D'abord, lorsque l'on augmente le nombre des segments, la précision numérique s'améliore dans les deux méthodes.
- En second lieu, la précision numérique de la méthode RPIM est meilleure que celle de la méthode FDTD, ceci est dû à la stabilité dans l'arrangement de l'interpolation et le nombre élevé de nœuds voisins dans le domaine d'influence.
- Troisièmement, une convergence rapide de la méthode RPIM par rapport à la méthode FDTD, due à la modélisation conforme des paramètres linéiques de la ligne Balun.

En d'autres termes, pour obtenir une précision semblable à celle de la méthode RPIM, la méthode FDTD exige une grille beaucoup plus fine. Comme il peut être vu, la méthode RPIM pour $N = 25$ segments donne le même niveau de précision que celui de la méthode FDTD pour $N = 50$ aux deux extrémités du Balun.

IV.3.2. Impact de la taille du domaine de support local

Pour illustrer l'impact de la taille du domaine de support local sur la précision de la méthode RPIM, dans la figure IV.12 nous avons présenté l'erreur relative des résultats pour $V(0)$ donnés par la méthode RPIM pour $N = 25$ segments, pour différentes tailles du domaine de support local contenant n points voisins.

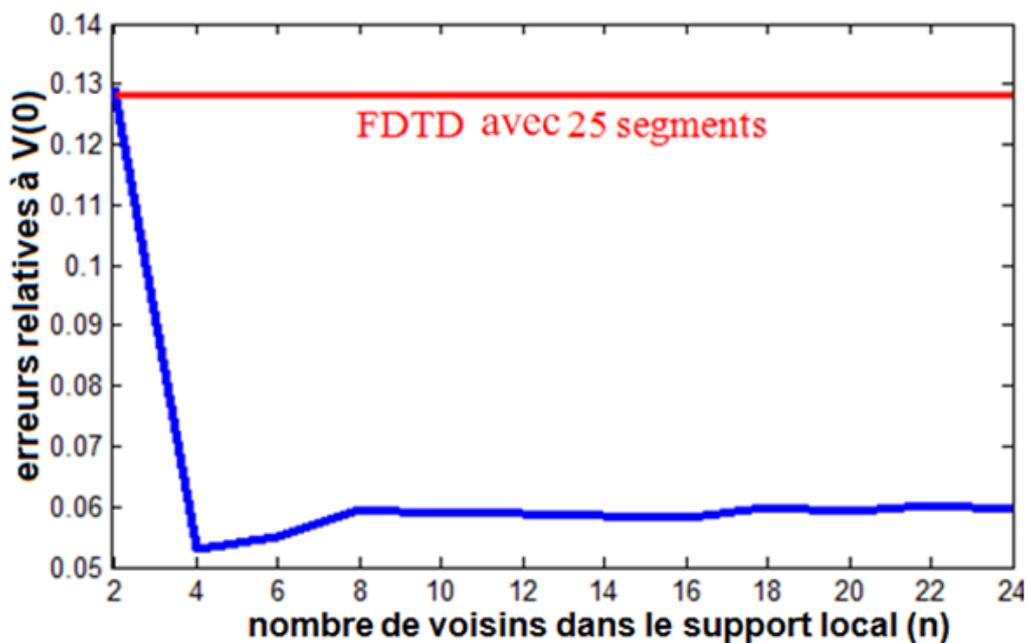


Figure IV.12. L'erreur relative à l'extrémité proche $V(0)$ de la méthode RPIM en fonction du nombre des nœuds voisins, où $N=25$ et $m=2$.

Nous pouvons observer de la figure IV.12, que pour un domaine de support qui contient quatre nœuds voisins, la méthode RPIM montre la plus faible valeur de l'erreur relative, 0.052. Nous avons observé que l'erreur s'accroît légèrement pour des domaines de support plus grands. On constate que, quand le nombre n du voisinage augmente la matrice des moments G devient mal conditionnée et le paramètre de forme de la RBF devient la source principale de l'instabilité s'il n'est pas soigneusement contrôlé. En conséquence il affecte l'exactitude de la méthode. Avec la même résolution et pour le plus petit domaine de support $n = 2$, les deux méthodes RPIM et FDTD donnent la même erreur 0.13. Enfin, on peut conclure que les valeurs électriques $V(x)$ et $I(x)$ en chaque nœud d'intérêt sont influencées uniquement par un nombre limité de nœuds voisins, qui sont bien entendu les plus proches, les quatre nœuds les plus proches pour les problèmes 1-D.

Dans cette étude, pour trouver les meilleures valeurs de c le paramètre de forme de la RBF, nous avons implémenté une routine pour balayer c de 0.01 à 100 avec un pas de 0.1. Le nombre m des monômes utilisés dans la base polynomiale est égal à 2. La taille du domaine de support local est ajustée pour assurer le nombre désiré de voisins n pour chaque cas.

IV.3.3. Impact du nombre des monômes dans la méthode RPIM

Afin d'assurer une matrice des moments inversible G^{-1} , le nombre de monômes utilisé dans la base polynomiale P dans l'équation (III.43) de l'approximation RPIM est habituellement inférieur au nombre des nœuds voisins ($m < n$) [2]. La figure IV.13 montre l'impact du nombre des monômes m pour une résolution $N = 25$ segments et $n = 4$ nœuds voisins.

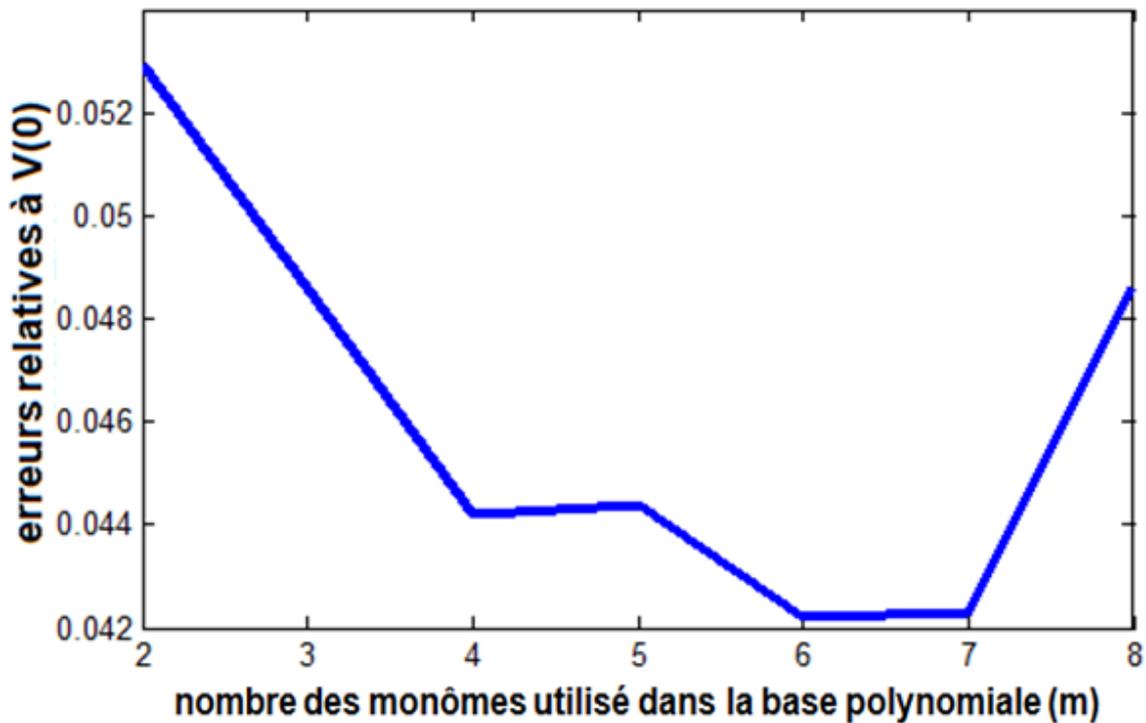


Figure IV.13. L'erreur relative à l'extrémité proche $V(0)$ de la méthode RPIM en fonction du nombre des monômes, où $N = 25$ et $n = 4$.

Comme il est nettement observé sur cette figure, l'augmentation de m améliore la précision de la méthode RPIM de façon modeste. Nous constatons également qu'au-delà d'une valeur critique $m = 6$ il y a un effondrement dans la précision. La méthode RPIM donne pour $m = 6$ le meilleur résultat on terme de précision, avec une erreur relative de 0.0422. La perte de précision au-delà de cette limite est un comportement symptomatique en calcul numérique :

Du point de vue théorique qu'on désigne en analyse numérique par arithmétique exacte, le degré m du polynôme représente l'ordre de l'approximation, et il est supposé réduire l'erreur en augmentant. Mais du point de vue calcul sur machine, en augmentant m , la taille des matrices augmente et gonfle au fil des opérations la propagation de l'erreur d'arrondi en arithmétique à virgule flottante de Matlab, qui finit par l'emporter sur la précision due au degré du polynôme. Dans notre exemple précis, pour $m > 7$ le nombre de condition de la matrice G augmente et rend cette matrice mal-conditionnée. Il n'existe pas à ce jour une théorie pour la détermination du nombre optimal m de monômes qui assure l'existence de la matrice inverse G^{-1} et une matrice des moments G bien conditionnée. Ce qui nous oblige à le déterminer par des techniques numériques de type ajustements successifs.

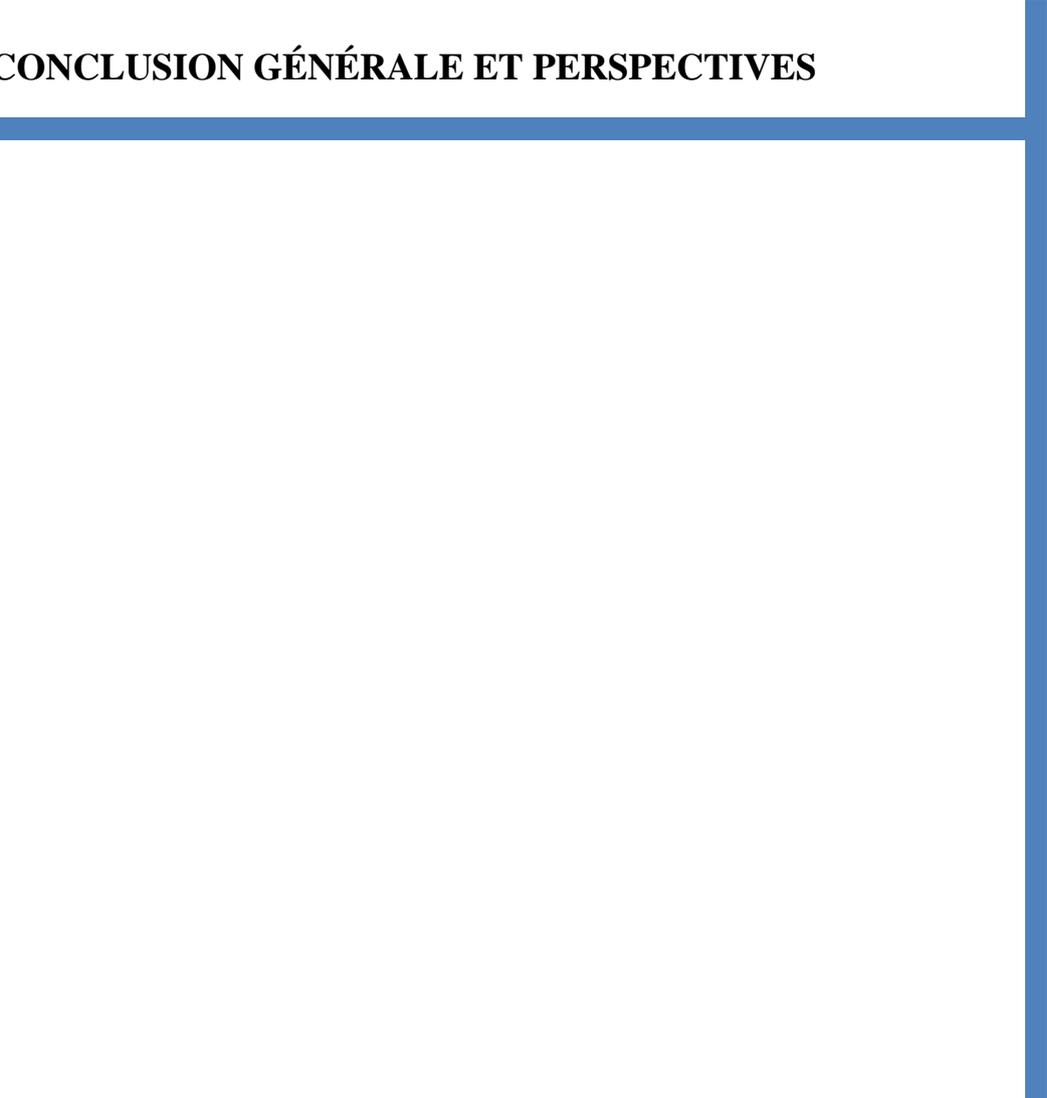
IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué des tests sur les méthodes d'interpolation de point qui consistent à comparer les résultats numériques pour la LTNU de type linéaire avec la méthode FDTD et la méthode d'expansion en ondelettes. Ces tests nous ont permis de conclure que la méthode RPIM fournit le meilleur compromis entre l'exactitude et le temps de calcul que la méthode PIM et la méthode RBF-MLM. De même la méthode RPIM peut surmonter les problèmes de singularité manifestée dans la méthode PIM et la faible exactitude de la méthode RBF-MLM. D'autre part, les résultats du deuxième exemple montrent que la méthode RPIM converge plus rapidement que la méthode FDTD, et que l'augmentation du nombre des monômes jusqu'à une certaine limite, ainsi que l'augmentation du nombre de segments N améliore sa précision. Enfin, nous avons conclu que les valeurs de la tension et du courant en chaque nœud d'intérêt sont seulement influencées par un nombre limité des nœuds voisins les plus proches, de préférence quatre nœuds voisins pour les problèmes 1-D.

Références bibliographiques IV

- [1] WATANABE, Kazunori, SEKINE, Toshikazu, et TAKAHASHI, Yasuhiro. A FDTD method for Nonuniform Transmission Line Analysis Using Yee's-lattice and Wavelet Expansion. In : *Signal Integrity and High-Speed Interconnects, 2009. IMWS 2009. IEEE MTT-S International Microwave Workshop Series on*. IEEE, 2009. p. 83-86.
- [2] YU, Yiqiang et CHEN, Zhizhang. A 3-D radial point interpolation method for meshless time-domain modeling. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 2009, vol. 57, no 8, p. 2015-2020.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

A decorative blue L-shaped line is positioned on the right side of the page. It consists of a vertical line extending from the top of the page down to the bottom, and a horizontal line extending from the left side of the page towards the vertical line, meeting it at a right angle.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Nos travaux ont porté sur l'application de trois méthodes sans maillage pour l'analyse numérique des lignes de transmission non-uniformes, utilisant des interpolations polynomiales, radiales, ou mixtes, les méthodes étudiées, appelées méthodes d'interpolation de point reconstruisent les équations des télégraphistes définies sur la ligne non-uniforme à partir de l'ensemble des valeurs discrètes de la tension et du courant prises par ces équations sur un nuage de nœuds dispersés sélectivement ou aléatoirement le long de la ligne. En conséquence, ces méthodes n'ont pas les contraintes dues à l'utilisation d'un pas d'espace constant. Les conclusions suivantes sont tirées :

- 1) La méthode PIM montre une simplicité de la mise en œuvre, et elle est plus légère que les deux autres méthodes, mais la matrice des moments de cette méthode souffre du problème de singularité.
- 2) La méthode RBF-MLM ne présente pas ce même problème, mais elle conduit généralement à une précision numérique moindre que celle des autres méthodes.
- 3) Un moyen possible de remédier aux deux problèmes précédents est d'utiliser la méthode RPIM qui est basée sur une approximation mixte, polynomiale et radiale.

Par ailleurs, la comparaison des performances numériques telles que la convergence et la précision de ces méthodes que nous avons effectuée dans le dernier chapitre pour deux exemples numériques, nous ont permis de conclure que :

- 1) la méthode RPIM fournit le meilleur compromis entre la précision et le temps de calcul par rapport à la méthode PIM et la méthode RBF-MLM. De même la méthode RPIM peut surmonter les problèmes de singularité manifestés dans la méthode PIM et la faible précision de la méthode RBF-MLM.
- 2) La méthode RPIM converge plus rapidement que la méthode FDTD. L'augmentation du nombre des monômes et le nombre de segments améliore la précision de la méthode RPIM.
- 3) Enfin, les valeurs de la tension et du courant en chaque nœud d'intérêt sont uniquement influencées par un nombre limité aux nœuds voisins les plus proches, de préférence quatre nœuds voisins pour les problèmes 1-D.

Futurs travaux

A l'issue de cette thèse, nous nous rendons compte que de nombreuses questions restent encore ouvertes, que ce soit sur les fondements des méthodes proposées ou bien que cela concerne leurs applications aux LTNUs. En effet, basé sur le travail présenté dans cette thèse, les recommandations suivantes sont données pour des futurs travaux :

- 1) Dans cette thèse nous avons utilisé les trois méthodes pour analyser les LTNUs en utilisant les équations (II.18)-(II.19) des télégraphistes dans le domaine temporel. Il serait intéressant de poursuivre cette étude en résolvant les équations (II.20)-(II.21) pour avoir la réponse fréquentielle directement. ou même pour l'analyse des lignes dont les paramètres linéiques dépendent de la fréquence. Cependant, quelques modifications sont exigées.
- 2) D'autre part, l'utilisation des équations des télégraphistes (l'approche quasi-TEM) est limitée par quelques hypothèses qui ne sont pas toujours vérifiées. Cette approche repose sur les trois hypothèses suivantes :
 - La structure des champs électromagnétique qui entourent les fils est de type quasi-TEM,
 - Le courant total traversant chaque section transversale est égal à zéro.
 - Toutes les dimensions transversales de la ligne (hauteurs, espacements entre conducteurs, diamètre des conducteurs) sont faibles devant la plus petite longueur d'onde.

En pratique ces hypothèses ne peuvent pas toujours être valides. En effet l'utilisation de l'approche électromagnétique est plus appropriée pour contourner les limitations de l'approche quasi-TEM. De même il est possible d'étendre les méthodes présentées dans cette thèse pour résoudre directement les équations de Maxwell. Où ces équations représentent un problème tridimensionnel.

RESUMES



Résumé

Avec le développement des télécommunications et le besoin de la miniaturisation des circuits et des composants hyperfréquences, les lignes de transmission uniformes ont été remplacées par des lignes de transmissions non-uniformes (LTNUs) dans beaucoup d'applications. Avec la présence des discontinuités difficiles à modéliser par les méthodes classiques, ces lignes exigent une technique puissante de conception et de modélisation, surtout pour des lignes qui ont des formes arbitraires. D'autre part, dû à l'augmentation des fréquences d'opération, il est devenu nécessaire de prédire les réponses temporelles pour estimer directement les performances des circuits hyperfréquences sur des larges bandes fréquentielles.

D'autre part, les méthodes sans maillage forment un groupe générique de schémas de calcul scientifique qui a été développé à partir des années 1970 dans le but de se libérer des difficultés dues à la grille de discrétisation fixe pour l'approximation des équations des problèmes. Ces méthodes peuvent parfaitement résoudre les équations des télégraphistes pour les LTNUs, tout en déterminant les paramètres linéiques de la ligne de manière conforme, ce qui demande en conséquence des coûts de calcul moindres que celles demandées par les méthodes numériques classiques.

Dans ce contexte nous avons proposé trois codes de calcul sous environnement MATLAB, permettant l'analyse et la simulation des LTNUs à forme quelconque dans le domaine temporel par les trois méthodes sans maillage d'interpolation de point suivantes : la méthode d'interpolation de point polynomiale (méthode PIM), la méthode sans maillage basée sur les fonctions de base radiales (méthode RBF-MLM) et enfin, la méthode d'interpolation de point radiale (Méthode RPIM).

Pour montrer les avantages potentiels de ces méthodes sans maillages, tel que la discrétisation irrégulière et la convergence rapide, des comparaisons des résultats de calcul sur deux exemples de LTNUs distincts ont été conduites entre la méthode PIM, la méthode RBF-MLM, la méthode RPIM, la méthode FDTD, et la méthode d'expansion en ondelettes. Ces tests nous ont permis de conclure que la méthode RPIM converge rapidement et fournit le meilleur compromis entre l'exactitude et le temps de calcul.

Mots-clés : équations des télégraphistes, lignes de transmissions non-uniformes, méthodes d'interpolation de point, méthodes sans maillage, modélisation.

ملخص

مع تطور الاتصالات السلكية واللاسلكية والحاجة إلى تصغير دوائر ومركبات الميكروويف ، تم استبدال خطوط النقل الكهربائية الموحدة القطعة بخطوط غير موحدة (LTNU) في العديد من التطبيقات. هذه الخطوط تحوي انقطاعات صعبة النمذجة بطرق الحساب التقليدية ، تتطلب تقنيات قوية للتصميم والنمذجة ، وخاصة بالنسبة للخطوط العشوائية.

بالإضافة إلى ذلك ، بسبب الزيادة في ترددات التشغيل، أصبح من الضروري التنبؤ بالاستجابات الزمنية لتقييم أداء دوائر الميكروويف مباشرة على مجالات تردد واسعة جداً.

من ناحية أخرى، الطرق بدون شبكة تمثل مجموعة عامة من مناهج الحوسبة العلمية ظهرت منذ سنوات 1970 للقضاء على سلبيات الشبكة الثابتة في تقريب المعادلات الفيزيائية. بفضل التوزيع العشوائي للعقد. يمكن لهذه الطرق حل المعادلات الخاصة بـ LTNU معادلات أهل التلغراف بتكلفة حساب أقل من تلك التي تتطلبها طرق الحساب التقليدية.

في هذا الإطار اقترحنا ثلاثة برامج حسابية في بيئة MATLAB لغرض التحليل و التنبؤ بالاستجابات الزمنية لـ LTNU بواسطة طرق الحساب التالية : طريقة PIM، طريقة RBF-MLM وأخيراً، طريقة RPIM.

لإظهار جدوى هذه الطرق ، مثل استعمال الشبكة الغير النظامية والتقارب السريع، أجريت مقارنات بين نتائج الحساب على مثالين متميزين ، بطريقة PIM، طريقة RBF-MLM، طريقة RPIM، طريقة FDTD، وطريقة توسع الموجات. هذه المقارنات بينت لنا أن طريقة RPIM تتقارب بسرعة وتوفر أفضل حل وسط بين الدقة ووقت الحوسبة.

كلمات رئيسية : معادلات خطوط النقل ، خطوط النقل الكهربائية الغير موحدة ، طرق الحساب بدون شبكة، النمذجة.

Abstract

With the development of telecommunications and the need for miniaturizing microwave circuits and components, the uniform transmission lines were replaced by non uniform transmission lines (LTNUs) in many applications. With the presence of discontinuities uneasy to model by traditional methods, these lines require powerful technique of design and modeling, especially for arbitrary shapes. In addition, due to the increase in the operation frequencies, it became necessary to predict the transient responses to directly estimate the performances of the microwave circuits over ultra wide frequency bands.

On the other hand, the Meshless methods form a generic group of scientific computing schemes which was developed since the years 1970s to eliminate the drawbacks of a fixed discretization grid for the approximation of the problem equations. These methods have the advantages of arbitrary nodal distribution and conformal modeling of R.L.C.G parameters of NUTLs which require less computing costs than the traditional numerical methods.

In this context we implemented the MATLAB codes for the analysis and the simulation of arbitrary non-uniform transmission lines in the time domain by three Meshless methods : the polynomial point interpolation method (PIM), the meshless method based on radial basis functions (RBF-MLM), and the radial point interpolation method (RPIM).

To illustrate the superiority of these methods, such as the irregular discretization and the fast convergence rate, results comparisons for two distinct samples were held between the PIM, the RBF-MLM, the RPIM, the FDTD method, and the wavelet expansion method. These tests allow us to conclude that the RPIM converges quickly and provides the best compromise between the accuracy and the computing time.

Keywords: Telegrapher's Equations, Nonuniform Transmission Lines, Point Interpolation Methods, Meshless Methods, modeling.

LISTE DES PUBLICATIONS

Publications Internationales

- 1- BENKHAOUA, Larbi, BENHABILES, Mohamed T., et RIABI, Mohamed Lahdi. Nonuniform transmission lines analysis by meshless point interpolation methods. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 2015.
<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/jnm.2132/abstract;jsessionid=5334D58CF3BA81A99D30D8435F63AB38.f02t03>
- 2- Benkhaoua, L.; Benhabiles, M.T.; Mouissat, S.; Riabi, M.L., "Miniaturized Quasi-Lumped Resonator for Dielectric Characterization of Liquid Mixtures," in *Sensors Journal*, IEEE , vol.16, no.6, pp.1603-1610, March15, 2016.
- 3- Khalef R., Benkhaoua L., Grine F, Benhabiles M.T., Riabi M.L. "A combined meshless RBF-FDTD method for the analysis of transient electromagnetic fields", In *Pertanika Journal of Science and Technology*, vol.24, no.2, Jul, 2016.

Communications Internationales

- 1- Benkhaoua, L.; Benhabiles, M.T.; Riabi, M.L., "A meshless point interpolation method for time domain analysis of lossy nonuniform transmission lines," in *Numerical Electromagnetic Modeling and Optimization for RF, Microwave, and Terahertz Applications (NEMO), 2014 International Conference on* , vol., no., pp.1-4, 14-16 May 2014
<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6995657&isnumber=6995652>
- 2- Benkhaoua, L.; Benhabiles, M.T.; Riabi, M.L., "A miniaturized near-field sensor based on a double-sided spiral split-ring resonator for dielectric characterization," in *RF and Wireless Technologies for Biomedical and Healthcare Applications (IMWS-Bio), 2014 IEEE MTT-S International Microwave Workshop Series on* , vol., no., pp.1-3, 8-10 Dec. 2014
URL: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=7032399&isnumber=7032365>
- 3- Benkhaoua, L.; Benhabiles, M.T.; Riabi, M.L., "A compact miniature sensor based on a microstrip taper coupled to a metamaterial resonator," in *Microwave Conference (EuMC), 2015 European* , vol., no., pp.1057-1060, 7-10 Sept. 2015
URL: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=7345949&isnumber=7345669>
- 4- Khalef R., Benkhaoua L., Grine F, Benhabiles M.T., Riabi M.L. "A combined meshless RBF-FDTD method for the analysis of transient electromagnetic fields". 2nd International Conference on Computational Methods in Engineering and Health Sciences (ICMEH- 2015) December 19 - 20, 2015 Universiti Putra Malaysia, Malaysia.