

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Constantine
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Electronique

Thèse

Présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur
en Electronique

par

SADAoui Djaouida

Contribution à l'étude et au contrôle d'attitude des satellites

Soutenue publiquement le 21/05/2012 devant le jury composé de :

Président du jury : K. Belarbi

professeur à l'université de Constantine

Directeur de thèse : M. Benslama

professeur à l'université de Constantine

Examineur : Dj. Benatia

professeur à l'université de Batna

Examineur : S. Filali

professeur à l'université de Constantine

Examineur : N. Benoudjit

professeur à l'université de Batna

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je tiens à remercier dieu le tout puissant de m'avoir donnés le courage et la volonté durant toutes mes années d'études.

Je tiens à témoigner ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Mr Malek Benslama pour m'avoir proposé ce travail de thèse qui m'a fait découvrir le domaine des satellites. Merci pour l'aide technique et les conseils qu'il a su me transmettre avec beaucoup de patience et de pédagogie.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à Mr Belarbi Khaled Professeur à l'université de Constantine, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse ; à Mr Djamel Benatia et Benoudjit Nabil Professeurs à l'université de Batna et à Salim FILALI Professeur à l'université de Constantine, pour l'intérêt qu'ils ont portée à ce travail en me faisant l'honneur d'être rapporteurs.

Enfin et surtout, je remercie mes amies, ma famille, et plus particulièrement mes parents pour m'avoir toujours soutenu au cours de mes études, pour leur aide et leur soutien constants, en ayant une pensée émue pour mes grands-parents.



Tables des matières

Remerciements.....	ii
Table des matières.....	iii
Résumé.....	vii
Abstract.....	viii
Table des figures.....	xi
Introduction générale.....	1
Chapitre 1: Définitions et notations	
Introduction.....	7
1.1 Représentation d'attitude	7
1.1.1 Les Repères de références	7
1.1.2 Angles de définitions de l'attitude.....	12
1.2 Perturbations dynamiques affectant un satellite.....	19
1.2.1 Perturbations externes.....	19
1.2.2 Perturbations internes.....	22

1.3	Introduction à la théorie du chaos.....	18
1.3.1.	Les exposants de lyapunov.....	23
1.3.2	Contrôle des systèmes chaotiques.....	24
1.4	Stabilité des systèmes.....	25
1.4.1	Stabilité au sens de Lyapunov.....	25
	Conclusion.....	27

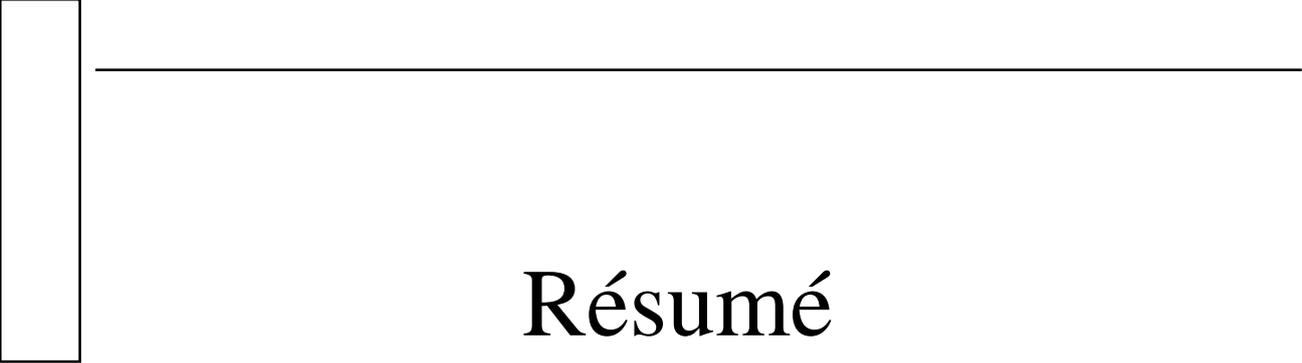
Chapitre 2: Modélisation du Mouvement d'Attitude D'un Satellite

	Introduction.....	28
2.1	Définition du control d'attitude.....	28
2.1.1	Système de Contrôle d'Attitude et d'orbite (SCAO).....	28
2.2	Méthodes de contrôle d'attitude.....	37
2.2.1	Méthodes passive.....	37
2.2.2	Méthodes active.....	37
2.3	Modélisation du mouvement d'attitude.....	37
2.3.1	Moment cinétique et matrice d'inertie.....	28
2.3.2	Les équations d'Euler.....	40
2.3.3	Calcul de la rotation instantanée.....	41
2.3.3	Les équations du mouvement.....	42
2.4	Simulation du mouvement du satellite.....	46
2.4.1	Satellite à comportement non chaotique.....	46

2.4.2 Satellite à comportement chaotique.....	48
Conclusion.....	55
Chapitre3: Contrôle d'attitude des satellites	
Introduction	56
3.1 Contrôle Prédicatif : Principe et Problématique Générale.....	56
3.1.1 Introduction.....	56
3.1.2 Stratégie du contrôle prédictif.....	57
3.1.3 Application du contrôle prédictif à retour d'état au contrôle d'attitude d'un satellite..	60
3.2 Commande par mode de glissement active : principes et problématique générale.....	66
3.2.1 Stratégie de la commande par mode de glissement active.....	67
3.2.2 Phénomène de réticence.....	69
3.2.3 Condition d'existence d'un mode de glissement.....	70
3.2.4 Principe du contrôleur par mode de glissement actif.....	72
3.2.5 Application de la commande par mode de glissement active au contrôle d'attitude d'un satellite.....	74
3.3 Commande passive : principes et problématique générale.....	79
3.3.1 Stratégie de la commande passive.....	79
3.3.2 Application de la commande passive au contrôle d'attitude des satellites.....	81
Conclusion.....	92

Chapitre4: Synchronisation des satellites

Introduction.....	93
4.1 Principe de la synchronisation.....	94
4.2 Formulation du problème de la synchronisation.....	95
4.3 Application du contrôle prédictif à la synchronisation de deux satellites.....	102
4.3.1 Conception du contrôleur prédictif.....	102
4.3.2 Synchronisation de deux satellites par la commande prédictive à retour d'état.....	104
4.4 Application de la commande par mode de glissement active à la synchronisation de deux satellites.....	111
4.4.1 Conception du contrôleur par mode de glissement actif.....	111
4.4.2 Synchronisation de deux satellites par la commande mode de glissement active.....	114
4.5 Application de la commande passive à la synchronisation de deux satellites.....	119
4.5.1 Synchronisation de deux satellites par la commande passive.....	122
4.5.2 L'influence du coefficient γ_{12}	123
Conclusion.....	126
Conclusion Générale.....	127
Annexe	138



Résumé

Pour réaliser une communication fiable entre le satellite et la station terrienne, le système de contrôle d'attitude est nécessaire pour assurer les performances de pointage et de stabilité permettant de réaliser les objectifs de la mission. Or le satellite a tendance à se dépointer sous l'action de couples produits par l'environnement ou produits en son sein. Il faut donc contrôler activement l'orientation angulaire mais aussi assurer une stabilité de cette orientation. Trois types de contrôleurs sont appliqués au système d'équations décrivant le mouvement du satellite afin de contrôler son attitude.

La synchronisation des satellites a été traitée dans la deuxième partie de la thèse. Le problème de la synchronisation consiste à créer soit des interconnexions physiques ou des boucles d'asservissements, ce qui oblige les sorties de l'Esclave à se conformer à ceux du Maître de telle sorte que le système Esclave synchronise son orientation avec celle du système Maître. Les trois contrôleurs proposés dans la première partie sont appliqués pour réaliser la synchronisation entre deux satellites identiques.

La principale contribution de ce travail réside dans le fait que le contrôle et la synchronisation peuvent être réalisés avec les contrôleurs proposés. Les résultats détaillés des simulations ont montré des performances convaincantes. Les principaux résultats ont également été publiés dans un journal international.

Mot clé : Contrôle d'attitude des satellites;commande de passive;controle prédictive;commande active sliding mode;synchronisation



Abstract

To achieve reliable communication between the satellite and ground stations, attitude control system is required to give the satellite a stable attitude. It was further investigated how to control the attitude, such that the satellite was globally asymptotically stable in the desired orientation, avoiding the undesired equilibria. Tree controllers, are applied to the system of equations describing the motion of the satellite.

The synchronization of satellites attitude systems is handled in the second part of the thesis. The synchronization problem consists of designing feedback interconnections from the drive satellite to the response, in such a way that the response system synchronizes its orientation with that of the drive system. A reference trajectory for the response satellite will therefore also depend on the states of the drive satellite. For many applications of formations of satellites the objective will be to point measuring instruments in the same direction. In this work three controllers are proposed to release the synchronization, and proved stable.

The main contribution of this work was to show that control and synchronization can be achieved with the tree controller mentioned above. The detailed simulation results showed convincing performance. The key results have also been published in international papers.

Key words: Satellite attitude control;passive control;predictive control;active sliding mode control synchronization

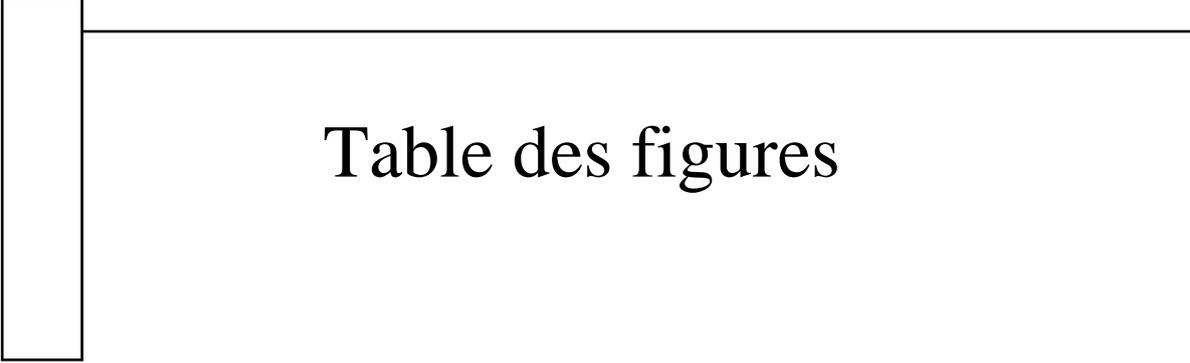


Table des figures

Figure.1.1 Rotation ψ autour de Z_A

Figure.1.2 Rotation θ autour de Y_B

Figure.1.3 Rotation φ autour de X_c

Figure. 1.4 Repère satellitaire

Figure. 1.5 Repère de référence et repère lié au satellite

Figure. 1.6 Les angles d'Euler.

Figure 1.7 Angles de Cardan.

Figure 2.1 Boucle de Contrôle d'attitude.

Figure 2.2 Portrait de phase des vitesses angulaires

Figure 2.3 Variation des vitesses angulaires en fonction du temps.

Figure 2.4 Variation des angles d'attitude en fonction du temps.

Figure 2.5 Portrait de phase des vitesses angulaires.

Figure 2.6 Evolution des vitesses angulaires en fonction du temps.

Figure 2.7 Variation des angles d'attitude en fonction du temps

Figure 2.8 Portrait de phase des vitesses angulaires

Figure 2.9 Evolution des vitesses angulaires en fonction du temps.

Figure 2.10 Portrait de phase des angles d'attitude

Figure 2.11 Evolution des angles d'attitude en fonction du temps.

Figure 2.12 Représentation des vitesses angulaires: $\omega_y = f(\omega_x)$

Figure 2.13 Portrait de phase des vitesses angulaires.

Figure 2.14 Evolution des vitesses angulaires en fonction du temps.

Figure 2.15 Portrait de phase des angles d'attitude

Figure 2.16 Evolution des angles d'attitude en fonction du temps.

Figure 2.17 Représentation des vitesses angulaires: $\omega_y = f(\omega_x)$

Figure 3.1 Contrôle prédictif à retour d'état

Figure 3.2 (a)Portrait de phase des vitesses angulaires,(b) $\omega_y = f(\omega_x)$,(c) $\omega_z = f(\omega_x)$,(d) $\omega_z = f(\omega_y)$

Figure 3.3 Contrôle prédictif des vitesses angulaires

Figure 3.4 Application du contrôle prédictif : **a)** contrôle des vitesses angulaires, **b)** Contrôle des angles d'attitude

Figure 3.5 la commande : Activation du contrôle à $t > 5s$

Figure 3.6 Mode de glissement avec réticence

Figure 3.7 (a)Portrait de phase des vitesses angulaires, (b) $\omega_y = f(\omega_x)$,(c) $\omega_z = f(\omega_x)$,
(d) $\omega_z = f(\omega_y)$

Figure 3.8 Application de la commande par mode de glissement active au contrôle des vitesses angulaires

Figure 3.9 Application de la commande par mode de glissement active : contrôle des vitesses angulaires. **b)** contrôle des angles d'attitude

Figure 3.10 (a) Portrait de phase des vitesses, (b) $\omega_y = f(\omega_x)$,(c) $\omega_z = f(\omega_x)$, (d) $\omega_z = f(\omega_y)$

Figure. 3.11 Application de la commande passive au contrôle des vitesses angulaires $\nu = 0$

Figure 3.12 Evolution des vitesses angulaires contrôlées en fonction du temps **cas 2** : $\nu \neq 0$

Figure 3.13 Application de la commande passive : **a)** contrôle des vitesses angulaires. **b)** contrôle des angles d'attitude

Figure 4.1 Schéma bloc illustrant le principe de la synchronisation

Figure.4.2 Evolution des vitesses angulaires des satellites Maître et Esclave en fonction du temps **cas 1**

Figure.4.3 Evolution des erreurs de synchronisation **cas 1**

Figure.4.4 Evolution des vitesses angulaires des satellites Maître et Esclave en fonction du temps **cas 2**

Figure.4.5 Evolution des erreurs de synchronisation **cas 2**

Figure 4.6 Représentation des vitesses angulaires synchronisées par le contrôle prédictif **cas1**

Figure 4.7 Les erreurs de synchronisation **cas1**

Figure4.8 Représentation des vitesses angulaires synchronisées par la commande prédictive **cas2**

Figure 4.9 Les erreurs de synchronisation **cas2**

Figure. 4.10. Représentation des vitesses angulaires synchronisées par la commande mode de glissement active : **cas1**

Figure. 4.11 Erreurs de synchronisation : **cas1**

Figure. 4.12. Représentation des vitesses angulaires synchronisées par la commande mode de glissement active **cas2**

Figure. 4.13 Erreurs de synchronisation **cas2**

Figure 4.14 Représentation des vitesses angulaires synchronisées par la commande passive pour $\gamma_{12} = 14$

Figure 4.15 Erreurs de synchronisation pour $\gamma_{12} = 14$

Figure.4.16 Synchronisation des vitesses angulaires des deux systèmes pour $\gamma_{12} = 5$

Figure.4.17 Synchronisation des vitesses angulaires pour $\gamma_{12} = 5$

Figure.4.18 Synchronisation des vitesses angulaires des pour $\gamma_{12} = 14$

Figure.4.19 Synchronisation des vitesses angulaires pour $\gamma_{12} = 50$

Annexe

Figure 1. La trajectoire elliptique d'une planète autour du soleil

Figure 2. Seconde loi de Kepler

Figure 3. Troisième loi de Kepler

Figure 4. Forces d'attraction entre deux corps



INTRODUCTION GÉNÉRALE

Depuis la fin des années 1950, les différentes puissances spatiales ont déployé dans l'espace plusieurs milliers de satellites faisant en permanence le tour de la planète [1]. Aujourd'hui, environ 2500 satellites tournent autour de la Terre : les objectifs se sont diversifiés, les technologies améliorées et complexifiées et les limites géographiques ont été repoussées. Grâce à une meilleure compréhension des lois physiques de l'espace, un véritable savoir-faire s'est développé en matière de conception, d'assemblage et d'exploitation des satellites artificiels.

La mise à poste d'un satellite consiste à réaliser le changement d'orbite nécessaire pour passer de sa position en fin de lancement vers sa position finale dans laquelle il peut être un élément constituant d'une constellation rendant un service requis, ou un satellite autonome.

Pour remplir sa mission, recevoir suffisamment d'énergie et communiquer avec la Terre, le satellite doit suivre une orbite et maintenir son orientation en limitant les écarts à des valeurs inférieures à celles définies pour la mission. En effet, indépendamment de la mission désirée pour un satellite : surveillance, positionnement, observation, transmission de données, ... il est indispensable de maintenir une direction de pointage fixe quelle que soit les perturbations externes qui vont exercer des couples et faire pivoter un corps solide quelconque. L'orientation du satellite doit être maintenue avec une grande précision durant toute la durée de vie du satellite pour que ses instruments fonctionnent correctement. En particulier les satellites d'observation doivent assurer le

pointage de leur optique avec une précision d'environ $0,1^\circ$ en limitant les mouvements de rotation supérieurs à $0,005^\circ/\text{s}$ sous peine d'obtenir des images floues ou déformées.

Le Contrôle d'attitude est une opération fondamentale qui suit le cycle de la mise à poste d'un satellite c'est d'ailleurs l'un des domaines les plus étudiés dans la conception des véhicules spatiaux. Cette opération se fait simultanément par des corrections propres au niveau du satellite, et par un processus de contrôle et de commande depuis la station sol. Il s'agit, connaissant le modèle dynamique du satellite, de commander son orientation afin d'éviter les dégâts solaires ou atmosphériques sur des composants sensibles, de contrôler la dissipation de chaleur, de pointer dans la bonne direction les antennes, les panneaux solaires ou les instruments de mesure et en fin d'orienter les moteurs pour les manœuvres orbitales.

Si la terre était parfaitement ronde et seule dans l'espace, le satellite ne subirait principalement que l'attraction terrestre et les caractéristiques de l'orbite acquises lors de l'injection seraient quasiment perpétuelles. Or le satellite est soumis constamment à des couples qui modifient son orientation : phénomènes naturels (pression de la radiation solaire, pression aérodynamique, couples créés par le champ magnétique ou le champ de gravité terrestre, etc.) ou résultant de déplacements de mécanismes du satellite (pointage d'instrument) [2][3]. Le contrôle d'attitude doit être assuré en permanence car sous l'action de ces différents "événements" le satellite a tendance à se « dépointer ».

Le centre de contrôle du satellite effectue ces corrections après avoir mesuré les écarts avec précision grâce aux stations terrestres : le calculateur embarqué utilise ses senseurs pour déterminer périodiquement l'orientation du satellite. Pour maintenir un pointage parfait, les gyromètres mesurent les vitesses angulaires autour de chaque axe les capteurs mesurent l'orientation du satellite, le calculateur de bord analyse les données et établit les commandes. Lorsque les seuils de tolérance sont dépassés, l'opérateur envoie alors vers le satellite des instructions par la liaison montante de

télécommunications (liaison de télécommande) : celles-ci déclenchent les moteurs pour une durée et une poussée soigneusement calculée à des endroits précis de l'orbite pour optimiser la consommation du carburant.

Un satellite artificiel est généralement doté d'un système de contrôle d'attitude (SCA) qui assure deux fonctions essentielles : mesurer et modifier l'orientation du satellite par rapport à un repère fixe. Les satellites sont classés en plusieurs grandes familles en fonction de leur SCA.

- **Les satellites stabilisés passivement par gradient de gravité:** une masse est reliée par un mât au satellite ; l'axe passant par le mat est aligné sur la direction satellite-centre de la terre. Les mouvements autour de cet axe sont amortis sous l'influence de la gravité. Ce système passif a été utilisé par les premiers satellites mais il est délaissé aujourd'hui par la majorité d'entre eux car la précision de l'orientation n'est que de quelques degrés ;
- **Les satellites spinnés [2] :** ces satellites sont lancés en rotation autour d'un de leurs axes (axe stabilisé par phénomène de raideur gyroscopique). Le moment d'inertie créé limite les changements d'orientation. Ils sont utilisés pour scanner rapidement une bande au sol (satellite météo) ou l'espace environnant (satellite scientifique analysant le plasma de l'ionosphère) ;
 - **Les satellites stabilisés trois axes :** les systèmes précédents ne permettent de stabiliser l'orientation que sur 2 axes. La stabilisation 3 axes est aujourd'hui la méthode de stabilisation la plus utilisée. Pour ces satellites le SCA permet de rejoindre une attitude et de s'y stabiliser. La plupart des satellites d'observation, utilisent ce type de plate-forme.

L'intérêt qu'a porté la communauté scientifique au problème du control d'attitude d'un satellite à conduit à de nombreux travaux, telles que le control nonlinéaire qui a été traité dans les références [4] et [5], le control backsteeping dans [6] , la commande optimale dans [7] et la commande par mode de glissement dans les références [8] et [9]. Le control adaptative a aussi été largement appliquée au problème de la commande d'attitude et de nombreuses recherches ont été développées

dans cette direction [10]-[12]. Ces différents travaux nous donnent un aperçu des différentes approches menés par les chercheurs pour essayer de résoudre ce problème. Il est à noter que cette liste n'est pas exhaustive.

La synchronisation quand à elle est un phénomène extrêmement répandu dans la nature, elle constitue une solution technique intéressante dans le domaine de l'ingénierie. La théorie de la synchronisation du système mécanique remonte aux années soixante ; un regain d'intérêt pour l'étude de la synchronisation d'un corps rigide à été enregistré plus tard [13]-[16]. En particulier, il s'avère que la synchronisation entre plusieurs systèmes couplés de manière unidirectionnelle, c'est-à-dire dans une configuration maître-esclave, est un mécanisme très utilisé dans la technologie. Cela a ouvert la voie à envisager d'autres applications telle que la synchronisation chaotique qui a fait son apparition vers les années 90, grâce aux travaux présentés par Carroll et Pecora [18], et de puis; plusieurs travaux ont été publiés dans ce sens, ce qui conduira à une meilleure compréhension du phénomène de la synchronisation chaotique [19] - [26].

Le travail que nous présentons dans cette thèse est une contribution d'une part à l'élargissement du champ d'application des techniques de commandes présentées ci-dessous, d'autre part, à la commande et à la synchronisation des satellites soumis à des perturbations extérieures. A la différence de la majorité des travaux antérieurs nous présentons dans cette thèse l'étude du système (satellite) à six dimensions en prenant en compte l'aspect chaotique du satellite soumis à des perturbations, ainsi que l'étude de la synchronisation de deux satellites identiques. L'ensemble des travaux est regroupé en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à un rappel des notions fondamentales relatives à la représentation d'attitude d'un satellite, à savoir les repères de référence et les angles de définition de l'attitude. Ensuite nous effectuons un bref tour d'horizon des perturbations pouvant affectés un

satellite en orbite. Enfin nous introduisons la notion de la théorie du chaos ainsi que la notion de la stabilité des systèmes.

Au deuxième chapitre nous présentons une étude détaillée du système de contrôle d'attitude, une revue générale, des équipements classiques présents sur un satellite, nécessaires pour le contrôle de son comportement, aussi bien en orientation que sur son orbite est présenté. Il est accompagné d'une modélisation du mouvement d'attitude d'un satellite, de rappels élémentaires sur les équations du mouvement de rotation et d'une description des équations du mouvement. Une simulation du comportement du satellite soumis à des perturbations est enfin présentée. Deux cas sont traité, cas ou le satellite ne présente pas un mouvement chaotique et cas ou le satellite et sous l'effet des perturbations présente un comportement chaotique.

Dans le troisième chapitre, nous développons une première technique de contrôle, à savoir le contrôle prédictif à retour d'état, puis nous proposons deux autres techniques de commande : la première est la commande par mode de glissement active, la deuxième est la commande passive. Après une étude détaillée de chaque méthode, on a appliqué les trois techniques ; d'une part pour le contrôle des vitesses angulaire (système à trois dimensions) et d'autre part pour le contrôle des vitesses angulaire set des angles d'attitude (système à six dimension) des satellites soumis à des perturbations susceptible d'induire un mouvement chaotique.

Le quatrième chapitre est une introduction à la synchronisation des systèmes. La théorie est présentée et illustrée par deux cas différents de satellites présentant un comportement chaotique ou non. Les techniques de commande développées au chapitre précédent sont également appliquées à la synchronisation de deux satellites identiques.

Enfin une conclusion générale fera la synthèse de ce travail, résume nos principaux apports et ouvre quelques perspectives, que ce soit pour la synchronisation ou la commande d'attitude des satellites.

Définitions et notations

Introduction

Ce chapitre préliminaire permet de rappeler le principe de base de la représentation d'attitude en introduisant les notations utilisées et les notions de base. Dans un second temps, on abordera la notion de perturbations dynamiques appliquées à un satellite en poste.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à une introduction à la théorie du chaos et des systèmes chaotiques ainsi que la notion de la stabilité des systèmes.

1.1 Représentation d'attitude

1.1.1 Repères de références

1.1.1.1 Introduction

La mécanique classique, sous la forme mathématique rigoureuse que lui a donnée Newton, repose sur les deux concepts fondamentaux d'espace et de temps absolus qui sont la donnée d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Un repère d'espace est défini par un point origine O et par une base de l'espace vectoriel associé : (i, j, k) . On le note O_{ijk} . Les bases utilisées sont toujours orthonormées et directes (bases cartésiennes), c'est-à-dire satisfont à :

$$\left. \begin{array}{l} i \cdot j = 0 = j \cdot k = k \cdot i \\ i \cdot i = 1 = j \cdot j = k \cdot k \\ i \wedge j = k \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} j \wedge k = i \\ k \wedge i = j \\ (i, j, k) = +1 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Un repère de temps est défini par un instant initial t_0 et une base de durée d (unité de temps).

Dans ces repères, un point M à un instant t est défini par trois coordonnées d'espace (x, y, z) et une de temps (τ) , telles que :

$$M = O + xi + yj + zk \quad t = t_0 + \tau_d \quad (1.2)$$

La détermination d'un point de l'espace par ses coordonnées dépend du choix préalable d'un système de référence considéré comme absolu.

1.1.1.2 Changement de repère

Etant donnés deux repères cartésiens R_1 et R_2 de points d'origines respectifs O_1 et O_2 , un point P est donné dans chacun d'eux par trois coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} M &= O_1 + x_1 i_1 + y_1 j_1 + z_1 k_1 \\ &= O_2 + x_2 i_2 + y_2 j_2 + z_2 k_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pour transformer les coordonnées du point P de R_1 dans R_2 , il suffit de trouver les relations entre (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) en connaissant par exemple la position de O_2 dans R_1 et la base de R_2 dans celle de R_1 [27]:

$$\begin{aligned} O_2 &= O_1 + \xi i_1 + \eta j_1 + \zeta k_1 \\ i_2 &= a_{11} i_1 + a_{21} j_1 + a_{31} k_1 \\ j_2 &= a_{12} i_1 + a_{22} j_1 + a_{32} k_1 \\ k_2 &= a_{13} i_1 + a_{23} j_1 + a_{33} k_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

On en déduit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

La matrice des a_{ij} associée à la rotation qui transforme $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ en $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ est appelée matrice de rotation ou matrice de passage du repère R_1 vers le repère R_2 noté $M_{R_1 \rightarrow R_2}$. Ces colonnes sont formées dans l'ordre des coordonnées des vecteurs $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ dans R_1 , et ces lignes des coordonnées de $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ dans R_2 .

Les composantes de la matrice de rotation sont appelées cosinus directeurs: elles correspondent en effet aux produits scalaires des vecteurs directeurs normés de $R_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, par les vecteurs directeurs normés de $R_2(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$. Les bases de R_1 et R_2 étant orthonormées, la matrice des a_{ij} est orthonormée : 3 seulement des 9 a_{ij} sont indépendants et suffisent pour exprimer la matrice complètement ; cette propriété traduit le fait que 3 rotations suffisent généralement pour passer d'une base à une autre.

On utilise le plus souvent les 3 rotations d'Euler (ou *angles d'Euler* notés (φ, θ, ψ) , qui seront défini dans les paragraphes qui suivent). On peut représenter chaque rotation par une *matrice*, et obtenir ainsi la matrice des a_{ij} comme produit des trois matrices de rotation, qui ne dépendent bien sûr chacune que d'un angle.

➤ **Rotation autour de Z:** la matrice correspondante à cette rotation est:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

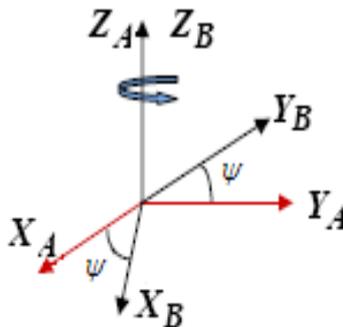


Figure.1.1 Rotation ψ autour de Z_A

➤ **Rotation autour de Y :** la matrice correspondante à cette rotation est:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

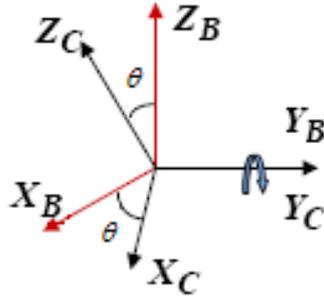


Figure.1.2 Rotation θ autour de Y_B

➤ **Rotation autour de X:** la matrice correspondante à cette rotation est:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

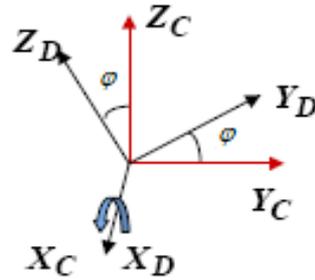


Figure.1.3 Rotation φ autour de X_c

On obtient ainsi la matrice globale de rotation quand appelle Matrice A :

$$A = A_1 A_2 A_3 \quad (1.9)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \phi \sin \psi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi \cos \phi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

1.1.1.3 Principaux repères de la modélisation de l'attitude

1.1.1.3.1 Repère satellite

Le repère satellite est lié à l'architecture mécanique du satellite ; il sert à la définition de l'architecture mécanique de la plate forme, il a son origine en un point caractéristique, sur l'interface satellite-lanceur par exemple, et ses axes (X_s , Y_s , Z_s) sont orientés selon les faces principales de la plate-forme et représentent un trièdre de référence lié au satellite (axes satellite). En nominal, le pointage en attitude consiste à aligner aux mieux ce trièdre sur le repère orbital tout en garantissant également une stabilité et une limitation des vitesses angulaires autour de cette position.

En pointage géocentrique parfait, nous avons:

$$\begin{cases} X_s = -T \\ Y_s = -R \\ Z_s = L \end{cases} \quad (1.12)$$

T : Tangage ; R : Roulis ; L: Lacet

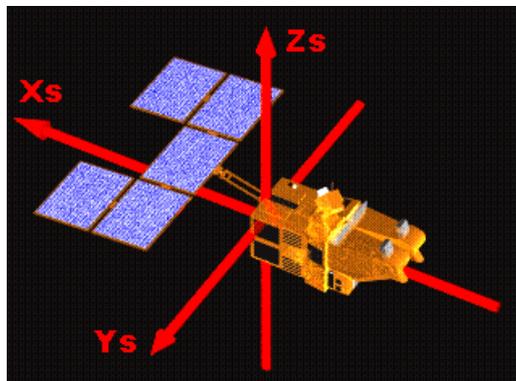


Figure. 1.4 Repère satellitaire

1.1.1.3.2 Repères de références

Les repères de référence terrestres nous permettent de positionner par rapport à la Terre tout satellite artificiel orbitant autour de notre planète.

Un repère orbital de référence est défini par $R : (X_R, Y_R, Z_R)$ où l'axe Z_R est l'axe pointant du satellite vers le centre de masse de la terre, l'axe X_R est l'axe perpendiculaire à Z_R dans le plan orbital et dans la direction de la vitesse du satellite alors que Y_R est l'axe complétant le trièdre (figure 1.5).

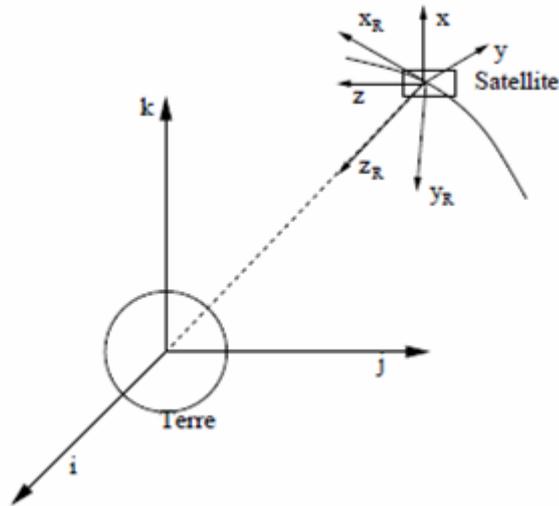


Figure. 1.5 Repère de référence et repère lié au satellite.

1.1.1.3.3 Repère orbital local

Le repère orbital local est défini en chaque point de l'orbite par les trois vecteurs unitaires. Ces vecteurs sont construits à partir du vecteur position et du vecteur vitesse du satellite :

Le vecteur L est colinéaire au vecteur position P (sur l'axe centre Terre, satellite). Il définit l'axe de lacet dit aussi axe de nadir [27]. Le vecteur T est perpendiculaire au plan de l'orbite (vecteur L , vecteur V). Il définit l'axe de tangage. Le vecteur R complète le trièdre. Il appartient au plan (vecteur L , vecteur V) et définit l'axe de roulis. Il ne coïncide pas exactement avec le vecteur vitesse à cause de l'excentricité de l'orbite.

1.1.3 Angles de définitions de l'attitude

L'orientation du satellite dans un repère quelconque nécessite l'emploi de vecteurs de quaternions, de matrices de rotation ou la définition des angles d'Euler. Ces trois outils permettent d'écrire les transformations de coordonnées d'un repère à l'autre [28][29].

1.1.2.1 Les angles d'Euler

Le mouvement d'un satellite par rapport à un référentiel fait intervenir 6 coordonnées, trois coordonnées décrivant la position de son centre de masse et trois angles, nommés les angles d'Euler (ψ, θ, φ). Les angles d'Euler servent à représenter l'orientation d'un satellite par rapport à un repère.

Les équations d'Euler décrivent la dynamique du satellite dans le référentiel lié au satellite. Il est également nécessaire de décrire l'orientation géométrique du satellite dans un repère bien choisi. L'attitude d'un corps rigide est généralement plus facilement décrite dans un repère lié au corps.

Usuellement, les angles d'Euler sont définis comme $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} \vec{u} & \vec{x}' \end{smallmatrix} \right)$ l'angle de rotation propre (roulis)

orienté par \vec{z}' , $\theta = \left(\begin{smallmatrix} \vec{z} & \vec{z}' \end{smallmatrix} \right)$ l'angle de nutation (angle de tangage) orienté par \vec{u} , et $\psi = \left(\begin{smallmatrix} \vec{x} & \vec{u} \end{smallmatrix} \right)$ l'angle

de précession (angle de lacet) orienté par \vec{z} (voir figure 1.6).

On définit l'attitude du satellite par trois angles et par la variation de ces angles en fonction du temps [29][30]:

- le roulis (roll) : rotation du satellite autour de l'axe passant par son centre de gravité et défini par son vecteur vitesse,
- le lacet (yaw) : rotation du satellite autour de l'axe passant par son centre de gravité et le centre de la terre,
- et le tangage (pitch) : rotation autour de l'axe du satellite passant par son centre de gravité et perpendiculaire aux deux précédents.

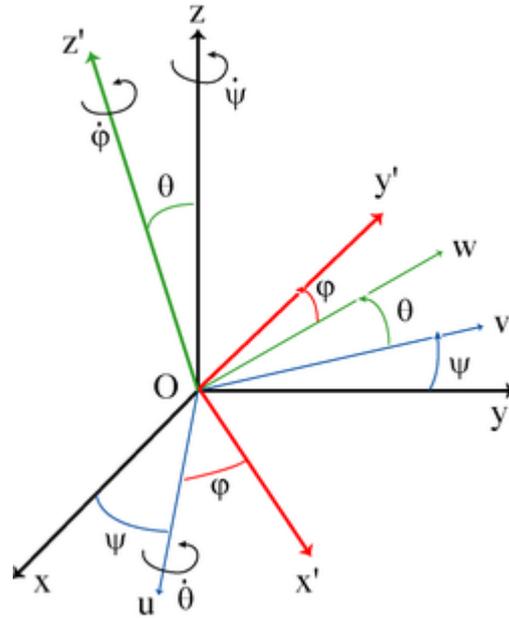


Figure. 1.6 Les angles d'Euler.

Désignons par R le repère principal d'inertie du satellite : c'est souvent le repère des axes principaux d'inertie avec I_x, I_y, I_z les moments principaux d'inertie. On passe du référentiel fixe $Oxyz$ au référentiel lié au satellite $Ox'y'z'$ par trois rotations successives. L'ordre des ces rotations définit le changement de coordonnées [27][30].

La séquence de rotations nécessaires n'est pas unique puisque l'ordre de ces rotations peut être interverti. Le choix de la séquence à utiliser dépend de l'application étudiée.

- Une rotation de l'angle ψ autour de l'axe Oz , fait passer de $Oxyz$ au référentiel $Ouvz$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

- Une rotation de l'angle θ autour de l'axe Ou , fait passer de $Ouvz$ à $Ouwz'$.

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

- Une rotation de l'angle φ autour de l'axe Oz' , fait passer de $Ouvw'$ au référentiel lié au satellite $Ox'y'z'$.

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Donc la transformation du référentiel fixe $Oxyz$ au référentiel lié au satellite $Ox'y'z'$ peut être exprimée par :

$$M = M_3 M_2 M_1 \quad (1.16)$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

De même, la transformation inverse du référentiel lié au satellite au référentiel fixe est donnée par [28][31]:

$$M' = M_1^T M_2^T M_3^T \quad (1.18)$$

En se donnant des contraintes sur les angles, la décomposition en trois rotations est unique, sauf pour les configurations dites singulières. L'existence de configurations singulières est une limite de la méthode. Cependant les angles d'Euler restent intéressants pour leur signification physique d'une part et dans le cas des petites rotations d'autre part.

1.1.3.1.1 Blocage de cardan

Le blocage de cardan est la perte d'un degré de liberté, (plus connue sous le nom anglais de gimbal lock), qui survient quand on utilise les angles d'Euler. Comme la matrice de rotation finale dépend de l'ordre des multiplications, il est possible que parfois, l'une des rotations autour d'un axe soit confondue avec un autre axe de rotation.

Par exemple, supposons qu'un objet est tourné dans l'ordre Z , Y et X et que la rotation autour de Y soit de 90° . Dans ce cas, la rotation suivant Z se fait correctement, puisque c'est la première. L'axe Y

tourne également correctement. Néanmoins, après cette rotation, l'axe X et l'axe Z sont confondus. Du coup, toute rotation autour de l'axe X tourne l'objet suivant Z . Pire encore, il est devenu impossible de tourner l'objet autour de l'axe X .

La seule solution à ce problème est de transformer les axes de rotations suivants avec les rotations précédentes. Ces transformations requièrent un outil de combinaison de rotations quelconques, ce qui s'avère plus facile avec des quaternions (voir paragraphe 1.1.3.3) qu'avec des matrices.

1.1.3.2 Les angles de Cardan

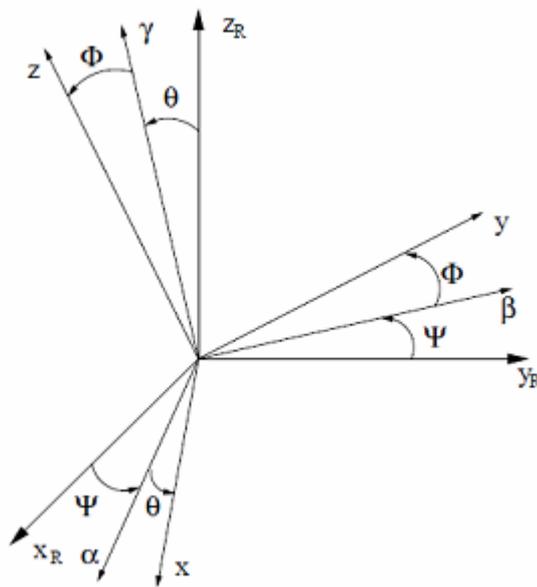


Figure 1.7 Angles de Cardan.

Dans le cas où la séquence choisie est $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \varphi$, les angles d'Euler sont alors appelés **angles de Cardan**. ψ est l'angle de rotation autour de l'axe z_R , θ est l'angle de rotation autour de l'axe β et φ est l'angle de rotation autour de l'axe x_R (figure 1.7).

Considérons le repère orbital R_0 défini par le système d'axe (X, Y, Z) .

- X axe dit de roulis, unitaire de la vitesse orbitale, tangent à l'orbite,
- Y axe de tangage, unitaire du moment cinétique, normal à la trajectoire,
- Z axe de lacet, suivant la géocentrique.

Le changement de repère de R_0 vers R s'effectue par trois rotations successives.

- Une rotation de l'angle φ autour de l'axe Ox , fait passer de $OXYZ$ au référentiel $O\alpha\beta Z$,
- Une rotation de l'angle θ autour de l'axe $O\beta$, fait passer de $O\alpha\beta Z$ au référentiel $Ox\beta\gamma$,
- Une rotation de l'angle ψ autour de l'axe Oz , fait passer de $Ox\beta\gamma$ au référentiel $Oxyz$.

Les angles de cardan donnent aux petits angles une matrice de rotation mieux conditionnée que les angles d'Euler, c'est pourquoi ils sont généralement préférés à ces derniers pour la représentation de l'attitude d'une plate forme stabilisée trois axes.

1.1.3.3 Les Quaternion

Un **quaternion** est un nombre hypercomplexe constituant une extension des nombres complexes en 4 dimensions. Un quaternion est considéré comme un quadruplet de nombres réels le premier élément étant un « scalaire » (q_4) et les trois éléments restants formant un « vecteur » ou « imaginaire pur » (q_1, q_2, q_3) défini come suit [28][30]:

$$q = q_4 + iq_1 + jq_2 + kq_3. \quad (1.19a)$$

Ou :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (1.19b)$$

et

$$ij = -ji = k \quad (1.19c)$$

$$jk = -kj = i \quad (1.19d)$$

$$ki = -ik = j \quad (1.19e)$$

Les quaternions permettent d'étendre la notion de rotation en 3 dimensions à celle en 4 dimensions. Ils permettent ainsi d'éviter le blocage de Cardan et l'implémentation de rotation plus continue et plus précise.

➤ **Comment convertir des angles d'Euler en un quaternion ?**

La conversion d'angles d'Euler en quaternion peut se faire à l'aide de multiplication de quaternions. Chaque angle de rotation est converti en une paire angle-axe, chaque axe correspondant à un axe Euclidien. Ces paires sont converties en quaternions qui sont multipliés ensemble.

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 q_2 &= \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 q_3 &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \\
 q_4 &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

Voici quelques équivalences entre les angles d'Euler et les quaternions :

$$\varphi = 0^\circ \quad q_1 = 0.00000$$

$$\theta = 0^\circ \quad q_2 = 0.00000$$

$$\psi = 0^\circ \quad q_3 = 0.00000$$

$$q_4 = 1.00000$$

$$\varphi = 90^\circ \quad q_1 = 0.00000$$

$$\theta = 0^\circ \quad q_2 = 0.00000$$

$$\psi = 0^\circ \quad q_3 = 0.70711$$

$$q_4 = 0.70711$$

$$\varphi = 0^\circ \quad q_1 = 0.00000$$

$$\theta = 60^\circ \quad q_2 = 0.50000$$

$$\psi = 0^\circ \quad q_3 = 0.00000$$

$$q_4 = 0.86603$$

$$\varphi = 10^\circ \quad q_1 = 0.23930$$

$$\theta = 20^\circ \quad q_2 = 0.18931$$

$$\psi = 30^\circ \quad q_3 = 0.03813$$

$$q_4 = 0.95155$$

1.2 Perturbations dynamiques affectant un satellite [3][32]

La gravitation universelle est depuis longtemps considérée comme la cause essentielle des mouvements observés dans le système solaire. Les perturbations du milieu interplanétaire modifient les conditions de l'environnement électromagnétique naturel de notre planète, affectant ainsi le fonctionnement normal de l'infrastructure spatiale. Les perturbations agissant sur un satellite donnent lieu à des couples ou forces, souvent très faibles mais particulièrement sensibles sur ces objets de faible masse.

Ces perturbations peuvent être d'origine gravitationnelles ou non [33]. Leur modélisation analytique est plus ou moins complexe et leurs répercussions sur les paramètres orbitaux se situent sur différentes échelles temporelles, par des effets à court terme et/ou à long terme, ainsi que sur différents niveaux d'importance suivant la précision désirée.

On peut distinguer plusieurs types de perturbations caractérisées par leur accélération.

1.2.1 Perturbations externe

Elles ont pour cause l'attraction universelle newtonienne et sont donc proportionnelles à la masse du satellite ; l'accélération qu'elles impriment au satellite est donc indépendante de sa masse, comme de sa géométrie ; elles dérivent d'un potentiel U et sont conservatives. Le satellite est avant tout soumis au champ de gravitation terrestre qui, compte tenu de la vitesse, détermine le mouvement de son centre de masse.

L'intensité de ce champ varie avec l'altitude si bien que les parties du satellite les plus éloignées du centre de la Terre sont moins attirées que les parties les plus proches.

a. Perturbations dues à la gravitation terrestre

La Terre n'est ni sphérique ni uniformément dense. Le potentiel réel de gravitation est alors complexe, développé en série, avec le premier terme principal représentant le potentiel newtonien et une partie perturbatrice traduisant aux divers défauts de la Terre. Pour les applications les plus courantes, seul est pris en compte le terme dit en J_2 traduisant l'aplatissement polaire de la Terre[33] dans le potentiel perturbateur U_P , alors que U_K désigne le potentiel képlérien (pour 1kg).

$$U = U_K + U_P \quad U_K = -\frac{\mu}{r} \quad U_P = \frac{J_2}{2} \frac{\mu}{r} \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \lambda - 1) \quad (1.21)$$

□ est la latitude géocentrique et r le rayon vecteur scalaire.

Le calcul ci-dessus montre que l'aplatissement polaire crée d'une part une force supplémentaire centrale qui modifie le moyen mouvement et d'autre part une force parallèle à l'axe nord-sud, qui perturbe les paramètres orbitaux angulaires. En effet, la Terre se comporte comme une sphère avec un "bourrelet" équatorial.

Pour des satellites dont l'orbite et l'altitude inférieur ou égale à une géostationnaire, c'est l'effet de l'aplatissement de la terre aux pôles qui domine en provoquant principalement les variations suivantes de l'ascension droite Ω et de l'argument du périégée ω [degré/jour] :

$$\dot{\Omega} \cong -2.06474 \cdot 10^{14} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2 \sqrt{a^7}} \quad (1.22)$$

$$\dot{\omega} \cong 1.03237 \cdot 10^{14} \frac{4-5 \sin^2 i}{(1-e^2)^2 \sqrt{a^7}} \quad (1.23)$$

C'est cette perturbation que l'on exploite pour obtenir une variation de l'argument du périhélie égale à 0 en fixant $i = 63.4^\circ$ dans le cas des orbites HEO ou pour produire une précession 0.9856 degrés par jour rendant une orbite héliosynchrone (a est en km).

b. Perturbations dues aux frottements atmosphériques

Cette perturbation se fait surtout sentir au périhélie pour les orbites elliptiques et partout, sur les orbites circulaires basses au dessous de 500 km d'altitude. Ces frottements leur font perdre de l'énergie cinétique et donc de l'altitude ce qui augmente encore les frottements puisque l'atmosphère y est plus dense. Le freinage résulte de la traînée, non négligeable car, bien que la densité de l'atmosphère soit très faible, la vitesse est de l'ordre de 7 à 10 Km/s, intervenant par le carré dans l'expression de la traînée (équation 1.24). Son effet est d'autant moins important que le satellite soit gros, en effet la surface augmente comme le carré des dimensions, alors que la masse croît avec le cube des dimensions. Ces frottements peuvent finir par provoquer une rentrée dans l'atmosphère si la trajectoire n'est pas compensée.

L'accélération (opposée au vecteur vitesse) produit par ces frottements vaut :

$$a = -\frac{1}{2} \rho \frac{C_D A}{m} V^2 \quad (1.24)$$

Où A est la surface apparente, V la vitesse instantanée, C_D le coefficient aérodynamique de frottement (entre 1 et 2) et ρ la densité de l'atmosphère qui est déterminée empiriquement mais peut être approchée par :

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{h-h_0}{H}\right) \quad (1.25)$$

ρ_0 est la densité de l'altitude h_0 , H la hauteur d'échelle et h l'altitude.

c. Perturbations dues aux radiations solaires

Dû aux flux de photons venant du soleil, il peut y avoir échange de quantité de mouvement avec le satellite [34]. L'effet essentiel s'exerce sur les surfaces du véhicule, perturbant l'orbite et générant,

en particulier par l'intermédiaire des panneaux solaires, des couples perturbateurs de l'attitude. La pression due aux radiations solaires provoque une accélération, appliqué dans la direction du Soleil, égale à :

$$a = -4.5.10^{-8} \frac{A}{m} \quad (1.26)$$

Où A est la surface exposée au Soleil et m la masse du satellite.

1.2.2 Perturbations internes

L'origine de ces perturbations est variée. Citons les principales:

- Mouvements d'appendices souples comme les GS (Générateurs solaire) par exemple ou des mâts porteurs d'instruments.
- Couples et vibrations créés par des éléments moteurs mobiles dans la plate-forme : enregistreurs.
- Moteurs des panneaux.
- Moteurs de caméras.
- Moteurs des enregistreurs.
- Gyroscopes.
- Couples parasites des moteurs de commande des éléments inertiels comme cinétiques dans le cas de moment cinétique.
- Fuites de gaz du système gaz froid.
- Ballotement de liquides dans les réservoirs
- Couples dus à l'émission de particules ou de rayonnements
- Perturbations provenant d'équipements mobiles

1.3 Introduction à la théorie du chaos

Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique déterministe non linéaire. Du point de vue mathématique, la notion générale de système dynamique est définie à son tour à partir d'un ensemble de variables qui forment le vecteur d'état $x = \{x_i \in \mathbb{R}\}$, $i = 1 \dots n$ où n représente la dimension du vecteur. Ce jeu de variables a la propriété de caractériser complètement l'état instantané du système dynamique générique. En associant en plus un système de coordonnées, on obtient l'espace d'état qui est appelé également *l'espace de phase*. Conjointement avec l'espace d'état, un système dynamique est défini aussi par une loi d'évolution, généralement désignée par *dynamique*, qui caractérise l'évolution de l'état du système en temps. La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique [35][36].

1.3.1 Les exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov mesurent le taux de divergence des orbites voisines et Lyapunov a démontré qu'il y avait en fait autant d'exposants qu'il n'y avait de dimensions dans l'espace de phase du système étudié. Par ailleurs, parmi les exposants retenus pour un système donné, on a l'habitude de prendre généralement l'exposant le plus élevé.

D'une manière générale, Lyapunov part de la formule suivante:

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \dots \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$$

D'où

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right| \quad (1.27)$$

Le terme $\left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right|$ décrit en fait combien une petite erreur E_k en x_k soit la $k^{\text{ième}}$ itération, est augmenté

ou diminuée dans l'itération suivante. L'amplification est d'ailleurs dépendante de la taille de

l'erreur. Lyapunov a découvert ensuite que cette erreur tendait vers une limite dont la formule est la suivante :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})| \quad (1.28)$$

- Si $\lambda < 0$: l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique ; de plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et points périodiques super stables ont un exposant de Lyapunov λ qui tend vers $-\infty$.
- Si $\lambda = 0$: l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.
- Si $\lambda > 0$: l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins vont être visités. Ces points sont dits instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points avec aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées.

1.3.2 Contrôle des systèmes chaotiques

Si le contrôle peut revêtir plusieurs formes, il vise toujours à influencer l'évolution du système. On agit donc sur le système dans le but de l'amener à évoluer d'une manière ou d'une autre. Lors du contrôle d'un système chaotique, on peut agir de diverses manières, selon le but recherché. On peut souhaiter qu'un système chaotique reste dans un domaine chaotique [37][38]. En effet, il est possible que, naturellement, le système évolue jusqu'à perdre les caractéristiques chaotiques (sensibilités aux conditions initiales, ...). On peut vouloir le forcer à rester chaotique, dans ce cas on procède à des opérations de contrôle convergeant vers ce but. De même, on peut vouloir amener un système, à l'origine non chaotique, vers un domaine chaotique. Réciproquement, on peut souhaiter voir un système chaotique évoluer de façon à perdre son caractère chaotique.

Il existe de nombreuses techniques de commandes dites « avancées » qui peuvent être utilisées pour contrôler les systèmes chaotiques tels que : La commande robuste, la commande adaptative, La commande par la logique floue, la commande prédictive, la commande active,...[37]-[40].

1.4 Stabilité des systèmes

La stabilité d'un système est la capacité de ce dernier à revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il en est ponctuellement écarté. Compte tenu des comportements complexes que les systèmes dynamiques non linéaires peuvent présenter, le concept de stabilité revêt plusieurs formes. Les critères d'analyse de stabilité peuvent être classés en deux catégories : les critères fréquentiels (à partir des diagrammes de Bode ou de Nyquist, ...) et les critères temporels (cercles de Gerschgorin, deuxième méthode de Lyapunov, ...).

D'une façon générale, les systèmes non linéaires sont les plus difficiles à étudier parce qu'il est délicat d'en faire l'étude dans le domaine fréquentiel (fonction de transfert difficile à exploiter). Il est alors préférable d'avoir un critère utilisant le modèle du système dans le domaine temporel. Pour étudier ce problème, nous avons retenu les méthodes de Lyapunov proposées dans le cadre de l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires.

1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov

1.4.1.1 Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation du système $\dot{x} = f(x, u)$ autour de l'équilibre x_e . Plus précisément, on examine les valeurs propres $\lambda_i(A)$ de la matrice Jacobienne évaluée à l'équilibre :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u) \quad (1.29)$$

Théorème 1. 1 *Première méthode de Lyapunov.*

- Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne ont une partie réelle strictement négative ($\forall i; \text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$), l'équilibre $(x_e; u)$ est exponentiellement stable.
- Si la matrice Jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive ($\exists i; \text{Re}(\lambda_i(A)) > 0$), l'équilibre $(x_e; u)$ est instable.

Le théorème ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle et aucune valeur propre à partie réelle strictement positive.

1.4.1.2 Deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)

La première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contrepartie, est d'une portée beaucoup plus générale. L'intérêt de la seconde méthode vient de sa capacité à déterminer la nature de la stabilité d'un point d'équilibre sans être obligé d'intégrer les équations différentielles qui régissent le système étudié. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ positive telle que sa dérivée est négative pour tout x non nul et telle que $V(0) = 0$ et $V(\infty) = \infty$.

Une fonction $V(x)$ satisfaisant les conditions ci-dessus est appelée fonction de Lyapunov du système dynamique. On pourra donc conclure à la stabilité d'un système par l'examen d'une seule fonction scalaire.

Théorème 1.2 Stabilité suivant le critère de Lyapunov

L'état d'équilibre $x_e=0$ du système dynamique autonome à temps continu $\dot{x} = f(x)$ est stable s'il existe une fonction $V(x)$ différentiable de R dans R , dite fonction de Lyapunov, et qui satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} V(0) = 0, \\ V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \\ \dot{V}(x, y) \leq 0 \quad \forall x \neq 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Où \dot{V} est la dérivée de V par rapport au temps. Si la dernière condition devient $\dot{V}(x, y) < 0$ pour $x \neq 0$ alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé les outils fondamentaux que nous allons utiliser dans cette thèse, à savoir la représentation d'attitude d'un satellite, par les repères de référence et les angles de définition de l'attitude, puis nous avons effectué un bref tour d'horizon des perturbations pouvant affectés un satellite en orbite.

Nous avons ensuite introduit la notion de la théorie du chaos en se basant sur la stabilité des systèmes chaotiques.

A la fin de cette première partie nous avons montré que les fonctions de Lyapunov s'avèrent être un outil particulièrement adapté à l'étude de la stabilité des systèmes.

Modélisation du Mouvement d'Attitude D'un Satellite

Introduction

Depuis le sol, un satellite apparaît au mieux comme un point dans le ciel. Il est impossible de connaître directement son attitude, ou orientation. Il est donc équipé de capteurs stellaires, capables de mesurer leur position par rapport au Soleil, à certaines étoiles ou à un point terrestre. L'orientation du satellite est ensuite déterminée par calcul.

Dans le domaine spatial, il ne s'agit pas seulement d'envoyer un satellite vers l'espace, il faut savoir aussi le commander, le contrôler et le positionner sur des orbites appropriées.

Le but du contrôle d'attitude est d'aligner le repère du satellite sur le repère de référence, pour éliminer les écarts et maintenir un pointage parfait.

2.1 Définition du control d'attitude d'un satellite

Le contrôle d'attitude d'un satellite consiste à commander son orientation (son attitude) dans l'espace afin de garantir les objectives de la commande.

2.1.1 Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite (SCAO)

2.1.1.1 Définition

Un *SCAO* (Système de Contrôle d'Attitude et d'orbite) désigne l'ensemble des équipements et d'algorithmes mis en œuvre de manière autonome sur un satellite artificiel afin de lui permettre de

contrôler précisément son attitude (c'est-à-dire son orientation dans l'espace autour de son centre d'inertie) et la correction de son orbite (des manœuvres sur les paramètres orbitale). Il est indispensable à tout satellite, plate-forme spatiale sonde interplanétaire ou lanceur. Le contrôle d'attitude et d'orbite sont souvent étroitement liés.

2.1.1.2 L'objectif du SCAO

Le **SCAO** est imposé à la fois par les spécifications propres à la mission et par les perturbations agissant sur le satellite et modifiant en continu sa dynamique.

Les deux points importants sont *la maîtrise de l'attitude* (c'est à dire de l'orientation du satellite ou mieux de son mouvement autour du centre d'inertie), et *le contrôle de la trajectoire* donc des paramètres orbitaux du véhicule spatial (donc du mouvement du centre d'inertie).

2.1.1.2.1 La maîtrise de l'attitude

Le but du contrôle d'attitude est d'assurer des performances de pointage et de stabilité permettant de réaliser les objectifs de la mission. Or le satellite a tendance à se dépointer sous l'action de couples produits par l'environnement ou produits en son sein. Il faut donc contrôler activement l'orientation angulaire mais aussi assurer une stabilité de cette orientation.

Pour évaluer les perturbations et dimensionner le contrôle d'attitude, il est essentiel de connaître les caractéristiques physiques (masse, centrage, inertie) et le comportement structurel du satellite, qui régissent sa dynamique; celle-ci n'est pas toujours assimilable à celle d'un corps rigide: les appendices flexibles (générateur solaire, antennes, systèmes de pointage...) dont est doté le satellite, induisent des *modes souples* résonant à des fréquences qui vont de 0.01 Hz à quelques Hz. Ces fréquences peuvent directement interagir avec la bande de contrôle du véhicule. Elles contraindront le gabarit du correcteur ou limiteront la bande passante du contrôle d'attitude.

2.1.1.2.2 Le contrôle d'orbite

Le contrôle d'orbite est responsable de l'acquisition et du maintien de l'orbite définie par la mission. Le contrôle d'orbite consiste à commander la position (et ses dérivées) du centre d'inertie du satellite dans l'espace, donc des paramètres orbitaux.

2.1.1.3 Architecture d'un système de contrôle d'attitude et d'orbite

Un SCAO se divise en 3 principaux sous-ensembles (figure 2.1) [41][42]:

- L'estimateur d'attitude reconstitue l'attitude du satellite à partir de mesures délivrées par des senseurs (capteurs) d'attitude.
- Les actionneurs (moteurs): leurs rôle est de modifier l'attitude et la position du satellite.
- Un organe de commande déterminant les ordres à fournir aux actionneurs à partir des signaux issus des senseurs.

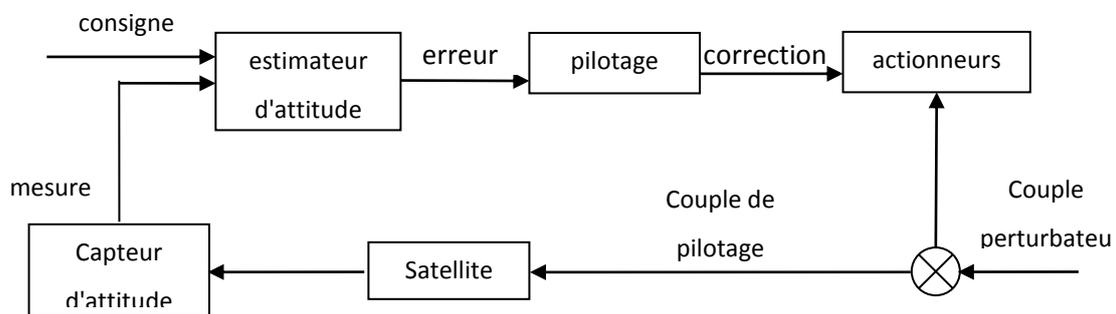


Figure 2.1 Boucle de Contrôle d'attitude.

2.1.1.3.1 Les senseurs [43][44]

La position des satellites est généralement déterminée au sol à partir de mesures effectuées par les stations sols. Les senseurs sont destinés à détecter les écarts angulaires amenés par les couples perturbateurs entre le trièdre lié au satellite et le trièdre de référence.

Le choix d'un senseur d'attitude dépend de plusieurs facteurs liés d'une part à la mission du véhicule et aux performances de pointage et de stabilité demandées, et d'autre part aux sources de référence disponibles.

1. Les senseurs optiques (à référence externe)

Notons qu'un seul point sur la sphère céleste (étoile, soleil) n'est pas suffisant pour définir l'attitude d'un satellite. En effet un point sur la sphère céleste est défini par son ascension droite et sa déclinaison, alors qu'il faut trois angles indépendants (précession, nutation, rotation propre) pour définir de manière unique l'attitude d'un satellite.

a. Les senseurs stellaires

Il s'agit d'une caméra (le plus souvent à base d'un capteur CCD) qui prend des images d'une zone du ciel. En analysant le champ d'étoile imagé et à l'aide d'un catalogue d'étoile embarquée, la position du satellite peut-être déterminée. Il peut aussi être utilisé plus simplement pour suivre le déplacement des étoiles dans le champ afin de déterminer la variation de l'attitude: ce mode de fonctionnement est généralement utilisé pour stopper la rotation du satellite relativement à un référentiel inertiel (en fait lié aux étoiles); ces senseurs permettent d'obtenir la meilleure précision dans les mesures d'attitude.

b. Les senseurs terrestres

Un senseur infrarouge avec un mécanisme de balayage de faisceau (ou monté sur un satellite spinné) qui est sensible à l'émission infrarouge du disque terrestre; il permet de mesurer les écarts angulaires autour des axes de tangage et de roulis.

c. Les senseurs solaires

Le soleil avec son diamètre d'un demi-degré depuis la Terre est une référence d'attitude simple; certains senseurs solaires déterminent la position du soleil avec une résolution meilleure que l'arc-minute, d'autres indiquent simplement sa présence dans un champ de vue.

2. Les senseurs inertiels

a. Gyromètres

Il existe diverses technologies de gyromètre : gyromètre mécanique un ou deux axes, gyromètre laser, gyromètre (laser) à fibre optique, gyromètre résonant. Tous ces instruments permettent de déterminer la variation de l'attitude à tout instant (les composantes du vecteur vitesse de rotation dans un référentiel inertielle suivant le ou les axes du gyromètre) ; la mesure doit être intégrée pour obtenir l'attitude du satellite. Donc l'incertitude sur l'attitude en sortie d'un gyromètre se détériore avec le temps.

b. Accéléromètre

Les accéléromètres permettent de déterminer l'accélération du satellite due aux actions de contact (c'est-à-dire hors effets gravitationnels). En intégrant une fois, on peut trouver la vitesse, en intégrant deux fois, la position.

c. Magnétomètres

Les magnétomètres sont utilisés pour déterminer précisément le champ magnétique terrestre afin de calculer la commande sur des actionneurs à couple magnétique (magnéto coupleurs).

➤ magnétomètres à induction

Le magnétomètre à induction est un instrument qui mesure la variation dans le temps du flux du champ magnétique à travers une surface fixe par rapport au satellite. Il est principalement utilisé sur les satellites spinnés en orbite basse.

➤ magnétomètre flux gâte :

Le magnétomètre flux gâte est un instrument qui mesure la projection du champ magnétique au voisinage du satellite sur un axe. À l'aide de la carte du champ magnétique terrestre et de 3 magnétomètres (en théorie, 2 suffisent, si on connaît précisément le module du champ magnétique terrestre au point et à l'instant considéré), connaissant la position sur orbite, on peut obtenir une information (incomplète) sur l'attitude du satellite. Ces instruments sont sensibles aux perturbations

électromagnétiques dues aux équipements des satellites (en particulier les actionneurs à couple magnétique) et ils sont donc souvent éloignés des dispositifs perturbateurs (par exemple en les plaçant à l'extrémité d'une perche fixée au satellite). Les magnétomètres dans les SCAO peuvent aussi être utilisés pour déterminer précisément le champ magnétique terrestre afin de calculer la commande sur des actionneurs à couple magnétique (magnéto coupleurs).

2.1.1.3.2 Les actionneurs ou actionneurs

Organes de commande, autorisant une acquisition d'attitude et une réduction des vitesses angulaires, permettant de maintenir une attitude ou d'en amortir les petites oscillations, de changer un pointage, d'assurer un balayage, de stabiliser une phase propulsée etc....

Les couples de commande sont fournis par la variation de leur moment cinétique, c'est-à-dire par la variation de leur vitesse de rotation. Lorsque celle-ci atteint sa valeur maximum, il est nécessaire de la ramener à zéro en utilisant des actionneurs secondaires à éjection de masse.

a. Actionneurs Inertiels

- Roues de réaction : permettent d'appliquer un couple au satellite et ainsi, de provoquer une rotation autour de l'un des axes.
- Roue cinétique.
- A gyroscopes.

b. Actionneurs Magnétiques

- Magnéto coupleurs : par interaction avec le champ magnétique terrestre, entraînent la création de couples ayant pour but de permettre le contrôle de la vitesse de rotation des roues à réaction.
- Utilisation de la dérivée du champ magnétique terrestre.
- Par vrillage de panneaux solaires et interaction avec la pression de radiation photonique due à la lumière solaire et frappant les générateurs solaires.

c. *Propulseurs à éjection de masse :*

- Gaz chauds.
- Gaz froids.
- Electrique.
- Ionique.

2.1.1.3.3 *L'électronique et l'informatique de bord*

Ce dernier est chargé d'estimer l'attitude (et éventuellement la position) à partir des mesures des capteurs, de sélectionner le profil à suivre à partir de la télécommande sol et de l'estimée de l'attitude (Guidage), de commander les actionneurs pour faire coïncider au mieux l'estimée de l'attitude et le profil sélectionné (Contrôle).

2.1.1.4 *Système de Contrôle d'Attitude (SCA)*

Le système de contrôle d'attitude est l'un des composants de la plate-forme d'un satellite artificiel. Son rôle est d'asservir l'attitude du satellite en présence des perturbations en pointant les axes du véhicule vers les directions requises de manière à ce qu'elle soit conforme aux besoins de la mission, de compenser les couples perturbateurs qui dépointeraient le satellite soit de manière passive, ou active. Pour cela, le satellite détermine son attitude grâce à des senseurs et la contrôle grâce à des actionneurs qui génèrent des couples moteurs.

2.1.1.4.1 *Fonctions assurées par le SCA*

Le SCA est imposé à la fois par les spécifications propres à la mission et par les perturbations agissant sur le satellite et modifiant en continu sa dynamique:

Le contrôle d'attitude assure deux fonctions essentielles:

- Il contribue à la *survie du satellite* : Un satellite doit en effet être en permanence capable d'orienter ses panneaux solaires vers le soleil afin de recharger ses batteries lorsque cela est nécessaire. Si le niveau des batteries descend en dessous d'un certain seuil, celles-ci

deviennent inutilisables et, privé d'énergie, le satellite n'est plus qu'une masse inerte incapable d'assurer sa mission.

- Il contribue à la *performance du satellite* : du fait de la distance généralement grande entre un satellite et la terre, celui-ci doit être capable de pointer sa charge utile (antenne, télescope) de manière très précise vers des zones géographiques données. Par exemple : pour un satellite de télécommunications, évoluant à 36000Km environ, une erreur de pointage de 0.1° correspond à une erreur au sol de 63Km.

2.1.1.4.2 Objectifs du contrôle d'attitude

Les objectifs peuvent être :

- Eviter les dégâts solaires ou atmosphériques sur des composants sensibles ;
- Contrôler la dissipation de chaleur ;
- Orienter les moteurs pour les manœuvres orbitales ;
- Pointer dans la bonne direction :
 - Les panneaux solaires
 - Les instruments: cela comprend les antennes, la charge utile, les instruments du système de contrôle d'attitude lui-même ; en particulier, il assure la survie des instruments en tenant garde à ce qu'aucun instrument ne pointe une direction qui pourrait le détruire du fait de sa forte sensibilité (généralement la Lune, la Terre et surtout le Soleil pour les satellites en orbite terrestre)
 - Les tuyères : lors des manœuvres de contrôle d'orbite, il est absolument nécessaire d'orienter convenablement le système propulsif.
 - Le sous-système de contrôle thermique : l'orientation des faces du satellite
 - Relativement à la direction du Soleil (et dans une moindre mesure de la Terre et de la Lune) affecte parfois considérablement le contrôle thermique du satellite.

2.1.1.4.3 Nécessités du SCA

Ce sont les spécifications et les contraintes de la mission qui imposent de tels contrôles. Il n'est pas possible d'en dresser une liste exhaustive parce que chaque mission a ses propres spécificités:

À partir de la phase d'injection assurée par le SCA du lanceur.

Le SCA doit assurer en particulier:

- Une manœuvre de spin si nécessaire.
- La réduction des vitesses angulaires transverses.
- Les acquisitions roulis, tangage et lacet par l'intermédiaire des acquisitions terre et soleil en particulier (dans le cas d'utilisation des angles de cardan).
- Eventuellement la manœuvre de retournement si le satellite est pointé à 180° de son pointage nominal.

2.1.2.4 Les exigences du contrôle d'attitude

Les exigences du contrôle d'attitude découlent des besoins d'orientation imposés par la mission; par exemple, l'observation astronomique nécessite de réaliser des visées en des zones précises du ciel, avec un pointage très stable de la ligne de visée: l'observation de la terre et les télécommunications requièrent le pointage précis vers des zones terrestres données d'instrument imageurs et d'antennes etc...

Les exigences du contrôle d'attitude sont aussi liées aux caractéristiques des autres sous-systèmes : communication avec le sol, génération de puissance à partir du soleil, et régulation thermique.

Les exigences précédentes ne sont pas toujours conciliables au sein d'un même SCA et peuvent amener à mettre en jeu des mécanismes de pointage indépendant; c'est le cas du générateur solaire, orienté en permanence vers le soleil; c'est aussi le cas des instruments d'observation de la terre ; ce peut être enfin le cas d'une charge utile orientable, montée sur des tourelles de pointage avec de plus ou moins grands débattements.

Les exigences du contrôle d'attitude se traduisent par un certains nombres de paramètres à définir qui sont typiquement:

- L'élément du satellite à pointer: le satellite lui-même, la charge utile si elle n'est pas fixe sur la plate forme du satellite, ou encore une partie mobile de la plate forme (générateur solaire);
- La direction du pointage, définit par rapport à une référence externe telle que la terre, le soleil, ou les étoiles;
- La précision du pointage, qui caractérise la performance à réaliser par le contrôle d'attitude;
- La stabilité du pointage, qui caractérise la variation maximale de l'attitude stabilisé sur un horizon de temps donné;
- La connaissance du pointage, qui caractérise la précision sur la détermination de la direction du pointage, soit en temps réel et à bord (estimation d'attitude), soit en temps différé et au sol (restitution d'attitude).

Ces exigences peuvent varier considérablement d'une phase à une autre de la mission.

2.2 Méthodes de contrôle d'attitude

Il existe deux types principaux de contrôle d'attitude :

2.2.1 Méthode passive

Le principe de la commande passive consiste à modifier structurellement le système à commander afin qu'il réalise au mieux les fonctions souhaitées. Les méthodes passives, ne consomment pas d'énergie mais imposent une géométrie particulière du satellite. Dans le cas d'une stabilisation par gradient de gravité le principe de la commande passive consiste à jouer sur l'action de rappel des couples perturbateurs pour assurer la stabilité et dans le cas d'une stabilisation par spin le principe est de jouer sur les propriétés des moments cinétiques.

2.2.2 Méthode active

A la différence de la commande passive, la commande active suppose l'emploi d'un dispositif spécifique appelé **système de commande** afin de modifier le comportement dynamique du système étudié. Le but d'un système de commande est donc d'exercer des actions entraînant une amélioration du comportement du système et de ses performances. Dans le contrôle 3-axes par exemple les actionneurs en couple réalisent un pilotage « axe par axe » du satellite. Les méthodes actives consomment de l'énergie, à durée de vie limitée.

2.3 Modélisation du mouvement d'attitude

Le mouvement du satellite se compose d'un mouvement d'orbite gouverné par les équations de translation et d'un mouvement d'orientation ou d'attitude gouverné par les équations de rotation. On suppose que la force d'attraction gravitationnelle soit la force dominante s'exerçant sur le satellite et par conséquent le mouvement du satellite peut être modélisé à l'aide du modèle de Kepler idéal à deux corps pour lequel un découplage entre le mouvement de translation et de rotation peut être effectué. Nous nous intéressons au modèle mathématique du mouvement d'orientation du satellite qui peut être obtenu à l'aide des équations de la cinématique et de la dynamique.

2.3.1 Moment cinétique et matrice d'inertie

Dans ce qui suit on suppose que : G est le centre d'inertie du satellite, G_x l'axe de roulis, G_y l'axe de tangage, G_z l'axe de lacet.

La grandeur physique qui joue un rôle analogue à la quantité de mouvement dans le cas des rotations est le vecteur moment cinétique (ou moment angulaire).

Le moment cinétique total d'un solide en rotation est donné par la somme vectorielle des moments angulaires de tous les points qui constituent le solide:

$$\vec{H} = \sum_i \vec{H}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{m}_i \quad (2.1)$$

$$H_i = r_i \times m_i \left(\dot{R}_o + \omega \times r_i \right) = -v_o \times m_i r_i + r_i \times m_i (\omega \times r_i) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} H &= \sum_{m_i} -v_o \times m_i r_i + \sum_{m_i} r_i \times (\omega \times r_i) m_i \\ &= -v_o \times \sum_{m_i} m_i r_i + \sum_{m_i} r_i \times (\omega \times r_i) m_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si l'on suppose que O est le centre de masse du solide, alors : $\sum_{m_i} m_i r_i = 0$

$$\text{Finalement, on trouve que : } H = \sum_{m_i} r_i \times (\omega \times r_i) m_i \quad (2.4)$$

Après avoir effectué le produit vectoriel triple, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} H &= i \left[\omega_x \sum_{m_i} \left(y_i^2 + z_i^2 \right) m_i - \omega_y \sum_{m_i} y_i x_i m_i - \omega_z \sum_{m_i} x_i z_i m_i \right] \\ &+ j \left[\omega_y \sum_{m_i} \left(x_i^2 + z_i^2 \right) m_i - \omega_x \sum_{m_i} x_i y_i m_i - \omega_z \sum_{m_i} y_i z_i m_i \right] \\ &+ k \left[\omega_z \sum_{m_i} \left(x_i^2 + y_i^2 \right) m_i - \omega_x \sum_{m_i} x_i z_i m_i - \omega_y \sum_{m_i} y_i z_i m_i \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'équation 2.5 prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} H &= i \left[\omega_x I_x - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz} \right] + j \left[\omega_y I_y - \omega_x I_{yx} - \omega_z I_{yz} \right] + k \left[\omega_z I_z - \omega_x I_{zx} - \omega_y I_{zy} \right] \\ &= i H_x + j H_y + k H_z \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si on définit la vitesse angulaire comme : $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$

L'équation 2.6 peut être mise sous la forme matricielle suivante :

$$H = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = I\omega \quad \text{Unités : } \left[\frac{\text{Kg.m}^2}{\text{s}} \right] = [\text{Kg.m}^2][\text{s}^{-1}] \quad (2.7)$$

Où I est La matrice d'inertie du solide

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

I_x, I_y et I_z sont les moment d'inertie suivant les axes inertielles,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_v (y^2 + z^2) \rho_m dv \\ I_y &= \int_v (x^2 + z^2) \rho_m dv \\ I_z &= \int_v (x^2 + y^2) \rho_m dv \end{aligned} \quad (2.9)$$

et $I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}$ sont les produits d'inertie, ils sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \int_v xy \cdot \rho_m dv \\ I_{xz} &= I_{zx} = \int_v xz \cdot \rho_m dv \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int_v yz \cdot \rho_m dv \end{aligned} \quad (2.10)$$

Avec ρ_m la densité.

Hypothèses 2.1

Dans le cas le plus courant où I_x, I_y et I_z sont les axes principaux d'inertie, la matrice dans ce cas est diagonale, on a alors une matrice plus simple :

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

2.3.2 Les équations d'Euler

Par application de la loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) pour le mouvement en rotation du solide, l'équation des moments d'Euler s'écrit [43]:

$$M = \left. \frac{dH}{dt} \right|_I \quad (2.12)$$

Où H est le moment cinétique (angular momentum) du solide calculé en O et M la résultante inertielle des moments appliqués au solide.

D'autre part, d'après le théorème de Coriolis, la loi de Newton peut se réécrire [43] :

$$M|_S = \left. \frac{dH}{dt} \right|_S + \omega_{S/I} \wedge H \quad (2.13)$$

En projetant cette équation sur les axes du référentiel S (ou **axes d'Euler**), on obtient **les équations d'Euler** :

$$\begin{cases} M_x = \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \\ M_y = \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \\ M_z = \dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x \end{cases} \quad (2.14)$$

Où le vecteur de vitesse angulaire $\omega_{S/I} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ est exprimé dans la base (x, y, z).

Hypothèses 2.2

Les axes sont les axes principaux d'inertie :

$$H_x = I_{xx} \omega_x \quad H_y = I_{yy} \omega_y \quad H_z = I_{zz} \omega_z$$

L'équation 2.14 devient:

$$\begin{cases} M_x = I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) \\ M_y = I_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) \\ M_z = I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) \end{cases} \quad (2.15)$$

2.3.3 Calcul de la rotation instantanée

Le vecteur rotation instantanée du repère lié au satellite S par rapport au repère de référence R , exprimé suivant les axes du satellite est noté :

$$\vec{\omega}_{(S/R)} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{/R} \quad (2.16)$$

Il est possible d'obtenir les coordonnées du vecteur $\vec{\omega}_{(S/R)}$ en fonction des angles d'Euler. Il s'agit de la rotation galiléenne (celles qui seraient mesurées par des gyroscopes) :

$$\begin{cases} p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta + \omega_0 \sin \psi \cos \theta \\ q = \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi + \omega_0 (\cos \psi \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi) \\ r = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi + \omega_0 (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \psi) \end{cases} \quad (2.17)$$

Pour obtenir un pointage Terre parfait il faut annuler la rotation relative au repère orbital de composantes en roulis, tangage et lacet [31]:

$$\begin{cases} \omega_{xR} = -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \omega_{yT} = \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \omega_{zL} = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{cases} \quad (2.18)$$

Ainsi, en inversant la relation précédente, il sera toujours possible de calculer les angles d'Euler du satellite dans n'importe quel repère.

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega_{xR} + (\omega_{yT} \sin \phi + \omega_{zL} \cos \phi) \tan \theta \\ \dot{\theta} = \omega_{yT} \cos \phi - \omega_{zL} \sin \phi \\ \dot{\psi} = (\omega_{yT} \sin \phi + \omega_{zL} \cos \phi) \cos^{-1} \theta \end{cases} \quad (2.19)$$

Telles seront les composantes de la rotation satellite à prendre en compte lors de l'acquisition grands angles. Elles seront utilisées par la suite dans le développement de la loi du contrôle d'attitude[31].

NB : Dans la suite de ce travail nous considérons que: $\omega_{xR} = \omega_x$; $\omega_{yT} = \omega_y$; $\omega_{zL} = \omega_z$

2.3 Les équations du mouvement

2.3.1 Equation de la cinématique

On dira que dans un repère inertielle, un satellite S est animé d'un mouvement de **POINSOT** lorsque le moment calculé en son centre d'inertie G des forces extérieures s'exerçant sur lui est constamment nul [41][45].

$$\text{Mouvement de Poinsot} \Leftrightarrow \vec{M}_G = \vec{0} \quad \forall t \quad (2.20)$$

Ainsi, d'après l'équation 2.14 on aura l'équation des vitesses angulaires:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \frac{(I_y - I_z)}{I_x} \omega_y \omega_z \\ \dot{\omega}_y = \frac{(I_z - I_x)}{I_y} \omega_x \omega_z \\ \dot{\omega}_z = \frac{(I_x - I_y)}{I_z} \omega_x \omega_y \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\text{On pose } \sigma_x = \frac{I_y - I_z}{I_x}, \sigma_y = \frac{I_z - I_x}{I_y}, \sigma_z = \frac{I_x - I_y}{I_z}$$

Le système d'équations cinématiques à six dimensions décrivant le mouvement du satellite est donc définis par :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \frac{(I_y - I_z)}{I_x} \omega_y \omega_z \\ \dot{\omega}_y = \frac{(I_z - I_x)}{I_y} \omega_x \omega_z \\ \dot{\omega}_z = \frac{(I_x - I_y)}{I_z} \omega_x \omega_y \\ \dot{\phi} = \omega_x + \sin \phi \tan \theta \omega_y + \cos \phi \tan \theta \omega_z \\ \dot{\theta} = \cos \phi \omega_y - \sin \phi \omega_z \\ \dot{\psi} = \sin \phi \sec \theta \omega_y + \cos \phi \sec \theta \omega_z \end{cases} \quad (2.22)$$

Pour résoudre ce système d'équation, on utilise la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les résultats de simulation effectués sous Matlab sont représentés ci-dessous.

Le portrait de phase des vitesses angulaires est présenté sur la figure (2.2) ; la figure (2.3) présente la variation des vitesses angulaires en fonction du temps et la figure (2.4) présente la variation des angles d'attitude en fonction du temps.

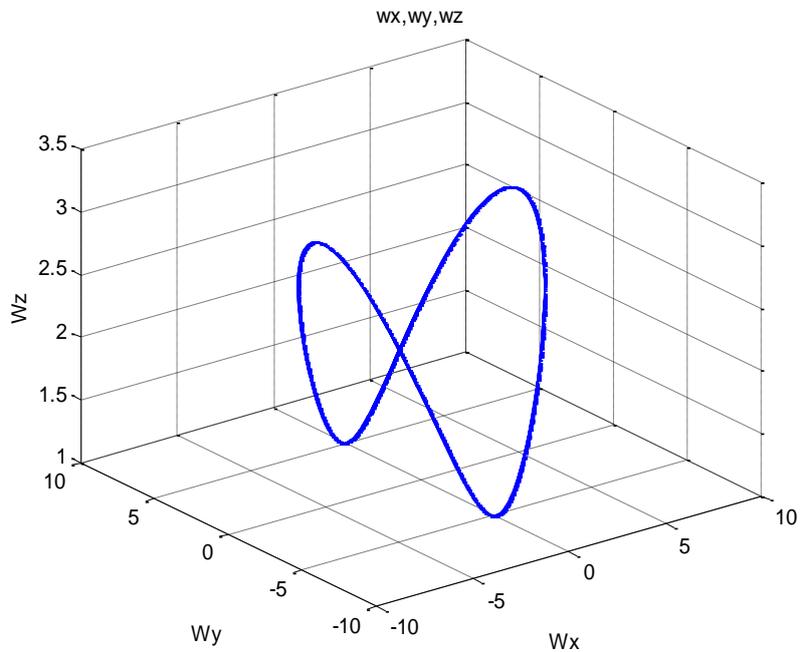


Figure 2.2 Portrait de phase des vitesses angulaires.

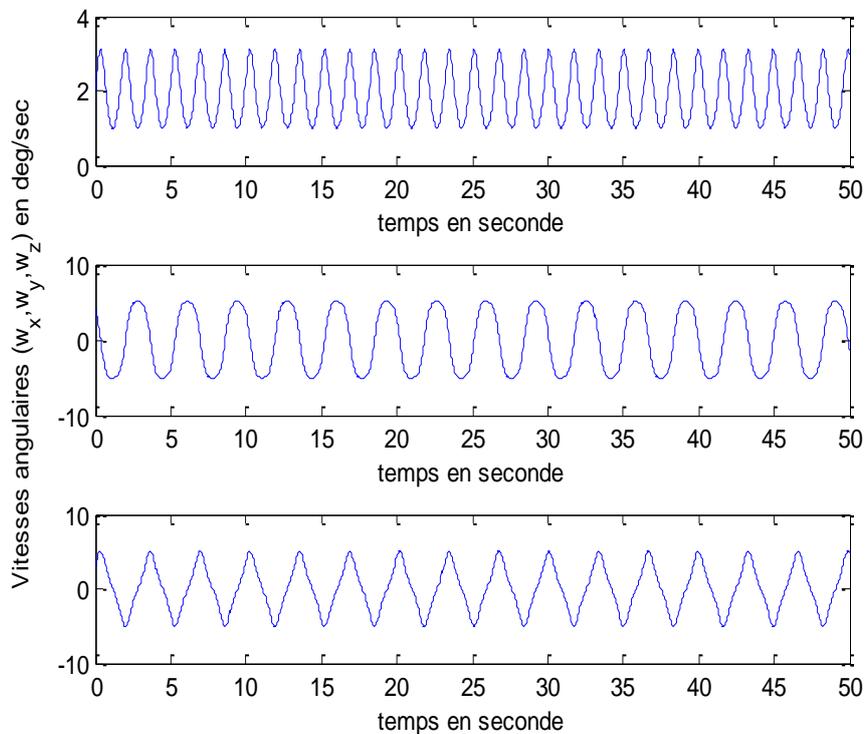


Figure 2.3 Variation des vitesses angulaires en fonction du temps.

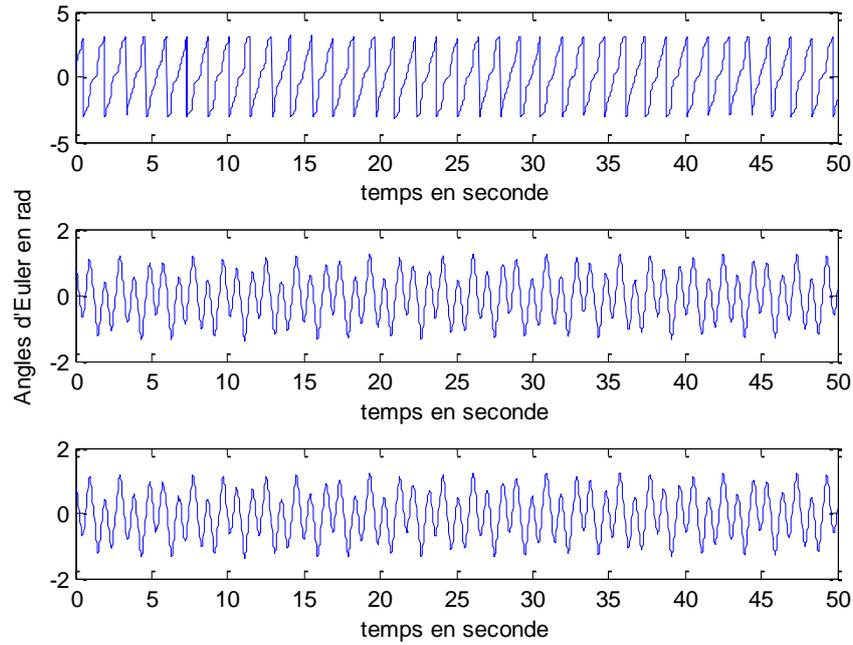


Figure 2.4 Variation des angles d'attitude en fonction du temps.

2.3.2 Equation de la dynamique

Considérons la dynamique en rotation d'un satellite rigide. Les coordonnées du corps fixe sont choisies pour être en coïncidence avec les axes principaux de l'engin spatial.

L'équation de la dynamique d'un satellite s'obtient en appliquant le théorème du moment cinétique appliqué au centre d'inertie G . En tenant compte de la présence des couples perturbateurs, on obtient un système différentiel décrivant de façon tout à fait satisfaisante le mouvement du satellite [45]-[53]:

D'après l'équation (2.15) les équations de la dynamique du satellite sont :

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z (I_y - I_z) + M_x \\ I_y \dot{\omega}_y = \omega_x \omega_z (I_z - I_x) + M_y \\ I_z \dot{\omega}_z = \omega_x \omega_y (I_x - I_y) + M_z \end{cases} \quad (2.23)$$

(M_x, M_y, M_z) sont les composantes du vecteur des perturbations. En prenant en compte les composantes du vecteur de commande. L'équation (2.23) devient:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z + \frac{P_x}{I_x} + \frac{C_x}{I_x} + u_x \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{P_y}{I_y} + \frac{C_y}{I_y} + u_y \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y + \frac{P_z}{I_z} + \frac{C_z}{I_z} + u_z \end{cases} \quad (2.24)$$

Où $U = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T$ est le couple de commande. Chaque composante est issue d'un moteur associé à chaque axe principal du satellite. $P \in R^{3 \times 3}$ est la matrice des perturbations relia à la vitesse angulaire ω et $C = [C_x \quad C_y \quad C_z]^T$ est le vecteur des perturbations périodiques relia à la vitesse orbitale angulaire ω_0 .

Le système d'équation dynamique relative au satellite est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z + \frac{P_x}{I_x} + \frac{C_x}{I_x} + u_x \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{P_y}{I_y} + \frac{C_y}{I_y} + u_y \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y + \frac{P_z}{I_z} + \frac{C_z}{I_z} + u_z \\ \dot{\phi} = \omega_x + \sin \phi \tan \theta \omega_y + \cos \phi \tan \theta \omega_z \\ \dot{\theta} = \cos \phi \omega_y - \sin \phi \omega_z \\ \dot{\psi} = \sin \phi \sec \theta \omega_y + \cos \phi \sec \theta \omega_z \end{cases} \quad (2.25)$$

Selon la nature des perturbations appliquées au satellite on distingue deux types de comportement : comportement non chaotique et comportement chaotique.

2.4 Simulation du mouvement du satellite

2.4.1 Satellite à comportement non chaotique

Soit l'équation de la dynamique d'un satellite donnée par la relation (2.25). Une simulation du mouvement à été réaliser avec les conditions initiales suivantes:

$$(I_x, I_y, I_z) = (3, 2, 1); \omega_{x0} = \omega_{y0} = \omega_{z0} = 0.$$

Considérons $P = 0, U = 0$ et

$$C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 3 \cos \omega_0 t + 1 \\ 1.5 \cos \omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t \\ 3 \sin \omega_0 t + 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Le portrait de phase des vitesses angulaires est présenté sur la figure (2.5). C'est une orbite périodique qui varie en fonction du temps. Le système ne présente pas un mouvement chaotique.

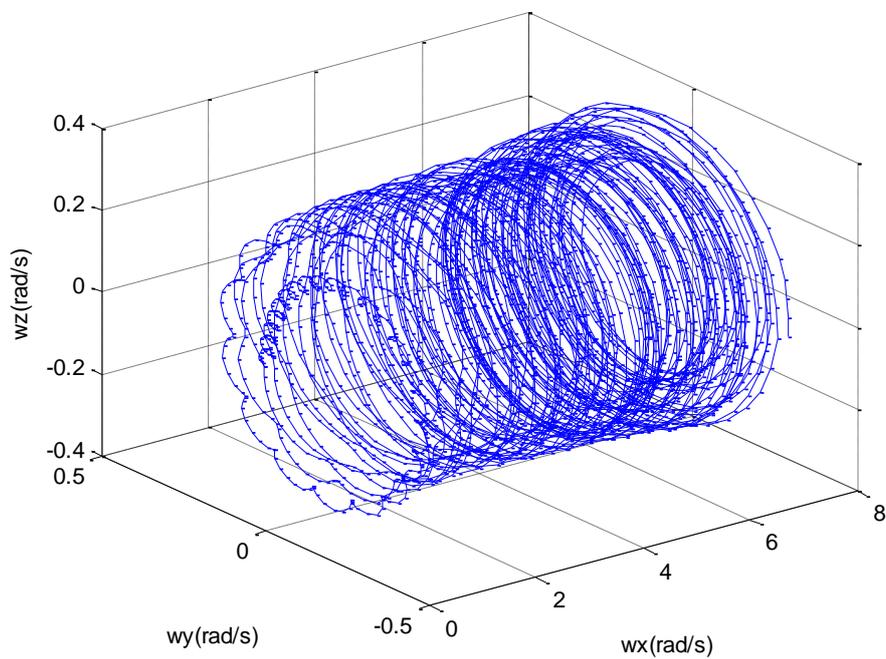


Figure 2.5 Portrait de phase des vitesses angulaires.

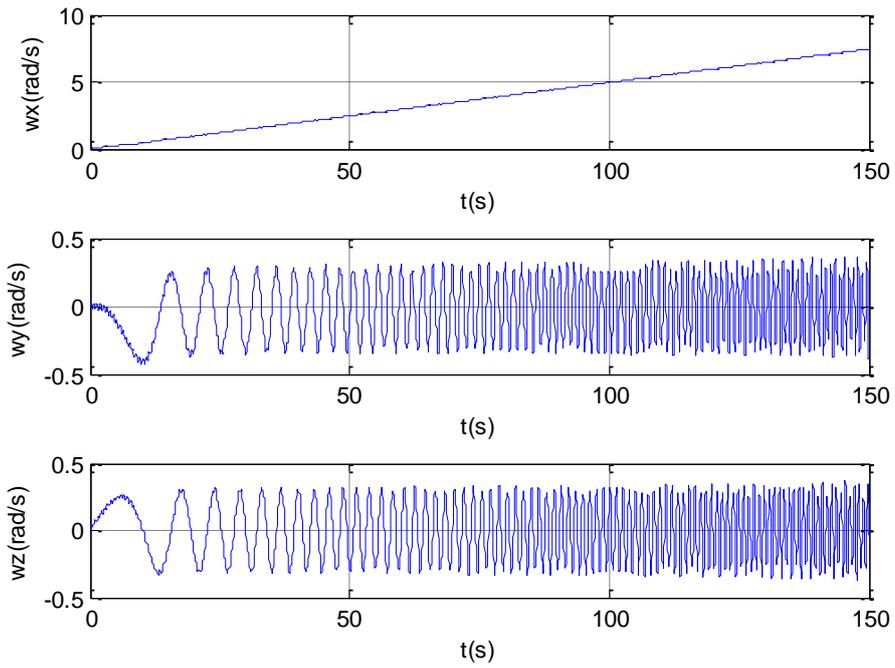


Figure 2.6 Evolution des vitesses angulaires en fonction du temps.

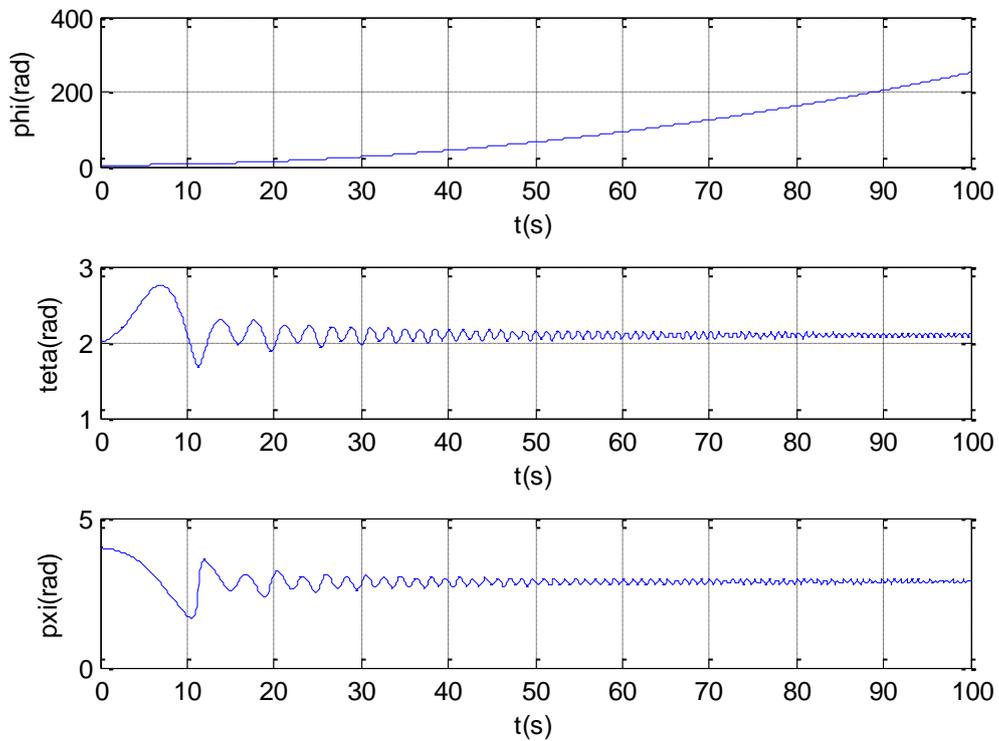


Figure 2.7 Variation des angles d'attitude en fonction du temps.

2.4.2 Satellite à comportement chaotique

Une application numérique a été réalisée en utilisant les valeurs des moments d'inertie suivants : $I_x = 3 \text{ Kg.m}^2$, $I_y = 2 \text{ Kg.m}^2$, $I_z = 1 \text{ Kg.m}^2$; avec les conditions initiales : $\omega_x = 2 \text{ rad/s}$, $\omega_y = 4.1 \text{ rad/s}$, $\omega_z = 3 \text{ rad/s}$, $\varphi = \theta = \psi = 0$ avec les couples de perturbation définis par:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0.35 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Ces couples sont choisis de telle sorte qu'on peut induire le mouvement chaotique et ils sont comparables en amplitude avec les couples d'éjecteur disponibles [54].

Les résultats de simulation sont présentés ci-dessous.

Les figures (2.8) et (2.10) présentent le portrait de phase, des vitesses angulaires et des angles d'attitude sur une durée de 400s. Les figures (2.9) et (2.11) illustrent les variations des vitesses angulaires et des angles d'attitude en fonction du temps. La variation de ω_y en fonction de ω_x est présentée sur la figure (2.12).

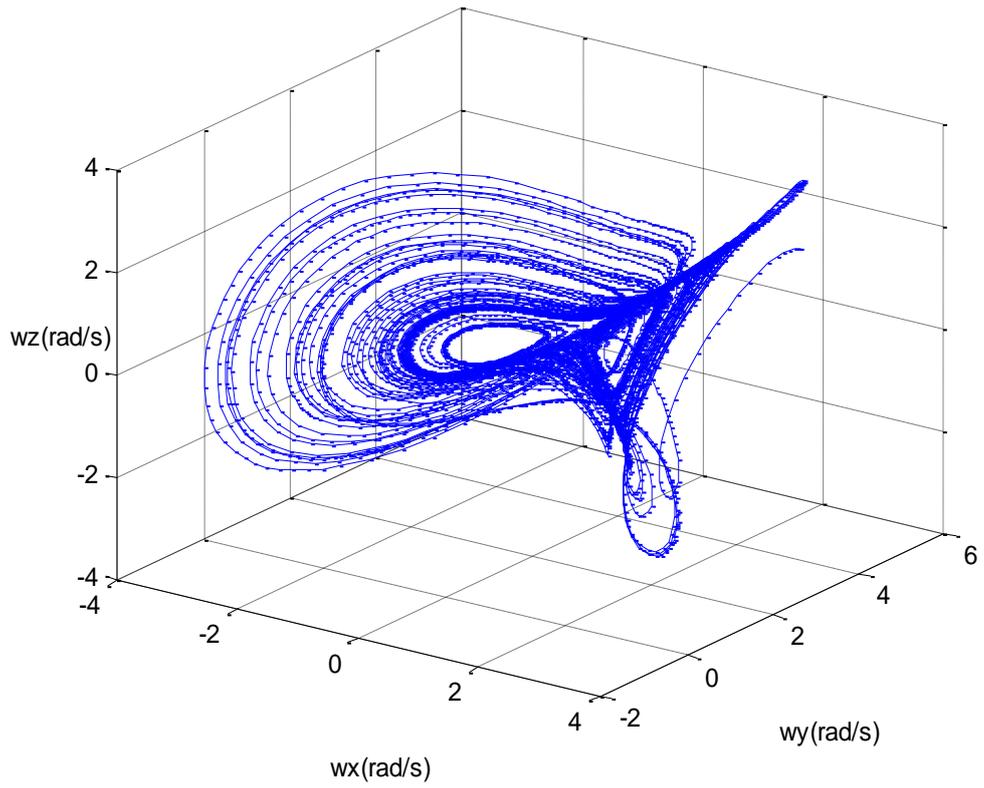


Figure 2.8 Portrait de phase des vitesses angulaires.

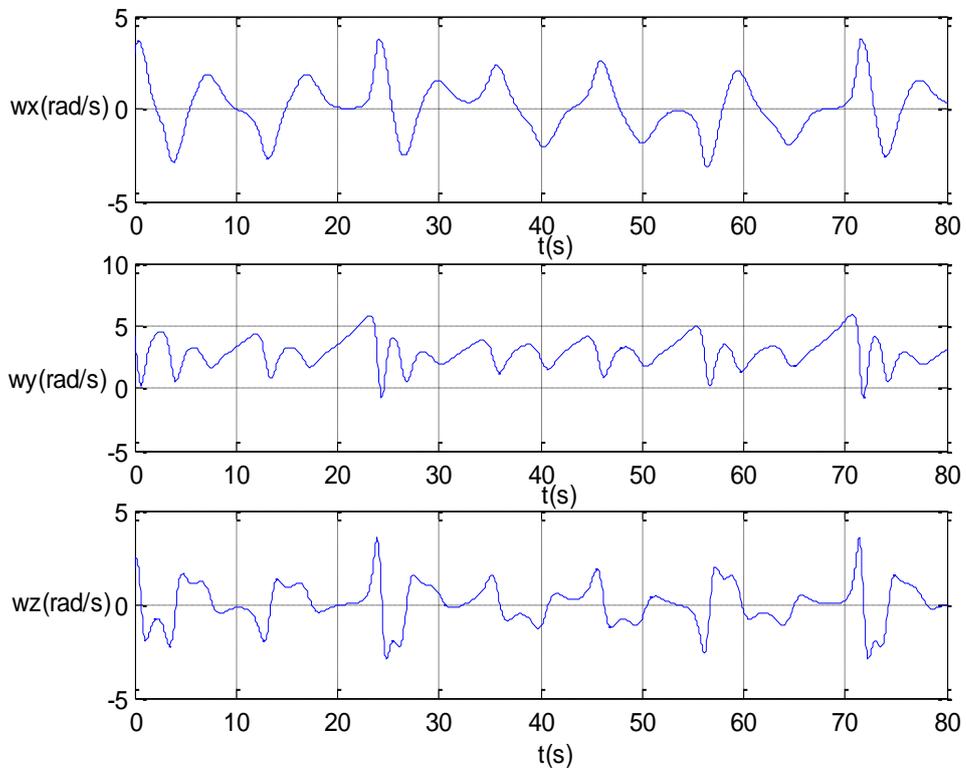


Figure 2.9 Evolution des vitesses angulaires en fonction du temps.

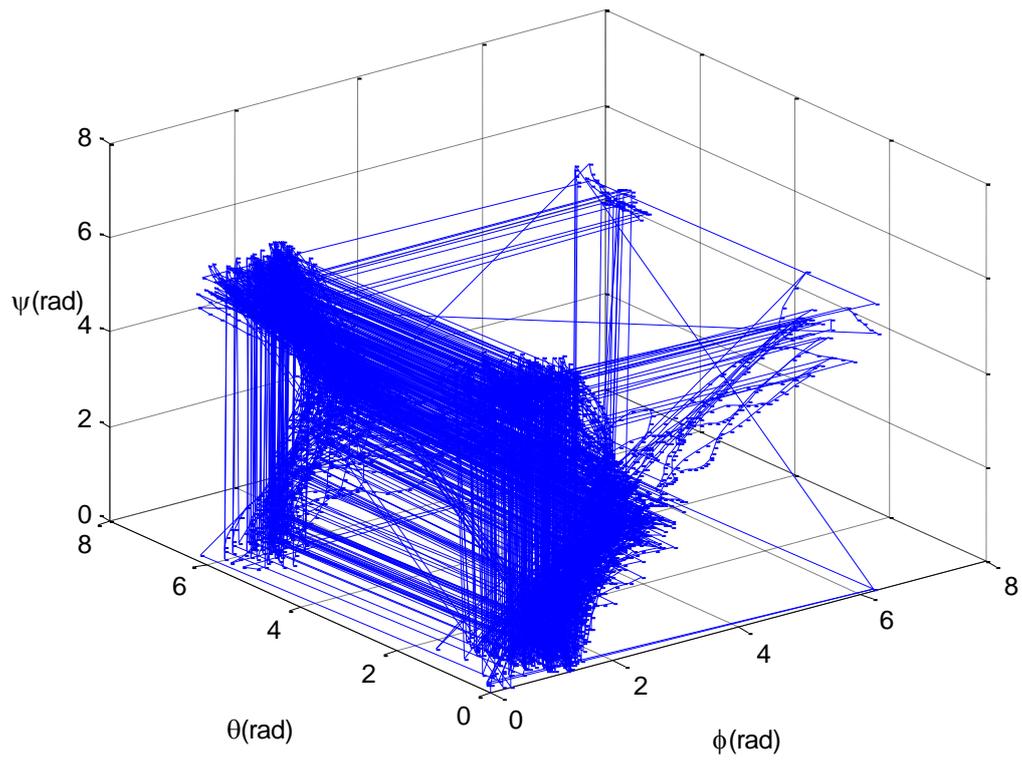


Figure 2.10 Portrait de phase des angles d'attitude.

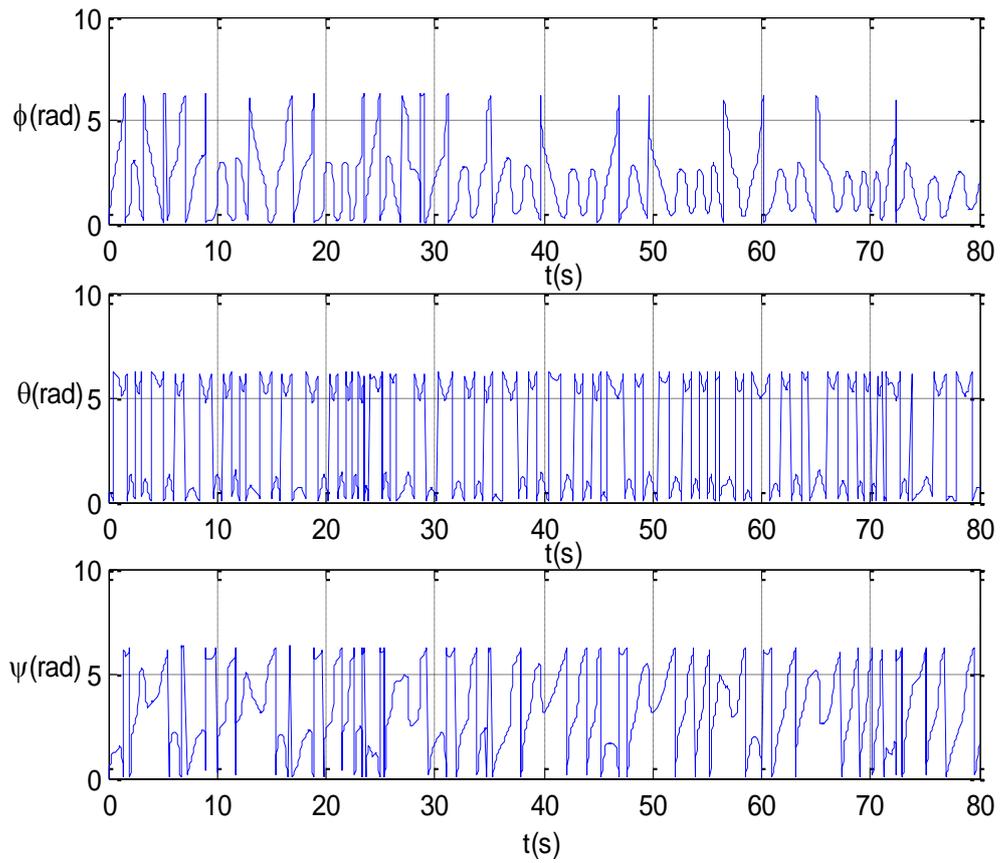


Figure 2.11 Evolution des angles d'attitude en fonction du temps.

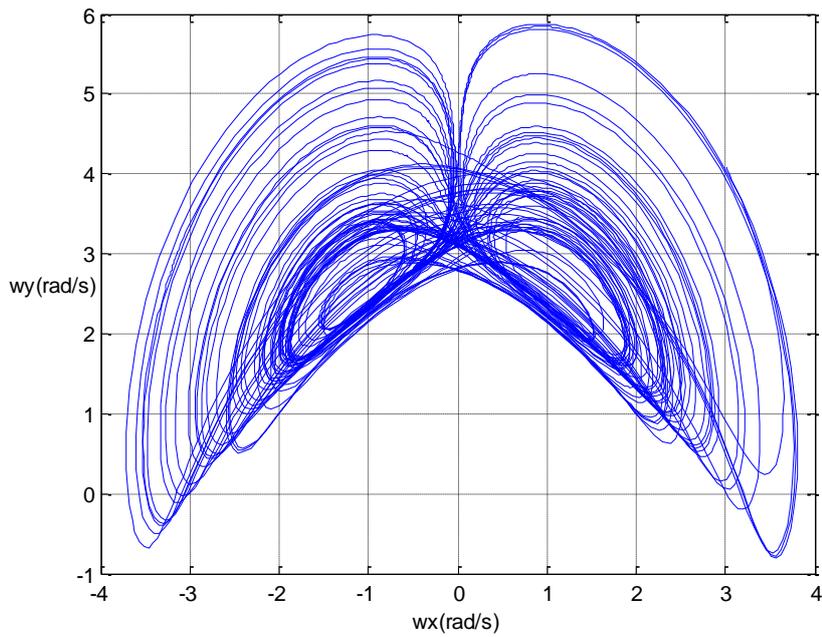


Figure 2.12 Représentation des vitesses angulaires: $\omega_y = f(\omega_x)$.

Les valeurs des exposants de Lyapunov des vitesses angulaires sont estimés a :

$$(\varphi, \theta, \psi, \omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0.2530, 0.1105, 0.0231, -0.0950, -0.0931, -0.0942).$$

Les exposants de Lyapunov sont à moitié positifs et à moitié négatifs, ceci indique que le mouvement du satellite décrit un comportement chaotique.

Pour réaliser un problème dimensionnel plus compliqué, nous allons introduire les angles d'attitude dans l'expression des perturbations comme suit:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0.35 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Pour simuler le système d'équation (2.25) en tenant compte de l'équation (2.28), on utilise la méthode de Rung-Kutta d'ordre 4 (pas d'intégration 0.01) ; avec les conditions initiales suivantes:

$$(\varphi, \theta, \psi, \omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 0, 0, 3, 4.1, 2).$$

Les résultats de simulation sont représentés sur les figures (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17).

Les figures (2.13) et (2.15) illustrent la représentation dans l'espace des phases, des vitesses angulaires et des angles d'attitude respectivement. Les figures (2.14) et (2.16) représentent la variation des vitesses angulaires et des angles d'attitude en fonction du temps. La figure (2.17) présente les variations de la vitesse angulaire ω_y en fonction de ω_x .

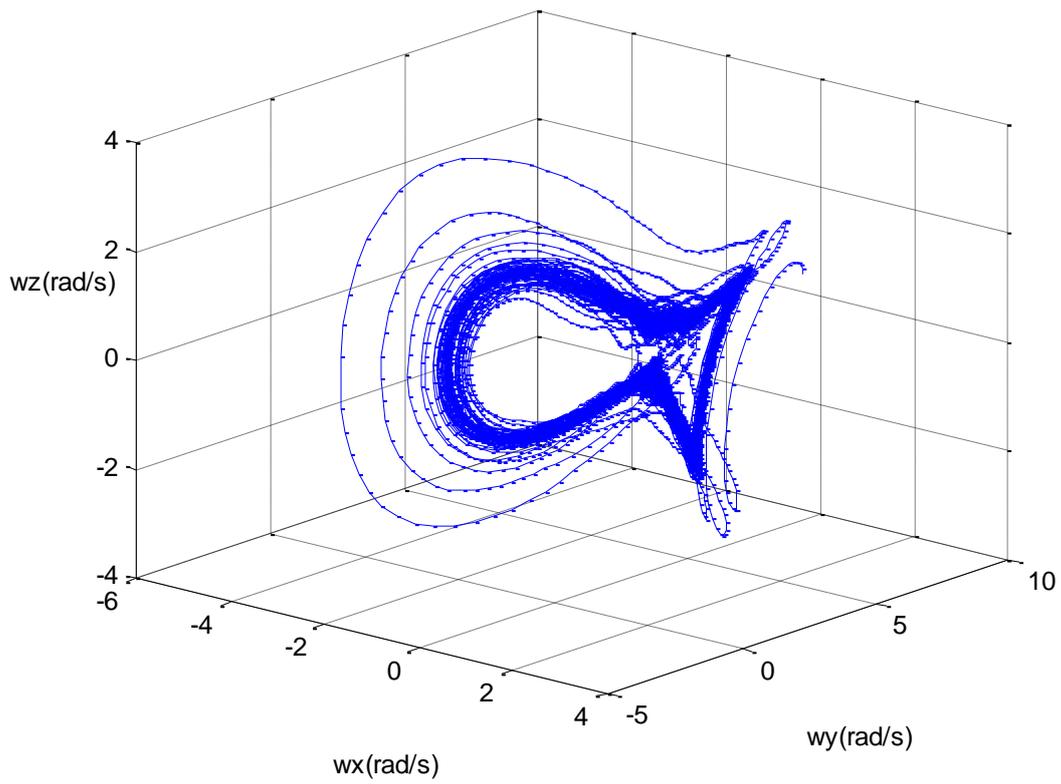


Figure 2.13 Portrait de phase des vitesses angulaires.

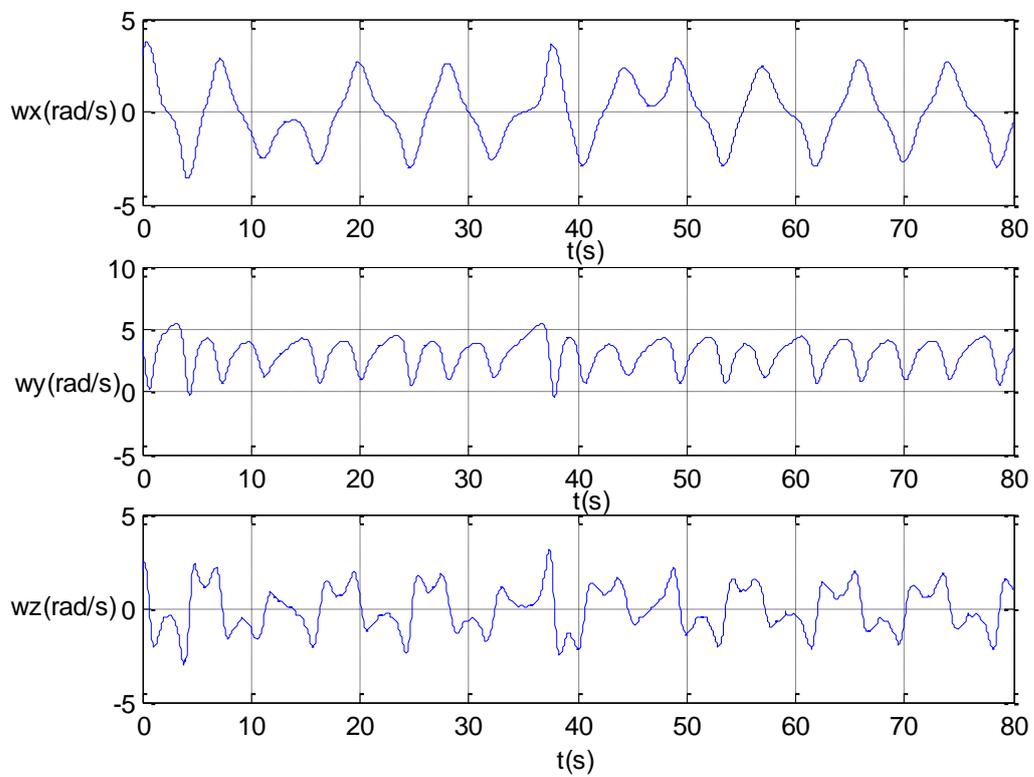


Figure 2.14 Evolution des vitesses angulaires en fonction du temps.

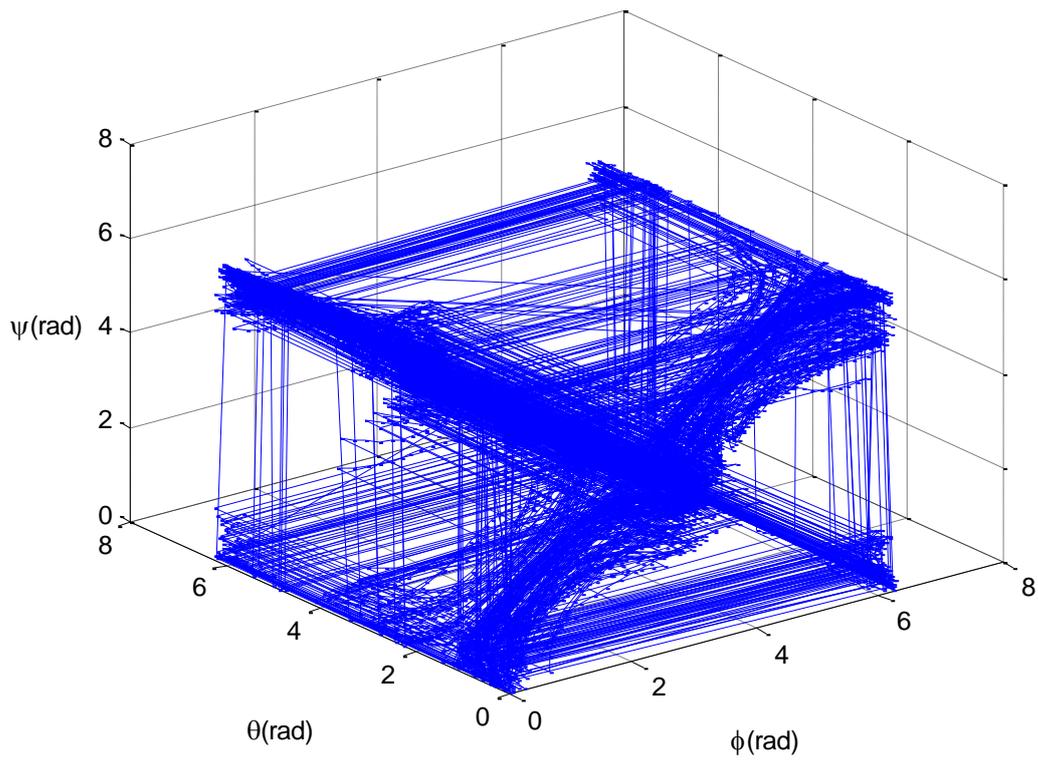


Figure 2.15 Portrait de phase des angles d'attitude.

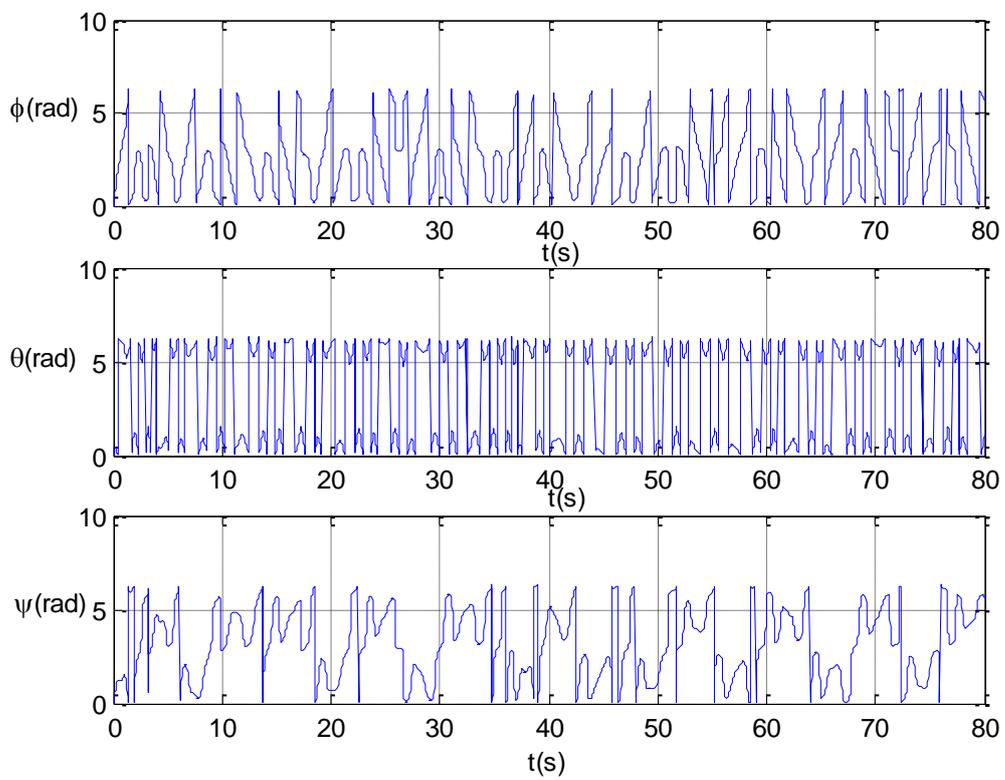


Figure 2.16 Evolution des angles d'attitude en fonction du temps.

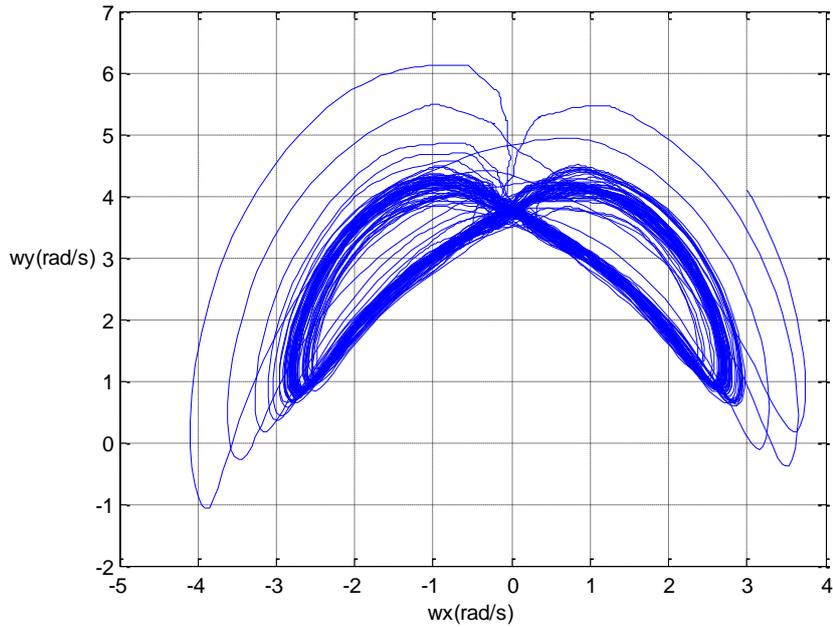


Figure 2.17 Représentation des vitesses angulaires: $\omega_y = f(\omega_x)$.

D'après les résultats de simulation présentés ci-dessus, on remarque que les vitesses angulaires présentent un mouvement non linéaire, les exposants de Lyapunov sont à moitié négatifs, alors le système présente un comportement chaotique.

Conclusion

Une présentation du système de contrôle d'attitude et d'orbite et une étude fine de la modélisation du mouvement d'attitude d'un satellite soumis à des perturbations sont présentées dans cette partie et les équations du mouvement sont développées.

Selon la nature des perturbations appliquées au satellite deux cas se présentent: cas où le satellite présente un mouvement chaotique et cas où le satellite ne présente pas un mouvement chaotique.

Dans le chapitre suivant trois méthodes de contrôle seront proposées pour le contrôle d'attitude des satellites en poste soumis à des perturbations.

Contrôle d'Attitude des Satellites

Introduction

En l'absence de contrôle, l'attitude d'un satellite évolue naturellement sous l'effet des perturbations externes qui agissent sur le satellite. On peut mettre un satellite en poste mais son attitude ne permet pas de le contrôler ou de le commander de manière efficace. Une étude complète du mouvement du satellite est nécessaire afin d'avoir une orbite stable et d'assurer le contrôle.

Le calculateur embarqué du satellite utilise ses senseurs pour déterminer périodiquement l'orientation du satellite. Pour maintenir un pointage parfait, les gyromètres mesurent les vitesses angulaires autour de chaque axe, les capteurs mesurent l'orientation du satellite, le calculateur de bord analyse les données et établit les commandes. Lorsque les seuils de tolérance sont dépassés, le calculateur utilise alors le système de propulsion du satellite ou effectue ces corrections en agissant sur des volants d'inertie.

L'étude des méthodes de stabilisation des systèmes non linéaires est traitée dans cette partie, trois méthodes sont choisies pour réaliser le contrôle d'attitude d'un satellite soumis à des perturbations : Le contrôle prédictif est étudié en premier. Afin de tester son efficacité pour le contrôle du système à trois et six dimensions respectivement nous l'avons appliqué à deux satellites différents qui présentent tous les deux un mouvement chaotique; après la commande par mode de glissement active est à été également appliqué pour le contrôle des vitesses angulaires uniquement puis pour le

contrôle des vitesses et des angles d'attitudes en même temps. Enfin nous avons enrichi notre travail par l'étude et l'application de la commande passive pour le contrôle de deux systèmes chaotiques.

3.1 Contrôle Prédictive : Principe et Problématique Générale

3.1.1 Introduction

Depuis une quarantaine d'années, la stratégie du contrôle prédictif est devenue une méthode de plus en plus utilisée dans plusieurs domaines d'application. Bien que la commande prédictive ait vu le jour au sein de l'industrie pétrolière et pétrochimique [55], elle s'est vite étendue à d'autres industries grâce à ses succès incontestables dans l'industrie pétrolière. Les principaux utilisateurs de la commande prédictive sont les raffineries de pétroles, l'industrie chimique et agro-alimentaire, la métallurgie, l'aérospatiale...etc.

Le contrôle prédictif (ou **compensation** ou **correction anticipatrice**) est une technique de commande avancée de l'automatique. Le principe de cette technique repose sur l'existence d'un modèle mathématique du processus à piloter. Le problème est, connaissant la sortie du processus à commander, de déterminer la commande permettant de lui faire rallier la consigne selon une trajectoire prédéfinie appelée trajectoire de référence ou trajectoire désirée. La méthode consiste à déterminer la séquence future de commande à appliquer à l'entrée du processus en vue de forcer la sortie à suivre la trajectoire de référence.

Le contrôle prédictif peut être utilisé pour commander des systèmes complexes comportant plusieurs entrées et sorties où le simple régulateur PID est insuffisant. Cette technique est particulièrement intéressante lorsque les systèmes possèdent des retards importants, des réponses inverses et de nombreuses perturbations.

3.1.2 Stratégie du control prédictive à retour d'état

Le contrôle prédictif à retour d'état est une combinaison du contrôle prédictif et du contrôle par retour d'état. Dans les formulations du contrôle prédictif, le modèle peut être : soit explicitement

sous forme discrète, soit sous forme continue résolue par un solveur numérique à des temps discrets. Dans notre cas, le modèle utilisé est non-linéaire décrit par un système d'équations différentielles ordinaires continues :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t) \quad (3.1)$$

Où $x \in R^n$ représente l'état du système, $u \in R^n$ le contrôle et f est une application continue de $R^n \times R^m$ dans R^n .

Cette équation permet donc la prédiction de l'état futur du système incontrôlé, à partir de l'état actuel $x(t)$.

Un schéma représentatif du contrôle prédictif à retour d'état est donné par la figure (3.1), où $x(t)$ représente l'état actuel du système et $x_p(t)$ représente l'état prédit [56].

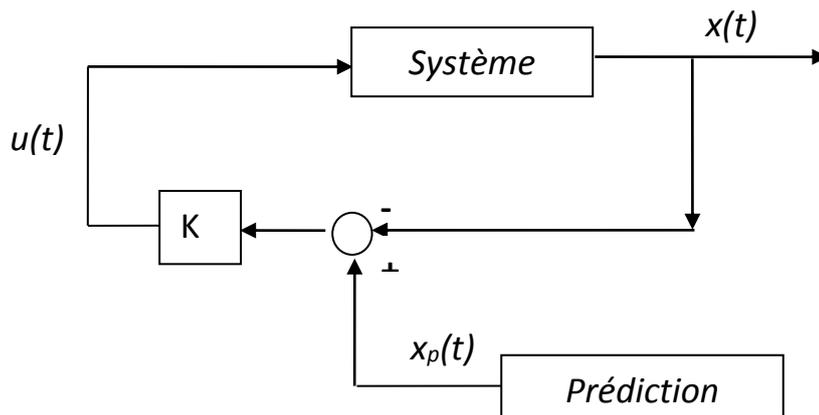


Figure. 3.1 : Contrôle prédictif à retour d'état.

D'après la figure (3.1), le contrôle $u(t)$ est égal à la différence entre $x(t)$ l'état actuel du système et $x_p(t)$ l'état de $x(t+T)$ prédit à l'instant t [57][58]. Ce qui donne la relation:

$$u(t) = K(x_p(t) - x(t)) \quad (3.2)$$

Où K représente le gain du contrôle obtenu à partir de la linéarisation du système autour du point fixe (point d'équilibre) x_f .

Le système contrôlé est ainsi donné par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K(x_p(t) - x(t)) \quad (3.3)$$

En utilisant une prédiction d'un pas en avant, développée par [58] le contrôle prédictif (3.2) devient :

$$u(t) = K(\dot{x}(t) - x(t)) \quad (3.4)$$

Le système contrôlé devient

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K(\dot{x}(t) - x(t)) \quad (3.5)$$

La linéarisation autour du point fixe x_f est donnée par :

$$(\dot{x}(t) - x_f) = A(x(t) - x_f) \quad (3.6)$$

Où $A \in R^{n \times n}$ est la matrice Jacobienne de $f(x(t))$ évaluée au point fixe x_f , définie comme suit:

$$A = D_x f(x_f) = \left. \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial x(t)} \right|_{x_f} \quad (3.7)$$

Le système contrôlé est alors décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K(A(x(t) - x_f)) \quad (3.8)$$

L'équation (3.6) est réécrite comme suit :

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) \quad (3.9)$$

Avec

$$\delta x(t) = x(t) - x_f \quad (3.10)$$

Le système contrôlé sera linéarisé autour de x_f par :

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= A \delta x(t) + K(\delta \dot{x}(t) - \delta x(t)) \\ &= A \delta x(t) + K(A \delta x(t) - \delta x(t)) \\ &= (A + K(A - I)) \delta x(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Où $I \in R^{n \times n}$ est la matrice identité.

Le système se stabilise autour des points fixes par le contrôle prédictif à retour d'état si K satisfait l'inégalité suivante :

$$\|A + K(A - I)\| < I \quad (3.12)$$

Le voisinage du point fixe est déterminé comme suit :

$$r(t) = |x(t) - x(t-1)| \quad (3.13)$$

Le système contrôlé est déterminé par la relation (3.14). Cette relation représente une loi de contrôle prédictif à retour d'état.

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f(x(t)) + u(t) & \text{if } r(t) < \varepsilon \\ f(x(t)) & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.14)$$

Où ε un nombre réel positif assez petit.

Remarque

Il faut noter que le choix de la valeur du gain se fait d'une façon arbitraire. Néanmoins, on peut utiliser des méthodes d'optimisation classique pour déterminer la meilleure valeur qui assure un bon contrôle et une consommation d'énergie minimale [59].

3.1.3 Application du contrôle prédictif à retour d'état au contrôle d'attitude d'un satellite

3.1.3.1 Contrôle des vitesses angulaires

Dans cette partie nous appliquons le contrôle prédictif à retour d'état afin de contrôler les vitesses angulaires d'un satellite soumis à des perturbations externes dont l'équation dynamique est définie en (2.23).

Considérons les couples de perturbations définis par:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 & 21 & -48 \\ 40 & -1 & -33 \\ 50 & 10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

En prenant en compte l'équation (3.15), l'équation dynamique du système à contrôler devient :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z - \frac{51}{I_x} \omega_x + \frac{21}{I_x} \omega_y - \frac{48}{I_x} \omega_z \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{40}{I_y} \omega_x - \frac{1}{I_y} \omega_y - \frac{33}{I_y} \omega_z \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y + \frac{50}{I_z} \omega_x + \frac{10}{I_z} \omega_y - \frac{1}{I_z} \omega_z \end{cases} \quad (3.16)$$

En utilisant les valeurs des moments d'inertie suivants : $I_x = 3 \text{ Kg.m}^2$, $I_y = 1 \text{ Kg.m}^2$, $I_z = 1 \text{ Kg.m}^2$ avec les conditions initiales : $\omega_x = 2.5 \text{ rad/s}$, $\omega_y = 1.5 \text{ rad/s}$, $\omega_z = 4 \text{ rad/s}$.

L'évolution du système est représentée en figure (3.2). Le système admet un comportement chaotique.

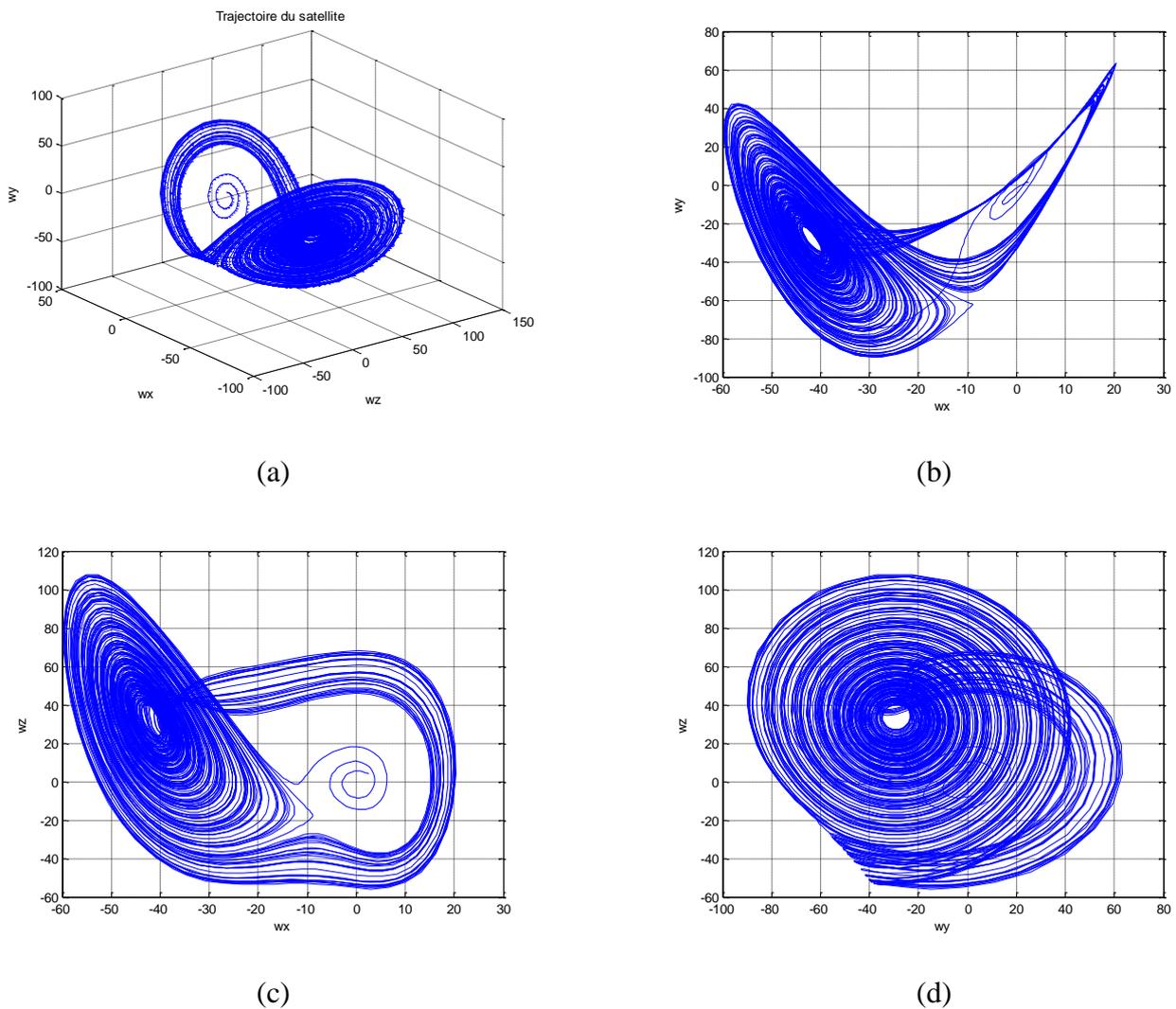


Figure 3.2 (a)Portrait de phase des vitesses angulaires, (b) $\omega_y = f(\omega_x)$,

(c) $\omega_z = f(\omega_x)$, (d) $\omega_z = f(\omega_y)$.

Afin de contrôler le système au point d'équilibre, nous devons déterminer la correction qui sera appliquée à l'état actuel du système. Pour ce faire, nous déterminons la commande $u(t)$ définie par l'équation (3.4)

$$u(t) = \begin{cases} k \left((\sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{40}{I_y} \omega_x - \frac{1}{I_y} \omega_y - \frac{33}{I_y} \omega_z) - \omega_y \right) & \text{si } r(t) < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.17)$$

Le système sous contrôle prédictif est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z - \frac{51}{I_x} \omega_x + \frac{21}{I_x} \omega_y - \frac{48}{I_x} \omega_z \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{40}{I_y} \omega_x - \frac{1}{I_y} \omega_y - \frac{33}{I_y} \omega_z + K \left((\sigma_x \omega_x \omega_z + \frac{40}{I_y} \omega_x - \frac{1}{I_y} \omega_y - \frac{33}{I_y} \omega_z) - \omega_z \right) \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y + \frac{50}{I_z} \omega_x + \frac{10}{I_z} \omega_y - \frac{1}{I_z} \omega_z \end{cases} \quad (3.18)$$

Son système linéarisé autour du point fixe est donné par:

$$\delta \dot{\omega}_y(t) = \frac{\partial \dot{\omega}_y(t)}{\partial \omega_y(t)} \delta \omega_y(t) \quad (3.19)$$

$$\delta \dot{\omega}_y(t) = \frac{40}{I_y} + K \left(\frac{40}{I_y} - 1 \right) \delta \omega_y(t) \quad (3.20)$$

K doit satisfaire l'inégalité

$$|40 + K(40 - 1)| < 1 \quad (3.21)$$

Le choix de la valeur du gain se fait dans l'intervalle : $-1.025 < K < -1$

Simulations :

Pour simuler le comportement du système d'équation sous contrôle défini en (3.18), nous utilisons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (pas d'intégration 0.01).

Le résultat du contrôle des vitesses angulaires en fonction du temps est représenté en figure (3.3). Le contrôle permet de supprimer définitivement le chaos du système dynamique et le stabilise sur le point d'équilibre (0,0,0).

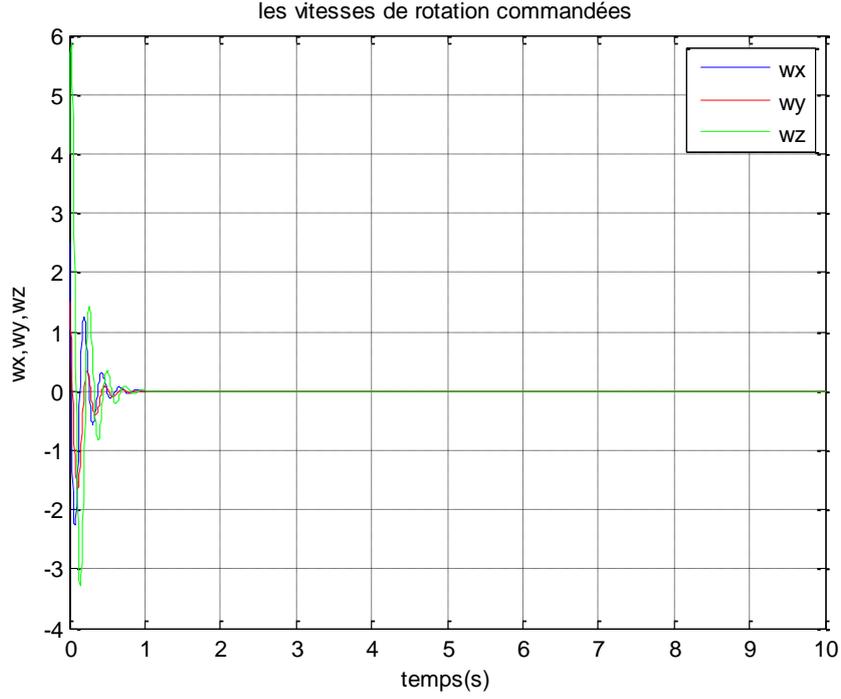


Figure 3.3 Contrôle prédictif des vitesses angulaires.

3.1.3.2 Contrôle des vitesses angulaires et des angles d'attitude

Dans cette section nous appliquons le contrôle prédictif pour le contrôle des vitesses angulaires et les angles d'attitude du satellite.

Soit l'exemple d'un satellite à soumis à des perturbations définis en équation (2.27). L'équation dynamique du satellite à six dimensions est donner par :

$$\begin{cases}
 \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z - \frac{1.2}{I_x} \omega_x + \frac{\sqrt{6}}{2I_x} \omega_z \\
 \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{0.35}{I_y} \omega_y + u \\
 \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y - \frac{\sqrt{6}}{I_z} \omega_x - \frac{0.4}{I_z} \omega_z \\
 \dot{\varphi} = \omega_x + \sin \varphi \tan \theta \omega_y + \cos \varphi \tan \theta \omega_z \\
 \dot{\theta} = \cos \varphi \omega_y - \sin \varphi \omega_z \\
 \dot{\psi} = \sin \varphi \sec \theta \omega_y + \cos \varphi \sec \theta \omega_z
 \end{cases} \quad (3.22)$$

Notre objective est de stabiliser le système sur le point d'équilibre suivant : $(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \varphi, \theta, \psi) = (0,0,0,0,0,0)$. Pour déterminer la correction à apporter à l'état actuel du système, on calcul la loi de contrôle, définie à partir de l'équation (3.4), on obtient :

$$u(t) = \begin{cases} K \left(\left(\sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{0.35}{I_y} \omega_y \right) - \omega_y \right) & \text{si } (\omega_y(t) - \omega_y(t-1)) < \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.23)$$

En remplaçant l'équation (3.23) dans l'équation (3.22) le système sous contrôle prédictif est alors donné par :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z - \frac{1.2}{I_x} \omega_x + \frac{\sqrt{6}}{2I_x} \omega_z \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{0.35}{I_y} \omega_y + K \left(\left(\sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{0.35}{I_y} \right) - \omega_y \right) \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y - \frac{\sqrt{6}}{I_z} \omega_x - \frac{0.4}{I_z} \omega_z \\ \dot{\varphi} = \omega_x + \sin \varphi \tan \theta \omega_y + \cos \varphi \tan \theta \omega_z \\ \dot{\theta} = \cos \varphi \omega_y - \sin \varphi \omega_z \\ \dot{\psi} = \sin \varphi \sec \theta \omega_y + \cos \varphi \sec \theta \omega_z \end{cases} \quad (3.24)$$

La variable d'état ω_y du système est linéarisée autour du point fixe par:

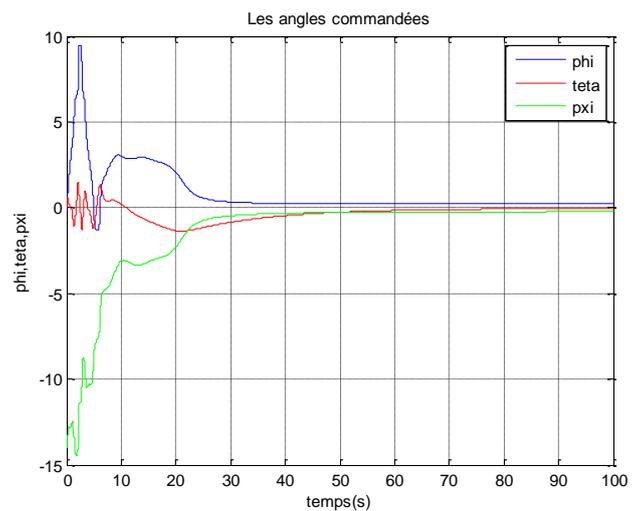
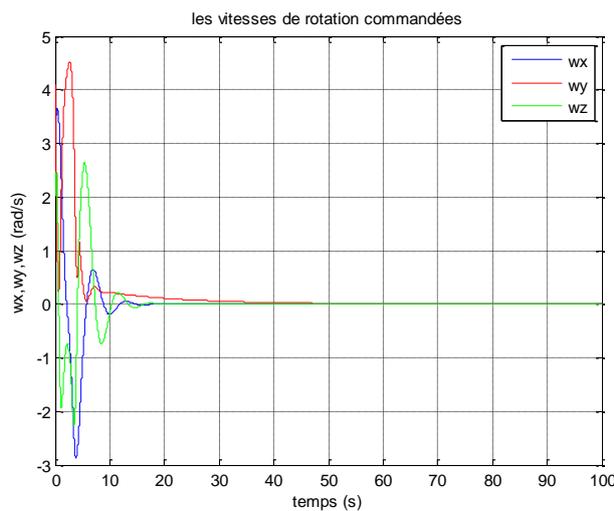
$$\delta \dot{\omega}_y(t) = \frac{\partial \dot{\omega}_y(t)}{\partial \omega_y(t)} \delta \omega_y(t) \quad (3.25)$$

$$\delta \dot{\omega}_y(t) = \frac{0.35}{I_y} + K \left(\frac{0.35}{I_y} - 1 \right) \delta \omega_y(t) \quad (3.26)$$

Afin de stabiliser le système sur le point d'équilibre, K doit satisfaire l'inégalité suivante

$$\left| \frac{0.35}{I_y} + K \left(\frac{0.35}{I_y} - 1 \right) \right| < 1 \quad (3.27)$$

Les valeurs des moments d'inertie sont choisies: $I_x = 3 \text{ Kg.m}^2$, $I_y = 2 \text{ Kg.m}^2$, $I_z = 1 \text{ Kg.m}^2$, avec les conditions initiales suivantes : $(\varphi, \theta, \psi, \omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0,0,0,3,4,1,2)$. Les variations des vitesses angulaires et des angles d'attitude en fonction du temps sont représentés en figure (3.4.a) et (3.4.b) respectivement. La commande est représentée en figure (3.5). Le contrôle est activé à $t > 5\text{s}$.



a) **Figure 3.4** Application du contrôle prédictif : **a)** contrôle des vitesses angulaires
b) Contrôle des angles d'attitude.

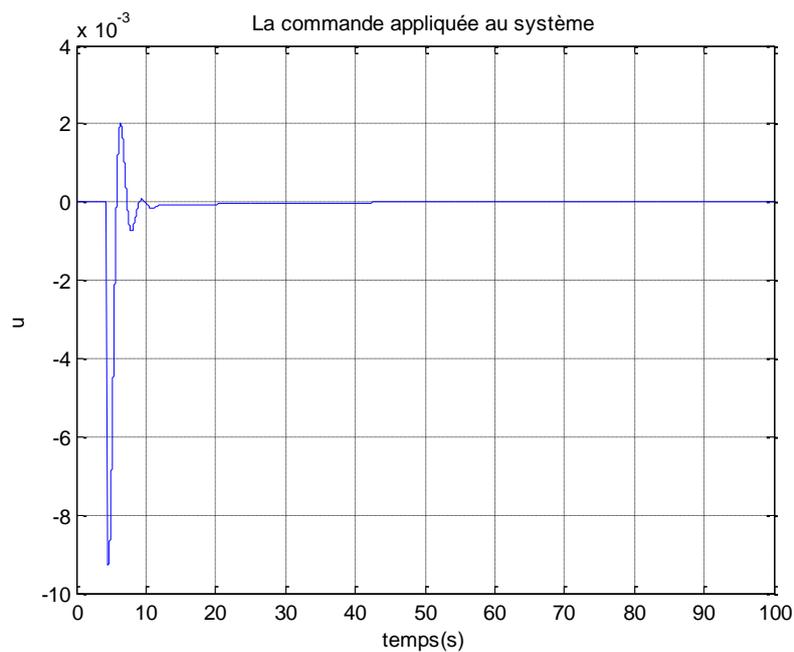


Figure 3.5 la commande : Activation du contrôle à $t > 5s$.

Après l'activation du contrôle prédictif, les variables d'états ω_x, ω_y et ω_z tendent vers le point d'équilibre. Après un régime transitoire court, la trajectoire se stabilise sur ce point. Les variables ϕ, θ et ψ sont assez proches du point d'équilibre mais prennent un peu plus de temps pour se stabiliser. Les simulations prouvent que la valeur du gain K assure une meilleure convergence de la trajectoire vers le point d'équilibre.

3.2 Commande par mode de glissement active : principes et problématique générale

La théorie des systèmes à structure variable a fait l'objet de multiples études depuis des années. Ce type de système a été étudié d'abord en union soviétique [6] puis à été introduit en France par Hamel, au Japon par Harachima et aux états unis par Slotine. Ces recherches ont connu un nouvel essor à la fin des années soixante-dix lorsque Utkin introduit la théorie des modes glissants [61].

Le mode de glissement est un mode de fonctionnement particulier des systèmes de réglages à structures variables. Il est caractérisé par une commutation continue et périodique entre deux états et est par conséquent une méthode de réglage non linéaire [60]. Ce principe se prête particulièrement bien à une application pratique lorsque la commutation a lieu au niveau de l'organe de commande.

La commande par mode de glissement présente plusieurs avantages, à savoir : la réduction de l'ordre du système, la non exigence de la connaissance parfaite du modèle du système à contrôler, la robustesse vis-à-vis de paramètres variables [60], des incertitudes sur le modèle et des perturbations externes entachant le processus. De plus, elle assure un comportement indépendant de la nature linéaire ou non linéaire du procédé, sa mise en œuvre est relativement simple, son principal atout est sa rapidité, et ses très bonnes performances en régime transitoire. En effet, même lorsque l'état du système est très éloigné de sa référence, sa trajectoire dans l'espace d'état converge rapidement vers une surface de commutation : la dynamique du système est beaucoup plus grande pendant la phase d'atteinte que lors de la phase de glissement. Le phénomène de réticence est l'un des inconvénients majeurs de cette technique qui peut exciter les dynamiques négligées et conduire à l'instabilité. D'autre part, en régime permanent, la commande par mode de glissement ne se comporte pas toujours de manière totalement satisfaisante.

L'intérêt récent accordé à cette technique de commande est dû essentiellement à la disponibilité des composants électroniques plus performants et de microprocesseurs très développés [61].

3.2.1 Stratégie de la commande par mode de glissement active

3.2.1.1 Généralités

On dit que le système est en mode de glissement à partir du moment où la trajectoire de son point de fonctionnement suit une surface de commutation. En effet, dans certaines conditions, la commutation infirme le passage en générant une trajectoire qui renvoie le système dans l'état initial[62]. La trajectoire se trouve alors piégée dans cette frontière devenue infranchissable. Elle glisse sur cette frontière suivant une dynamique linéaire imposée par les pôles du système. Pour un système d'ordre 2, la frontière est une droite, un plan pour l'ordre 3, etc. Dans certain cas, les commutations génèrent également une modification de la dynamique du système en reconfigurant les relations entre les différentes grandeurs d'état.

La conception de la commande par mode de glissement revient principalement à déterminer trois étapes:

- *Choix de la surface de commutation ;*
- *Condition de convergence ;*
- *Calcul de la commande.*

3.2.1.2 Choix de la surface de commutation

La surface de commutation est une fonction scalaire, telle que la variable à régler glisse sur cette surface pour atteindre l'origine du plan de phase. Le choix des fonctions de commutation dépend du système à asservir. Plusieurs formes ont été proposées dans la littérature, chacune présente des meilleures performances pour une application donnée. Il existe une méthode permettant de définir celles-ci à partir d'une fonction de Lyapunov. Le plus souvent, on choisit une forme d'équation générale pour déterminer la surface de glissement qui assure la convergence d'une variable d'état vers sa valeur de référence définie comme suit :

$$s(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{r-1} (x_{ref} - x) \quad (3.28)$$

3.2.1.3 Condition de convergence

Une fois la surface de glissement choisie, il faut que les trajectoires d'état du système soient amenées vers cette surface et soient ensuite maintenues dans un voisinage de celle-ci malgré la présence d'incertitudes et de perturbations sur le système. En d'autre terme il faut garantir l'attractivité de la surface de glissement en tout point de l'espace d'état ; donc il faut trouver la condition sous laquelle la dynamique du système glisse sur la surface vers le point d'équilibre désiré. Une condition nécessaire et suffisante, appelée condition d'attractivité, pour qu'une variable de glissement $s(x;t)$ tend vers 0 a été proposée. Il s'agit de choisir une fonction scalaire positive appelée fonction de Lyapunov qui peut être donnée par :

$$V(x) = \frac{1}{2} s^2(x) \quad (3.29)$$

La dérivée de la fonction $V(x)$ est :

$$\dot{V}(x) = s(x) \dot{s}(x) \quad (3.30)$$

Pour garantir l'existence du mode glissant, la fonction candidate de Lyapunov doit à la fois décroître et converger vers zéro. Il suffit de démontrer que :

$$s(x) \dot{s}(x) < 0 \quad (3.31)$$

est vérifié dans une zone proche de la surface de glissement.

3.2.1.4 Calcul de la commande

Afin d'assurer l'attractivité et l'invariance de la surface de glissement, la loi de commande est souvent définie sous la forme suivante :

$$u = u_{eq} + u_n \quad (3.32)$$

u_{eq} est la partie continue de la commande, nommée commande équivalente définie par Utkin. Elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement (propriété d'invariance).

u_n est la commande discrète qui assure la convergence vers la surface de glissement.

La loi de commande par mode glissant est obtenue en imposant à la variable de commande l'un des deux retours d'état dépendant du signe de $s(x)$:

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

3.2.2 Phénomène de réticence

Dans les applications pratiques, la commutation de la commande peut produire des oscillations indésirables qui entraînent l'apparition de ce qu'on appelle "réticence" ou "broutement" connu en anglais sous le nom de "*chattering*" (figure 3.6) [63]. Les principales raisons à l'origine de ce phénomène sont les retards de commutation au niveau de la commande et l'excitation des dynamiques non modélisés comme les dynamiques propres des actionneurs ou capteurs souvent-négligées dans le modèle car elles sont généralement plus rapides que la dynamique du système étudié.

Ce phénomène peut être si pénalisant que l'utilisation d'une loi de commande par modes glissants d'ordre un, peut dans certaine applications être à proscrire, vu que son utilisation peut dégrader les performances et même conduire à l'instabilité. De plus le *chattering* peut provoquer d'importantes sollicitations mécaniques au niveau des actionneurs et, à terme engendrer leur usure rapide ainsi que des pertes énergétiques non négligeables au niveau des circuits de puissance électrique.

De nombreuses études ont été effectuées dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène. L'une des solutions envisagées consiste à remplacer la fonction signe par une fonction plus lisse ou une commande par modes glissants.

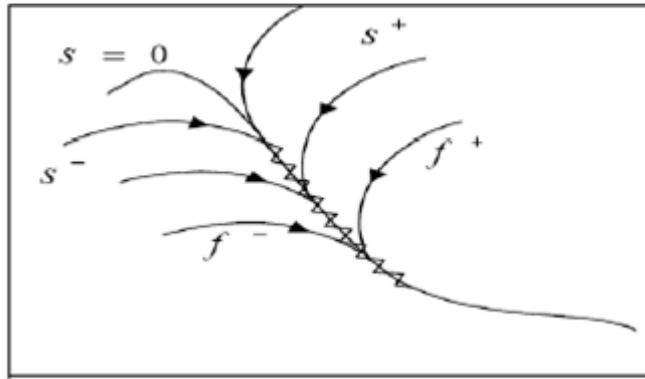


Figure 3.6 Mode de glissement avec réticence.

3.2.3 Condition d'existence d'un mode de glissement

3.2.3.1 Domaine de glissement

Dans certains cas, le glissement n'a lieu que sur une partie de la surface de commutation car l'attractivité de cette dernière n'est assurée que dans un domaine restreint D_g appelé domaine de glissement.

Définition 3.1

Soit D_g une partie de s , l'ensemble des x tel que $S(x)=0$ ($S=\{x/s(x)=0\}$). D_g est un domaine de glissement (alors D_g contient les trajectoires $x(t)$ en régime glissant et le régime glissant est stable dans D_g) si :

1. les trajectoires restent entre les deux frontières $\pm \Delta_0$ associées à la surface $s=0$, au domaine D_g et à la commande $\min(u^+, u^-) \leq u \leq \max(u^+, u^-)$.
2. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe Δ_0 et $\delta > 0$, tel que la trajectoire située au départ dans la bande Δ_0 du D_g , part de la bande $\pm \delta$ et reste dans le domaine $\pm \varepsilon$.

3.2.3.2 Les conditions d'existence du mode de glissement

Soit le système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (3.34)$$

Avec :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$$

Les fonctions $f(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sont continues par morceaux, et présentent des discontinuités sur l'hyper surface notée s d'équation $s(x)=0$.

Les fonctions f_i sont supposées définies dans un domaine D_g en deux parties $D_g^+(s>0)$ et $D_g^-(s<0)$.

Le théorème suivant, fournit les conditions d'existence du mode de glissement selon Filippov.

Théorème 3.1 [51]

Considérons le système décrit par l'équation (3.34) satisfaisant la condition :

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\| \leq k \quad \text{avec } (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.35)$$

k étant une constante arbitraire indépendante de x et de t . Ces inégalités étant vérifiées pour tout x et t dans le domaine $X = s^- \cup s^+$.

Soit une surface s deux fois différentiable, telle que chacune des fonctions f_N^+ et f_N^- est continue par rapport à x et t pour x solution de $s(x) = 0$, et le vecteur $h = f_N^+ - f_N^-$ est continûment différentiable.

Si en chaque point de la surface $s(x) = 0$ les inégalités $f_N^+ < 0$ et $f_N^- > 0$ sont vérifiées, il existe alors dans le domaine D_g une solution $x(t)$ du système (3.34) tel que les propriétés d'unicité et de dépendance de cette solution par rapport aux conditions initiales sont vérifiées de façon continue.

Ce théorème conduit à dire que si l'on vérifie à la fois $f_N^+ < 0$ et $f_N^- > 0$ la surface sera attractive au moins dans un petit voisinage de s .

La surface est définie par :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (3.36)$$

On dérivant (3.36) par rapport à t , on aura :

$$S = \sum_{i=0}^n (ds/dx_i) \cdot (dx_i/dt) = \sum_{i=1}^n (ds/dx_i) \cdot f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.37)$$

La dérivée apparaît comme le produit scalaire de la normale orientée à la surface s et du vecteur f or si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on déduit :

$$\begin{cases} f_N^- > 0 \text{ correspondant à } s > 0 \text{ et } \dot{s} < 0 \\ f_N^+ < 0 \text{ correspondant à } s < 0 \text{ et } \dot{s} > 0 \end{cases}$$

Donc la condition de glissement :

$$\dot{s} < 0 \quad (3.38)$$

$$\lim_{s(x) \rightarrow 0^-} s(x) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s(x) \rightarrow 0^+} s(x) < 0 \quad (3.39)$$

3.2.4 Principe du contrôleur par mode de glissement actif

Définition 3.2:

Le contrôleur par mode de glissement active est une combinaison du contrôleur par mode de glissement et du contrôleur actif. La procédure de conception de ce type de contrôleur est représentée ci-dessous, elle est basée sur le travail présenté dans [61]

3.2.4.1 Conception du contrôleur par mode de glissement actif

Considérons le système non linéaire décrit par l'équation dynamique suivante :

$$\dot{x} = Ax + f(x) + u(t) \quad (3.40)$$

Où $x(t) \in R^3$ désigne le vecteur d'état du système à trois dimensions, $A \in R^{3 \times 3}$ représente la partie linéaire du système dynamique et $f : R^3 \rightarrow R^3$ est la partie non linéaire du système. $u(t) \in R^3$ est le contrôleur.

Conformément à la procédure de conception du contrôle actif [64][65], la partie non linéaire de l'erreur dynamique est éliminée par le choix suivant du vecteur de commande.

$$u(t) = H(t) - (A + rI)x - f(x) \quad (3.41)$$

Où r est une constante positive et $H(t)$ est l'entrée de commande

En utilisant (3.41), le vecteur d'état est reformulé comme suit:

$$\dot{x} = -rx + H(t) \quad (3.42)$$

$H(t)$ est choisi sur la base de la loi de la commande par mode de glissement [66][67]

$$H(t) = Kw(t) \quad (3.43)$$

Où $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$ est le vecteur gain,

$w(t) \in R$ est l'entrée de commande et satisfait :

$$w(t) = \begin{cases} w^+(t) & s(x) \geq 0 \\ w^-(t) & s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

et $s = s(x)$ est la surface de commutation, qui assure la dynamique souhaitée

En prenant en compte l'équation (3.43) dans l'équation (3.42) on aura :

$$\dot{x} = -rx + Kw(t) \quad (3.45)$$

3.2.4.2 Conception de la surface de glissement

La surface de glissement est définie comme indiqué dans les références [68]-[71]:

$$s = Cx \quad (3.46)$$

$C = [c_1 \ c_2 \ c_3]$ est un vecteur constant

Dans la surface de glissement les conditions suivantes doivent être remplies :

$$s(x) = 0, \quad \dot{s}(x) = 0 \quad (3.47)$$

Pour la conception du contrôleur, nous utilisons la règle suivante [72]:

$$\dot{s} = -q \operatorname{sgn}(s) - rs \quad (3.48)$$

Où $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe.

Les coefficients q et r sont choisis de telle sorte que le mouvement de glissement soit stable.

De (3.45) et (3.46), on peut trouver que :

$$\dot{s} = C[-rx + Kw(t)] \quad (3.49)$$

Le calcul de la commande équivalente $w_{eq}(t)$ à partir des équations (3.48) et (3.49) nous donne

$$w_{eq}(t) = -(CK)^{-1}q \operatorname{sgn}(s) \quad (3.50)$$

Où l'existence de la matrice inverse CK^{-1} est une nécessité.

Remplaçant $w(t)$ par $w_{eq}(t)$ dans l'équation (3.45) nous obtenons :

$$\dot{x} = -rx - K(CK)^{-1}q \operatorname{sgn}(s) \quad (3.51)$$

3.2.4.3 L'analyse de stabilité

Pour vérifier la stabilité du système contrôlé, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$v = \frac{1}{2}s^2 \quad (3.52)$$

La dérivée temporelle de (3.52) est :

$$\dot{v} = \dot{s}s = -qs \operatorname{sgn}(s) - rs^2 \quad (3.53)$$

Puisque $s \operatorname{sgn}(s) > 0$, $r > 0$ et $q > 0$ on a $\dot{v} = \dot{s}s < 0$, donc $\dot{v}(x)$ est définie négative. Par conséquent, selon le théorème de stabilité de Lyapunov la surface de commutation s est bornée et s converge asymptotiquement vers zéro.

Le système (3.51) est un système linéaire avec entrée bornée ($-K(CK)^{-1}q$) pour $s \geq 0$ et $K(CK)^{-1}q$ pour $s < 0$, donc ce système est stable. Puisque s est asymptotiquement stable, alors le système dynamique est également asymptotiquement stable.

3.2.4.4 Algorithme

Les paramètres de contrôle r , K et C sont choisis selon l'algorithme développé par Mohammad Saleh Tavazoei et Mohammad Haeri [66] présenté ci dessous:

1. Pour $P > 3$ choisir $\xi > 0$ qui satisfait l'équation suivante :

$$-23(\xi + \sqrt{\xi^2 + \xi}) - 3 = -p \quad (\text{utiliser } -23(\xi - \sqrt{\xi^2 + \xi}) - 3 = -p \text{ pour } 0 < p < 3)$$

2. Pour $P > 3$ choisir une valeur arbitraire $\varepsilon < 0$ (pour $0 < p < 3$, on choisi une valeur arbitraire $\varepsilon > 0$).

3. Construire K : $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$

$$\text{où } k_3 = \varepsilon \xi / 33, k_2 = (\varepsilon + 33k_3) / 92, \text{ et } k_1 = 3k_2 + \frac{56}{23}k_3 + \frac{4}{23}\sqrt{759k_2k_3}$$

4. Choisir r supérieur à p .

5. Sélectionner C comme $C = c [1, 1, -1]$ (c pourra être utilisé pour ajuster la surface de glissement).

3.2.5 Application de la commande par mode de glissement active au contrôle d'attitude d'un satellite

3.2.5.1 Contrôle des vitesses angulaires

Pour illustrer la méthode proposée, nous retenons l'exemple d'un satellite soumis aux perturbations défini en équation (3.54)

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 28 & -24 \\ 80 & -2 & -66 \\ 10 & 100 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

L'équation dynamique du système à contrôler devient :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z - \frac{28}{I_x} \omega_x + \frac{28}{I_x} \omega_y - \frac{24}{I_x} \omega_z \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{80}{I_y} \omega_x - \frac{2}{I_y} \omega_y - \frac{66}{I_y} \omega_z \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y + \frac{10}{I_z} \omega_x + \frac{100}{I_z} \omega_y - \frac{6}{I_z} \omega_z \end{cases} \quad (3.55)$$

En utilisant les valeurs des moments d'inertie suivants : $I_x= 4 \text{ Kg.m}^2$, $I_y= 2 \text{ Kg.m}^2$, $I_z=2 \text{ Kg.m}^2$. avec les conditions initiales : $\omega_x = 1.9 \text{ rad/s}$, $\omega_y = 2.5 \text{ rad/s}$, $\omega_z = 0.2 \text{ rad/s}$. L'évolution du système est représentée en figure (3.7). Le système admet un comportement chaotique.

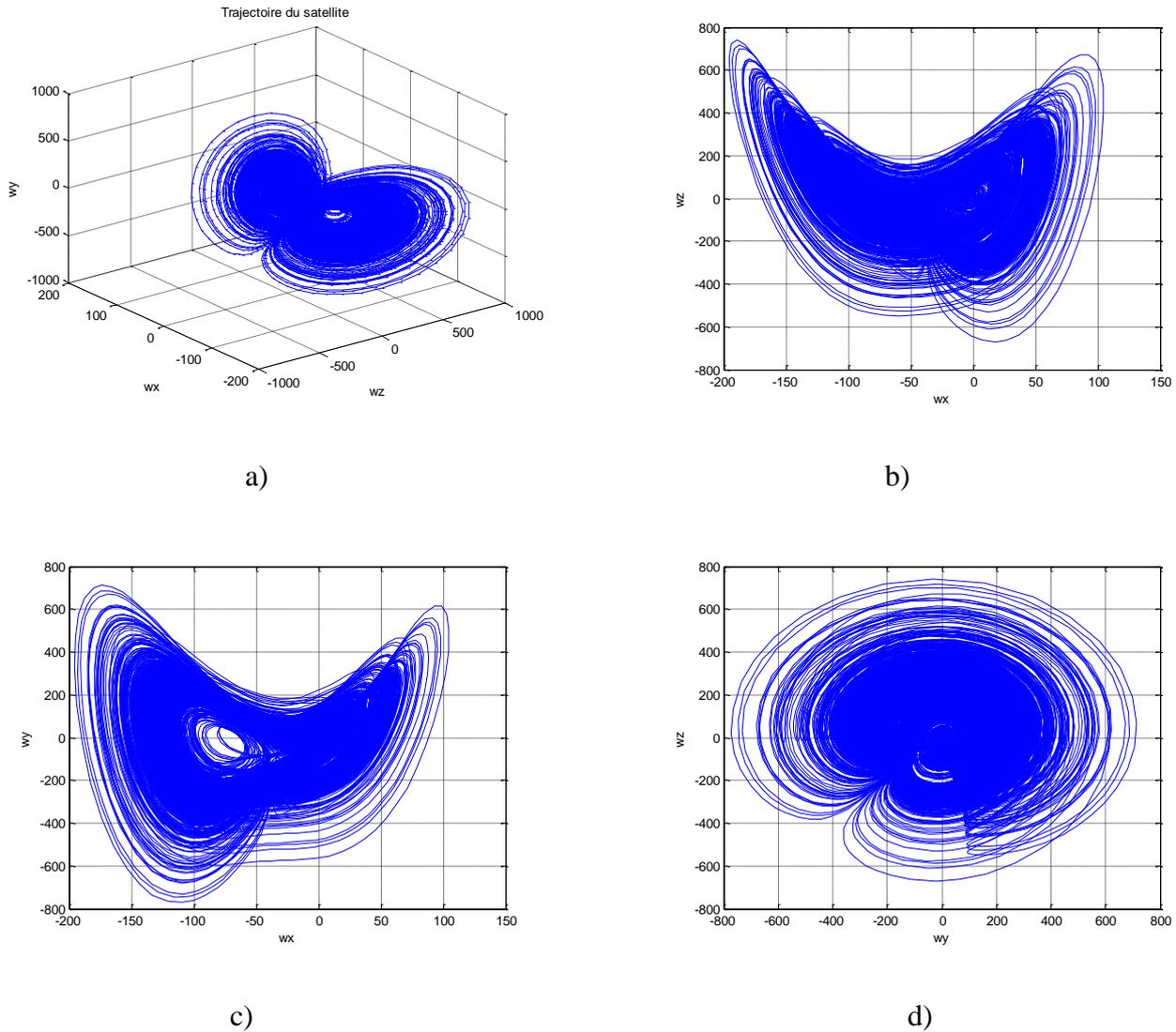


Figure 3.7 (a)Portrait de phase des vitesses angulaires, (b) $\omega_y = f(\omega_x)$,

(c) $\omega_z = f(\omega_x)$, (d) $\omega_z = f(\omega_y)$.

Notre objectif est de concevoir une commande $u(t)$ de sorte que le système (3.55) décrivant l'attitude du satellite soit stable. Pour ce faire, on a appliqué la commande par mode de glissement active présentée au paragraphe 3.2.4.1.

Dans ce cas la matrice dynamique A et la matrice F sont définies par :

$$A = \begin{pmatrix} -28 & 28 & -24 \\ 80 & -2 & -66 \\ 10 & 100 & -6 \end{pmatrix} ; \quad F = \begin{pmatrix} \sigma_x x_2 x_3 \\ \sigma_y x_1 x_3 \\ \sigma_z x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Simulations :

Sur la base de l’algorithme développé au paragraphe 3.2.4.4 nous choisissons les paramètres de simulations comme suit : le vecteur gain $K=[0 \ -2 \ 0]^T$, $r=25$, $q=0.05$.

Le résultat du contrôle est représenté par la figure (3.8).

On remarque que les vitesses angulaires tendent rapidement vers zéro. L’application de la commande par mode de glissement active a permis un contrôle rapide et parfait.

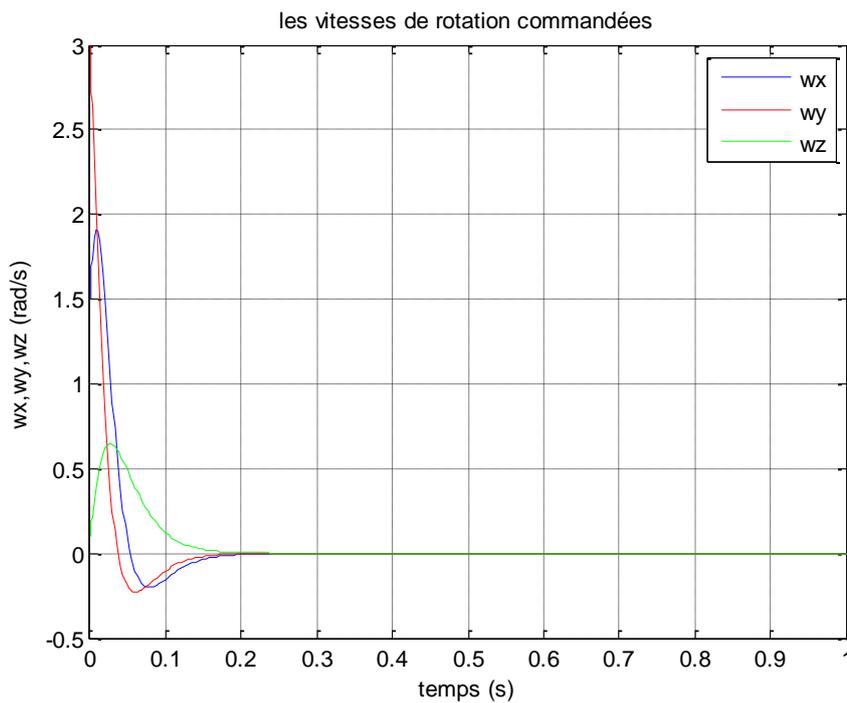


Figure 3.8 Application de la commande par mode de glissement active

au contrôle des vitesses angulaires.

3.1.5.2 Contrôle des vitesses angulaires et des angles d'attitude

Considérons l'équation dynamique d'un satellite soumis à des perturbations susceptibles d'induire un mouvement chaotique donnée par l'équation (3.22).

Les paramètres de simulations sont choisis comme suit :

$$C = 5 * [1 \quad 1 \quad -1], K = [0.01 \quad 0.1 \quad 0.03], r = 40, q = 0.05$$

Les variations des vitesses angulaires et des angles d'attitude sont illustrées en figure (3.9.a) et (3.9.b).

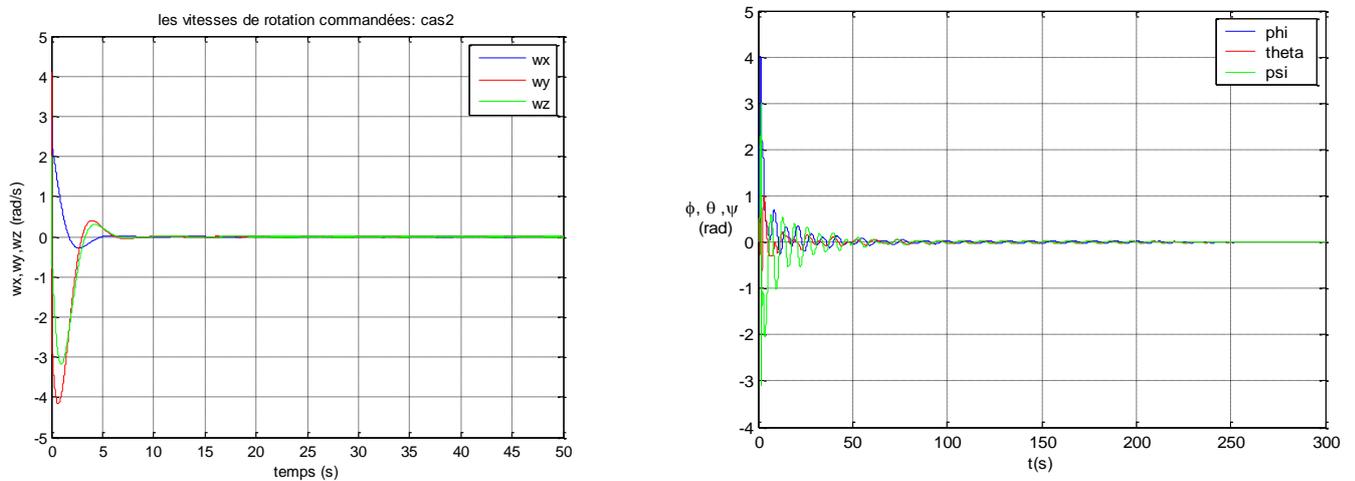


Figure 3.9 Application de la commande par mode de glissement active

a) contrôle des vitesses angulaires. **b)** contrôle des angles d'attitude.

Il est clair que par un choix positive des valeurs r et q dans la loi de commande, le signal de commutation sera borné. La stabilité du système est garantie par un choix approprié des paramètres K et C . D'après la figure (3.9) on voit bien que les vitesses angulaires se stabilisent rapidement (< 20 s), mais les angles d'attitude mettent beaucoup plus de temps pour se stabiliser (250 s à peu près).

3.3 Commande passive : principes et problématique générale

La notion de «passivité» d'un système à entrée-sortie, motivé par la dissipation de l'énergie à travers les résistances dans un circuit électrique, a été largement utilisée, afin d'analyser la stabilité d'une classe générale des systèmes non linéaires. Au début des années 1970, la passivité a également été étudiée pour les systèmes non linéaires à représentation dans l'espace d'état, permettant une interprétation plus géométrique des notions telles que la disponibilité de dissipation et de stockage de l'énergie en termes de fonctions de Lyapunov [73]. La théorie de la passivité joue un rôle important dans la conception des contrôleurs pour assurer la stabilité asymptotique des systèmes non linéaires [74].

Dans ce chapitre, nous présentons la commande passive comme une solution au problème du contrôle d'attitude d'un satellite soumis à des perturbations externes

3.3.1 Stratégie de la commande passive

La passivité est une propriété qui est liée à la fois à la notion de stabilité interne (i.e. au sens de Lyapunov) et à la notion de stabilité entrée-sortie. Un système est stable lorsque, d'une part, la fonction d'énergie représente un minimum à l'équilibre et, d'autre part lorsque cette fonction est soit conservée ou décroissante dans le temps.

3.3.1.1 La passivité

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\tag{3.56}$$

$u(t)$ est le vecteur d'entrée, $y(t)$ le vecteur de sortie.

Définition 3.1 [75]

Le système (3.56) est dit à "**minimum de phase**" si le zéro dynamique est asymptotiquement stable.

Définition 3.2 [73][76][77]

Le système (3.56) avec un taux d'approvisionnement $W(u(t), y(t))$ est dit dissipatif s'il existe une fonction positive V appelée fonction de stockage, tel que l'inégalité de dissipation suivante est vérifiée :

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \int_0^T W(u(t), y(t)) dt \quad (3.57)$$

Définition 3.3 [75][78]-[81]

Le système (3.56) est passif s'il existe une constante réelle β telle que pour $\forall t \geq 0$ l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq \beta \quad (3.58)$$

Ou s'il existe $\rho > 0$ et une constante réelle β satisfaisant

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau + \beta \geq \int_0^t \rho y^T(\tau)y(\tau)d\tau \quad (3.59)$$

La signification physique de cette définition est que l'augmentation d'énergie de stockage dans un système non linéaire passive est due à une source externe [82].

Définition 3.4 [73][77][83]

Le système (3.56) est dit passif s'il est dissipative avec un taux d'approvisionnement $W(u(t), y(t))$ et la fonction de stockage V satisfait $V(0) = 0$, tel que :

$$V(x) - V(x_0) \leq \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.60)$$

En outre, la fonction de stockage $V(x(t))$ doit satisfaire les exigences d'une fonction de Lyapunov.

S'il existe une fonction positive semi définie de Lyapunov, telle que:

$$u^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq \int \left[\frac{\partial V(x(\tau))}{\partial x(\tau)} f(x(\tau), u(\tau)) + eu^T + \delta y^T(\tau)y(\tau) + \rho \phi(x(\tau)) \right] d\tau \quad (3.61)$$

Définition 3.5 [84]

Soit un système passif d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. Si pour toutes fonctions u , tout $T \geq 0$ et supposons en plus, qu'il existe deux constantes $\delta \geq 0$ et $\varepsilon \geq 0$ telle que :

$$V(T) - V(0) \leq \int_0^T y^T(t)u(t)dt - \delta \int_0^T u^T(t)u(t)dt - \varepsilon \int_0^T y^T(t)y(t)dt \quad (3.62)$$

Alors :

- le système est strictement passif en entrée si $\delta > 0$,
- le système est strictement passif en sortie si $\varepsilon > 0$,
- le système est strictement passif si $\delta > 0$ et $\varepsilon < 0$.

Le système (3.56) peut être représenté sous la forme ordinaire:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(z) + g(z, y)y \\ \dot{y} &= l(z, y) + k(z, y)u \end{aligned} \quad (3.63)$$

Le système non linéaire (3.63) peut être rendu passif par un retour d'état de la forme [74][85] :

$$u = \gamma_{12} + \beta(x)v \quad (3.64)$$

3.3.2 Application de la commande passive au contrôle d'attitude des satellites

3.3.2.1 Contrôle des vitesses angulaires

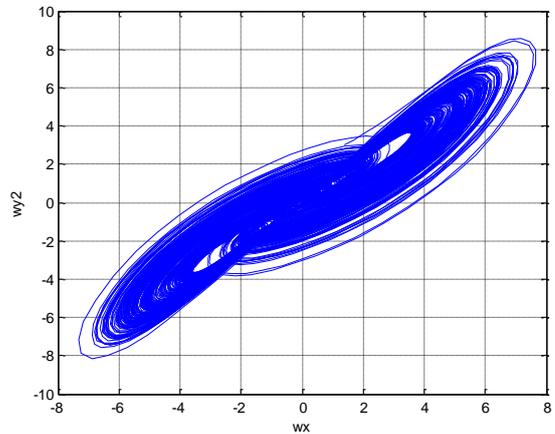
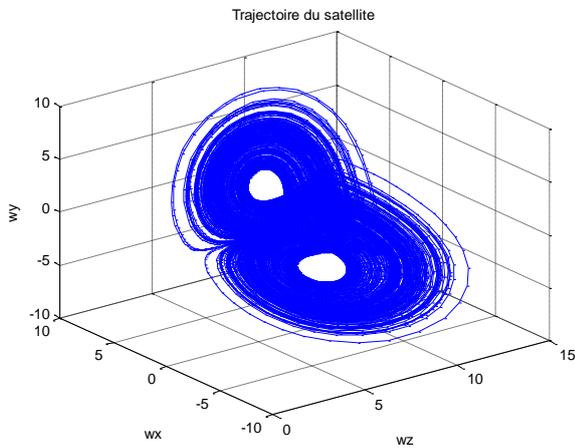
Dans cette partie on applique la commande passive afin de contrôler les vitesses angulaires d'un satellite soumis à des perturbations externes définie par.

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -72 & 72 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

En prenant en compte l'équation (3.65), l'équation dynamique du système à contrôler devient :

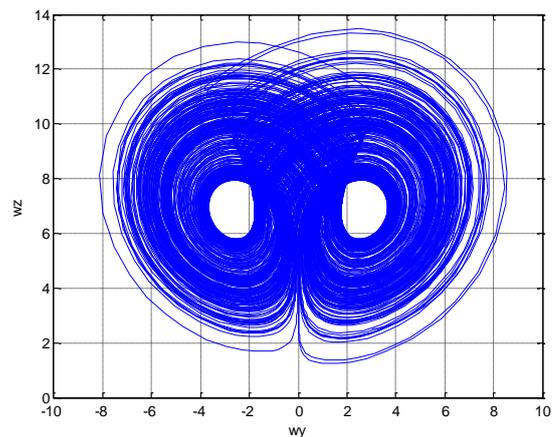
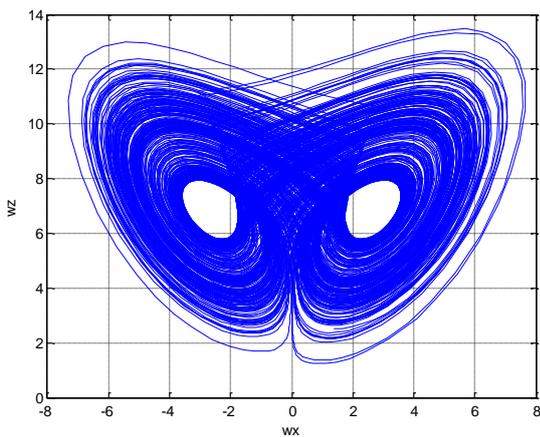
$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z - \frac{72}{I_x} \omega_x + \frac{72}{I_x} \omega_y \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{20}{I_y} \omega_y + u \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y - \frac{1.5}{I_z} \omega_z \end{cases} \quad (3.66)$$

En utilisant les valeurs des moments d'inertie suivants : $I_x= 2 \text{ Kg.m}^2$, $I_y= 0.5 \text{ Kg.m}^2$, $I_z=0.5 \text{ Kg.m}^2$. avec les conditions initiales définis par: $\omega_x = 1.4 \text{ rad/s}$, $\omega_y = 3 \text{ rad/s}$, $\omega_z = 2.5 \text{ rad/s}$, et pour $u = 0$ l'évolution du système est représentée en figure (3.10). Le système admet un comportement chaotique.



(a)

(b)



(c)

(d)

Figure 3.10 (a) Portrait de phase des vitesses angulaires, (b) $\omega_y = f(\omega_x)$,

(c) $\omega_z = f(\omega_x)$, (d) $\omega_z = f(\omega_y)$.

Faisant le changement de variable suivant:

$$z_1 = \omega_x, \quad z_2 = \omega_z, \quad y = \omega_y$$

Le système (3.65) devient:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \sigma_x z_2 y - \frac{72}{I_x} z_1 + \frac{72}{I_x} y \\ \dot{z}_2 = \sigma_z z_1 y - \frac{1.5}{I_z} z_2 \\ \dot{y} = \sigma_y z_1 z_2 + \frac{20}{I_y} y + u \end{cases} \quad (3.67)$$

On réécrit le système (3.67) sous la forme passive (équation (3.64)):

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{72}{I_x} z_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1.5}{I_z} z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x z_2 + \frac{72}{I_x} \\ \sigma_z z_1 \end{bmatrix} y \quad (3.68)$$

$$\dot{y} = \sigma_y z_1 z_2 + \frac{20}{I_y} y + u$$

Avec:

$$f(z) = \left[-\frac{72}{I_x} z_1, 0, 0, -\frac{1.5}{I_z} z_2 \right]^T, \quad g(z, y) = \left[\sigma_x z_2 + \frac{72}{I_x}, \sigma_z z_1 \right]^T$$

$$l(z, y) = \sigma_y z_1 z_2 + 20y, \quad k(z, y) = 1$$

Notre objectif est de concevoir un contrôleur pour le système (3.67) de telle sorte que le système en boucle fermée soit passif. La fonction de stockage est choisie comme suit:

$$V(z, y) = W(z) + \frac{1}{2} y^2 \quad (3.69)$$

Où $W(z)$ est la fonction de Lyapunov avec $W(0) = 0$:

$$W(z) = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2) \quad (3.70)$$

Etude de la passivité du système :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(z) &= \frac{\partial w(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}W(z) = -\left(\frac{72}{I_x} z_1^2 + \frac{1.5}{I_z} z_2^2\right) \leq 0 \quad (3.71)$$

D'après l'équation (3.71) le zéro dynamique du système est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov donc le système est à minimum de phase.

La dérivée de la fonction de stockage le long de la trajectoire du système nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(z, y) &= \frac{\partial}{\partial z}W(z)\dot{z} + y\dot{y} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}W(z)f(z) + \frac{\partial}{\partial z}W(z)g(z, y) + l(z, y)y + k(z, y)yu\end{aligned} \quad (3.72)$$

Et nous avons d'autre part :

$$\frac{d}{dt}W(z) = \frac{d}{dz}W(z)f(z) \leq 0 \quad (3.73)$$

Alors, l'équation (3.72) peut être réécrite sous la forme:

$$\frac{d}{dt}V(z, y) \leq \frac{\partial}{\partial z}W(z)g(z, y)y + (l(z, y) + k(z, y)u)y \quad (3.74)$$

La commande à appliquer au système sera calculée de la manière suivante [82] :

$$u = k^{-1}(z, y)[-l^T(z, y) - \frac{\partial W}{\partial z}g(z, y) - \gamma_{12}y + v] \quad (3.75)$$

En remplaçant les valeurs de $g(z, y)$, $l(z, y)$ et $k(z, y)$ dans (3.75), on obtient :

$$u = -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)z_1z_2 - 36z_1 - (20 + \gamma_{12})y + v \quad (3.76)$$

Où γ_{12} est une constante positive et v est un signal externe qui est en relation avec la sortie de référence du système.

Lorsqu'on remplace (3.76) dans (3.74), on obtient:

$$\frac{dV(z, y)}{dt} \leq -\gamma_{12}y^2 + vy \quad (3.77)$$

L'intégration de (3.77) nous donne :

$$V(z, y) - V(z_0, y_0) \leq \int_0^t -\gamma_{12} y^2(\tau) d\tau + \int_0^t v(\tau) y(\tau) d\tau \quad (3.78)$$

Si on pose : $V(z, y) \geq 0$, et $\rho = V(z_0, y_0)$, l'équation (3.78) devient

$$\int_0^t v(\tau) y(\tau) d\tau + \rho \geq V(z, y) + \int_0^t \gamma_{12} y^2(\tau) d\tau \geq \int_0^t \gamma_{12} y^2(\tau) d\tau \quad (3.79)$$

Cette relation satisfait la définition de la passivité, le système sous contrôle est strictement passif.

Simulation :

Dans cette partie nous appliquons la commande calculée en (3.76) pour le contrôle des vitesses angulaires du satellite défini en (3.66). Les deux cas suivant sont pris en compte: cas ou $v=0$ et cas ou $v \neq 0$:

Cas1 : $v=0$

Le système sous contrôle passif est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z - \frac{72}{I_x} \omega_x + \frac{72}{I_x} \omega_y \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{20}{I_y} \omega_y + -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) z_1 z_2 - \frac{72}{I_x} z_1 - \left(\frac{20}{I_y} + \gamma_{12}\right) y + v \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y - \frac{1.5}{I_z} \omega_z \end{cases} \quad (3.80)$$

Pour une valeur du signal externe v égale à 0 et à partir des conditions initiales suivantes:

$(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (2, 2, 7, 5)$; les vitesses angulaires tendent vers le point d'équilibre très rapidement (moins de 2s). Les résultats sont illustrés en figure (3.11).

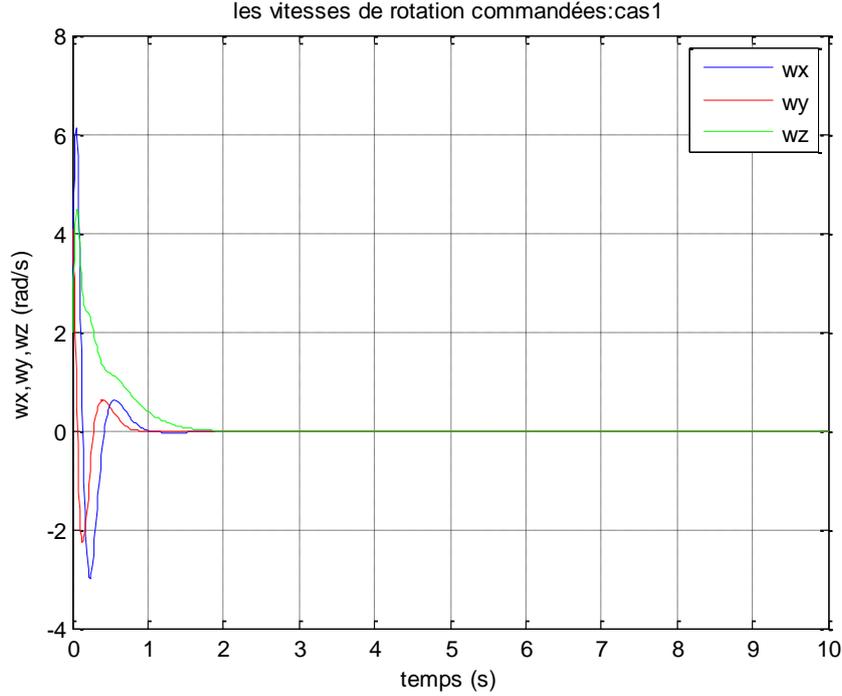


Figure. 3.11 Application de la commande passive au contrôle des vitesses angulaires **cas1** : $\nu = 0$.

Cas2 : $\nu \neq 0$

Si la valeur du signal externe $\nu \neq 0$, les vitesses angulaires seront orientées vers des valeurs bien définies $[x_1^* \quad x_2^* \quad x_3^*]^T$. La valeur du signal ν sera calculée comme suit [82]:

Posant $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$, $\omega_x = x_1$, $\omega_y = x_2$, $\omega_z = x_3$, le système (3.66) devient:

$$\begin{cases} \sigma_x x_2 x_3 - \frac{72}{I_x} x_1 + \frac{72}{I_x} x_2 = 0 \\ \sigma_y x_1 x_3 + \frac{20}{I_y} x_2 + u = 0 \\ \sigma_z x_1 x_2 - \frac{1.5}{I_z} x_3 = 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

Posant $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$, $x_3 = x_3^*$ nous obtenant :

$$\begin{cases} x_1^* = x_2^* \\ x_2^* = \sqrt{x_3^*} \end{cases} \quad (3.82)$$

Dans ce cas l'expression du signal externe aura la forme suivante:

$$\nu = (\sigma_x + \sigma_z)x_1^*x_3^* + 36x_1^* + 17x_3^* + (\gamma_{12} - 20)x_2^* \quad (3.83)$$

Maintenant on va forcer le système au point de consigne $[2 \ 2 \ 4]^T$ qui remplit la condition (3.82).

L'évolution des vitesses angulaires en fonction du temps est illustrée sur la figure (3.12) :

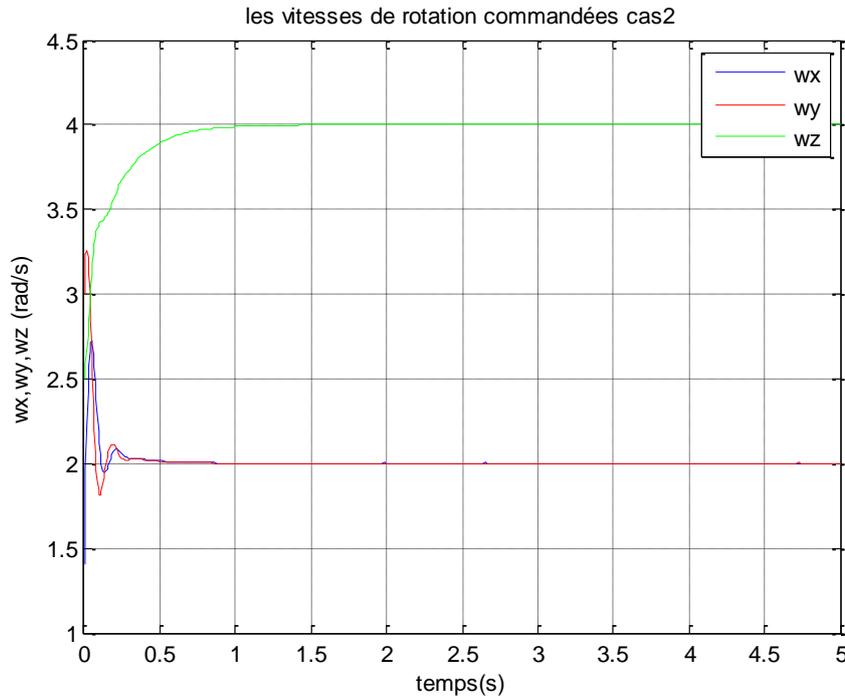


Figure 3.12 Evolution des vitesses angulaires contrôlées en fonction du temps **cas 2** : $\nu \neq 0$.

Il faut noter qu'une fois le système est rendu passif un petit changement dans le signal de commande (changement de la valeur de ν) peut entrainer le système à n'importe quel point de consigne.

3.3.2.2 Contrôle des vitesses angulaires et des angles d'attitude

Considérons le système d'équation d'un satellite développé en (3.22)

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z - \frac{1.2}{I_x} \omega_x + \frac{\sqrt{6}}{2I_x} \omega_z \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{0.35}{I_y} \omega_y + u \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y - \frac{\sqrt{6}}{I_z} \omega_x - \frac{0.4}{I_z} \omega_z \\ \dot{\phi} = \omega_x + \sin \phi \tan \theta \omega_y + \cos \phi \tan \theta \omega_z \\ \dot{\theta} = \cos \phi \omega_y - \sin \phi \omega_z \\ \dot{\psi} = \sin \phi \sec \theta \omega_y + \cos \phi \sec \theta \omega_z \end{cases} \quad (3.84)$$

Faisant le changement de variable suivant:

$$z_1 = \omega_x, y = \omega_y, z_2 = \omega_z, z_3 = \phi, z_4 = \theta, z_5 = \psi \quad (3.85)$$

Le système (3.84) devient:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \sigma_x z_2 y + \frac{1}{I_x} (-1.2z_1 + \frac{\sqrt{6}}{2} z_2) \\ \dot{z}_2 = \sigma_z z_1 y + \frac{1}{I_z} (-\sqrt{6}z_1 - 0.4z_2) \\ \dot{y} = \sigma_y z_1 z_2 + \frac{1}{I_y} 0.35y + u \\ \dot{z}_3 = z_1 + \sin z_3 \tan z_4 y + \cos z_3 \tan z_4 z_2 \\ \dot{z}_4 = \cos z_3 y - \sin z_3 z_2 \\ \dot{z}_5 = \sin z_3 \sec z_4 y + \cos z_3 \sec z_4 z_2 \end{cases} \quad (3.86)$$

On réécrit le système (3.86) sous la forme passive:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1.2}{I_x} z_1 + \frac{\sqrt{6}}{2I_x} z_2 \\ \frac{-\sqrt{6}}{I_z} z_1 - \frac{0.4}{I_z} z_2 \\ z_1 + \cos z_3 \tan z_4 z_2 \\ -\sin z_3 z_2 \\ \cos z_3 \sec z_4 z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x z_2 \\ \sigma_z z_1 \\ \sin z_3 \tan z_4 \\ \cos z_3 \\ \sin z_3 \sec z_4 \end{bmatrix} y \quad (3.87)$$

$$\dot{y} = \sigma_y z_1 z_2 + \frac{1}{I_y} 0.35y + u$$

Avec:

$$f(z) = \left[\frac{-1.2}{I_x} z_1 + \frac{\sqrt{6}}{2I_x} z_2 \quad \frac{-\sqrt{6}}{I_z} z_1 - \frac{0.4}{I_z} z_2 \quad z_1 + \cos z_3 \tan z_4 z_2 \quad -\sin z_3 z_2 \quad \cos z_3 \sec z_4 z_2 \right]^T$$

$$g(z, y) = \left[\sigma_x z_2 \quad \sigma_z z_1 \quad \sin z_3 \tan z_4 \quad \cos z_3 \quad \sin z_3 \sec z_4 \right]^T$$

$$l(z, y) = \sigma_y z_1 z_2 + \frac{0.35}{I_y} y \quad , \quad k(z, y) = 1$$

La fonction de stockage est choisie comme suit:

$$V(z, y) = W(z) + \frac{1}{2} y^2 \quad (3.88)$$

Où $W(z)$ est la fonction de Lyapounov avec $W(0) = 0$:

$$W(z) = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2) \quad (3.89)$$

Etude de la passivité du système :

$$\frac{d}{dt} W(z) = \frac{\partial W(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 + z_4 \dot{z}_4 + z_5 \dot{z}_5$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(z) &= z_1 \left(-0.4 z_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} z_2 + \frac{1}{3} \cos z_4 \sin z_5 \right) + z_2 \left(\frac{-\sqrt{6}}{I_z} z_1 - \frac{0.4}{I_z} z_2 + \cos z_5 \sin z_4 \right) \\ &+ z_3 (z_1 + \cos z_3 \tan z_4 z_2) - z_4 (\sin z_3 z_2) + z_5 (\cos z_3 \sec z_4 z_2) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

D'après l'équation (3.90) le zéro dynamique du système est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov donc le système est à minimum de phase.

La dérivée de la fonction de stockage le long de la trajectoire du système est:

$$\frac{d}{dt} V(z, y) = \frac{\partial}{\partial z} W(z) \dot{z} + y \dot{y}$$

$$\frac{d}{dt} V(z, y) = \frac{\partial}{\partial z} W(z) f(z) + \frac{\partial}{\partial z} W(z) g(z, y) + l(z, y) y + k(z, y) y u \quad (3.91)$$

$$\frac{d}{dz}W(z)f(z) \leq 0 \quad (3.92)$$

Alors, l'équation (3.91) peut être écrite sous la forme:

$$\frac{d}{dt}V(z, y) \leq \frac{\partial}{\partial z}W(z)g(z, y)y + (l(z, y) + k(z, y)u)y \quad (3.93)$$

La commande à appliquer au système sera calculée de la manière suivante [82] :

$$u = k^{-1}(z, y)[-l^T(z, y) - \frac{\partial W}{\partial z}g(z, y) - \gamma_{12}y + \nu] \quad (3.94)$$

En remplaçant les valeurs de $g(z, y)$, $l(z, y)$ et $k(z, y)$ dans (3.93), on obtient :

$$u = - \left[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)z_1z_3 - \left(\left(\frac{0.35}{I_y} \right) + \gamma_{12} \right) y - \sin z_3 \tan(z_4)z_3 - \cos(z_3)z_4 - \sin z_3 \sec(z_4)z_5 - \nu \right] \quad (3.95)$$

Où γ_{12} est une constante positive et ν est un signal externe qui est en relation avec la sortie de référence du système.

Lorsqu'on remplace (3.94) dans (3.93), on obtient:

$$\frac{dV(z, y)}{dt} \leq -\gamma_{12}y^2 + \nu y \quad (3.96)$$

L'intégration de (3.96) nous donne :

$$V(z, y) - V(z_0, y_0) \leq \int_0^t -\gamma_{12}y^2(\tau)d\tau + \int_0^t \nu(\tau)y(\tau)d\tau \quad (3.97)$$

Si on pose : $V(z, y) \geq 0$, et $\rho = V(z_0, y_0)$, l'équation (3.97) devient

$$\int_0^t \nu(\tau)y(\tau)d\tau + \rho \geq V(z, y) + \int_0^t \gamma_{12}y^2(\tau)d\tau \geq \int_0^t \gamma_{12}y^2(\tau)d\tau \quad (3.98)$$

Cette relation satisfait la définition de la passivité, par conséquent le système sous contrôle est strictement passif.

Simulation :

Dans cette partie nous appliquons la commande calculée en (3.72) pour le contrôle des vitesses angulaires et des angles d'attitude du satellite.

Le système à six dimension sous control passive est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \sigma_x \omega_y \omega_z - \frac{1.2}{I_x} \omega_x + \frac{\sqrt{6}}{2I_x} \omega_z \\ \dot{\omega}_y = \sigma_y \omega_x \omega_z + \frac{0.35}{I_y} \omega_y + u = - \left[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \omega_x \omega_z - \left(\left(\frac{0.35}{I_y} \right) + \gamma_{12} \right) \omega_y - \sin \phi \tan(\theta) \dot{\phi} - \cos(\phi) \dot{\theta} - \sin \phi \sec(\theta) \dot{\psi} \right] \\ \dot{\omega}_z = \sigma_z \omega_x \omega_y - \frac{\sqrt{6}}{I_z} \omega_x - \frac{0.4}{I_z} \omega_z \\ \dot{\phi} = \omega_x + \sin \phi \tan \theta \omega_y + \cos \phi \tan \theta \omega_z \\ \dot{\theta} = \cos \phi \omega_y - \sin \phi \omega_z \\ \dot{\psi} = \sin \phi \sec \theta \omega_y + \cos \phi \sec \theta \omega_z \end{cases} \quad (3.99)$$

A partir des conditions initiales $(\phi, \theta, \psi, \omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 0, 0, 3, 4, 1, 2)$, les résultats obtenus suite à l'application de la loi de la commande passive sont représentés par la figure (3.13).

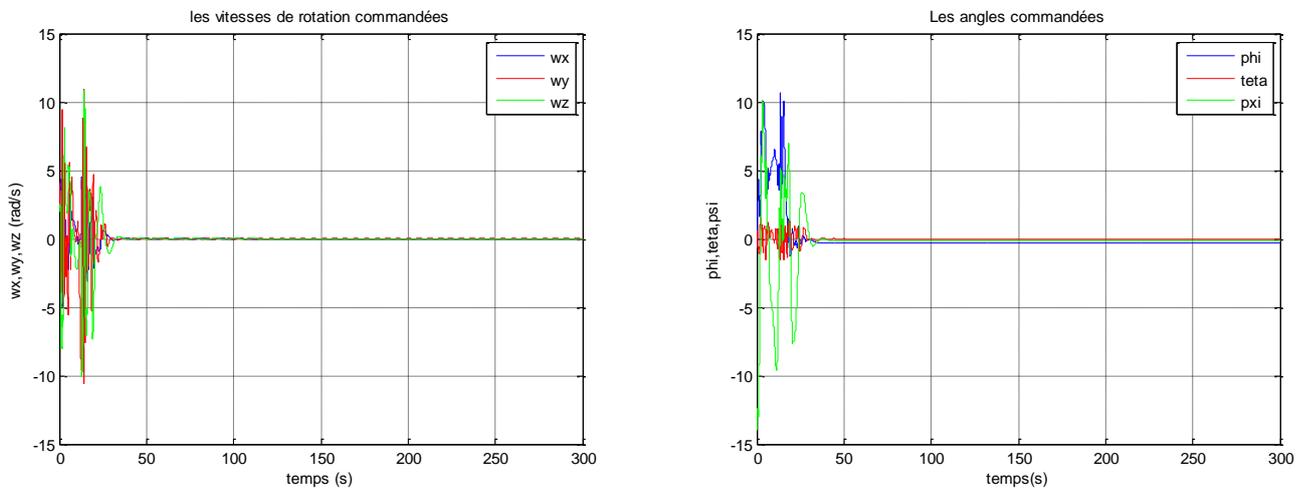


Figure 3.13 Application de la commande passive

a) contrôle des vitesses angulaires. **b)** contrôle des angles d'attitude.

Les résultats obtenus, montrent que le contrôle a permis de supprimer définitivement le chaos du système dynamique et stabilise les vitesses angulaires et les angles d'attitudes sur le point d'équilibre.

Conclusion

Au cours de ce chapitre on a appliqué trois méthodes différentes pour le contrôle d'attitude d'un satellite soumis à des perturbations.

En premier nous avons appliqué le contrôle prédictif à retour d'état pour le contrôle du satellite à trois et six dimensions respectivement. Nous avons montré que la loi de commande proposée stabilise globalement en attitude le satellite. Les résultats obtenus sont jugés satisfaisants et mettent en valeur l'efficacité de cette commande.

La deuxième méthode appliquée est la commande par mode de glissement active; qui est habituellement utilisée pour augmenter la robustesse de la commande. Cependant, par un bon choix des paramètres de contrôles K , C , q et r on a pu trouver un compromis entre la robustesse et les performances de la commande.

Enfin, nous avons appliqué la commande passive pour le contrôle d'attitude des vitesses angulaires d'un satellite à comportement chaotique. Deux cas ont été traité ; cas ou le signal externe $v=0$ et cas ou $v \neq 0$.

Dans le premier cas ($v=0$), les vitesses angulaires tendent vers l'origine. Dans le deuxième cas ($v \neq 0$), les vitesses angulaires sont orientées vers des valeurs bien définis.

Afin de tester l'efficacité de la méthode proposée, nous l'avons appliquée au control des vitesses angulaires et des angles d'attitude en même temps. Les résultats de simulations mettent en évidence l'efficacité de cette méthode.

Synchronisation des satellites

Introduction

La synchronisation est un phénomène universel qui caractérise de nombreux systèmes non linéaires en physique, chimie, biologie et en sciences de l'ingénieur [86]. La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.

Le premier rapport scientifique sur la synchronisation est sans doute la célèbre observation expérimentale en 1665, par Huygens, de deux pendules suspendus sur une poutre commune oscillant à un rythme commun. Un regain d'intérêt pour l'étude de la synchronisation a été retracé plus tard avec la découverte des propriétés de synchronisation de base des appareils électriques. En outre, des phénomènes de synchronisation intrigante ont été démontrés dans plusieurs domaines : En neurosciences, il existe un intérêt croissant pour l'étude de la synchronisation qui est considéré comme un mécanisme clé pour le traitement de l'information neuronale dans le cerveau. En sciences de l'ingénieur, la synchronisation a trouvé des applications dans les circuits de commande électroniques tels que des boucles à verrouillage de phase (PLL), communément présents dans les systèmes informatiques et de communication ou dans la stabilisation des centrales électriques. En optoélectronique, un laser seul maître d'une grande cohérence peut être utilisé pour justement

atteindre la stabilisation de fréquence d'un tableau de lasers esclave à travers la phase d'injection optique de blocage [86].

Synchronisation du chaos

Deux systèmes chaotiques identiques fonctionnant indépendamment présentent des oscillations très différentes même si leurs conditions initiales sont très proches. Un tel comportement est dû au fait que les systèmes chaotiques sont par nature très sensible aux conditions initiales, à savoir, toute légère différence dans les conditions initiales conduirait rapidement à une décorrélation déterministe des sorties chaotiques. Il s'ensuit que deux systèmes chaotiques ne peuvent se synchroniser sauf si les conditions initiales sont exactement les mêmes, ce qui est physiquement et numériquement impossible. Cependant, quand un faible couplage est établi, Pecora et Carroll [87] ont montré théoriquement et expérimentalement que deux systèmes chaotiques peuvent se synchroniser. Il existe deux modes de synchronisation. Le premier est appelé maître-esclave ou couplage unidirectionnel ; le second repose sur un couplage mutuel entre deux systèmes chaotiques.

Dans ce chapitre on va considérer le mode de couplage unidirectionnel et on va appliquer les méthodes étudiées au chapitre précédent pour synchroniser deux satellites identiques.

4.1 Principe de la synchronisation

L'opération de synchronisation consiste à rapprocher les trajectoires des deux systèmes jusqu'à ce qu'elles finissent par être confondues. Le système global comporte un système Maître et un système Esclave et synchroniser les deux systèmes revient à injecter dans l'Esclave une grandeur proportionnelle à la différence des deux trajectoires. De cette façon la trajectoire de l'Esclave finit par être confondue avec celle du Maître. Ce principe est détaillé par le schéma bloc de la figure 4.1.

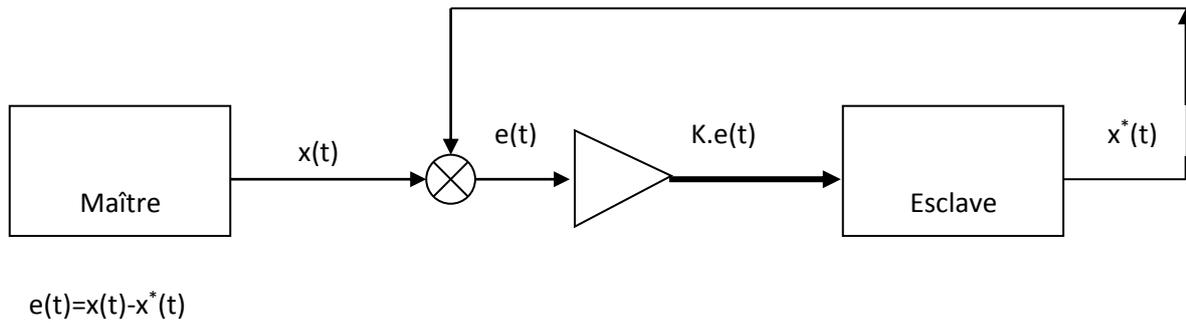


Figure 4.1 Schéma bloc illustrant le principe de la synchronisation.

A priori, il paraît impossible de synchroniser deux systèmes identiques. D'une part parce que dans les systèmes réels, il est extrêmement difficile de construire deux systèmes à comportement identiques. Cependant, dans la pratique, les valeurs des composants ont des tolérances et ne sont donc pas exactement les mêmes pour deux systèmes identiques. Les parasites jouent aussi un rôle très important. Imaginons alors qu'il soit possible de synchroniser deux systèmes identiques. Les parasites sont modélisés par une perturbation ε . Considérons que le Maître a l'équation $\dot{x}(t) = F(x)$ et l'esclave $\dot{y}(t) = F(y)$, comme les systèmes sont supposés identiques la fonction F est la même pour chacun d'eux. Etant donné ce qui vient d'être dit, on sait qu'à un moment donné il existe un vecteur ε , dont les composantes sont arbitrairement petites, tel que $y - x = \varepsilon$. En théorie on s'attend à ce que ε tende vers le vecteur nul lorsque le temps tend vers l'infini. En pratique, on espère simplement que l'erreur soit bornée et de valeur négligeable devant le signal du maître.

4.2 Formulation du problème de la Synchronisation

Considérons deux satellites identiques, où le système maître et le système esclave sont notés par x et y , respectivement.

On pose : $\omega_{x1} = x_1$, $\omega_{y1} = x_2$, $\omega_{z1} = x_3$ pour le système maître, et $\omega_{x2} = y_1$, $\omega_{y2} = y_2$, $\omega_{z2} = y_3$ pour le système esclave.

L'équation cinématique des vitesses angulaires est donnée par :

Le système maître:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma_x x_2 x_3 + \frac{P_x}{I_x} + \frac{C_x}{I_x} \\ \dot{x}_2 = \sigma_y x_1 x_3 + \frac{P_y}{I_y} + \frac{C_y}{I_y} \\ \dot{x}_3 = \sigma_z x_1 x_2 + \frac{P_z}{I_z} + \frac{C_z}{I_z} \end{cases} \quad (4.1)$$

Le système esclave:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sigma_x y_2 y_3 + \frac{P_x}{I_x} + \frac{C_x}{I_x} \\ \dot{y}_2 = \sigma_y y_1 y_3 + \frac{P_y}{I_y} + \frac{C_y}{I_y} \\ \dot{y}_3 = \sigma_z y_1 y_2 + \frac{P_z}{I_z} + \frac{C_z}{I_z} \end{cases} \quad (4.2)$$

Définissant les erreurs de synchronisation entre le système maître (4.1) et le système esclave (4.2) :

$$\begin{aligned} e(t) &= [e_1(t) \quad e_2(t) \quad e_3(t)]^T \\ &= [y_1(t) - x_1(t) \quad y_2(t) - x_2(t) \quad y_3(t) - x_3(t)]^T \end{aligned} \quad (4.3)$$

Selon les perturbations appliquées aux satellites deux cas sont à traités ; cas ou le satellite ne présente pas un comportement chaotique et cas ou le satellite présente un comportement chaotique:

Cas 1 : satellites à comportement non chaotique

Les perturbations appliquées aux satellites n'induisent pas un comportement chaotique.

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(3 \cos \omega_0 t + 1) \\ \varepsilon(1.5 \cos \omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t) \\ \varepsilon(3 \sin \omega_0 t + 1) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

En prenant en compte l'équation (4.4), l'erreur dynamique est déterminée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \sigma_x (y_2 y_3 - x_2 x_3) + \varepsilon (3 \cos \omega_0 t + 1) \\ \dot{e}_2 = \sigma_y (y_1 y_3 - x_1 x_3) + \varepsilon (1.5 \cos \omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t) \\ \dot{e}_3 = \sigma_z (y_1 y_2 - x_1 x_2) + \varepsilon (3 \sin \omega_0 t + 1) \end{cases} \quad (4.5)$$

D'où

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \sigma_x y_3 e_2 + \sigma_x y_2 e_3 - \sigma_x e_2 e_3 + \varepsilon (3 \cos \omega_0 t + 1) \\ \dot{e}_2 = \sigma_y y_3 e_1 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 + \varepsilon (1.5 \cos \omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t) \\ \dot{e}_3 = \sigma_z y_2 e_1 + \sigma_z y_1 e_2 - \sigma_z e_1 e_2 + \varepsilon (3 \sin \omega_0 t + 1) \end{cases} \quad (4.6)$$

Il est directement obtenu tel que :

$$\begin{cases} y_2 y_3 - x_2 x_3 = -e_2 e_3 + y_2 e_3 + y_3 e_2 \\ y_1 y_3 - x_1 x_3 = -e_1 e_3 + y_1 e_3 + y_3 e_1 \\ y_1 y_2 - x_1 x_2 = -e_1 e_2 + y_1 e_2 + y_2 e_1 \end{cases} \quad (4.7)$$

En prenant en compte les paramètres de simulation résumés au tableau (4.1) ; la simulation des équations (4.1), (4.2) et (4.6) avec la méthode de Rung-Kutta (pas d'intégration de 0.01), donne les résultats illustrés en figures (4.2) et (4.3).

Moments d'inertie pour satellite maître et esclave	$I_x = 1 \text{ Kg.m}^2$	$I_y = -1 \text{ Kg.m}^2$	$I_z = 1 \text{ Kg.m}^2$
vecteur d'état initial pour le satellite maître	$\omega_{x1} = 3(\text{rad} / \text{s})$	$\omega_{y1} = 4.1(\text{rad} / \text{s})$	$\omega_{z1} = 2(\text{rad} / \text{s})$
vecteur d'état initial pour le satellite esclave	$\omega_{x2} = 5(\text{rad} / \text{s})$	$\omega_{y2} = 2(\text{rad} / \text{s})$	$\omega_{z2} = 4(\text{rad} / \text{s})$

Tableau 4.1 Paramètres de simulation **cas1**.

D'après la figure (4.2) on remarque qu'avec des conditions initiales non identiques, les deux satellites (maître et esclave) ne sont pas synchrones d'où la nécessité de l'utilisation d'une commande pour réaliser la synchronisation. Selon la figure (4.3) l'erreur dynamique est instable et ne tend pas vers zéro.

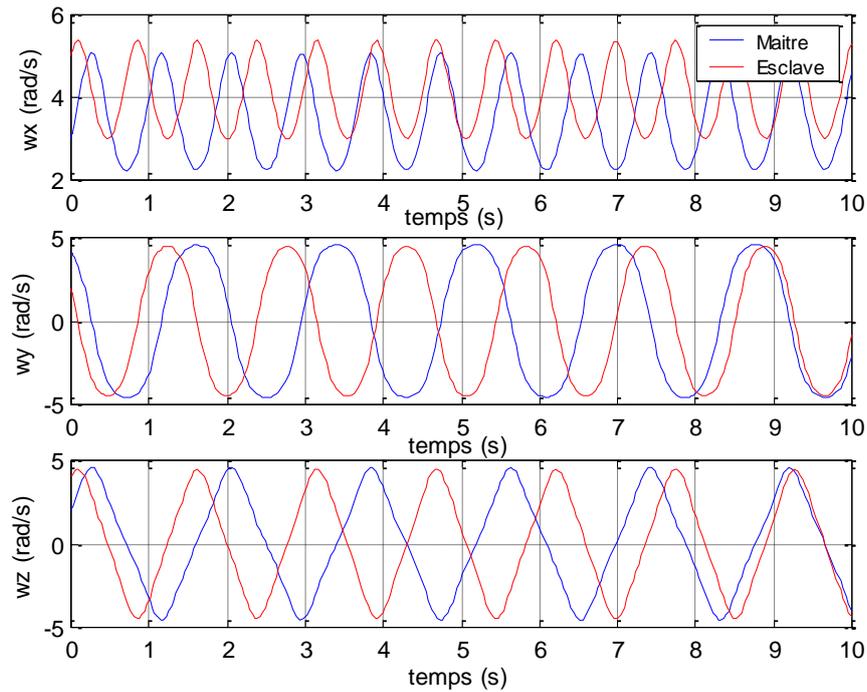


Figure.4.2 Evolution des vitesses angulaires des satellites Maître et Esclave en fonction du temps **cas 1**.

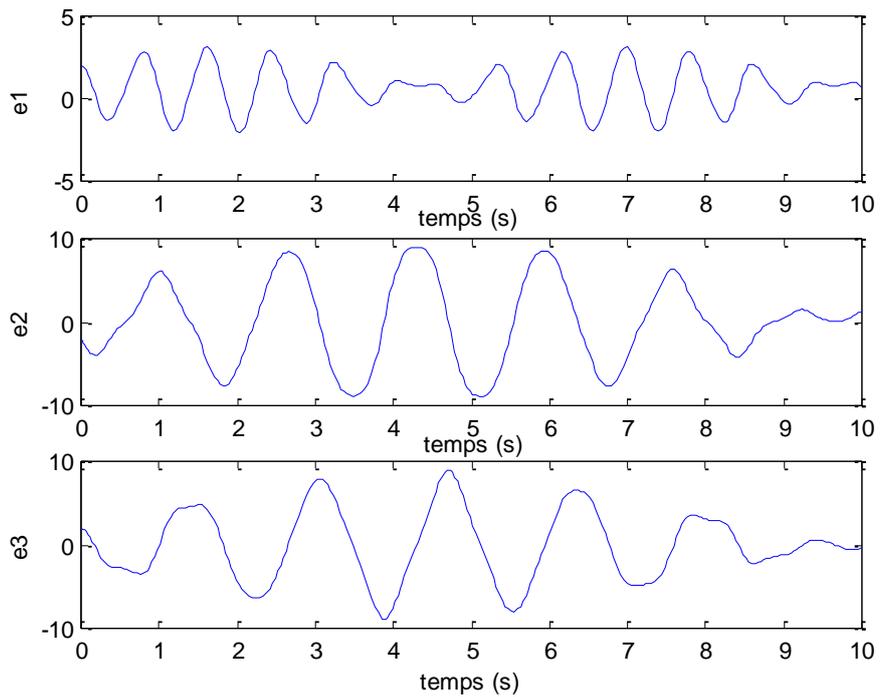


Figure.4.3 Evolution des erreurs de synchronisation **cas 1**.

Cas 2 : satellites à comportement chaotique

Les perturbations appliquées aux satellites sont choisies de telle sorte qu'on peut induire le mouvement chaotique.

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0.35 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

L'erreur dynamique entre le système (4.1) et (4.2) en tenant compte de l'équation (4.8) est déterminée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \sigma_x(y_2 y_3 - x_2 x_3) - \frac{1.2}{I_x}(y_1 - x_1) + \frac{\sqrt{6}}{2I_x}(y_3 - x_3) \\ \dot{e}_2 = \sigma_y(y_1 y_3 - x_1 x_3) + \frac{0.35}{I_y}(y_2 - x_2) \\ \dot{e}_3 = \sigma_z(y_1 y_2 - x_1 x_2) - \frac{\sqrt{6}}{I_z}(y_1 - x_1) - \frac{0.4}{I_z}(y_3 - x_3) \end{cases} \quad (4.9)$$

Il s'en suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\frac{1.2}{I_x}e_1 + \sigma_x y_3 e_2 + \left(\sigma_x y_2 + \frac{\sqrt{6}}{2I_x} \right) e_3 - \sigma_x e_2 e_3 \\ \dot{e}_2 = \sigma_y y_3 e_1 + \frac{0.35}{I_y}e_2 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 \\ \dot{e}_3 = \left(\sigma_z y_2 - \frac{\sqrt{6}}{I_z} \right) e_1 + \sigma_z y_1 e_2 - \frac{0.4}{I_z}e_3 - \sigma_z e_1 e_2 \end{cases} \quad (4.10)$$

Les paramètres de simulation sont présentés au tableau (4.2). Tans dit que les résultats de simulation sont illustrés en figures (4.4) et (4.5).

Moments d'inertie pour satellite maître et esclave	$I_x = 3 \text{ Kg.m}^2$	$I_y = 2 \text{ Kg.m}^2$	$I_z = 1 \text{ Kg.m}^2$
vecteur d'état initial pour le satellite maître	$\omega_{x1} = 3(\text{rad} / \text{s})$	$\omega_{y1} = 4.1(\text{rad} / \text{s})$	$\omega_{z1} = 2(\text{rad} / \text{s})$
vecteur d'état initial pour le satellite esclave	$\omega_{x2} = 5(\text{rad} / \text{s})$	$\omega_{y2} = 2(\text{rad} / \text{s})$	$\omega_{z2} = 4(\text{rad} / \text{s})$

Tableau 4.2 Paramètres de simulation **cas2**.

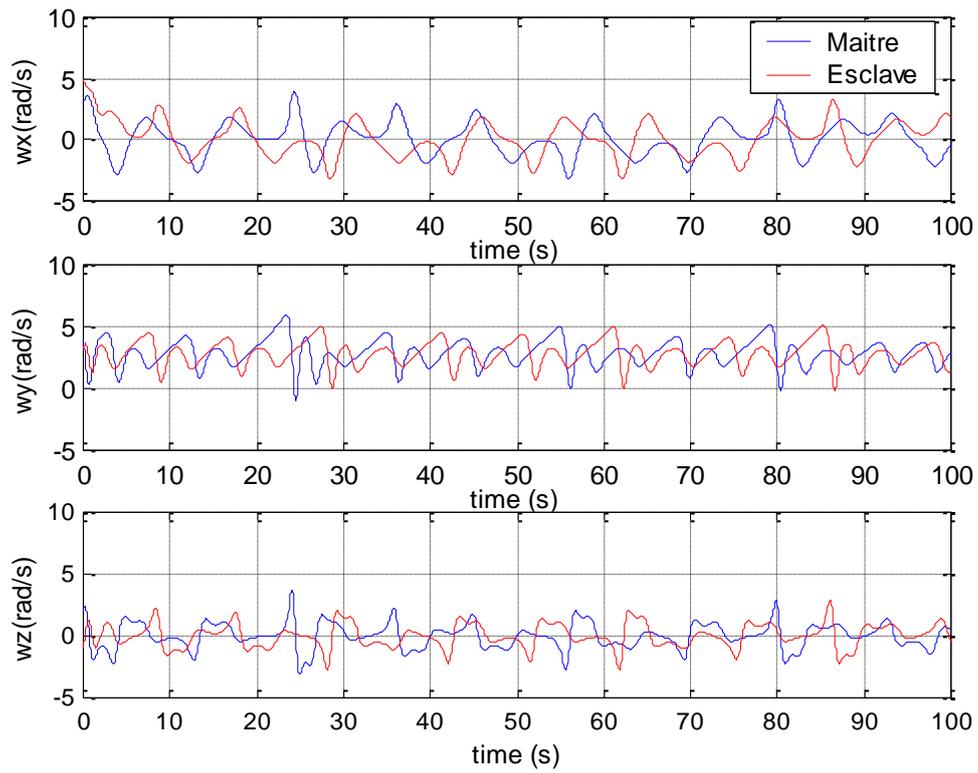


Figure.4.4 Evolution des vitesses angulaires du satellite Maître et Esclave en fonction du temps **cas2**.

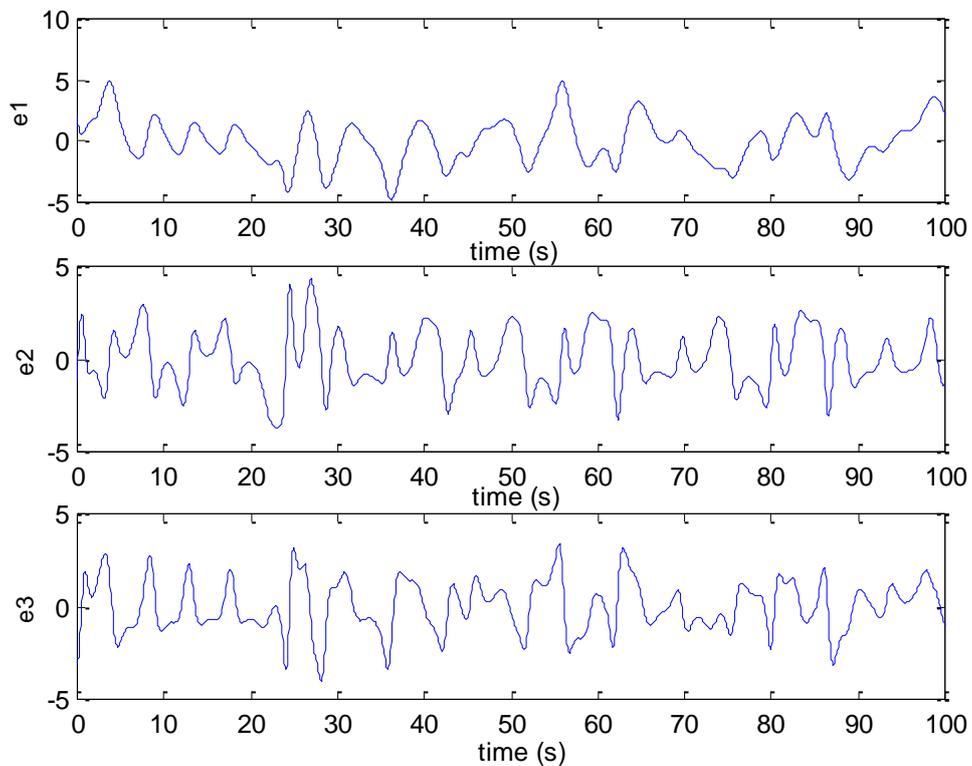


Figure.4.5 Evolution des erreurs de synchronisation **cas 2**.

D'après la figure (4.4), il est clair que, les deux satellites (maître et esclave) ne sont pas synchrones. L'erreur dynamique est instable selon la figure (4.5).

Notre objectif est de concevoir une commande $u(t)$ de sorte que le système esclave (4.2) synchronise asymptotiquement le système Maître (4.1) tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow 0$$

Les Trois méthodes étudiées au chapitre3 sont appliquées dans les paragraphes qui suivent pour réaliser la synchronisation entre deux satellites identiques.

4.3 Application du contrôle prédictif à retour d'état à la synchronisation de deux satellites identiques:

4.3.1 Conception du contrôleur prédictif [88]

Considérons le système non linéaire décrit par l'équation dynamique du système maître :

$$\dot{x} = A_1 x + f_1(x) \tag{4.11}$$

Où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ est le vecteur d'état du système à n-dimension,

A_1 est une matrice de dimension $n \times n$ et $f_1 : R^n \rightarrow R^n$ représente la partie non linéaire du système dynamique.

La commande $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T \in R^n$ est ajoutée au système esclave donné par:

$$\dot{y} = A_2 y + f_2(y) + u(t) \tag{4.12}$$

Où $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$ est le vecteur d'état du système esclave à n-dimension, A_2 est une matrice de dimension $n \times n$ et $f_2 : R^n \rightarrow R^n$ représente la partie non linéaire du système esclave.

L'erreur de synchronisation est définie comme suit:

$$e = y - x = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T \in R^n \quad (4.13)$$

En soustrayant le système (4.11) du système (4.12), l'erreur est déterminée par :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_2 y + f_2(y) - A_1 x - f_1(x) + u(t) \\ &= A e + F(x, y) + u(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Où $F(x, y) = f_2(y) - f_1(x) + (A_2 - A_1)x$

Selon la procédure de conception du contrôle prédictif développée dans le paragraphe (3.3), le signal de commande $u(t)$ est déterminé par la différence entre les états prédit et les états actuels:

$$u(t) = K(e_p(t) - e(t)) \quad (4.15)$$

K est le vecteur gain, $e_p(t)$ est l'état prédit du système incontrôlé, $e(t)$ est l'état actuel.

Selon la théorie du contrôle prédictif l'équation (4.15) devient :

$$u(t) = K(\dot{e}(t) - e(t)) \quad (4.16)$$

Par conséquent, le système d'erreur (4.14) est alors réécrit sous la forme :

$$\dot{e} = A e + F(x, y) + K(\dot{e}(t) - e(t)) \quad (4.17)$$

À proximité de e_f , nous pouvons utiliser l'approximation suivante:

$$(\dot{e}(t) - e_f) = A(e(t) - e_f) \quad (4.18)$$

Où $A \in R^{n \times n}$ est la matrice Jacobienne de $f(x(t))$ évaluée au point fixe e_f , qui est défini comme suit :

$$A = D_x f(e_f) = \left. \frac{\partial \dot{e}(t)}{\partial e(t)} \right|_{e_f} \quad (4.19)$$

L'équation (4.18) est réécrite sous la forme :

$$\delta \dot{e}(t) = A \delta e(t) \quad (4.20)$$

Avec

$$\delta e(t) = e(t) - e_f \quad (4.21)$$

Le système contrôlé est linéarisé autour de e_f par :

$$\begin{aligned} \delta \dot{e}(t) &= A \delta e(t) + K(\delta \dot{e}(t) - \delta e(t)) \\ &= A \delta e(t) + K(A \delta e(t) - \delta e(t)) \\ &= (A + K(A - I)) \delta e(t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Où $I \in R^{n \times n}$ est la matrice identité.

Afin d'appliquer la stratégie de contrôle prédictif proposé, nous devons déterminer le vecteur de gain K et le voisinage du point fixe.

K doit satisfaire l'inégalité suivante :

$$\|A + K(A - I)\| < I \quad (4.23)$$

Le voisinage du point fixe est déterminé comme suit :

$$r(t) = |e(t) - e(t-1)| \quad (4.24)$$

Le système de contrôle sera décrit par:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f(x(t)) + u(t) & \text{if } r(t) < \varepsilon \\ f(x(t)) & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.25)$$

Où ε un nombre réel positif assez petit.

4.3.2 Synchronisation de deux satellites par la commande prédictive à retour d'état

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulation de l'application de la commande prédictive à retour d'état pour la synchronisation de deux satellites identiques.

Cas 1 : satellites à comportement non chaotique

Afin de contrôler le système au point d'équilibre instable $[0 \ 0 \ 0]^T$, nous devons déterminer la correction qui sera appliquées à l'état actuel du système. Pour ce faire, nous déterminons la commande $u(t)$ définie par l'équation (4.16).

$$u(t) = \begin{cases} 0 \\ K((\sigma_y y_3 e_1 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 + \varepsilon(1.5 \cos \omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)) - e_2) \\ 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

Le système contrôlé est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \sigma_x y_3 e_2 + \sigma_x y_2 e_3 - \sigma_x e_2 e_3 + \varepsilon(3 \cos \omega_0 t + 1) \\ \dot{e}_2 = \sigma_y y_3 e_1 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 + \varepsilon(1.5 \cos \omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t) + \\ \quad k((\sigma_y y_3 e_1 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 + \varepsilon(1.5 \cos \omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)) - e_2) \\ \dot{e}_3 = \sigma_z y_2 e_1 + \sigma_z y_1 e_2 - \sigma_z e_1 e_2 + \varepsilon(3 \sin \omega_0 t + 1) \end{cases} \quad (4.27)$$

La linéarisation du système autour du point fixe est donné par :

$$\delta \dot{e}_2(t) = \frac{\partial \dot{e}_2(t)}{\partial e_2(t)} \delta e_2(t) \quad (4.28)$$

$$\delta \dot{e}_2(t) = K \delta e_2(t) \quad (4.29)$$

Le gain k doit satisfaire l'inégalité suivante :

$$|K| < 1 \quad (4.30)$$

Ce ci implique que :

$$-1 \langle K \langle 1 \tag{4.31}$$

Et le voisinage du point fixe est donné par :

$$r(t) = |e_2(t) - e_2(t-1)| \tag{4.32}$$

Ainsi, le système de contrôle est décrit par

$$u = \begin{cases} K((\sigma_y y_3 e_1 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 + \varepsilon(1.5 \cos \omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)) - e_2) \\ \quad \text{if } |e_2(t) - e_2(t-1)| < \varepsilon \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{4.33}$$

La figure (4.6) représente les vitesses angulaires synchronisées. Les erreurs de synchronisation tendent vers zéro comme présentées sur la figure (4.7).

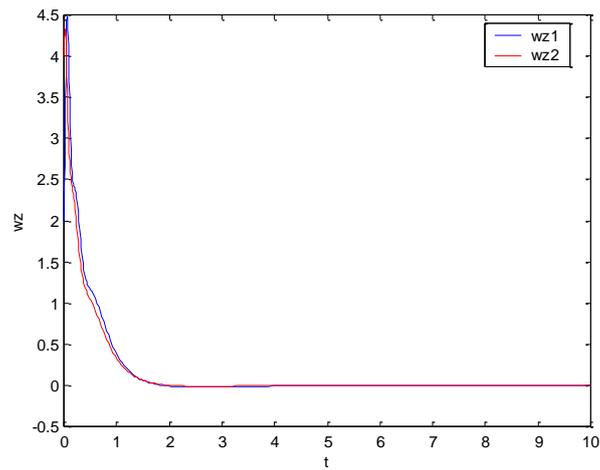
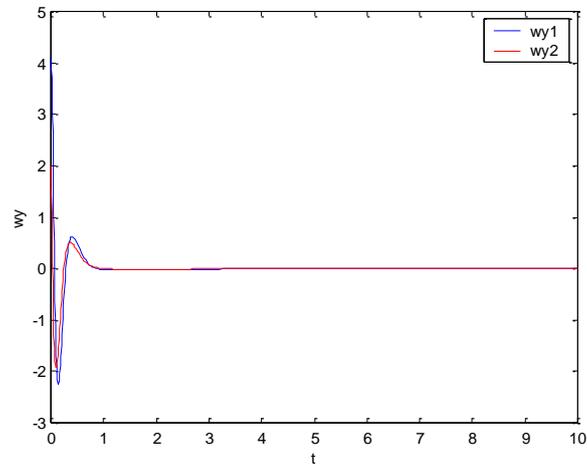
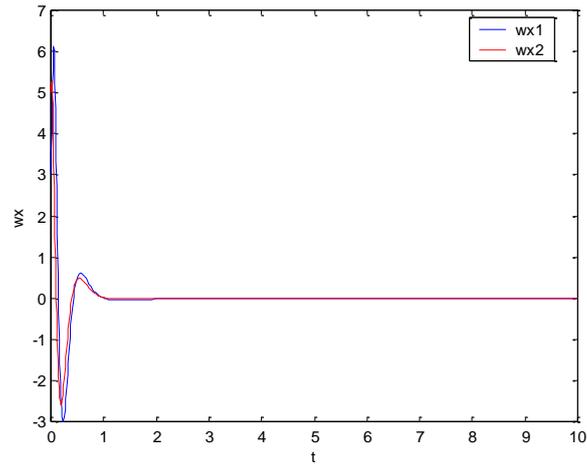


Figure 4.6 Représentation des vitesses angulaires synchronisées

par le contrôle prédictif **cas1**.

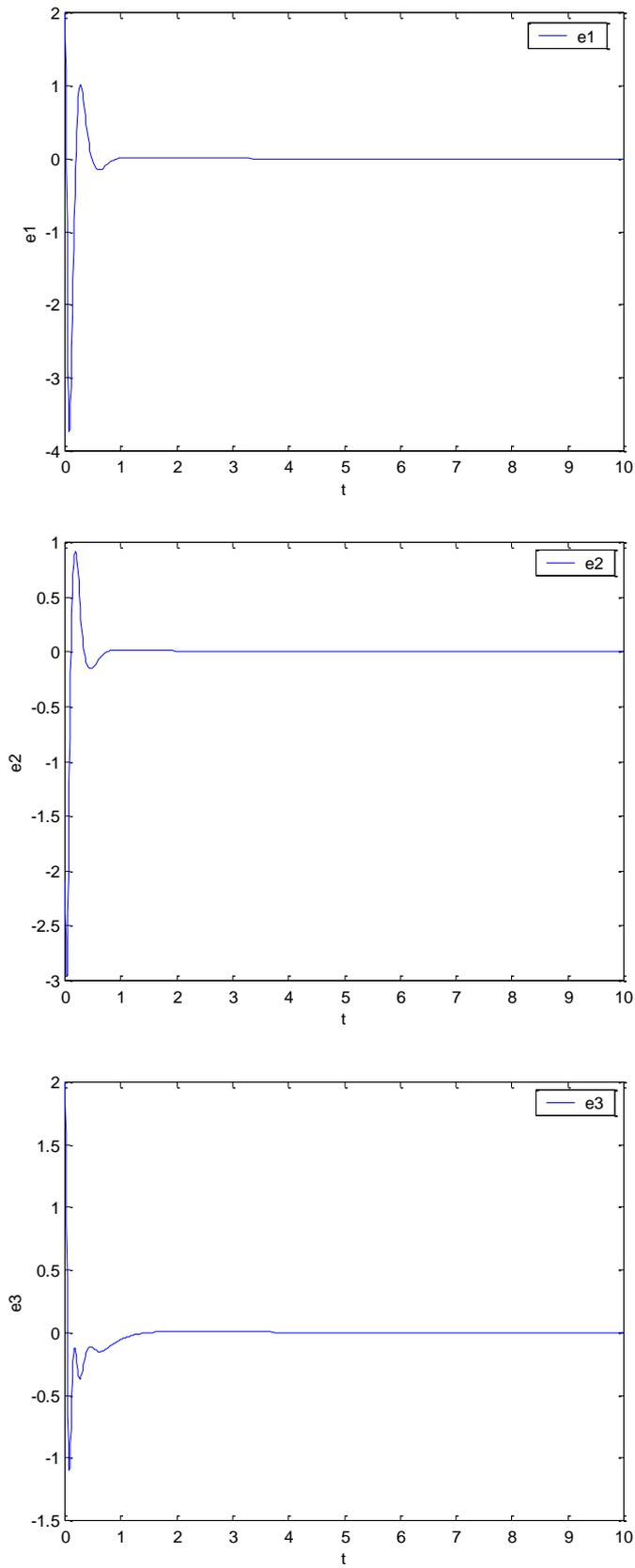


Figure 4.7 Les erreurs de synchronisation : cas1.

Cas 2 satellites à comportement chaotique

Déterminons la commande $u(t)$ définie par l'équation. (4.14).

$$u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ K \left(\left(\sigma_y y_3 e_1 + \frac{0.35}{I_y} e_2 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 \right) - e_2 \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Le système contrôlé est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\frac{1.2}{I_x} e_1 + \sigma_x y_3 e_2 + \left(\sigma_x y_2 + \frac{\sqrt{6}}{2I_x} \right) e_3 - \sigma_x e_2 e_3 \\ \dot{e}_2 = \sigma_y y_3 e_1 + \frac{0.35}{I_y} e_2 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 + K \left(\left(\sigma_y y_3 e_1 + \frac{0.35}{I_y} e_2 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 \right) - e_2 \right) \\ \dot{e}_3 = \left(\sigma_z y_2 - \frac{\sqrt{6}}{I_z} \right) e_1 + \sigma_z y_1 e_2 - \frac{0.4}{I_z} e_3 - \sigma_z e_1 e_2 \end{cases} \quad (4.35)$$

La linéarisation du système autour du point fixe est donné par:

$$\delta \dot{e}_2(t) = \frac{\partial \dot{e}_2(t)}{\partial e_2(t)} \delta e_2(t) \quad (4.36)$$

$$\delta \dot{e}_2(t) = \frac{0.35}{I_y} + K \left(\frac{0.35}{I_y} - 1 \right) \delta e_2(t) \quad (4.37)$$

Le gain k doit satisfaire l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{0.35}{I_y} + K \left(\frac{0.35}{I_y} - 1 \right) \right| < 1 \quad (4.38)$$

Ceci implique que :

$$-1 < K < 1.424 \quad (4.39)$$

Et le voisinage du point fixe est donné par :

$$r(t) = |e_2(t) - e_2(t-1)| \quad (4.40)$$

Ainsi, le système de contrôle est décrit par :

$$u = \begin{cases} K \left(\left(\sigma_y y_3 e_1 + 0.175 e_2 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 \right) - e_2 \right) \\ \quad \text{if } |e_2(t) - e_2(t-1)| < \varepsilon \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.41)$$

Les résultats de simulation sont illustrés en figure (4.8) et (4.9).

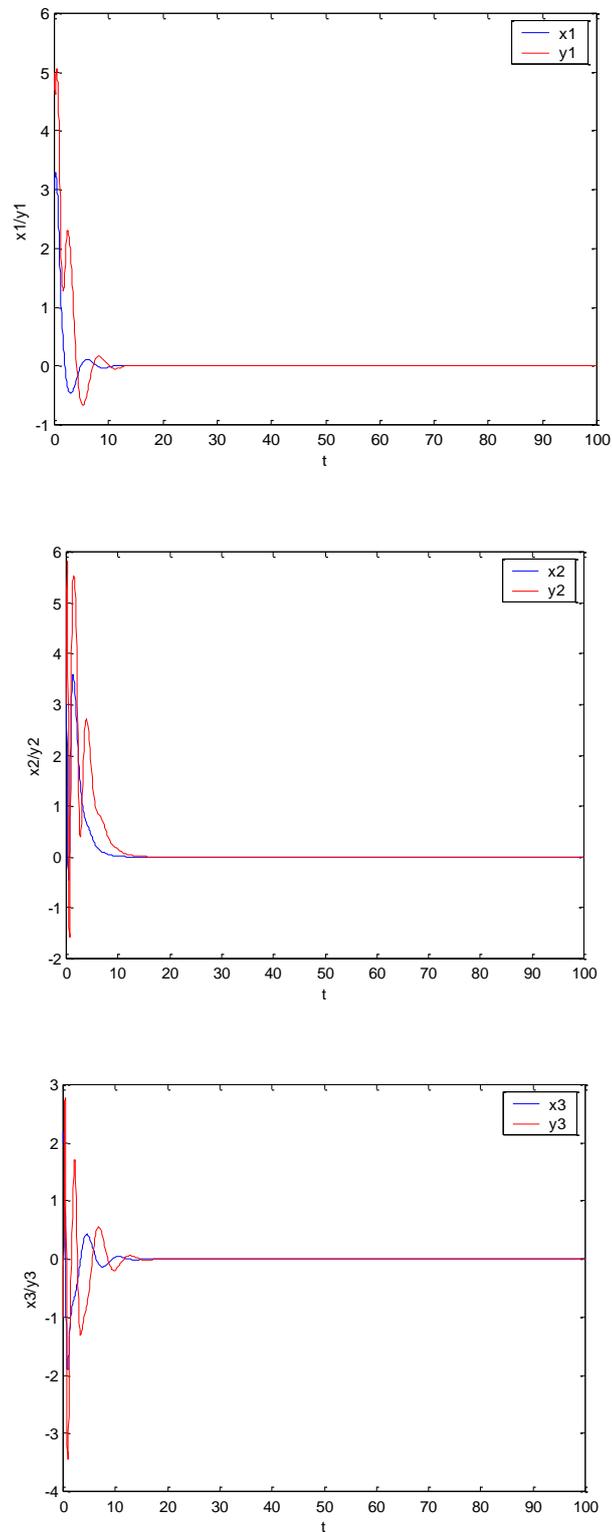


Figure 4.8 Représentation des vitesses angulaires synchronisées par la commande prédictive **cas2**.

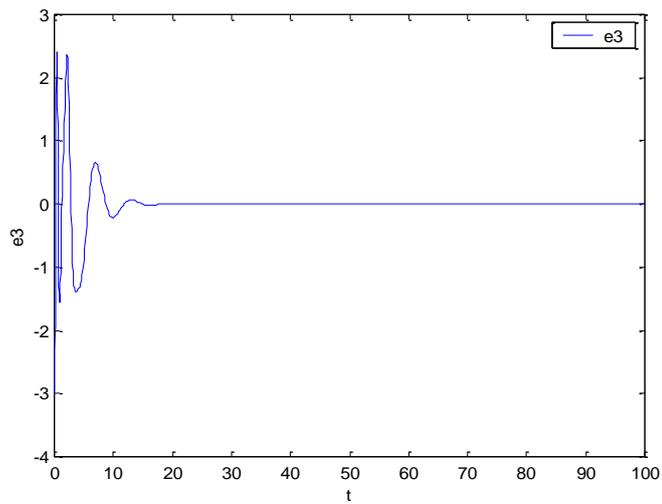
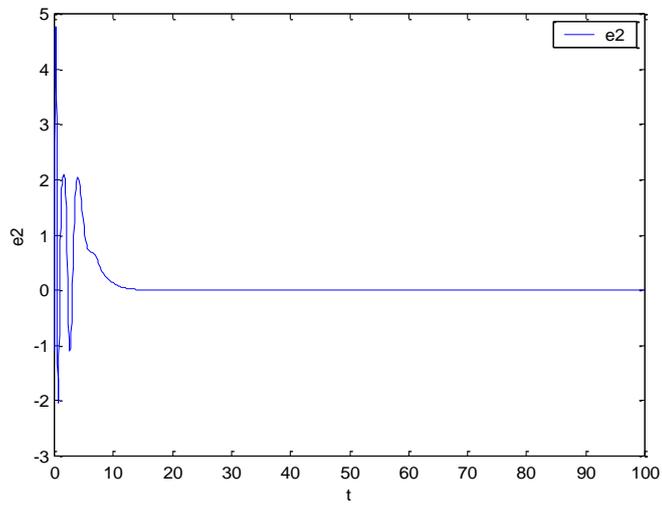
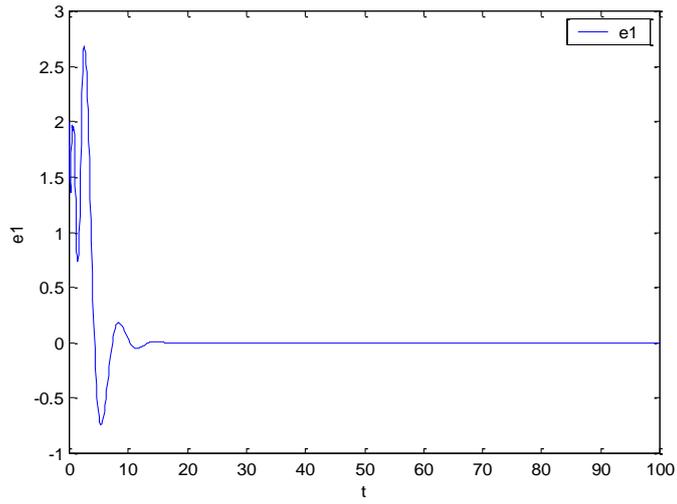


Figure 4.9 Les erreurs de synchronisation cas2.

L'application de la commande prédictive à retour d'état a permis une synchronisation parfaite des deux satellites (figures 4.6); le contrôle des vitesses angulaires est également assurées. Les erreurs de synchronisation tendent rapidement vers zéro.

Dans le cas où les satellites présentent un comportement chaotique l'Esclave met plus de temps à suivre l'évolution du Maître; les erreurs de synchronisation se stabilisent après 15 secondes.

4.4 Application de la commande par mode de glissement active à la synchronisation de deux satellites

4.4.1 Conception du contrôleur par mode de glissement actif

Considérons le système non linéaire décrit par l'équation dynamique suivante :

$$\dot{x} = A_1 x + f_1(x) \quad (4.42)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^3$ désigne le vecteur d'état du système à trois dimensions, $A_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ représente la partie linéaire du système Maître et $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la partie non linéaire du système. L'équation (4.42) représente le système maître. Le contrôleur $u(t) \in \mathbb{R}^3$ est ajouté dans le système esclave, il est donc donné par :

$$\dot{y} = A_2 y + f_2(y) + u(t) \quad (4.43)$$

Où $y(t) \in \mathbb{R}^3$ désigne le vecteur d'état du système à trois dimensions, $A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ représente la partie linéaire du système Esclave et $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la partie non linéaire du système.

L'erreur de synchronisation dynamique peut être déterminée à partir des équations (4.42) et (4.43) comme suit:

$$\dot{e} = A_2 y + f_2(y) - A_1 x + f_1(x) + u(t) \quad (4.44)$$

Le signal de commande $u(t)$ est constitué de deux parties. La première est considérée pour éliminer la partie non linéaire de l'équation (4.44). La seconde partie $H(t)$ agit comme une entrée externe dans (4.44) et est conçu pour stabiliser le système d'erreur.

Conformément à la procédure de conception du contrôle actif [89]-[91], la partie non linéaire de l'erreur dynamique est éliminé par le choix suivant du vecteur $u(t)$:

$$u(t) = H(t) - f_2(y) + f_1(x) - (A_2 - rI)y + (A_1 - rI)x \quad (4.45)$$

Où r est une constante positive et $H(t)$ est déterminé sur la base de la loi du contrôle par mode de glissement [92]. L'erreur dynamique (4.44), est reformulée comme suit:

$$\dot{e} = -re + H(t) \quad (4.46)$$

$H(t)$ choisi sur la base de la loi de commande par mode de glissement :

$$H(t) = K\omega(t) \quad (4.47)$$

Où $K(t) = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]^T$ est le vecteur gain.

$\omega(t) \in \mathbb{R}$ est l'entrée de commande et satisfait :

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega^+(t) & s(e) \geq 0 \\ \omega^-(t) & s(e) < 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

et $s = s(e)$ est la surface de commutation, qui assure la dynamique souhaitée.

En remplaçant (4.47) dans (4.46) on aura :

$$\dot{e} = -re + K\omega(t) \quad (4.49)$$

4.4.2 Conception de la surface de commutation

La surface de glissement peut être définie comme suit:

$$s = Ce \tag{4.50}$$

Où $C = [c_1 \ c_2 \ c_3]$ est un vecteur constant.

De (4.49) et (4.50), on peut trouver que :

$$\dot{s} = C[-re + K\omega(t)] \tag{4.51}$$

Dans la surface de glissement les conditions suivantes doivent être remplies :

$$s(e) = 0, \quad \dot{s}(e) = 0 \tag{4.52}$$

Pour la conception du contrôleur, nous utilisons la règle suivante:

$$\dot{s} = -q \operatorname{sign}(s) - rs \tag{4.53}$$

Où $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe.

Les coefficients $q > 0$ et $r > 0$ sont choisis de tel sorte que le mouvement de glissement soit stable.

A partir de (4.51) et (4.53), l'entrée de commande est déterminé comme suit:

$$\omega(t) = -(CK)^{-1} q \operatorname{sgn}(s) \tag{4.54}$$

en remplaçant la valeur de la commande dans l'équation (4.49) on trouve :

$$\dot{e} = -re - K(CK)^{-1} q \operatorname{sgn}(s) \tag{4.55}$$

Puisque $r > 0$, alors l'erreur du système sera stable (les erreurs seront limitées) si la surface de commutation est bornée.

4.4.3 L'analyse de stabilité

Considérons la fonction de Lyapunov suivante:

$$V = 0.5s^2 \quad (4.56)$$

La dérivée temporelle de (4.56) est :

$$\dot{V} = \dot{s}s = -q \operatorname{sgn}(s) - rs^2 \quad (4.57)$$

Puisque $s \operatorname{sgn}(s) > 0$, $r > 0$ et $q > 0$ nous avons $\dot{V} = \dot{s}s < 0$ d'où $\dot{V}(t)$ est définit négative. Par conséquent, selon le théorème de stabilité de Lyapunov la surface s de commutation est bornée et converge asymptotiquement vers zéro.

Le système d'erreur défini en équation (4.55) est un système linéaire donc ce système est stable. Comme s est asymptotiquement stable, alors la dynamique de l'erreur est aussi asymptotiquement stable à savoir :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow 0 \quad (4.58)$$

4.4.2 Synchronisation de deux satellites par la commande mode de glissement active

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulation de l'application de la commande par mode de glissement active pour la synchronisation de deux satellites identiques.

Cas 1 : satellites à comportement non chaotique

Selon la méthode de conception de la commande par mode de glissement active développée ci-dessus la partie linéaire du système Maître et Esclave est donnée par:

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -0.6 \\ 0.5 & -1 & -0.2 \\ 0.7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Les paramètres de simulation sont choisis comme suit :

$$K = [0 \ 0.001 \ 0]^T, \quad r = 40, \quad q = 0.05;$$

Les résultats de simulation sont représentés sur les figures 4.10 et 4.11.

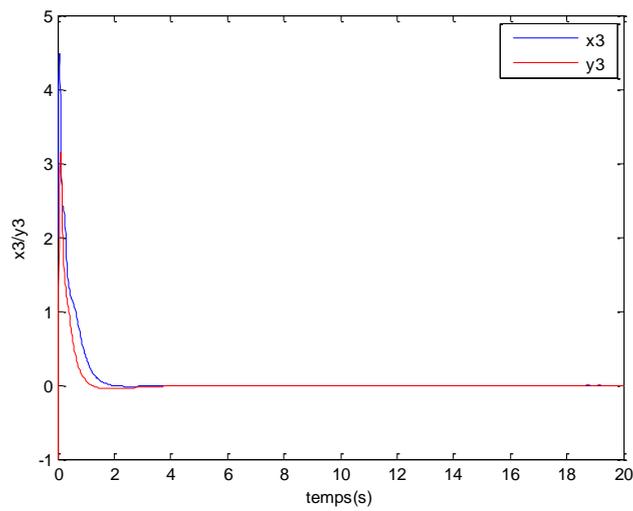
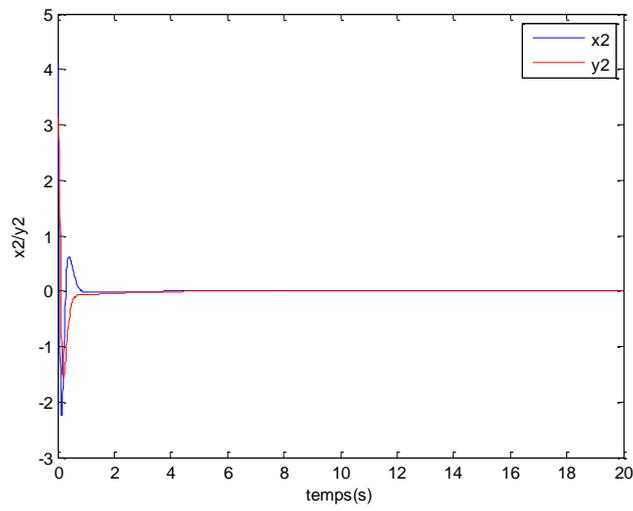
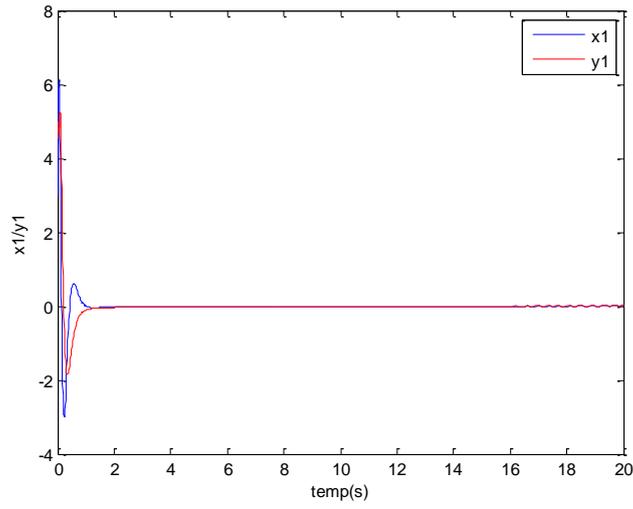


Figure. 4.10. Représentation des vitesses angulaires synchronisées par la commande mode de glissement active : **cas1**.

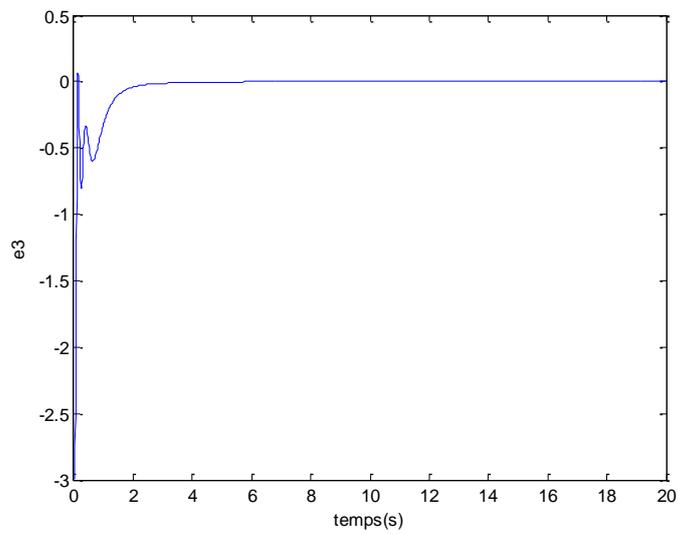
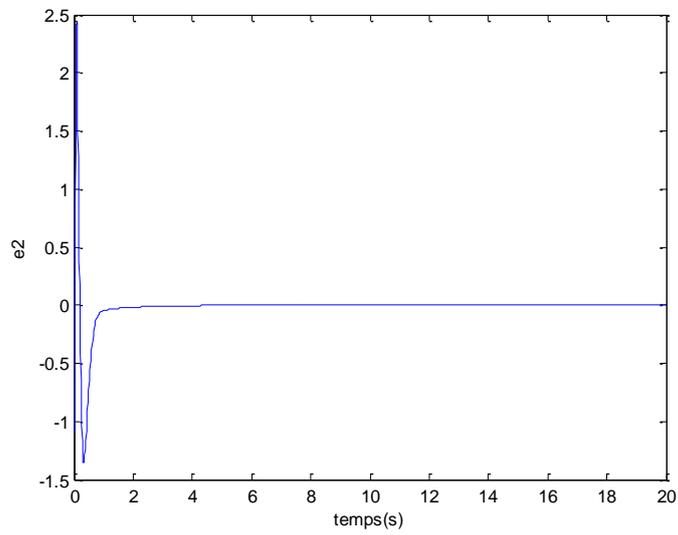
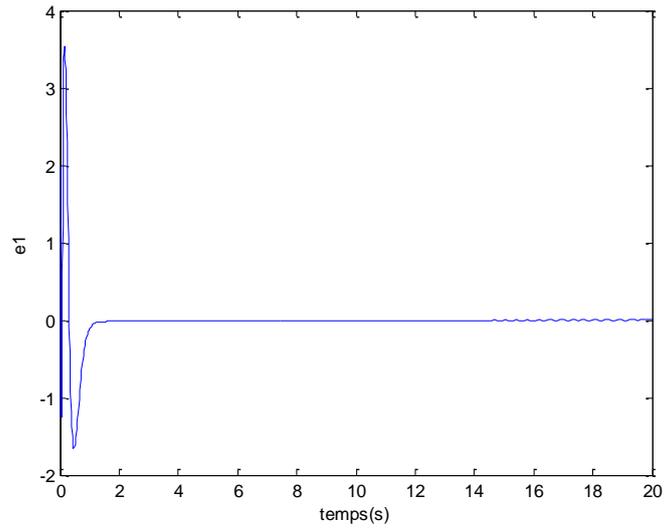


Figure. 4.11 Erreurs de synchronisation : **cas1**.

Cas 2 : satellites à comportement chaotique

Selon la méthode de conception de la commande par mode de glissement active on trouve:

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} -0.4 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0.175 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & -0.4 \end{pmatrix}$$

Nous choisissons les vecteurs de gain $K = [0, 0, 2, 0]^T$. et la surface de glissement $s = [3 \ 2 \ 1]e$ de telle sorte que l'équation d'état du mode glissant soit asymptotiquement stable.

Les autres paramètres de contrôle sont choisis comme suit:

$$r = 0,1; q = 0,01;$$

Les résultats de simulation sont présentés ci-dessous.

La figure (4.12) représente les vitesses angulaires synchronisées. Les erreurs de synchronisation sont représentées sur la figure (4.13).

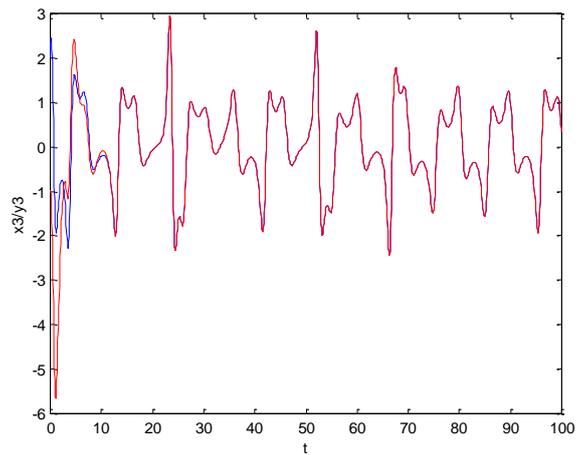
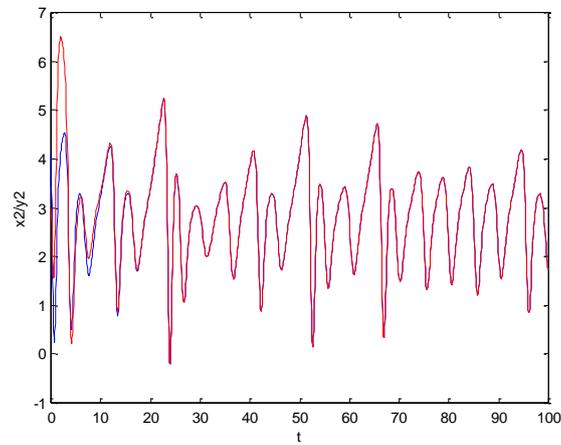
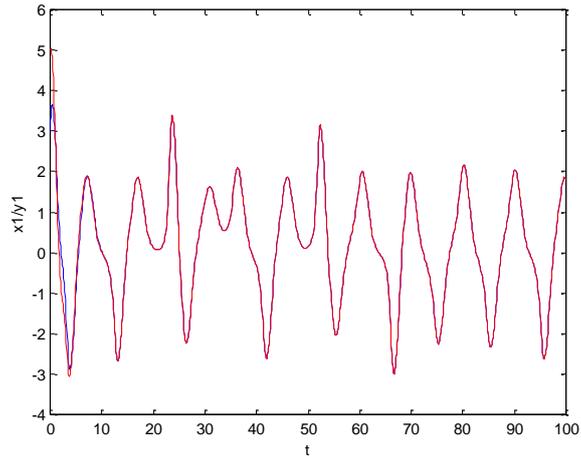


Figure. 4.12. Représentation des vitesses angulaires synchronisées par la commande mode de glissement active **cas2**.

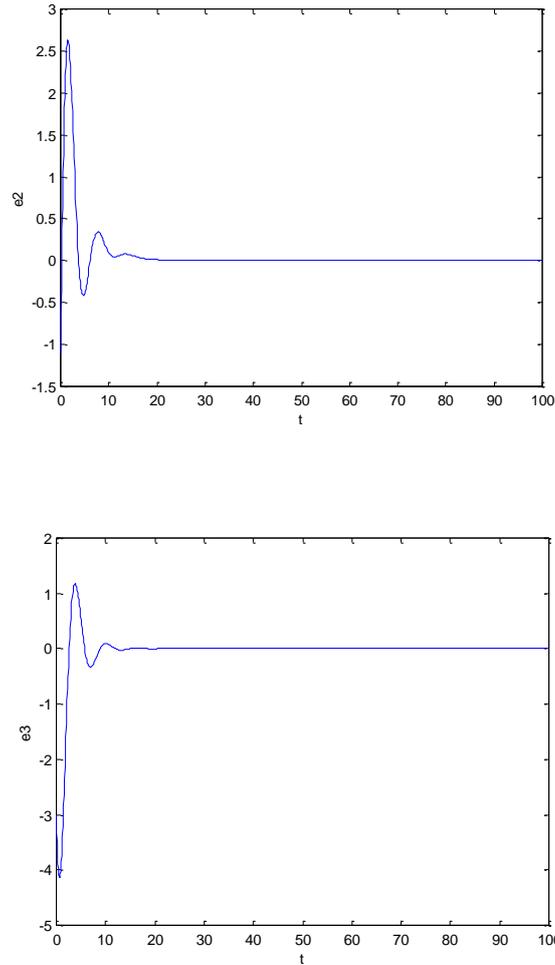


Figure. 4.13 Erreurs de synchronisation **cas2**.

L'application de la commande par mode de glissement active à permis une synchronisations parfaite et rapide des deux systèmes dans les deux cas ; les erreurs de synchronisation tendent de manière rapide vers zéro. La stabilité du système d'erreur sur la surface de glissement dépend des paramètres C et K.

4.5 Application de la commande passive à la synchronisation de deux satellites identiques

Soit le système d'équation défini en (4.9) ; on choisie les valeurs des moments d'inerties comme suit : $I_x= 3 \text{ Kg.m}^2$, $I_y= 2 \text{ Kg.m}^2$, $I_z=1 \text{ Kg.m}^2$.

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -0.4e_1 + \sigma_x y_3 e_2 + \left(\sigma_x y_2 + \frac{\sqrt{6}}{6} \right) e_3 - \sigma_x e_2 e_3 \\ \dot{e}_2 = \sigma_y y_3 e_1 + 0.175e_2 + \sigma_y y_1 e_3 - \sigma_y e_1 e_3 \\ \dot{e}_3 = \left(\sigma_z y_2 - \sqrt{6} \right) e_1 + \sigma_z y_1 e_2 - 0.4e_3 - \sigma_z e_1 e_2 \end{cases} \quad (4.59)$$

On réécrit le système sous la forme passive (équation 3.57) en faisant le changement de variable suivant :

$e_1 = y$, $e_2 = z_1$, $e_3 = z_2$, on obtient:

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.175z_1 + \sigma_y y_1 z_2 \\ \sigma_z y_1 z_1 - 0.4z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_y (y_3 - z_2) \\ (\sigma_z y_2 - \sqrt{6}) - \sigma_z z_1 \end{bmatrix} y \\ \dot{y} = -0.4y + \sigma_x y_3 z_1 + \left(\sigma_x y_2 + \frac{\sqrt{6}}{6} \right) z_2 - \sigma_x z_1 z_2 \end{cases} \quad (4.60)$$

Avec:

$$f(z) = \begin{bmatrix} 0.175z_1 + \sigma_y y_1 z_2 & \sigma_z y_1 z_1 - 0.4z_2 \end{bmatrix}^T, \quad g(z, y) = \begin{bmatrix} \sigma_y (y_3 - z_2) & (\sigma_z (y_2 - z_1) - \sqrt{6}) \end{bmatrix}$$

$$l(z, y) = -0.4y + \sigma_x y_3 z_1 + \left(\sigma_x y_2 + \frac{\sqrt{6}}{6} \right) z_2 - \sigma_x z_1 z_2, \quad k(z, y) = 1$$

Etude de la passivité du système

$$\frac{d}{dt} W(z) = \frac{\partial w(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} W(z) = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2$$

$$\frac{d}{dt} W(z) = 0.175z_1^2 - 0.4z_2^2 + (\sigma_y + \sigma_z) y_1 z_1 z_2 \quad (4.61)$$

D'après l'équation (4.61), $\frac{d}{dt} W(z) \leq 0$ le zéro dynamique est stable au sens de Lyapunov.

La dérivée de la fonction de stockage le long de la trajectoire du système d'erreur de synchronisation est:

$$\frac{d}{dt}V(z, y) = \frac{\partial}{\partial z}W(z)\dot{z} + y\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}V(z, y) = \frac{\partial}{\partial z}W(z)f(z) + \frac{\partial}{\partial z}W(z)g(z, y) + l(z, y)y + k(z, y)yu \quad (4.62)$$

Et on a d'autre part :

$$\frac{d}{dt}W(z) = \frac{d}{dz}W(z)f(z) \leq 0 \quad (4.63)$$

Alors, l'équation (4.62) peut être réécrite sous la forme:

$$\frac{d}{dt}V(z, y) \leq \frac{\partial}{\partial z}W(z)g(z, y)y + (l(z, y) + k(z, y)u)y \quad (4.64)$$

La commande qu'on va appliquer au système esclave peut être calculé comme suit :

$$u = k^{-1}(z, y)[-l^T(z, y) - \frac{\partial W}{\partial z}g(z, y) - \gamma_{12}y + v] \quad (4.65)$$

En remplace les valeurs de $f(z)$, $g(z, y)$, $l(z, y)$ et $k(z, y)$ dans (4.65), on obtient la commande:

$$u = (-\gamma_{12} + 0.4)e_1 - \sigma_x x_3 e_2 - (\sigma_x x_2 + \frac{\sqrt{6}}{6})e_3 - \sigma_x e_2 e_3 \quad (4.66)$$

$$- ((0.175e_2 + \sigma_y x_1 e_3)(\sigma_y x_3 + \sigma_y e_3) - (\sigma_z x_1 e_2 - 0.4e_3)(\sigma_z x_2 - \sqrt{6} + \sigma_z e_2)) + v$$

Où γ_{12} est une constante positive et v est un signal externe qui est en relation avec la sortie de référence du système.

Lorsqu'on remplace (4.66) dans (4.64), on obtient:

$$\frac{dV(z, y)}{dt} \leq -\gamma_{12}y^2 + vy \quad (4.67)$$

L'intégration de (4.67) nous donne :

$$V(z, y) - V(z_0, y_0) \leq \int_0^t -\gamma_{12}y^2(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)y(\tau)d\tau \quad (4.68)$$

Si on pose : $V(z, y) \geq 0$, et $\rho = V(z_0, y_0)$, l'équation (4.68) devient:

$$\int_0^t v(\tau)y(\tau)d\tau + \rho \geq V(z, y) + \int_0^t \gamma_{12}y^2(\tau)d\tau \geq \int_0^t \gamma_{12}y^2(\tau)d\tau \quad (4.69)$$

Cette relation satisfait la définition de la passivité, le système sous contrôle est strictement passif.

4.5.1 Synchronisation de deux satellites par la commande passive

L'application de la commande passive pour la synchronisation de deux satellites identiques, avec

$\gamma_{12} = 14$, nous donne le résultat suivant:

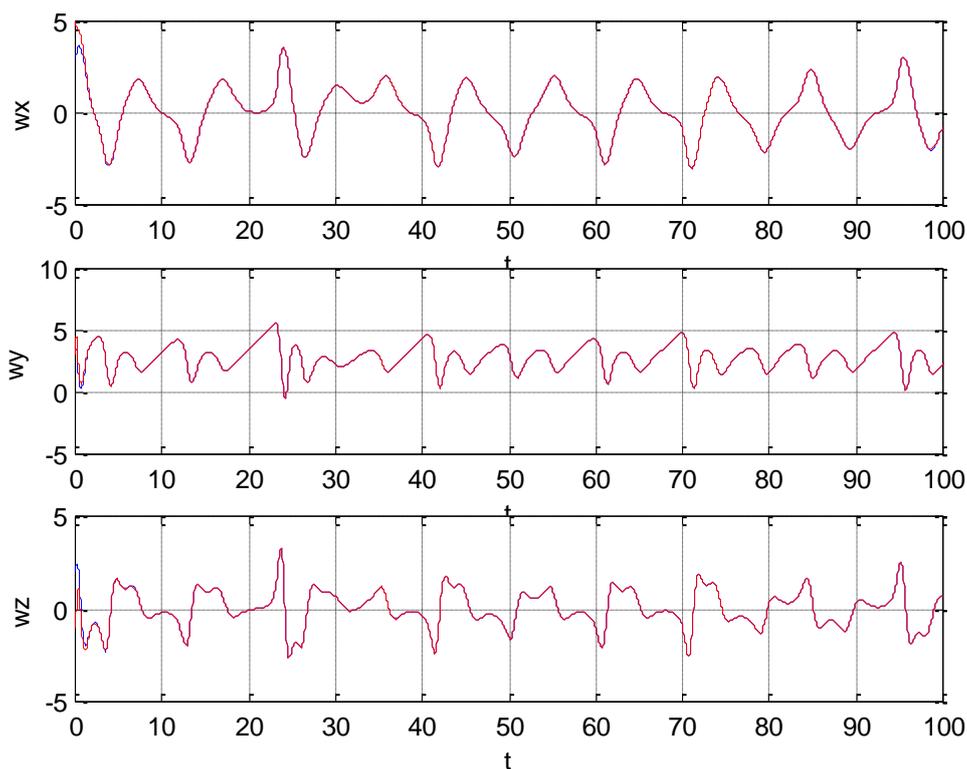


Figure 4.14 Représentation des vitesses angulaires synchronisées par la commande passive pour $\gamma_{12} = 14$.

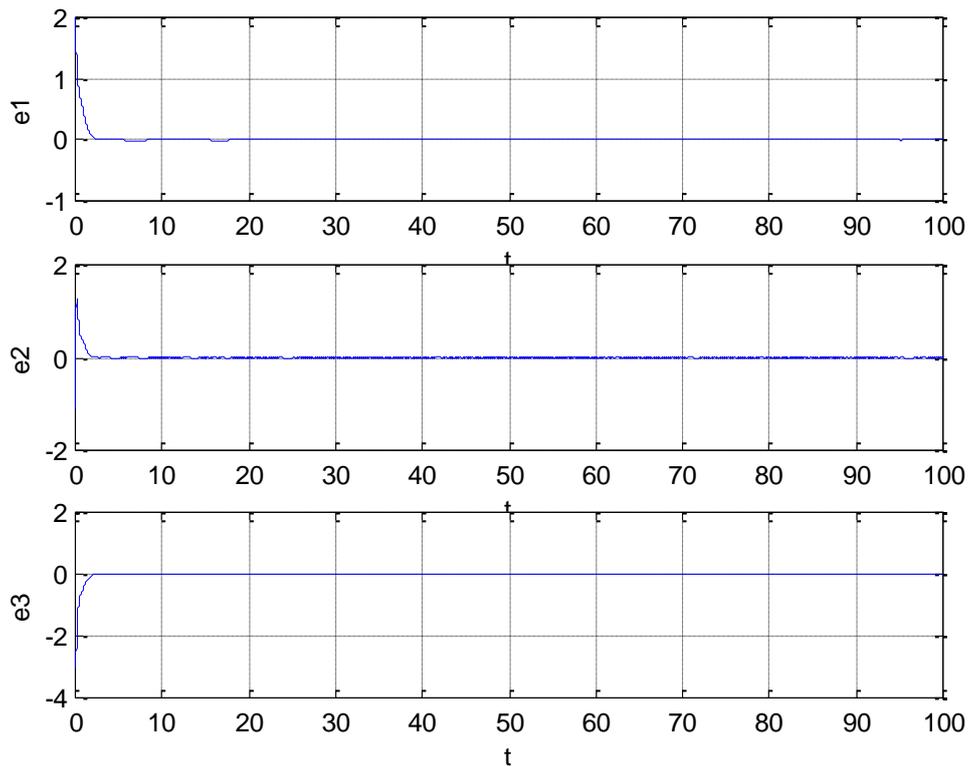


Figure 4.15 Erreurs de synchronisation pour $\gamma_{12} = 14$.

D'après la figure (4.14) on remarque que l'application de la commande passive a permis à l'esclave de suivre parfaitement le maître dans un temps très court, d'où une parfaite synchronisation des deux systèmes. Les erreurs de synchronisations se stabilisent rapidement selon la figure (4.15).

4.5.2 L'influence du coefficient γ_{12}

Afin de voir l'influence du paramètres γ_{12} sur la synchronisation des satellites nous avons effectué plusieurs testes avec des valeurs différente. Les résultats de simulation pour différentes valeurs de γ_{12} sont illustrés en figures (4.16).

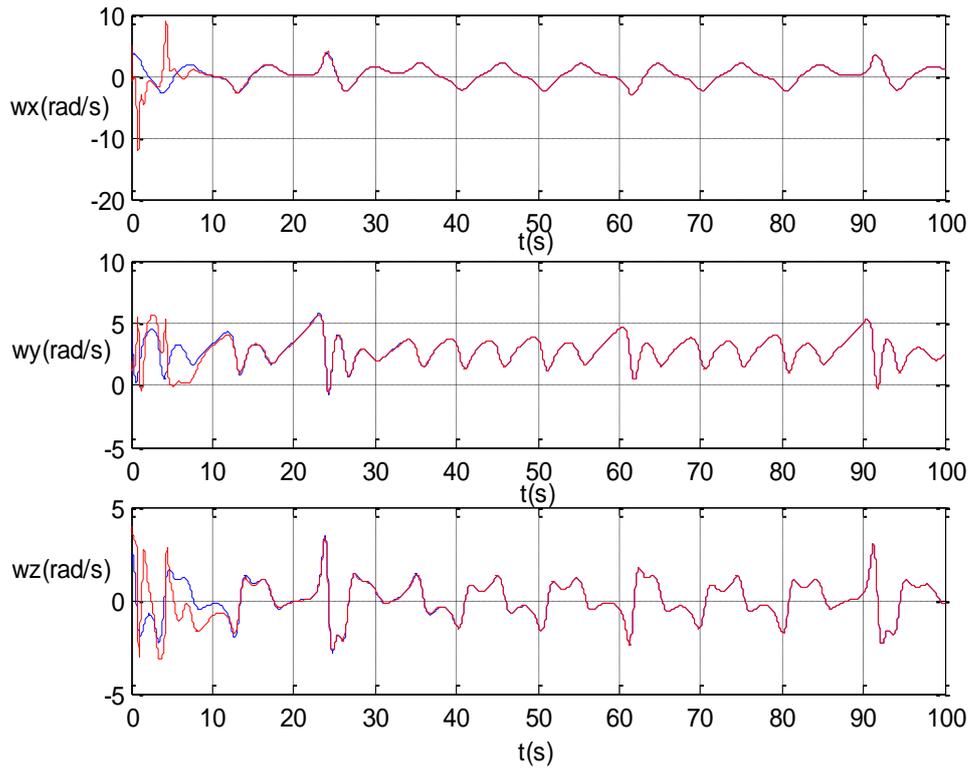


Figure.4.16 Synchronisation des vitesses angulaires des deux systèmes pour $\gamma_{12} = 5$.

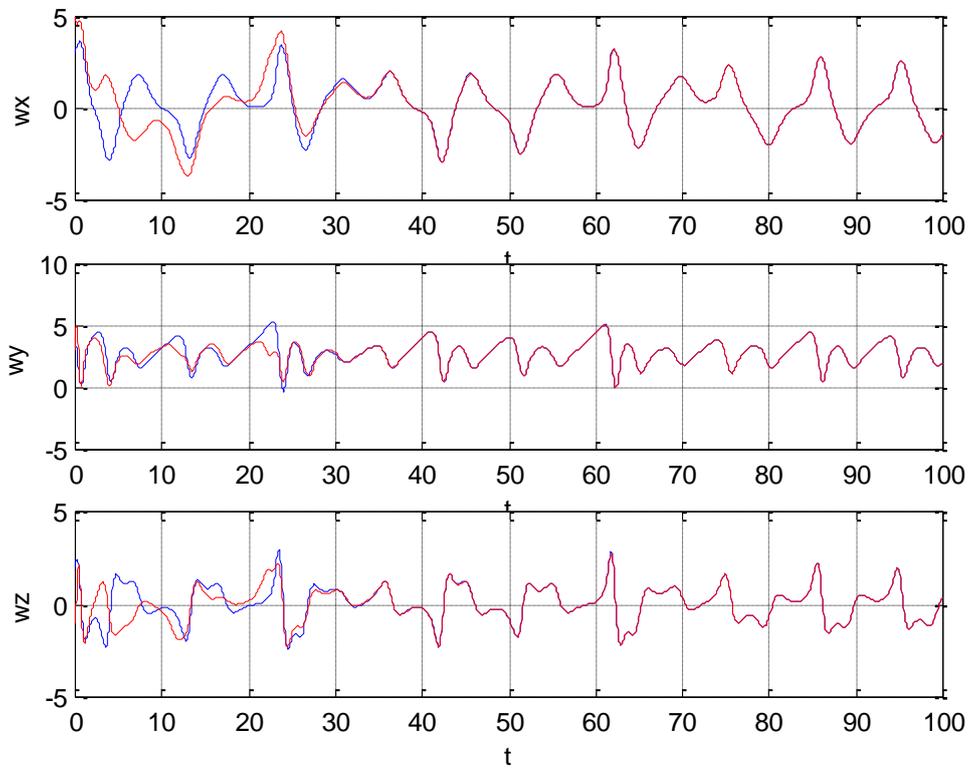


Figure.4.17 Synchronisation des vitesses angulaires pour $\gamma_{12} = 5$.

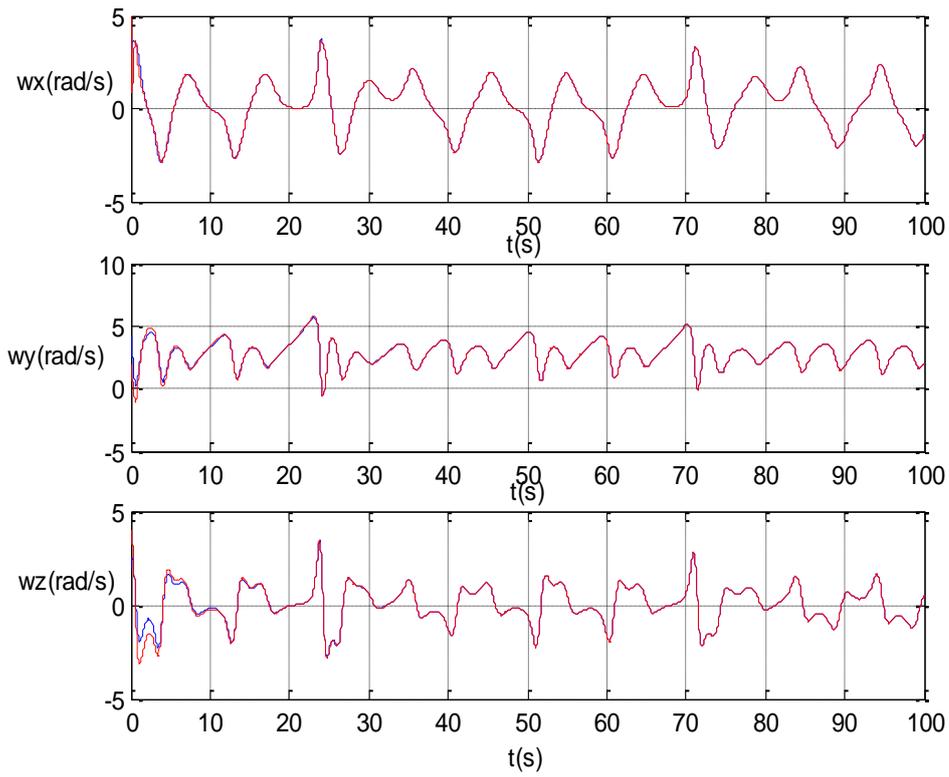


Figure.4.18 Synchronisation des vitesses angulaires des pour $\gamma_{12} = 14$.

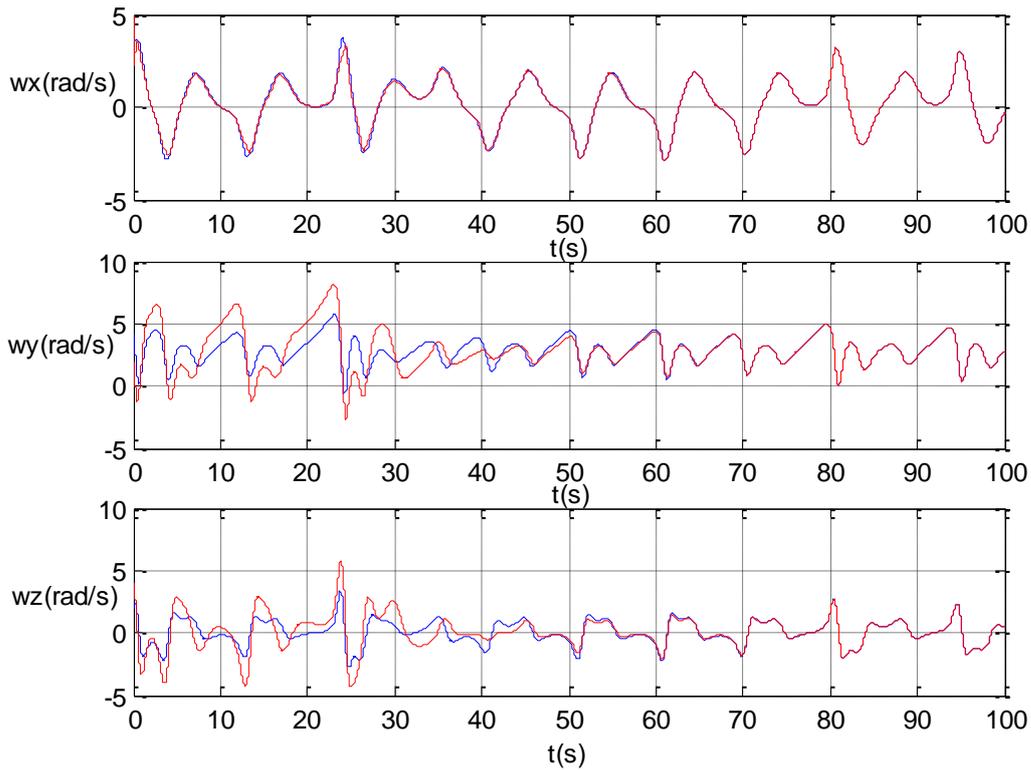


Figure.4.19 Synchronisation des vitesses angulaires pour $\gamma_{12} = 50$.

D'après les figures (4.17), (4.18) et (4.19), on remarque que la valeur de la constante γ_{12} influe sur la vitesse de synchronisation de l'esclave avec le maître, sa valeur optimale est 14, où les deux systèmes se synchronisent rapidement.

Conclusion

Dans cette partie on a traité le problème de la synchronisation des vitesses angulaires de deux satellites sous l'effet des perturbations passagères. Tout au long de cette partie, nous avons en permanence eu le souci de faire coïncider la trajectoire de l'esclave avec celle du maître par l'application d'une commande adéquate. Les trois méthodes étudiées dans le chapitre précédent sont appliquées pour réaliser la synchronisation de deux satellites identiques.

Les résultats de simulation ont montré le succès de la synchronisation de deux satellites par l'application de la commande prédictive ; ce qui montre l'efficacité de la commande.

L'application de la commande par mode de glissement active pour la synchronisation des satellites à comportement chaotiques et non chaotique été bien réussi. On a constaté que la stabilité du système d'erreur sur la surface de glissement dépend des paramètres C et K. Le taux de convergence est ajustable par le paramètre de contrôle r.

Pour la troisième méthode appliquée ; on n'a pu réaliser une synchronisation parfaite des deux systèmes dans les deux cas ; l'influence du paramètres γ_{12} à été également étudié.



CONCLUSION GENERALE

Les travaux développés dans ce mémoire de thèse représentent une contribution à l'étude des satellites soumis à des perturbations. Pour mener à bien sa mission, le satellite doit maintenir son orientation en limitant les écarts à des valeurs inférieures à celles définies pour la mission. Les gyromètres mesurent les vitesses angulaires autour de chaque axe. Lorsque les seuils de tolérance sont dépassés, le calculateur utilise alors le système de propulsion du satellite ou effectue ces corrections en agissant sur des volants d'inertie. Des ordres sont régulièrement transmis depuis le sol pour reconfigurer l'ordinateur de bord et injecter la commande nécessaire pour générer des couples internes. Tout au long de ce travail, nous avons en permanence eu le souci de trouver une loi de commande adéquate pour contrôler l'attitude d'un satellite soumis à des perturbations et assurer la synchronisation entre les satellites maître et esclave.

Nous avons été conduits à scinder l'étude en deux parties : la première, consacrée aux manœuvres de commande des vitesses angulaires et des angles d'attitude, faisant appel aux techniques de trois commandes différentes. La seconde : traite la synchronisation des satellites soumis à des perturbations.

Parmi les apports scientifiques de ce travail est la prise en compte du caractère chaotique du satellite. Le comportement du satellite sous l'effet des perturbations susceptible d'induire un mouvement

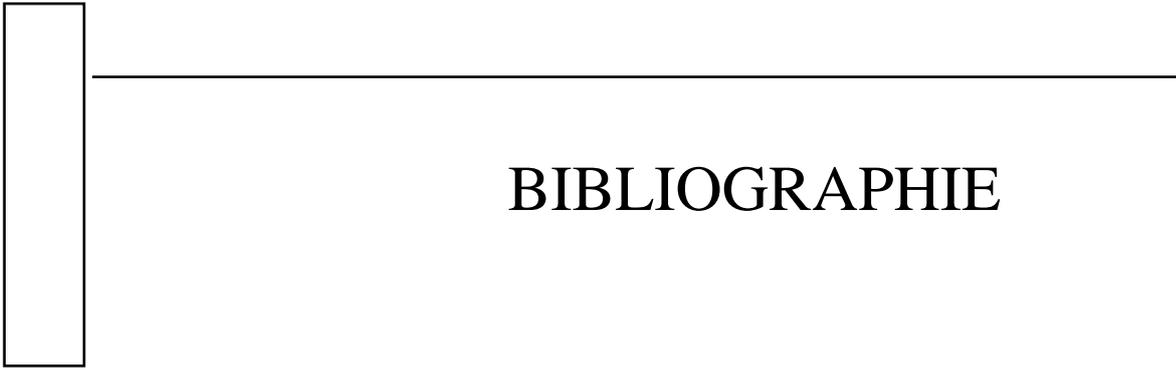
chaotique est discuté au chapitre 2. Après avoir établi les équations dynamiques du mouvement, et afin de contrôler le système au point d'équilibre, nous avons défini des stratégies de commande de trois techniques modernes. La première est le contrôle prédictif à retour d'état qui est une combinaison du contrôle prédictif et du contrôle par retour d'état ; l'application de cette technique pour le contrôle du système à trois et six dimensions respectivement a montré son efficacité, le contrôleur est facile à mettre en œuvre, les vitesses angulaires tendent rapidement vers l'origine ce qui garantit une stabilité rapide du satellite. La deuxième technique proposée est la commande par mode de glissement active basé sur la commande par mode de glissement en combinaison avec la commande active, l'application de cette technique a permis le contrôle des vitesses angulaires et des angles d'attitude des satellites étudiés. Les résultats sont prouvés par simulation. La dernière technique appliquée est la commande passive; Nous avons montré que la loi de commande proposée stabilise globalement en attitude le satellite. Les résultats obtenus montrent la performance de la commande par rapport au temps de réponse et suivi de trajectoires.

Bien que le problème du mouvement chaotique a été supprimé. Les résultats obtenus, montrent bien que le problème du contrôle des satellites à comportement chaotique, n'est pas aisé. En conclusion Nous avons montré que les lois de commande proposées stabilisent globalement en attitude le satellite dans les deux cas.

La deuxième partie de ce travail traite le problème de la synchronisation de deux satellites identiques. L'objectif est de forcer la trajectoire de l'esclave à suivre celle du maître par l'application d'une loi de commande qui anime les erreurs de suivi asymptotiquement vers zéro. Deux cas sont étudiés : cas où les perturbations appliquées au satellite n'induisent pas un comportement chaotique et cas où les perturbations sont choisies de telle sorte qu'on peut induire le mouvement chaotique du satellite. Les trois lois de commande étudiées précédemment sont appliquées pour réaliser la synchronisation des vitesses angulaires de deux satellites identiques.

Les résultats de simulation ont montré le succès de la synchronisation par l'application de la commande prédictive à retour d'état dans les deux cas. Les erreurs de synchronisation tendent rapidement vers zéro. D'un autre côté on a pu réaliser une synchronisation parfaite des deux systèmes par l'application de la commande par mode de glissement active. On a constaté que la stabilité du système d'erreur sur la surface de glissement dépend des paramètres C et K, le taux de convergence est ajustable par le paramètre de contrôle r. La commande passive à également assurée la synchronisation entre le maître et l'esclave. Afin de voir l'influence du paramètres γ_{12} sur la synchronisation des satellites plusieurs tests sont effectuées avec des valeurs différentes. On a constaté que la valeur de la constante γ_{12} influe sur la vitesse de synchronisation de l'esclave avec le maître.

Et comme perspective d'avenir nous proposons de mettre en œuvre les contrôleurs étudiés dans ce travail en introduisant un observateur dans la boucle de commande, de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres de commande et enfin de réaliser une synchronisation qui repose sur un couplage mutuel entre deux systèmes.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jean-Marc Piéplu, *GPS et Galliléo Systèmes de navigation par satellites*, Groupe Eyrolles 2006, ISBN : 2-212-11947-X.
- [2] Dennis Roddy. *Satellite communications*. Mc Graw Hill Telecommunications companies. 2001.
- [3] Djaouida Sadaoui, « *Etude de la fiabilité des satellites en poste* », *thèse de Magister* Université de JIJEL 2004.
- [4] Long-Life Show, Jyh-Ching Juang, and Ying-Wen Jan, *An LMI-Based Nonlinear Attitude Control Approach*, IEEE transactions on control systems technology, vol. 11, no. 1, january 2003.
- [5] Insu chang Sang-young park Kyu-hong choi “Nonlinear Attitude Control of a Tether-Connected Multi-Satellite in Three-Dimensional Space.
- [6] Raymond Kristiansen, Per Johan Nicklasson, and Jan Tommy Gravdahl, “Satellite Attitude Control by Quaternion-Based Backstepping”, IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, VOL. 17, NO. 1, JANUARY 2009 227.
- [7] Marco Lovera, Eliana De Marchi, and Sergio Bittanti ,Periodic Attitude Control Techniques for Small Satellites With Magnetic, IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, VOL. 10, NO. 1, JANUARY 2002
- [8] Y.W. Jan, J.C. Chiou, Minimum-time spacecraft maneuver using sliding-mode control, Acta Astronautica 54 (2003) 69 – 75
- [9] Hyochoong Bang, Cheol-Keun H, Jin Hyoung Kim, *Flexible spacecraft attitude maneuver by application of sliding mode control*, Acta Astronautica 57 (2005) 841 – 850

- [10] Egeland and J.-M. Godhavn, "Passivity-Based Adaptive Attitude Control of a Rigid Spacecraft", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, N^o. 4, April 1994.
- [11] Sahjendra n. Singh, Woosoon yim, "Nonlinear Adaptive Spacecraft Attitude Control using Solar Radiation Pressure", IEEE transactions on aerospace and electronic systems vol. 41, no. 3 July 2005.
- [12] H. BOLANDI B. G. VAGHEI, "Stable Supervisory-Adaptive Controller for Spinning Satellite using Only Magnetorquers", IEEE TRANSACTIONS ON AEROSPACE AND ELECTRONIC SYSTEMS VOL. 45, NO. 1 JANUARY 2009.
- [13] Yuji Igarashi, Takeshi Hatanaka, Masayuki Fujita, and MarkW. Spong, Passivity-Based Attitude Synchronization in SE(3) ,IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, VOL. 17, NO. 5, SEPTEMBER 2009 1119
- [14] Alain Sarlette, Rodolphe Sepulchre, Naomi Ehrich Leonard, Autonomous rigid body attitude synchronization, Automatica (2009) 572_577
- [15] Abdelkader Abdessameud, Abdelhamid Tayebi, Attitude Synchronization of a Group of Spacecraft Without Velocity Measurements, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 54, NO. 11, NOVEMBER 2009
- [16] Wei Ren, Distributed Cooperative Attitude Synchronization and Tracking for Multiple Rigid Bodies, IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, VOL. 18, NO. 2, MARCH 2010.
- [17] Bing-Long Cong, Xiang-DongLiu, ZhenChen. Distributed attitude synchronization of formation flying via consensus-based virtual structure. Acta Astronautica (2010), doi:10.1016/j.actaastro.2010.11.014.
- [18] L. M. Pecora and T. L. Carroll. "Synchronization in chaotic systems," Phys. Rev. Lett. 64, 821 (1990).
- [19] Kevin M. Cuomo, Alan V. Oppenheim, and Steven H. Strogatz, Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS-11: ANALOG AND DIGITAL SIGNAL PROCESSING, VOL. 40, NO. 10, OCTOBER 1993.

- [20] P. Pavana Kumar, R. Parimelalagan, and B. Ramaswami, A Microprocessor-Based DC Drive Control Scheme Using Predictive Synchronization, IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 40, NO. 4, AUGUST 1993.
- [21] Alexander Volkovskii, Synchronization of Chaotic Systems Using Phase Control, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS, VOL. 44, NO. 10, OCTOBER 1997.
- [22] Tao Yang, and Leon O. Chua, Impulsive Stabilization for Control and Synchronization of Chaotic Systems: Theory and Application to Secure Communication. IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS, VOL. 44, NO. 10, OCTOBER 1997.
- [23] Zhiwen Zhu, Henry Leung, *Member, IEEE*, and Zhen Ding Optimal Synchronization of Chaotic Systems in Noise, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS, VOL. 46, NO. 11, NOVEMBER 1999.
- [24] Gilles Millerioux and Jamal Daafouz, Input Independent Chaos Synchronization of Switched Systems, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 49, NO. 7, JULY 2004.
- [25] H. K. Lam, Lakmal D. Seneviratne, Chaotic Synchronization Using Sampled-Data Fuzzy Controller Based on Fuzzy-Model-Based Approach, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—I: REGULAR PAPERS, VOL. 55, NO. 3, APRIL 2008.
- [26] H. K. Lam, Wing-Kuen Ling, Herbert Ho-Ching Iu, and Steve S. H. Ling, Synchronization of Chaotic Systems Using Time-Delayed Fuzzy State-Feedback Controller, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—I: REGULAR PAPERS, VOL. 55, NO. 3, APRIL 2008 893.
-
 2 [27] Michel Capderou, Satellites : de Kepler au GPS, ISBN -13 :978-2-287-99049-6 Springer Verlag France, Paris, 2012

- [28] D. H. Titterton and J.L. Weston. « *Strapdown inertial navigation technology* ». IEE, Radar,Sonar,Navigation and Avionics series5 ISBN 0 86341 260 2, 1997.
- [29] Djaouida Sadaoui, Nadjim Merabtine and Malek Benslama « *Satellite attitude control by quaternion* », Fourth International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices Volume I

: Conference on Systems Analysis & Automatic Control, March 19-22, 2007 – Hammamet, Tunisia.

[30] James Diebel *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors*, Stanford University Stanford, California 94301-9010, 5 October 2006.

.....
3 [31] William.S.Levine, « *control system applications*», Hardcover – December 27, 1999, Boca Raton New York, ISBN 0-8493-0054-L 2000 by CRC press
.....

[32] Dj. Sadaoui, N. Merabtine, A.Benslama, M. Benslama, *Impact of Heavy Ions Singular Effects on Electronic Components Embarked in a Spatial Environment*, Georgian Electronic Scientific Journal: Physics 2009 N°1(1).

[33] Hans Mark. Encyclopedia of space science and technology. A John Wiley & Sons, Inc., Publication.2003.

[34] N. Merabtine, M. Benslama, A. Benslama, Dj. Sadaoui, « *Radiation effects on electronic circuits in a spatial environment*», Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. 2004. V. 7, N 4. P. 395-399.

[35] Maciej J. Ogorzalek, Taming Chaos: Part II-Control, IEEE transactions on circuits and systems-I: fundamental theory and applications. Vol. 40, no. 10, october 1993

[36] B. R. Andrievskii and A. L. Fradkov, *Control of Chaos: Methods and Applications.I. Methods*, Automation and Remote Control, Vol. 64, No. 5, 2003, pp. 673-713.

[37] Y. Yu, S. Zhang, Controlling uncertain Lu system using backstepping design. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 15, pp. 897–902, 2003.

[38] Kuang, J., & Tan, S. H. (2000). Chaotic attitude motion of satellites under small perturbation torques. *Journal of Sound and Vibration*, 235(2), 175–200.

[39] Kong, L.-Y, Zhou, F.-Q., & Zou, J. (2006). The control of chaotic attitude motion of a perturbed spacecraft. In Proceedings of the 25th Chinese control conference, 7–11 August, 2006, Harbin, Heilongjiang.

[40] T. Yang, L. Yang, C. Yang, Impulsive control of Lorenz system, *Physica D*, vol. 10, pp.18–24, 1997.

[41] Robert Guiziou, *Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite Volume I – Théories mécaniques*. Dess Air & Espace. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille I, 2001.

- [42] CNES. Techniques Et Technologies Des Véhicules Spatiaux. Volume 3 : Plate Forme.
- [43] Marc Reynier, *Stabilisation de satellites géostationnaires configuration redondante de roues à inerties Commande par calculateur numérique embarqué*, Thèse de doctorat-Ingénieur de l'université Paul Sabatier de Toulouse, 1974.
- [44] Isam Maurice Achkar, *Application de la commande optimale au contrôle d'attitude des satellites par magnétocoupleurs*, Thèse de docteur Ingénieur de l'école nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, spécialité Automatique, 1985.
- [45] Ola-Erik Fjellstad and Thor I. Fossen. Position and Attitude Tracking of AUV's: A Quaternion Feedback Approach. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 19, N°. 4, October 1994.
- [46] Abdelhamid Tayebi, Unit Quaternion-Based Output Feedback for the Attitude Tracking Problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 6, July 2008.
- [47] O.Egeland and J.-M. Godhavn, Passivity-Based Adaptive Attitude Control of a Rigid Spacecraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 4, April 1994.
- [48] Ralph Bach and Russell Paielli Linearization of Attitude-Control Error Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 10, October 1993.
- [49] D. Fragopoulos and M. Innocenti, Stability considerations in quaternion attitude control using discontinuous Lyapunov functions *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, Vol. 151, No. 3, May 2004.
- [50] Show, L.-L., Juang, J.-C., & Jan, Y.-W. An LMI-based nonlinear attitude control approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 11(1), 73.
- [51] JINLU KUANG and SOONHIE TAN. GPS-based attitude determination of gyrostatt satellite by quaternion estimation algorithms. *Acta Astronautica* Vol. 51, No. 11, pp. 743–759, 2002
- [52] Carsten Clernen. New method for on-orbit-determination of parameters for guidance, navigation and control. *Acta Astronautica* Vol. 5 I, No. 1-9, pp. 457-465. 2002.
- [53] Pavel M.Trivailo, FangWang, Honghua Zhang. Optimal attitude control of an accompanying satellite rotating around the space station. *Acta Astronautica* 64 (2009) 89–94.
- [54] Tsui, A. P. M., & Jones, A. J. (2000). The control of higher dimensional chaos:

Comparative results for the chaotic satellite attitude control problem. *Physica D*,
135, 41–62.

- [55] Ghizlane HAFIDI, *Application de la commande prédictive non-linéaire à la commande de culture de bactéries Escherichia coli*, Thèse de doctorat en physique, Université Paris-Sud11, 2008.
- [56] Toshimitsu Ushio, Shigeru Yamamoto (1999). Prediction-based control of chaos : *Physics Letters A* 264 _1999. 30–35
- [57] Ushio, T., and Yamamoto, S. Prediction-based control of chaos. *Physics Letters A*, 264, 30–35.1999
- [58] Boukabou, A., Chebbah, A., & Mansouri, N. Predictive control of continuous chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **18 (2)**, 587–592. 2008.
- [59] Abdelkrim Boukabou. Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches. Thèse de Doctorat de l'université de Constantine spécialité Electronique. Juin 2006.
- [60] Hunsreindi Buler, *Réglage par mode de Glissement*, traité d'électricité, Presses Polytechniques Romandes, ISBN 2 88074-108-4,1986.
- [61] V.I. Utkin, *Variable structure systems with sliding modes*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 22, no 2, pp. 212-222, 1977.
- [62] Hyochoong Bang, Cheol-Keun Hab, Jin Hyoung KimcFlexible spacecraft attitude maneuver by application of sliding mode control. *Acta Astronautica* 57 (2005) 841 – 850
- [63] Mohammed Chakib SOSSE ALAOUI, *Commande et Observateur par Modes glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur*, Thèse de doctorat en Automatique et analyse des systèmes, spécialité : Signaux-Systèmes et Informatique, université sidi Mohammed ben Abdallah Faculté des sciences Dhar el Mehraz Fes, 2009.
- [64] Youming Lei, Wei Xu, Jianwei Shen, Tong Fang, *Global synchronisation of two parametrically excited systems using active control*, *Chaos, Solitons and Fractals* 28 (2006) 428–436.

- [65] Li Sun, Jiang Wang, Bin Deng, *Global synchronization of two Ghostbuster neurons via active control*, Chaos, Solitons and Fractals 40 (2009) 1213–1220
- [66] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri, *Determination of active sliding mode controller parameters in synchronizing different chaotic systems*, Chaos, Solitons and Fractals 32 (2007) 583–591.
- [67] Meisam Yahyazadeh, Abolfazl Ranjbar Noei, Reza Ghaderi, *Synchronization of chaotic systems with known and unknown parameters using a modified active sliding mode control*, ISA Transactions doi:10.1016/j.isatra.2010.10.009.
- [68] Mohammad Haeri, Mohammad Saleh Tavazoei, Majid Reza Naseh, *Synchronization of uncertain chaotic systems using active sliding mode control*, Chaos, Solitons and Fractals 33 (2007) 1230–1239.
- [69] Mohammad Haeri, Amir Abbas Emadzadeh. Synchronizing different chaotic systems using active sliding mode control. Chaos, Solitons and Fractals 31 (2007) 119–129.
- [70] Mohammad Haeri, Mohammad Saleh Tavazoei, Majid Reza Naseh. Synchronization of uncertain chaotic systems using active sliding mode control. Chaos, Solitons and Fractals 33 (2007) 1230–1239.
- [71] Majid Reza Naseh, Mohammad Haeri. Robustness and robust stability of the active sliding mode synchronization. Chaos, Solitons and Fractals 39 (2009) 196–203.
- [72] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri. Determination of active sliding mode controller parameters in synchronizing different chaotic systems. Chaos, Solitons and Fractals 32 (2007) 583–591.
- [73] Christopher I. Byrnes, Alberto Isidori, and Jan C. Willems, *Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, NO. 11, NOVEMBER 1991.
- [74] D.H. Ji , J.H. Koo, S.C. Won, S.M. Lee, Ju H. Park, *Passivity-based control for Hopfield neural networks using convex representation*, Applied Mathematics and Computation 217 (2011) 6168–6175.
- [75] Faqiang Wang, Chongxin Liu, *Synchronization of unified chaotic system based on passive control*, Physica D 225 (2007) 55–60.

- [76] A. YU. Pogromsky, *Passivity based design of Synchronizing systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 2 (1998) 295-319.
- [77] Jie Bao and Peter L. Lee. Process Control : The Passive Systems Approach (Advances in industrial control). ISBN-13: 9781846288920. Springer-Verlag London Limited 2007.
- [78] Xiangrong Chen, Chongxin Liu, *Passive control on a unified chaotic system*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 (2010) 683-687.
- [79] Leipo Liu, Zhengzhi Hana, Wenlin Li. Non-fragile observer-based passive control for uncertain time delay systems subjected to input nonlinearity. Nonlinear Analysis 73 (2010) 2603-2610.
- [80] Bao Tong Cui, Mingang Hua. Observer-based passive control of linear time-delay systems with parametric uncertainty. Chaos, Solitons and Fractals 32 (2007) 160–167.
- [81] D.H. Ji, J.H. Koo, S.C. Wonb, S.M. Lee Ju H. Park. Passivity-based control for Hopfield neural networks using convex representation. Applied Mathematics and Computation 217 (2011) 6168–6175.
- [82] Wen Yu, *Passive Equivalence of Chaos in Lorenz System*, IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications, vol. 46, no. 7, JULY 1999.
- [83] Jee-Hwan Ryu, Carsten Preusche, Blake Hannaford, and Gerd Hirzinger. Time Domain Passivity Control With Reference Energy Following. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 13, N°. 5, September 2005 737.
- [84] Jing Yao, Hua O. Wang, Zhi-Hong Guan, Weisheng Xu, *Passive stability and synchronization of complex spatio-temporal switching networks with time delays*, Automatica 45 (2009) 1721_1728.
- [85] Panagiotis Tsiotras. Further Passivity Results for the Attitude Control Problem. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 43, N° 11, November 1998 1597.
- [86] GATARE GAHANGARA Ignace. Polarization Switching, Locking and Synchronization in VCSELs with Optical Injection. PHD thesis, Paul Verlaine University Metz, France. 2008
- [87] L. M. Pecora and T. L. Carroll. “Synchronization in chaotic systems,”.Phys. Rev. Lett. 64, 821 (1990).

- [88] Djaouida Sadaoui, Abdelkrim Boukabou, Nadjim Merabtine and Malek Benslama. Predictive synchronization of chaotic satellites systems. *Expert Systems with Applications* 38 (2011) 9041–9045.
- [89] Shengzhi Du, Barend J. van Wyk, Guoyuan Qi , Chunling Tu; Chaotic system synchronization with an unknown master model using a hybrid HOD active control approach. *Chaos, Solitons and Fractals* 42 (2009) 1900–1913
- [90] Yang Zhao. Synchronization of two coupled systems of J-J type using active sliding mode control. *Chaos, Solitons and Fractals* 42 (2009) 3035–3041
- [91] Youming Lei, Wei Xu, Jianwei Shen, Tong Fang. Global synchronization of two parametrically excited systems using active control. *Chaos, Solitons and Fractals* 28 (2006) 428–436
- [92] Hao Zhang , Xi-Kui Ma, Wei-Zeng Liu. Synchronization of chaotic systems with parametric uncertainty using active sliding mode control. *Chaos, Solitons and Fractals* 21 (2004) 1249–1257.



ANNEXE

Eléments de Mécanique Spatiale

1. Introduction

La mécanique spatiale est une branche de la mécanique céleste, qui a notamment pour but de prévoir les trajectoires des objets spatiaux tels que: les fusées ou les engins spatiaux y compris les mouvements orbitaux, le changement de plan d'orbite et les transferts interplanétaires.

La Mécanique Spatiale qui nous intéressera particulièrement concerne les mouvements des corps artificiels du système solaire. Avant de mettre en équations ces mouvements, il faut définir géométriquement le système, en choisissant notamment les coordonnées, ou plus généralement les variables, qui soient les mieux adaptées. On verra que ce choix est délicat car de lui dépend la plus ou moins grande complexité des équations. Il faut ensuite analyser les forces en présence et les exprimer en fonction des variables choisies. Notons que les systèmes étudiés en mécanique spatiale sont en mouvement sous l'action presque exclusive de la gravitation et que les forces de liaison sont rarement impliquées.

2. Les lois de Kepler

Les paramètres qui servent aujourd'hui à décrire les orbites satellitaires sont inspirés des travaux du mathématicien Johannes Kepler (1571-1630), convaincu du bien-fondé de la théorie de Copernic sur le système planétaire, et en utilisant les travaux d'analyse expérimentale des orbites planétaire de Tycho Brahe, parvint à énoncer trois lois connues sous le nom de *lois de Kepler*.

Ces lois décrivent la manière dont les planètes évoluent autour du soleil. Elles caractérisent les paramètres orbitaux suivants:

- L'orbite des planètes: c'est-à-dire la trajectoire qu'elles suivent au cours du temps.
- La vitesse instantanée de parcours de chaque orbite par la planète associée.
- La période orbitale d'une planète, qui est le temps total qu'elle met à décrire son orbite.

2.1. Première loi de Kepler

La première loi fut publiée par **Kepler** en 1609 dans l'ouvrage *Astronomia Nova* (Nouvelle astronomie). Cette loi fut déduite à partir de l'étude de l'orbite de la planète **Mars**, elle décrit la forme des orbites. Elle s'énonce comme suit:

« *Les planètes décrivent des orbites en forme d'ellipses dont le Soleil occupe un des foyers* ».

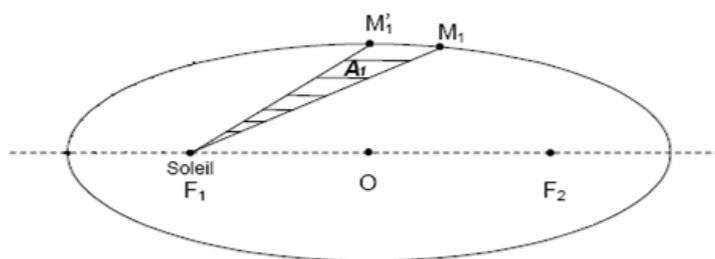


Figure.1 la trajectoire elliptique d'une planète autour du soleil.

En résumé, tous les corps célestes orbitant autour d'un autre corps décrivent des ellipses [2]. Le corps "central" occupe un des foyers, ce qui signifie que le corps en orbite est parfois éloigné (aphélie dans le cas des planètes, apogée dans le cas de la Lune), parfois rapproché (périhélie pour les planètes, périégée pour la Lune)

2.2 Deuxième loi de Kepler

Toujours en 1609 dans *Astronomia Nova*, Kepler a énoncé sa deuxième loi :

Le rayon vecteur reliant une planète au Soleil balaie des aires égales en des temps égaux.

La deuxième loi de Kepler nous permet de conclure qu'une planète se déplacera plus rapidement sur son orbite lorsqu'elle sera près du Soleil que lorsqu'elle sera loin [2].

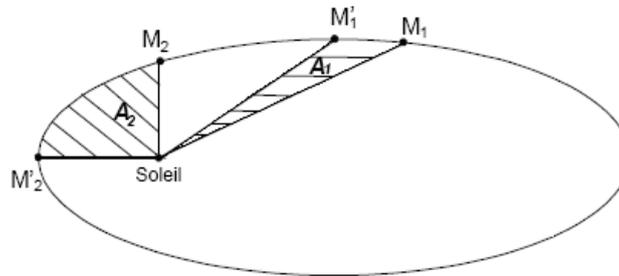


Figure.2 Seconde loi de Kepler.

2.3 Troisième loi de Kepler

Cette loi a été publiée en 1619, elle est plus mathématique que les deux premières. Elle exprime une relation entre la période de révolution (durée de l'orbite) et la distance moyenne de la planète au Soleil. Elle s'énonce comme suit [2]:

« Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube de la distance au Soleil. »

$$T^2 = K \times D^3 \tag{1}$$

Où K est la constante de proportionnalité

Les lois de Kepler ont été énoncées dans le contexte de l'étude des planètes. Elles peuvent cependant être appliquées à tous les autres corps célestes en orbite. Par exemple, elles expliquent parfaitement les orbites des étoiles doubles. Il n'y a, dans ces cas, que la constante de proportionnalité de la troisième loi qui n'est plus égale à 1.

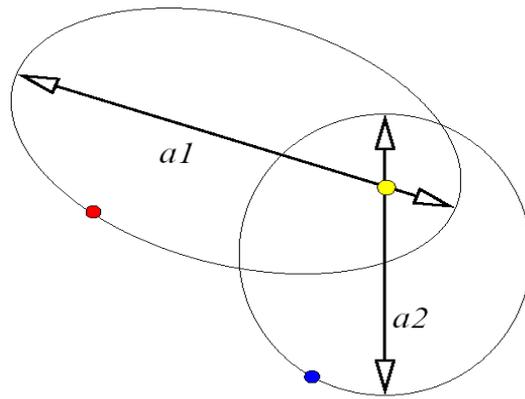


Figure.3 Troisième loi de Kepler.

3. La loi de la gravitation

Les travaux de Newton permirent quelques années plus tard de franchir un pas supplémentaire en donnant une explication aux lois décrites par Kepler. Avec la loi de la gravitation universelle, Newton pose les fondements de la mécanique spatiale [72].

« Deux corps ponctuels de masse m_1 et m_2 s'attirent avec une force F proportionnelle à leur masse, mais inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare »

$$F = G \cdot \frac{Mm}{r^2} \quad (2)$$

Où : $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ constante de gravitation universelle.

r = distance liant M à m

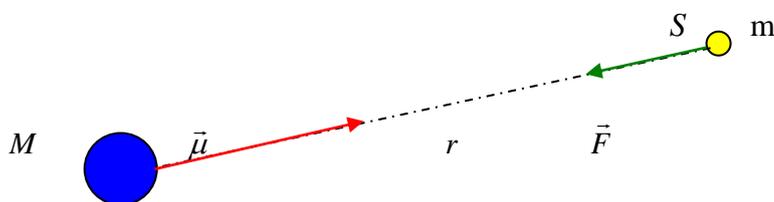


Figure.4 Forces d'attraction entre deux corps.

La dernière loi, qu'il est nécessaire d'utiliser pour rendre compte du mouvement d'un corps dans l'espace soumis à une force, est la loi fondamentale de la dynamique résumée par l'expression suivante :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \tag{3}$$

Avec: m : la masse ; $\vec{\gamma}$: accélération

4. Le problème des N corps

Le problème des N corps concerne l'étude du mouvement de N masses ponctuelles m_i repérées par des points P_i et animées sous l'effet de leur attraction mutuelle. On peut aussi considérer que cela concerne les interactions gravitationnelles de N solides ayant leur masse répartie avec une symétrie sphérique: On sait en effet que le champ de gravitation de chaque sphère est alors équivalent à celui d'une masse ponctuelle, égale à la masse totale de cette sphère et placée en son centre.

4.1 Réduction du problème à N corps

En combinant la loi de la gravitation universelle de Newton (2) et la forme vectorielle de la loi fondamentale de la dynamique (3), on peut écrire les équations du mouvement d'un système défini par N points matériels de masse m_i . L'accélération du point i ou la dérivée seconde de son vecteur position est donnée en fonction des vecteurs le liant aux autres points j du système par la relation :

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\sum_{j \neq i} G.m_j \cdot \frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}^3} \quad i = 1 \dots \dots \dots N \tag{4}$$

En toute rigueur le problème de l'évolution d'un satellite artificiel dans l'espace est un problème à N corps. Cet ensemble est constitué du satellite, de la Terre, du satellite naturel de celle-ci, des autres planètes du système solaire, du Soleil et de tous les autres constituants de l'univers céleste. Le mouvement de ce système dans l'espace est régi par l'équation générale (4).

Dans la plupart des cas une réduction de ce problème à un problème à 2 corps est facilement envisageable. Par exemple, dans le problème qui nous intéresse, nous pouvons réduire le système à un satellite en orbite terrestre. Cette réduction est justifiée par le rapport qui existe entre la masse de la terre et celle d'un satellite artificiel, généralement inférieure à une dizaine de tonnes, et par le fait que la distance qui les sépare est faible face à celles qui séparent ce couple des autres constituants de l'univers. Cette simplification du problème à N corps en un problème à 2 corps permet d'obtenir une solution simple et analytique. Cette solution pourra ensuite servir de base à la résolution de problème plus complexe, grâce à la théorie des perturbations.