

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : Contrôle Des Systèmes

Par :

ASSABAA Mohamed

THEME

Contribution à la Commande d'Ordre Fractionnaire

Devant le Jury :

Présidente	N. MANSOURI	<i>Professeur, Université Frères Mentouri Constantine</i>
Rapporteur	A. CHAREF	<i>Professeur, Université Frères Mentouri Constantine</i>
Examineurs	A. BENNIA	<i>Professeur, Université Frères Mentouri Constantine</i>
	M. KIDOUCHE	<i>Professeur, Université Boumerdes</i>
	A. DJOUAMBI	<i>Maître de Conférence, Université Oum El-Bouaghi</i>
Membre Invité	S. LADACI	<i>Professeur, ENP Constantine</i>

Année 2015

Dédicaces

*A mes très chers parents qui ont tellement fait de sacrifices
pour moi.*

*A ma femme, pour ses sacrifices, ses encouragements et son
support indéfectible et sans lesquels ce travail n'aurait pas vu
le jour.*

A mes enfants :Yahia Abdeldjalil et Mouad.

A mes chers sœurs et frères.

A tous mes amis.

Remerciements

Avant tout, mes remerciements à mon **DIEU** le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire de traitement du signal, de l'Université Frères Mentouri -Constantine, sous la direction scientifique de Monsieur le professeur **Abdelfatah CHAREF**, que je tiens à remercier très vivement de son enthousiasme envers mon travail, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Je le remercie, également, pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements et ses précieux conseils. Je suis très honoré que le Pr. **Nora MANSOURI**, Professeur à l'Université Frères Mentouri - Constantine, ait acceptée de présider le jury de cette thèse.

J'exprime ma gratitude envers Monsieur **Abdelhak BENNIA** Professeur à l'Université Frères Mentouri -Constantine, d'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examinateur. Je l'en remercie sincèrement.

Je remercie le Pr. **Madjid KIDOUCHE**, Professeur, à l'Université de Boumerdès, qui a bien accepté d'être membre du jury et de juger cette thèse ; Je remercie également Monsieur **Abdelbaki DJOUAMBI**, Maître de Conférence A à l'Université de Oum El Bouaghi et membre du Laboratoire de traitement du signal, qui a bien accepté de juger ce travail de thèse. Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire de traitement du signal, équipe système, pour leurs aides, serviabilités et leurs encouragements.

Je remercie également Monsieur **Samir LADACI**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique de Constantine et membre du Laboratoire de traitement du signal, pour son aide inestimable à améliorer mes travaux, pour l'assistance qu'il m'a apporté malgré le peu de temps que lui laissaient ses travaux de recherche scientifiques.

Je remercie de tout mon cœur mes collègues à l'université de Constantine en particulier Mr. KHADRAOUI Mohamed et Mr. BOUCHELIT Anis pour leurs soutien moral. Merci à mon cher ami Boukechiche Faris pour son soutien et aide inestimable. Sans oublier Mr. Abdelkrim BEKKOUCHE et Mr. Redouane KAFSI pour leurs aides dans la rédaction.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes amis, et à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce modeste travail.

Je n'oublierai pas de remercier ma femme Razika pour sa grande patience et son soutien dans les moments difficiles. Un grand merci à mes parents, et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien.

Enfin je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble des mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Table des matières

Remerciement	
Table des Figures	vi
Introduction Générale	1
Chapitre I : Notions sur les Operateurs et les Systèmes d'ordre Fractionnaires	5
I.1. Introduction	5
I.2. Intégrale et drivée d'ordre fractionnaire.....	5
I.2.1. Définitions.....	5
I.2.2. Intégration d'ordre fractionnaire.....	6
I.2.3. Dérivation d'ordre fractionnaire.....	7
I.2.3.1 Définition de Riemann-Liouville.....	7
I.2.3.2 Définition de Caputo.....	8
I.2.3.3 Définition de Grünwald-Letnikov.....	9
I.3. Propriétés de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire.....	10
I. 4. Approximation et réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire...	10
I.4.1 Approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.....	11
I.4.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.....	13
I.5 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire.....	14
I.5.1 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire.....	15
I.5.1.1 Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire.....	15
I.5.1.2 Fonction de transfert.....	15
I.5.1.3 Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire.....	16

I.5.1.3.1 Définition.....	16
I.5.2 Propriétés structurelles des systèmes d'ordre fractionnaire	19
I.5.2.1 Stabilité.....	19
I.5.2.2 Observabilité et contrôlabilité.....	19
I.6 Réponses des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	19
I.6.1. Réponses temporelles par les fonctions de type de Mittag-Leffler.....	19
I.6.2. Système d'ordre fractionnaire de relaxation.....	20
I.6.2.1. Approximation par une fonction rationnelle.....	20
I.6.2.2. La réponse impulsionnelle.....	23
I.6.1.3. La réponse indicielle.....	23
I.6.3 systèmes d'ordre fractionnaire oscillatoires.....	23
I.6.3.1. Approximation par une fonction rationnelle.....	23
I.6.3.2. La réponses fréquentielle.....	25
I.6.3.3. La réponse impulsionnelle.....	27
I.6.3.4. La réponse indicielle.....	28
I.7 Conclusion.....	29
Chapitre II : La Commande Adaptative	30
II.1 Introduction.....	30
II.2 Commande Auto-Ajustable.....	31
II.2.1 Régulateurs Auto-Ajustables (STR).....	32
II. 2.1.1 Principe.....	32
II.2.2 Conception des Contrôleurs Adaptatifs Auto-Ajustables.....	33
II.2.2.1 Méthode de Conception Algébrique: Placement de Pôle/Zéro.	34
II.2.3 Régulateur Auto-Ajustable Indirecte.....	39
II.2.3.1 Estimation.....	39
II.2.3.2 Auto-Ajusteur Indirect.....	40
II.2.4 Régulateurs Auto-Ajustables Directe.....	41
II. 2.4. 1 Systèmes à phase minimale.....	42
II.3 Commande Adaptative à Modèle de Référence (MRAC).....	44
II. 3. 1 La Règle de MIT.....	45
II.4 La Commande Adaptative à Grand Gain.....	46

II.4.1 Système Considéré et Contrôleur proposé.....	47
II.4.2 Stabilité de la commande à grand gain.....	48
II.4.3 Résultat Important.....	48
II.5 Conclusion.....	48
Chapitre III : Commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire	50
III. 1. Introduction.....	50
III. 2 Contrôleur adaptatif d'ordre Fractionnaire à grand-Gain.....	50
III. 2. 1 Propriété de l'intégration d'ordre fractionnaire.....	50
III. 2. 2 Commande Adaptative à Grand Gain	51
III. 2. 3 Position du Problème.....	52
III. 2. 4 Analyse de stabilité du système en boucle fermée.....	53
III. 2. 5 Exemple illustratif	56
III. 3 Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire avec σ - Modification.....	63
III. 3. 1 Préliminaires	63
III. 3. 2 Position du Problème.....	64
III. 3. 3 Solution de l'Equation du Gain d'Adaptation.....	65
III. 3. 4 Analyse de la Stabilité.....	66
III. 3. 5 Exemple illustratif.....	68
III. 4 Conclusion.....	73
Chapitre IV : Commande d'Ordre Fractionnaire	75
IV. 1 Introduction.....	75
IV.2 Préliminaires.....	76
IV. 2. 1 la Règle de M.I.T.....	76
IV. 2. 2 Fonction de Transfert Idéale de Bode.....	77
IV. 2. 2. 1 Réponse Fréquentielle.....	77
IV. 2. 2. 2 Réponse Temporelle.....	79
IV. 2. 3 Modèle Utilisé dans la Commande d'Ordre Fractionnaire	80
IV. 3 Commande Adaptative à Modèle de Référence d'Ordre Fractionnaire.....	81
IV. 3. 1 Utilisation du Calcul Fractionnaire dans le Schéma du MRAC.....	82
IV. 3. 1. 1 Exemple illustratif	83

IV. 4 Ajustement des Contrôleurs PID en Utilisant la Fonction de Transfert Idéale de Bode	89
IV. 4. 1 Contrôleur PID.....	90
IV. 4. 2. Approche d'Optimisation.....	91
IV. 4. 3 Exemple Illustratif.....	92
IV. 5 Conclusion.....	94
 Conclusion Générale	 95
 Bibliographie	 97

Table des figures

Figure I.1 Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	12
Figure I.2 Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.....	14
Figure I.3 Distribution de la fonction de temps de relaxation $H(\tau)$ de la fonction (I.70).....	21
Figure I.4 La réponse fréquentielle de (I.86) et (I.87) pour plusieurs valeurs de α	26
Figure I.5 La réponse impulsionnelle du système pour $y=1\text{dB}$, $\omega_n=1$ et $m=1.1, 1.2, \dots, 1.9$	28
Figure I.6 La réponse indicielle du système pour $y=1\text{dB}$, $\omega_n=1$ et $m=1.1, 1.2, \dots, 1.9$...	29
Figure II.1 schéma de la Commande Adaptative.....	31
Figure II.2 Schéma d'un Régulateur Auto-Ajustable.....	32
Figure II.3 Topologie de contrôleur à deux paramètres.....	34
Figure II.4 Topologie classique de la boucle de retour unitaire.....	36
Figure II.5 Commande adaptative à model référence Directe.....	44
Figure III.1 Sorties $y(t)$ et $y_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique.....	58
Figure III.2 Commandes $u(t)$ et $u_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique	58
Figure III.3 Gains de commande $k(t)$ et $k_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique.....	59
Figure III.4 Sorties $y(t)$ et $y_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique	60
Figure III.5 Les Commande $u(t)$ et $u_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique	61

Figure III.6 Gains de commande $k(t)$ et $k_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma d'ordre fractionnaire proposé et le schéma classique.....	62
Figure III.7 Gains de commande de σ -modification fractionnaire (ligne solide), le σ -modification (ligne trait-point) et le cas régulier (ligne pointillée) sans perturbation.....	69
Figure III.8 Sorties de σ -modification fractionnaire (ligne solide), le σ -modification (ligne trait-point) et le cas régulier (ligne pointillée) sans perturbation....	70
Figure III.9 Signaux de commande de σ -modification fractionnaire (ligne solide), le σ -modification (ligne trait-point) et le cas régulier (ligne pointillée) sans perturbation.....	71
Figure III.10 Gains de commande de σ -modification fractionnaire (ligne solide), le σ -modification (ligne trait-point) et le cas régulier (ligne pointillée) avec perturbation.....	72
Figure III.11 Sorties de σ -modification fractionnaire (ligne solide), le σ -modification (ligne trait-point) et le cas régulier (ligne pointillée) avec perturbation..	72
Figure III.12 Signaux de commande de σ -modification fractionnaire (ligne solide), le σ -modification (ligne trait-point) et le cas régulier (ligne pointillée) avec perturbation.....	73
Figure IV.1 Commande adaptative à modèle de référence basée sur la règle de MIT...	76
Figure IV.2 Système de commande d'ordre fractionnaire avec la fonction de transfert idéale de Bode $L(s)$	77
Figure IV.3.a Module du diagramme de Bode de la fonction de transfert idéale de Bode $L(s)$ en boucle fermée pour plusieurs valeurs de α	78
Figure IV.3.b Phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert idéale de Bode $L(s)$ en boucle fermée pour plusieurs valeurs de α	79
Figure IV.4 La réponse indicielle de la fonction de transfert idéale de Bode $L(s)$ en boucle fermée pour plusieurs valeurs de α	80
Figure IV.5 commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire.....	82
Figure IV.6 Sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.25$ et $\gamma=0.0001$	84
Figure IV.7 Erreur entre sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.25$ et $\gamma=0.0001$	85
Figure IV.8 Sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.5$ et $\gamma=0.0001$	86

Figure IV.9 Erreur entre sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.5$ et $\gamma=0.0001$	87
Figure IV.10 Sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.7$ et $\gamma=0.0001$	88
Figure IV.11 Erreur entre sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.7$ et $\gamma=0.0001$	89
Figure IV.12 Schéma bloqué d'un système de commande à retour avec un contrôleur PID.....	90
Figure IV.13 Système de commande à retour unitaire classique	90
Figure IV.14 Stratégie d'ajustement des paramètres du contrôleur PID	92
Figure IV.15 Sortie du système réel avec celle du modèle de référence d'ordre fractionnaire pour ajustement du contrôleur PID pour $\alpha=1.33$, $\omega_c=1\text{rd/s}$	93

Introduction Générale

L'idée du calcul fractionnaire a été proposée il y a plus de 300 ans. Cependant, la première application réussite du calcul fractionnaire remonte aux années 1960 [1]. Dans les dernières décennies, le calcul fractionnaire a été vraiment développé et largement utilisé dans différents domaines de la science et de l'ingénierie [2].

Récemment, un intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par ses applications dans les différents domaines des systèmes et de la commande. Certains premiers travaux ont été effectués par Bode qui a proposé une fonction de transfert d'ordre fractionnaire en boucle ouverte pour maintenir un fonctionnement stable des amplificateurs à boucle de retour pour une grande variation du gain [3].

L'application des concepts du calcul fractionnaire dans le domaine des systèmes de commande automatique remonte au début des années soixante [1]. Mais, ce n'est que dans les dernières décennies que les contrôleurs basés sur le calcul d'ordre fractionnaire gagnent de plus en plus d'intérêts de la communauté de commande [4-6]. Dans ce domaine de la recherche, tous les contrôleurs d'ordre fractionnaire développés impliquent des opérateurs et / ou des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur structure ou implémentation. Ces contrôleurs ont été introduits dans les applications de commande dans un effort continu pour améliorer les performances du système de commande et de la robustesse.

Le premier qui a vraiment introduit un contrôleur d'ordre fractionnaire était Oustaloup qui a développé le contrôleur CRONE (commande robuste d'ordre non entier) et il a appliqué dans divers domaines des systèmes de commande [7]. Podlubny a proposé un contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire, comportant une action d'intégration d'ordre λ et action de différentiation d'ordre μ [6]. Dans [8], on peut trouver un très bon résumé sur le calcul fractionnaire dans le domaine de la commande; les définitions de base du calcul fractionnaire, des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire et la commande d'ordre fractionnaire a également été présentée, en plus, plusieurs contrôleurs d'ordre fractionnaire typiques connus ont été présentés et commentés.

La commande adaptative s'est avérée être une bonne commande due à son potentiel application dans les systèmes avec de grande complexités et incertitudes. Le but de la

commande adaptative est de concevoir un contrôleur pouvant atteindre les objectifs de commande pré-spécifiés pour une classe donnée de systèmes.

Ce n'est que dans la dernière quinzaine d'années que les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire ont été introduits dans les schémas de la théorie de commande adaptative. En 2002, Vinagre et al [9] ont introduit pour la première fois l'idée de la commande d'ordre fractionnaire dans la commande adaptative conventionnelle. Ils ont utilisé une règle d'ajustement de paramètre d'ordre fractionnaire et un modèle de référence d'ordre fractionnaire dans la commande adaptative à modèle de référence conventionnelle (MRAC). En 2006, Ladaci et Charef [10] ont utilisé une règle d'ajustement des paramètres d'ordre fractionnaire et un modèle de référence d'ordre fractionnaire différent de celui dans [9] dans le MRAC classique. Ils ont également introduit un dérivateur fractionnaire à la sortie du système avec un ordre fractionnaire approprié lié au modèle de référence d'ordre fractionnaire proposé dans la règle d'ajustement de paramètres du MRAC classique. Suárez et al [11] ont proposé un schéma de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour une commande latérale d'un véhicule autoguidé combinant une approche du modèle de référence et une règle d'ajustement d'ordre fractionnaire pour l'ajustement du gain direct. Dans [12], Ladaci et Charef ont également introduit un contrôleur adaptatif $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire basé sur un algorithme classique d'ordre entier. Dans tous les travaux mentionnés ci-dessus, l'avantage du comportement du système et la robustesse des schémas de commande introduits ont été présentés par des exemples illustratifs. Mais la faiblesse de ces travaux réside dans le manque d'arguments théoriques pouvant garantir la stabilité de ces schémas de commande particuliers. C'est pour cela que la preuve analytique de la stabilité pour les systèmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire est jusqu'à présent considérée comme un problème ouvert.

Récemment, quelques travaux théoriques ont été effectués pour prouver analytiquement la stabilité de quelques schémas de commande adaptative. Dans [13], Li et al ont étudié la stabilité asymptotique de trois systèmes scalaires d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode de stabilisation adaptative universelle. Les résultats obtenus sur la stabilisation adaptative universelle d'ordre fractionnaire dans [13] ont été également étendus au système MIMO par Li et Chen dans [14]. Dans [15], Ladaci et al ont montré qu'un contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire basé sur un grand gain à retour de sortie peut stabiliser n'importe quel système linéaire, invariant dans le temps, à phase minimale, avec une seule entrée, une seule sortie (SISO) et de degré relatif unité. Dans [16], ils ont également introduit un feedforward d'ordre fractionnaire dans l'algorithme MRAC pour obtenir une nouvelle stratégie de commande adaptative où la preuve de la stabilité robuste de ce schéma

de commande a été dérivée. Par cette gamme de techniques de conception et d'applications, mais assez loin de viser la perfection, il est clair que la commande d'ordre fractionnaire est devenue un sujet de recherche important. La généralisation à l'ordre non-entier des contrôleurs traditionnels ou des schémas de commande se traduit par plusieurs paramètres de réglage et plusieurs réponses fréquentielles et temporelles réglables du système de commande, permettant l'achèvement des performances robustes.

Objectifs de la thèse

Notre principal objectif dans ce travail est l'introduction des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire dans les schémas de la commande adaptative. Notre intérêt pour les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire est motivé par les très bonnes performances de ces derniers relativement à ceux d'ordre entier. En effet, de nouveaux schémas de commande ont été proposés tout en montrant leurs avantages en les appliquant aux différents types de systèmes dynamiques. Dans ce contexte, nous proposons un nouveau schéma de commande adaptative d'ordre fractionnaire à grand gain avec retour de sortie par l'introduction d'une intégration d'ordre fractionnaire à coté de l'intégration régulière de la sortie du système dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande. Des simulations ont été faites et les résultats obtenus ont été satisfaisants.

Nous proposons aussi un contrôleur adaptatif à grand gain avec une modification du concept de σ -modification par le biais du calcul d'ordre fractionnaire. Par cette modification, on a l'intention de maintenir la robustesse en présence des perturbations et d'éliminer le comportement indésirable en absence des perturbations par l'introduction de la dérivée d'ordre fractionnaire dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande à la place de la dérivée régulière. Des simulations ont été faites pour montrer l'efficacité du schéma de commande proposé.

Nous proposons encore l'introduction d'un système d'ordre fractionnaire oscillatoire approximé par la technique de Charef comme modèle dans la commande adaptative à modèle de référence (MRAC) conventionnel. Les simulations ont montré l'efficacité du schéma MRAC avec modèle fractionnaire dans l'amélioration de la dynamique de la réponse du processus commandé avec une poursuite parfaite de la sortie.

En plus nous proposons une stratégie d'ajustement des paramètres du contrôleur PID en se basant sur un modèle de référence d'ordre fractionnaire. Le modèle utilisé dans ce cas est un système d'ordre fractionnaire dit fonction de transfert idéale de Bode. Les paramètres

du contrôleur PID sont ajustés par la minimisation de l'intégrale de l'erreur quadratique entre les réponses du modèle de référence fractionnaire désirée et du système asservi en boucle fermée avec le contrôleur PID. Le système en boucle fermée résultant possède la caractéristique souhaitée d'être robuste aux variations du gain avec les réponses indicielles présentant la propriété d'iso-amortissement. Le système d'ordre fractionnaire utilisé comme modèle a été aussi approximé par la technique de Charef. Des simulations ont été faites pour tester ce schéma de commande d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus ont été très satisfaites.

Structure de la thèse

Cette thèse est organisée comme suit :

Le chapitre I présente une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres qui suivent. Les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire y sont répertoriés.

Le chapitre II est consacré à la commande adaptative où on va introduire différentes définitions de schémas de commande adaptative existants.

Le chapitre III est la partie contribution ; elle est consacrée à la commande adaptative à grand gain d'une classe de systèmes linéaires. Nous l'avons divisée en deux parties :

La première partie est réservée aux contrôleurs adaptatifs d'ordre fractionnaire pour stabiliser les systèmes à une boucle de retour à grand gain. Nous avons montré que ce contrôleur peut stabiliser la classe considérée des systèmes.

La deuxième partie traite de la commande adaptative d'ordre fractionnaire avec σ -Modification. Par l'introduction de la dérivée d'ordre fractionnaire dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande à la place de la dérivée régulière ; nous allons montrer l'efficacité du schéma de commande proposé par-rapport au cas régulier de la commande adaptative à grand gain et le cas de la commande adaptative à grand gain avec σ -modification en termes de robustesse en présence des perturbations et du comportement indésirable en absence des perturbations.

Le chapitre IV présente les résultats obtenus par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans la commande adaptative à modèle de référence. Des schémas de commande sont proposés avec des exemples de simulation.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats de cette thèse et suggère les perspectives futures de ce travail de recherche.

Chapitre I

Notions sur les Operateurs et les Systèmes d'ordre Fractionnaires

I.1. Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul régulier (ordre entier). Il est considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Durant les dernières décennies, le calcul fractionnaire s'est développé et a pris de l'importance aussi bien dans le domaine des mathématiques que dans des applications scientifiques. Mais il serait tout à fait erroné de classifier le calcul fractionnaire comme une science nouvelle. La question des dérivées fractionnaires fut abordée dès 1695 par Leibniz dans une lettre adressée à l'Hôpital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction $x(t)$ par rapport à la variable t , Leibniz répond que cela mène à un paradoxe dont un jour on tirera profit d'utiles conséquences : le calcul fractionnaire est alors né. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par les applications que ce calcul trouve dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie. Le premier livre dédié au calcul d'ordre fractionnaire a été publié en 1974, il revient à K.B. Oldham et J. Spanier [17], après un travail de collaboration entamé depuis 1968. Sur le plan mathématique, il faut citer l'ouvrage russe de Samko, Kilbas et Marichev [18] paru en 1993, qui regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes sur le calcul d'ordre fractionnaire. Dans le domaine des systèmes, des travaux intéressants ont été réalisés dans l'union soviétique [19] et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens théoriciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire [17,20-23]. Aujourd'hui, l'intérêt du calcul d'ordre fractionnaire et ses applications ne cesse de grandir dans plusieurs domaines. A partir de 2004, un workshop, qui se déroule tous les deux ans, spécialement dédié au calcul d'ordre fractionnaire et ses applications, a été créé.

I.2. Intégrale et drivée d'ordre fractionnaire

I.2.1. Définitions

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier ${}_c D_t^\alpha$ où c et t sont des limites de l'opération. L'opérateur intégro-différentiel continu est défini comme :

$${}_c D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0, \\ 1 & \Re(\alpha) = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0, \end{cases} \quad (I.1)$$

où α , généralement $\alpha \in \mathbb{R}$, est l'ordre de l'opération.

Les deux définitions les plus utilisées pour l'opérateur intégrro-différentiel (Spanier et Oldham) d'ordre fractionnaire général sont celles de Grunwald-Letnikov (GL) et de Riemann-Liouville (RL) [22]. Les autres définitions bien connues sont ceux de Caputo, Weyl et Furier.

I.2.2. Intégration d'ordre fractionnaire

Soit une fonction réelle de la variable réelle t continue et intégrable sur $[0, +\infty[$, l'intégration répétée k fois de la fonction $f(t)$, appelée l'intégrale $k^{\text{ème}}$ de $f(t)$ et notée $I^k f(t)$, s'exprime par la formule de Cauchy par:

$$\int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_2 \int_{t_0}^{t_1} f(t_1) dt_1 = I^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

Pour généraliser la formule de Cauchy de l'équation (I.2) à un nombre réel $\alpha \in \mathfrak{R}_+^*$, Riemann en 1947 a proposé de remplacer la fonction factorielle par la fonction Gamma qui en est la généralisation aux nombres réels. On obtient alors la fonction d'intégration fractionnaire :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.3)$$

$\Gamma(\cdot)$ étant la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \forall x \in \mathfrak{R}^* \quad (I.4)$$

L'intégrale unilatérale d'ordre réel (I.3) est souvent appelée l'intégrale de Riemann-Liouville car Liouville a aussi proposé la même définition que Riemann mais en remplaçant la borne inférieure d'intégration par $-\infty$ (dans ce cas l'intégrale est dite bilatérale). Il est intéressant de

souligner que dans la relation (I.3) la quantité $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ vaut 1 quand l'ordre d'intégration $\alpha = 1$.

L'intégrale classique d'ordre 1 de la fonction $f(t)$ correspond à l'aire délimitée par la fonction $f(t)$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[t_0, t]$. L'équation (I.3) peut aussi être écrite sous la forme :

$$I^\alpha f(t) = P_\alpha(t) \otimes f(t) \quad (I.5)$$

où la fonction $P_\alpha(t)$ est donnée par $P_\alpha(t) = \frac{(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et l'opérateur \otimes étant le produit de convolution. La fonction $P_\alpha(t)$ vient ainsi pondérer différemment chaque valeur de la fonction $f(t)$. L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $f(t)$ peut alors être interprétée comme l'aire entre t_0 et t que délimite par rapport à l'axe des abscisses la fonction $f(t)$ pondérée par la fonction $P_\alpha(t)$.

La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre α de $f(t)$ causale ($f(t) = 0$, pour $t \leq t_0 = 0$), a la même expression que la transformée de Laplace de l'opération d'intégration entière, il suffit de remplacer l'ordre d'intégration entier par l'ordre fractionnaire α . Elle est donnée par [22] :

$$L[I^\alpha f(t)] = \frac{1}{s^\alpha} L[f(t)] \tag{I.6}$$

où s désigne l'opérateur de Laplace.

I.2.3. Dérivation d'ordre fractionnaire

La différentiation fractionnaire est la généralisation de la différentiation entière à des ordres non entiers quelconques. Cette généralisation peut être obtenue à partir de l'intégration fractionnaire de l'équation (I.3) donnant ainsi la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo. Une autre généralisation, basée sur la définition usuelle de la différentiation entière est proposée par Grunwald-Letnikov.

I.2.3.1 Définition de Riemann-Liouville

La dérivée d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$ d'une fonction $f(t)$ localement intégrable définie sur $[t_0, \infty]$ est donnée comme suit [17]

$${}_{RL}D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{I.7}$$

où le nombre entier n est tel que $(n-1) < \alpha < n$.

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$ causale selon cette définition est donnée par [22].

$$L[{}_{RL}D_{t_0}^\alpha f(t)] = s^\alpha L[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} s^i D^{\alpha-i-1} f(t) \Big|_{t_0} \tag{I.8}$$

où $\sum_{i=0}^{n-1} s^i D^{\alpha-i-1} f(t) \Big|_{t_0}$ représente la dérivée $(\alpha-i-1)^{\text{ème}}$ de $f(t)$ lorsque $t = t_0$. Alors, les conditions

initiales s'expriment par les valeurs des dérivées $D_{t_0}^{\alpha-i-1} f(t)$ de $f(t)$ (pour $i=0, 1, \dots, n-1$) en $t = t_0$.

I.2.3.2 Définition de Caputo

A la fin des années 60, dans le cadre de ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation fractionnaire [22]. L'expression mathématique de cette définition est :

$${}_c D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \tag{I.9}$$

où n est un entier tel que $(n-1) < \alpha < n$ et $f^{(n)}(\tau)$ étant la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(\tau)$. La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$ causale selon la définition de Caputo est donnée par [22].

$$L[{}_c D_{t_0}^\alpha f(t)] = s^\alpha L[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} D^i f(t) \Big|_{t=0} \tag{I.10}$$

où $D^i f(t) \Big|_{t=0}$ représente la $i^{\text{ème}}$ dérivée entière de $f(t)$ à $t = t_0$.

Dans ce cas, les conditions initiales s'expriment en fonction des valeurs en t_0 des dérivées entières $D^i f(t)$ de $f(t)$, ($i = 0, \dots, n-1$).

La définition de Caputo requiert donc que la fonction $f(t)$ ainsi que ses n dérivées successives soient nulles pour $t \leq 0$, ce qui la rend plus restrictive que la définition de Riemann-Liouville qui exige la seule causalité de $f(t)$. De plus, dans la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire, la solution obtenue en utilisant la définition de Riemann-Liouville s'exprime en fonction des valeurs initiales d'ordre fractionnaire ($y_0, \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y(0) \dots$), alors que l'utilisation de la définition de Caputo permet d'exprimer la solution en fonction des valeurs initiales entières ($y_0, \frac{d}{dt} y(0) \dots$). Dans le domaine de la Science physique où les valeurs initiales des dérivées entières sont plus perceptibles que leurs dérivées fractionnaire, la définition de Caputo semble donc plus adaptée dans ce cas.

Une autre différence majeure entre les deux définitions apparait lorsque la fonction à dériver est une constante. En effet, La dérivée d'ordre fractionnaire d'une constante selon la définition de Riemann-Liouville est une fonction non nulle dépendante de la variable t alors que sa dérivée fractionnaire selon la définition de Caputo est nulle.

$${}_{RL} D_{t_0}^\alpha C = \frac{C(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \text{ et } {}_c D_{t_0}^\alpha C = 0 \tag{I.11}$$

L'analogie avec la dérivation entière induit plutôt à adapter la définition de Caputo particulièrement pour la modélisation des phénomènes physiques pour lesquels il est plutôt facile

de donner un sens aux conditions initiales. Alors que la définition de Riemann-Liouville est couramment utilisée en mathématique en raison de son caractère plus général.

La définition de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo peut être formulée de la définition de Riemann-Liouville comme suit [22]:

$${}_{RL}D^\alpha f(t) = {}_C D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \tag{I.12}$$

N.B : pour simplifier l'écriture, on notera dans le reste du chapitre I^α pour I_0^α et D^α pour D_0^α

I.2.3.3 Définition de Grünwald-Letnikov

La dérivée généralisée d'une fonction $f(t)$, peut également être obtenue de façon plus naturelle en utilisant la définition entière usuelle. C'est la définition proposée par Grunwald [22]. Elle est plus adéquate au calcul numérique de la dérivation fractionnaire. En effet, partant de la dérivée première :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{I.13}$$

h étant la période d'échantillonnage. La dérivée seconde donne :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \tag{I.14}$$

Un premier niveau de généralisation a l'ordre entier n donne :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \left((-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh) \right) \tag{I.15}$$

n étant un nombre entier, la notation $\binom{n}{j}$ représente la combinaison de j élément parmi n dont

l'expression est donnée par :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \tag{I.16}$$

L'extension de l'équation (I.15) à des valeurs fractionnaires $\alpha \in \mathfrak{R}_+$ de l'ordre de dérivation étant immédiate soit [22] :

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^\infty \left((-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \right) \tag{I.17}$$

La notation $\binom{\alpha}{j}$ désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)} \tag{I.18}$$

Pour des ordres de dérivation entiers $\alpha = n$, la somme de l'équation (I.17) est limitée à $n + 1$ termes. La valeur de la dérivée à un instant t est alors une combinaison linéaire des $n+1$ valeurs de la fonction $f(t-jh)$, $j = 0, \dots, n$. La dérivation entière donne ainsi une caractérisation locale de la fonction. Par contre, pour des ordres de dérivation fractionnaires, les coefficients de pondération $\left[(-1)^j \binom{\alpha}{j} \right]$ ne s'annulent pas. La valeur de la dérivée à un instant donné est alors une combinaison linéaire de toutes les valeurs de la fonction $f(t - jh)$, $j = 0, \dots, \infty$. Cela montre qu'à l'inverse de la dérivation entière, la dérivation fractionnaire donne une caractérisation globale de la fonction.

I.3. Propriétés de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire

1. si $f(t)$ est une fonction analytique de t , alors sa dérivée fractionnaire ${}_0D_t^\alpha f(t)$ est une fonction analytique de t et α .

2. Pour $\alpha=0$ l'opération ${}_0D_t^\alpha f(t)$ est l'opérateur identité :

$${}_0D_t^0 f(t) = f(t)$$

3. La différentiation et l'intégration fractionnaire sont des opérations linéaires:

$${}_0D_t^\alpha (af(t) + bg(t)) = a{}_0D_t^\alpha f(t) + b{}_0D_t^\alpha g(t)$$

4. La loi additive d'index :

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

I. 4. Approximation et réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Il existe plusieurs techniques d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles. Les approximations disponibles dans le domaine s sont appelées des approximations analogiques ou des approximations du domaine fréquentiel. Dans la référence [23], on peut trouver un très bon résumé de ces méthodes d'approximation. Parmi ces méthodes on peut citer les méthodes suivantes :

- La méthode de l'expansion par fractions continues EFC (Expansion Fractionnaire Continue).
- La méthode de Carlson.
- La méthode de Charef.
- La méthode de Matsuda.
- La méthode d'Oustaloup

Les méthodes de Charef et d'Oustaloup sont les plus utilisées dans la littérature. La méthode de Charef dite méthode de la fonction de singularité est plus utile et plus pratique pour les

approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire voir [24], c'est pourquoi on va l'utiliser pour l'implémentation de nos schémas de commande.

I.4.1 Approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^\alpha} \tag{I.19}$$

où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_L, \omega_H]$, cet opérateur peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit [25] :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^\alpha} \cong \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \tag{I.20}$$

L'approximation du PPF par une fonction rationnelle est donnée par [24]:

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \tag{I.21}$$

Les pôles et les zéros de cette approximation sont obtenus comme suit :

$$p_i = (ab)^i p_0 \quad (\text{pour } i=0,1,\dots,N) \text{ et } z_i = (ab)^i a p_0 \quad (\text{pour } i=0,1,\dots,N-1) \tag{I.22}$$

Pour une erreur d'approximation y en dB et une fréquence maximale ω_{max} donnée, les paramètres d'approximation a , b , p_0 et N sont calculés par :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-\alpha)}\right]}, \quad b = 10^{\left[\frac{y}{10\alpha}\right]}, \quad p_0 = \omega_c 10^{\left[\frac{y}{20\alpha}\right]} \text{ et } N = \left(\text{Integer} \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \right) \tag{I.23}$$

On suppose que dans la bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut donc écrire:

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} = \frac{K_I \omega_c^\alpha}{s^\alpha} = \frac{1}{s^\alpha} \tag{I.24}$$

avec $K_I = 1/\omega_c^\alpha$ et $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(y/10\alpha)} - 1}$ est la fréquence de coupure du PPF à -3α dB. Alors, dans la bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$, l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$G_1(s) = \frac{1}{s^\alpha} \cong K_1 \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a p_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (I.25)$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, on doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$G_1(s) = K_1 \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a p_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (I.26)$$

où les coefficients h_i sont les résidus qui sont déterminés par :

$$h_i = K_1 \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a p_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_1 \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{(i-j)} \right)} \quad (I.27)$$

L'équation (I.26) correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster de la 1^{ère} forme de N+1 cellules RC parallèle dont le schéma est représenté dans la Figure I.1.

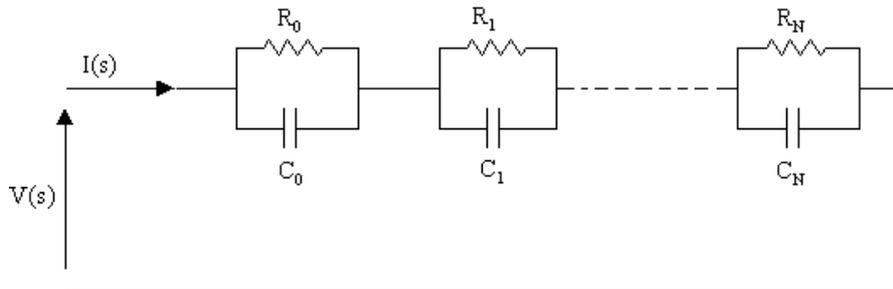


Figure I.1 Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Cette impédance $Z(s)$ du circuit de la Figure I.1 est donnée comme :

$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{R_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (I.28)$$

Des équations (I.26) et (I.28) pour $i=0, 1, 2, \dots, N$, on peut écrire:

$$R_i = h_i \quad \text{et} \quad C_i = \frac{1}{h_i (ab)^i p_0} \quad (I.29)$$

I.4.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^\alpha \quad (I.30)$$

où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_L, \omega_H]$, cet opérateur peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire ZPF comme suit [25]:

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.31)$$

Les zéros et les pôles de cette approximation sont obtenus comme suit :

$$z_i = (ab)^i z_0 \quad (\text{pour } i=0,1,\dots,N) \quad \text{et} \quad p_i = (ab)^i az_0 \quad (\text{pour } i=0,1,\dots,N) \quad (I.32)$$

Pour une erreur d'approximation y en dB et une fréquence maximale ω_{\max} donnée, les paramètres d'approximation a , b , z_0 et N sont calculés par :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-\alpha)}\right]}, \quad b = 10^{\left[\frac{y}{10\alpha}\right]}, \quad ab = 10^{\left[\frac{y}{10\alpha(1-\alpha)}\right]}, \quad z_0 = \omega_c 10^{\left[\frac{y}{20\alpha}\right]} \quad \text{et} \quad N = \left(\text{Integer} \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{z_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \right) \quad (I.33)$$

On suppose que dans la bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$ on a $\omega \gg \omega_c$, donc on peut écrire:

$$G_D(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha = \frac{K_D}{(\omega_c)^\alpha} (s^\alpha) = s^\alpha \quad (I.34)$$

avec $K_D = (\omega_c)^\alpha$ et $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(y/10\alpha)} - 1}$ est la fréquence de coupure du ZPF à 3α dB. Alors, dans la bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$, l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$G_D(s) = s^\alpha \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{az_0(ab)^i}\right)} \quad (I.35)$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer $\frac{G_D(s)}{s}$ en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{az_0(ab)^i} \right)} \quad (I.36)$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (I.37)$$

avec $G_0 = K_D$ et,

$$g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{(i-j)})}{(-az_0(ab)^i) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (I.38)$$

L'équation (I.37) correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster de la 2^{ème} forme (N+1) cellules RC serie dont le schéma est représenté sur la Figure I.2

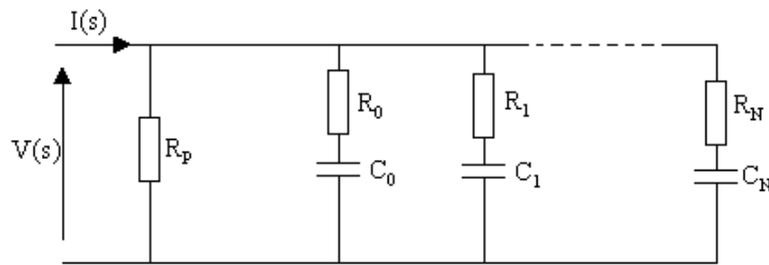


Figure I.2 Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

L'admittance $Y(s)$ du circuit de la Figure I.2 est donnée par :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left(\frac{sC_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (I.39)$$

Des équations (I.37) et (I.39) pour $i=0, 1, 2, \dots, N$, on peut écrire:

$$R_p = \frac{1}{G_0}, \quad C_i = g_i, \quad \text{et} \quad R_i = \frac{1}{g_i p_i} \quad (I.40)$$

I.5 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

L'analyse d'une large catégorie de processus physiques tel que le bruit électronique [26], les réseaux de télécommunication [27], les systèmes hydrauliques [28], la mécanique des fluides [29], la polarisation électrode-électrolyte [30], montre que les tracés de Bode de ces systèmes

sont caractérisés par une pente d'ordre fractionnaire et par un comportement temporel régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Ce type de processus est connu comme système d'ordre fractionnaire. L'utilisation des modèles entiers n'est donc pas convenable pour représenter ce type de systèmes. Alors, une nouvelle catégorie de modèles appelés modèles d'ordre fractionnaire basés sur le concept de la différentiation d'ordre fractionnaire a été développée [31].

I.5.1 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

I.5.1.1 Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire

Un système linéaire d'ordre fractionnaire est par définition un système décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [32]:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (I.41)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système fractionnaire, les ordres des dérivées α_i ($0 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont des nombres réels tel que $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ et $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$ et $\alpha_n \geq \beta_m$ et les coefficients a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) et b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) sont des nombres réels. Quand les ordres des dérivées α_i ($0 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont multiples du même nombre réel α ($0 < \alpha < 1$), tel que $\alpha_i = i.\alpha$ ($0 \leq i \leq n$) et $\beta_j = j.\alpha$ ($0 \leq j \leq m$) et $m \leq n$, le système fractionnaire est dit système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable. Alors, l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.41) devient :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{i.\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j.\alpha} u(t) \quad (I.42)$$

I.5.1.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert du système linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.41) est donnée par la fonction suivante [32]:

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (I.43)$$

Dans le cas d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable, la fonction de transfert de l'équation (I.43) devient :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (s^\alpha)^j}{\sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i} \quad (I.44)$$

I.5.1.3 Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

I.5.1.3.1 Définition

La description interne d'un système d'ordre entier cherche toujours à lui faire correspondre un système d'équation appelé représentation d'état de forme générale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \tag{I.45}$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système. Pour un système à temps invariant, les équations (I.45) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{I.46}$$

et pour un système linéaire invariant dans le temps, la représentation d'état est donnée sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{I.47}$$

où A , B , C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

Comme dans le cas entier, une représentation d'état d'ordre fractionnaire comporte deux équations. Une équation d'état d'ordre fractionnaire dans laquelle le vecteur d'état fait l'objet d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel et une équation d'observation identique à celle du cas entier. Elle est ainsi définie par [32] :

$$\begin{cases} D^\alpha(x(t)) = Ax(t) + Bu(t) & \tag{I.48a} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \tag{I.48b} \end{cases}$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système, α est l'ordre de dérivation tel que $0 < \alpha < 1$ et A , B , C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

où $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$. La notation ci-dessus affirme que la différenciation d'ordre fractionnaire D^{α_i} s'applique uniquement à l'élément x_i de l'état x dans (I.48a), où (I.48a) est appelée l'équation d'état de d'ordre fractionnaire, et (I.48b) l'équation de sortie. Le modèle d'ordre fractionnaire ci-dessus peut être simplifié dans le cas particulier où $\alpha_i \equiv \alpha, 1 \leq i \leq n$. L'équation espace d'état (I.48a) devient :

$$D^\alpha(x(t)) = Ax(t) + Bu(t) \tag{I.49}$$

où l'opérateur D^α signifie que tous les états sont des dérivées d'ordre α . En utilisant la transformée de Laplace dans (I.49) et en tenant compte de la définition de Caputo pour la dérivée d'ordre fractionnaire, et par l'application de la propriété (I.10) dans le cas où $0 < \alpha < 1$, on a :

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} s^{\alpha-1}x(0), \tag{I.50}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{I.51}$$

La définition de Caputo est nécessaire si nous voulons que les conditions initiales expriment directement les valeurs des états à $t = 0$. Dans le cas des conditions initiales nulles ($x(0) = 0$), (I.50) devient :

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} BU(s) \tag{I.52}$$

En combinant cette équation avec l'équation de (I.51) on obtient :

$$Y(s) = \left[C(s^\alpha I - A)^{-1} B + D \right] U(s) = G(s)U(s) \tag{I.53}$$

où I est la matrice identité de dimension $n \times n$. $G(s)$ représente une fonction de transfert dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes exprimé en termes de puissances entières de s^α . Une conséquence d'avoir imposé $\alpha_i = \alpha$, la dynamique est devenue celle d'un système d'ordre commensurable. Bien que n'importe quelle valeur réelle α suffise pour que le système soit commensurable, la valeur de α est généralement prise comme étant un nombre rationnel $1/Q$, avec $Q \in \mathbb{N}$, soit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{j/Q}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{i/Q}} \tag{I.54}$$

Dans ce cas, les systèmes fractionnaire d'ordre commensurable permettent aussi une représentation d'état [32], soit :

$$\begin{cases} D^{(1/Q)}(x(t)) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{I.55}$$

Et sa fonction de transfert est donnée par :

$$Y(s) = \left(C \left(s^{1/Q} I - A \right)^{-1} B + D \right) U(s) \tag{I.56}$$

Comme dans le cas d'ordre entier, ce type de système d'ordre fractionnaire peut avoir des représentations canoniques. Pour la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^N b_j s^{j/Q}}{s^{N/Q} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i s^{i/Q}}, \quad N, Q \in \mathbb{N}, a_i, b_j \in \mathbb{R} \tag{I.57}$$

la forme canonique contrôlable est donnée [33]:

$$\left. \begin{aligned}
 & \mathbf{D}^{(1/Q)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
 \\
 & \mathbf{y} = \begin{bmatrix} b_{N-1} - a_{N-1}b_N & b_{N-2} - a_{N-2}b_N & \dots & b_0 - a_0b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{bmatrix} + b_N \mathbf{u}
 \end{aligned} \right\} \tag{I.58}$$

et la forme canonique observable est aussi donnée par:

$$\left. \begin{aligned}
 & \mathbf{D}^{(1/Q)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{N-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0b_N \\ b_1 - a_1b_N \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{N-1} - a_{N-1}b_N \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
 \\
 & \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{bmatrix} + b_N \mathbf{u}
 \end{aligned} \right\} \tag{I.59}$$

I.5.2. Propriétés structurelles des systèmes d'ordre fractionnaire

I.5.2.1 Stabilité

Soient $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$ les valeurs propres de la matrice d'évolution A du système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (I.49). On dit que le système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (I.49) est stable dans le sens 'bounded input bounded output' (BIBO) si les conditions suivantes sont réalisées [34]:

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2} , \quad 1 \leq i \leq n \tag{I.60}$$

Dans le cas des systèmes d'ordre commensurable rationnel ($\alpha = 1/Q$) cette condition devient

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2Q} , \quad 1 \leq i \leq n \tag{I.61}$$

I.5.2.2 Observabilité et contrôlabilité

Les deux résultats suivants peuvent être démontrés comme leurs similaires dans le cas d'ordre entier [32].

Théorème 1: Un système fractionnaire d'ordre commensurable représenté par l'équation d'état (I.55) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité M_o suivante est une matrice de rang plein

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \tag{I.62}$$

où N est la dimension de la matrice A.

Théorème 2 : Un système fractionnaire d'ordre commensurable représenté par l'équation d'état (I.55) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité M_c suivante est une matrice de rang plein

$$M_c = [B \quad BA \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad A^{N-1}B] \tag{I.63}$$

où N est la dimension de la matrice A.

I.6 Réponses des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

I.6.1. Réponses temporelles par les fonctions de type de Mittag-Leffler

Pour une analyse plus générale dans le domaine temporel des systèmes d'ordre fractionnaires, un outil efficace appelé la fonction de Mittag-Leffler [6] a été introduite. La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (I.64)$$

Sa k^{ième} dérivée est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! z^j}{j! \Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (I.65)$$

Il est plus convenable d'introduire la fonction [6]

$$\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(y t^\alpha) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (I.66)$$

La transformée de Laplace de la fonction $\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta)$ est donnée par :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \varepsilon_k(t, \pm y; \alpha, \beta) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \pm y)^{k+1}} \quad \text{avec } (\text{Re}(s) > |y|^{1/\alpha}) \quad (I.67)$$

Une autre propriété convenable de $\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta)$ est sa simple différentiation fractionnaire

$${}_0 D_t^\lambda \varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = \varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta - \lambda) \quad (\lambda < \beta) \quad (I.68)$$

I.6.2 Système d'ordre fractionnaire de relaxation

Dans ce contexte, le système d'ordre fractionnaire simple est défini comme étant l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire suivante pour $0 < \alpha < 1$ [35].

$$(\tau_0)^\alpha \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + y(t) = e(t) \quad (I.69)$$

sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]} \quad (I.70)$$

I.6.2.1 Approximation par une fonction rationnelle

Dans l'étude des diélectriques, K. S. Cole et R. H. Cole ont constaté que les fonctions de transfert de dispersion/relaxation d'un grand nombre de matériaux peuvent être modélées par l'équation suivante [36]:

$$G(s) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (I.71)$$

où $1/\tau_0$ est la fréquence caractéristique de relaxation, $s=j\omega$ est la fréquence complexe et α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. Il est aussi connu que la fonction de distribution des temps de relaxation $H(\tau)$ peut être obtenue directement de la fonction de transfert comme [36]:

$$G(s) = \int_0^{\infty} \frac{H(\tau)}{1 + s\tau} d\tau \quad (I.72)$$

Appliquant la méthode de l'équation (I.72) ; K. S. Cole et R. H. Cole ont trouvé que la fonction de distribution des temps de relaxation pour leur modèle de l'équation (I.71) est [36]:

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} = \int_0^\infty \frac{H(\tau)}{1 + s\tau} d\tau \tag{I.73}$$

avec:

$$H(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(1 - \alpha)\pi}{\left\{ \cosh \left[\alpha \log \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right) \right] \right\} - \cos(1 - \alpha)\pi} \right] \tag{I.74}$$

La Figure I.3 montre le tracé de cette fonction de distribution des temps de relaxation $H(\tau)$ pour $\alpha = 0.2$ et $\tau_0 = 10$.

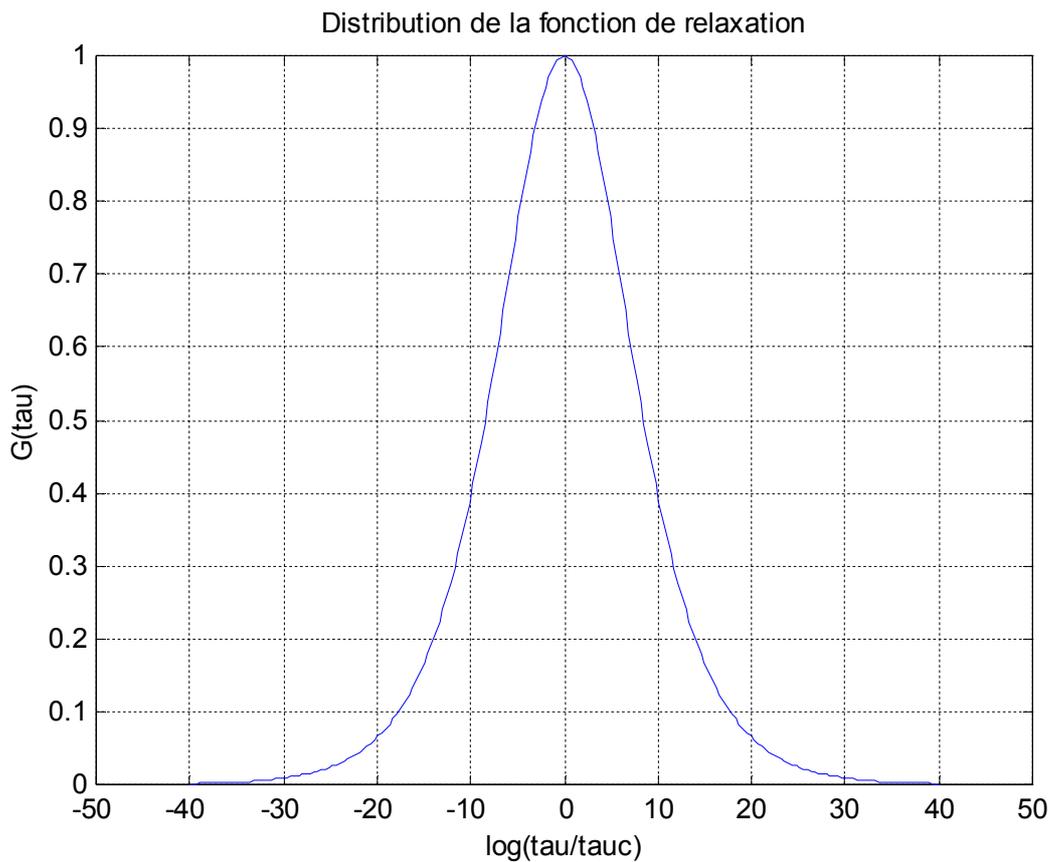


Figure I.3 Distribution de la fonction de temps de relaxation $H(\tau)$ de la fonction (I.71).

L'approximation de la fonction de transfert de l'équation (I.70) par une fonction rationnelle commence par l'échantillonnage de la fonction de distribution des temps de relaxation $H(\tau)$ de l'équation (I.74) dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique $[0, \omega_H]$ en points équidistants sur une échelle logarithmique τ_i ($i=1,2,\dots,2N-1$) comme suit [35]:

$$H(\tau) \cong H_s(\tau) = \sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i) \quad (I.75)$$

où $\tau_i = \tau_N \lambda^{N-i}$ pour $i=1,2,\dots,2N-1$, et λ est un nombre constant plus grand que l'unité, est défini comme rapport d'un pole au pole précédent où:

$$\lambda = \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}} = \frac{p_{i+1}}{p_i} \quad i=1,2,\dots,2N-2 \quad (I.76)$$

avec les pôles $p_i = \frac{1}{\tau_i}$, pour $i=1,2,\dots,2N-1$. Substituant l'équation (I.74) dans l'équation (I.72), on obtient:

$$G(s) \cong \int_0^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)}{1 + s\tau} d\tau = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{1 + s\tau_i} \quad (I.77)$$

Donc on peut écrire:

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{1 + s\tau_i} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.78)$$

où p_i sont les pôles de l'approximation donnée par :

$$p_i = \frac{1}{\tau_i} = (\lambda)^{(i-N)} p_0 \quad \text{pour } i=1,2,\dots,2N-1$$

Sachant que $p_0 = \frac{1}{\tau_0}$ et $\lambda = \frac{p_{i+1}}{p_i}$ = rapport d'un pole au pole précédent, les k_i sont les résidus des pôles donnés par la relation suivante :

$$k_i = H(\tau_i) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\cosh[\alpha \log(\frac{\tau_i}{\tau_0})] - \cos[(1-\alpha)\pi]} \right] \text{ pour } i=1,2,\dots,2N-1 \quad (I.79)$$

pour une fréquence d'approximation ω_{\max} qui peut être choisie $1000\omega_H$, avec $[0, \omega_H]$ est une bande de fréquence d'intérêt pratique, le nombre N est déterminé comme suit :

$$N = \text{Integer} \left(\frac{\log(\tau_0 \omega_{\max})}{\log(\lambda)} \right) + 1 \quad (I.80)$$

I.6.2.2 La réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du système de la fonction (I.71) est de la forme [35]:

soit l'entrée une impulsion unité $E(s) = 1$; alors :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{(1 + s\tau_i)} \tag{I.81}$$

donc la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{1}{\tau_i} (H(\tau_i) \exp(-t/\tau_i)) \tag{I.82}$$

I.6.2.3 La réponse indicielle

La réponse indicielle du système de la fonction (I.71) est de la forme [35]:

soit l'entrée un échelon unité : $E(s) = \frac{1}{s}$; alors :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{s(1 + s\tau_i)} \tag{I.83}$$

donc la réponse indicielle est :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) (1 - \exp(-t/\tau_i)) \tag{I.84}$$

I.6.3 Système d'ordre fractionnaire oscillatoire

Dans ce contexte le système d'ordre fractionnaire oscillatoire est défini comme étant l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire suivante pour $1 < \alpha < 2$ [35] :

$$(\tau_0)^\alpha \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + y(t) = e(t) \tag{I.85}$$

sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]} \quad 1 < \alpha < 2 \tag{I.86}$$

I.6.3.1. Approximation par une fonction rationnelle

La fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire fondamental est :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \tag{I.87}$$

Cette fonction de transfert sera approximée à la forme de l'équation suivante [35]:

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}, \text{ pour } 1 < \alpha < 2$$

$$G(s) \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \quad (I.88)$$

$1 < \alpha < 2 \Rightarrow 0 < 2 - \alpha < 1$ et $(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}$ est un ZPF (zéro à puissance fractionnaire).

Pour représenter un système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (I.87) par un modèle d'un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer pour une bande de fréquence limitée d'intérêt pratique $[0, \omega_H]$ sa fonction de transfert irrationnelle de l'équation (I.87) par une fonction rationnelle. Pour cela on doit approximer le zéro à puissance fractionnaire (ZPF) par une fonction rationnelle dans la bande de fréquence $[0, \omega_H]$ [25].

$$(1 + s\tau_0)^{2-\alpha} = \frac{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (I.89)$$

$G(s) = \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}$; c'est un système du second ordre régulier.

où : $z_0 < p_0 < z_1 < \dots < z_N < p_N$

$$z_i = (ab)^i z_0 \quad i=0,1,\dots,N,$$

$$p_i = (ab)^i p_0 \quad i=0,1,\dots,N$$

$$z_0 = \omega_c \sqrt{b} \quad ; \text{ premier zéro.}$$

$$a = 10^{\lfloor y/10(1-(2-\alpha)) \rfloor}, \quad b = 10^{\lfloor y/10(2-\alpha) \rfloor}, \quad ab = 10^{\lfloor y/10(2-\alpha)(-1+\alpha) \rfloor}, \quad N = \text{Integer} \left(\frac{\log \left(\frac{\omega_{\max}}{z_0} \right)}{\log(ab)} \right) + 1$$

En remplaçant l'approximation du ZPF dans l'équation (I.88) on obtient :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \approx \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})}$$

$$G(s) \approx \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (I.90)$$

Par décomposition en éléments simples on obtient la forme suivante :

$$G(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2 \xi (\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad k_i (i=0,1,\dots,N) \quad (I.91)$$

pour avoir B : posons s=0

$$G(0)=1=B+\sum_{i=0}^N k_i$$

$$\Rightarrow B=1-\sum_{i=0}^N k_i \quad (I.92)$$

pour avoir A : calculons la limite suivante :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 0$$

donc on a :

$$A = -\tau_0^2 \sum_{i=0}^N k_i p_i, \quad \tau_0 = \frac{1}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{\omega_n^2} \sum_{i=0}^N k_i p_i \quad (I.93)$$

$$k_i = G(s) \Big|_{s=-p_i}$$

$k_i (i=0,1,\dots,N)$; sont les résidus des pôles qui peuvent être calculés comme suit :

$$k_i = \frac{1}{(a\sqrt{b}(ab)^i)^2 - 2\xi(a\sqrt{b}(ab)^i) + 1} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (I.94)$$

$$G(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2 \xi (\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_i}}$$

I.6.3.2 La réponse fréquentielle

Soit le système fractionnaire de la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \text{ on peut l'approximer lorsque } 1 < \alpha < 2 \text{ par la fonction suivante [35]:}$$

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}, \quad 1 < \alpha < 2, \quad \tau = \frac{1}{\omega_n}$$

La réponse fréquentielle de (I.87) et (I.91) pour plusieurs valeurs de α est donnée dans la Figure I.4.

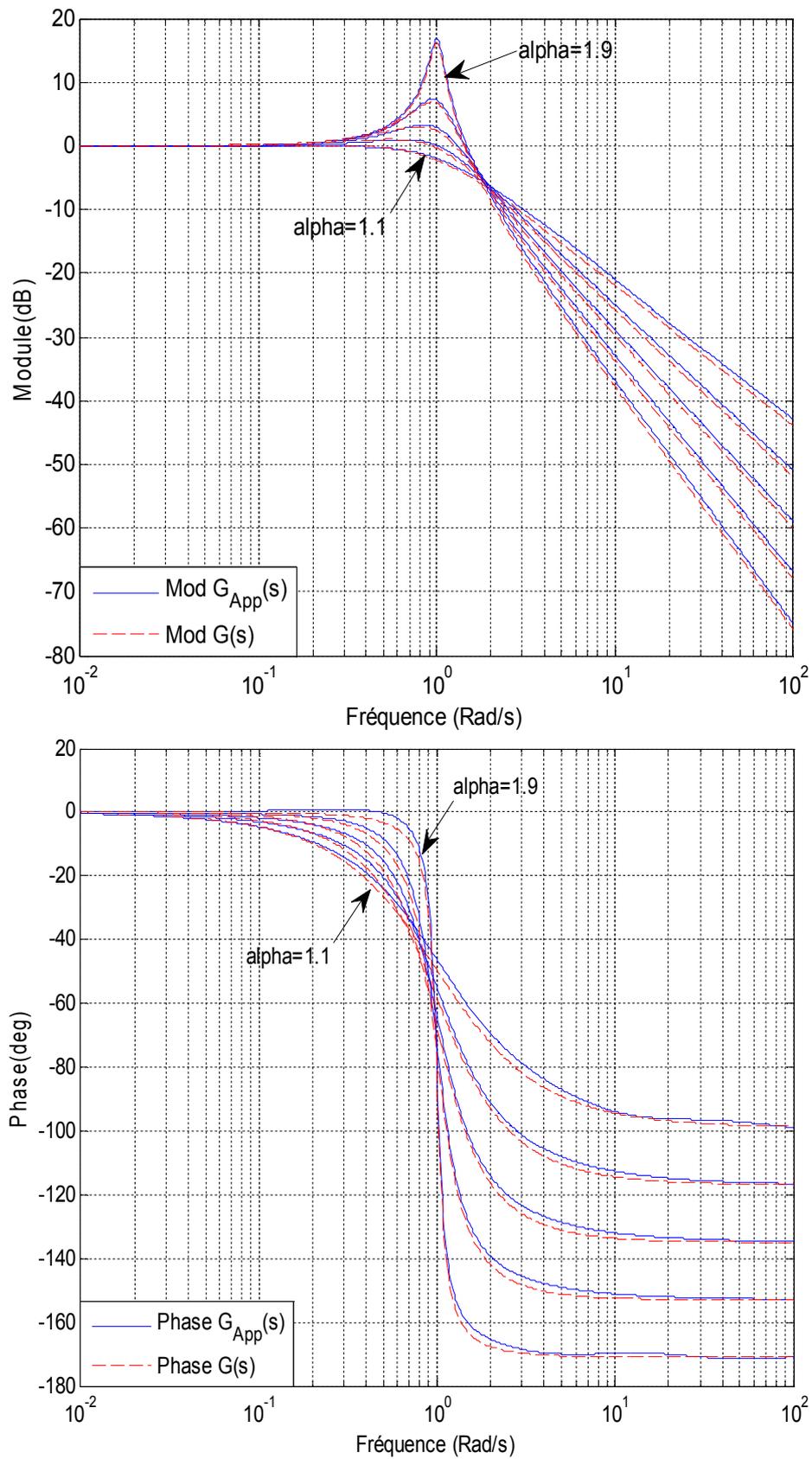


Figure I.4 La réponse fréquentielle de (I.87) et (I.91) pour plusieurs valeurs de α .

De la Figure I.4 on remarque de la réponse fréquentielle de la fonction (I.87) et son approximation (I.88), du système d'ordre fractionnaire oscillatoire que les pentes sont entre -20dB et -40dB en variant l'ordre α . Les deux courbes de la fonction (I.87) et son approximation (I.88) sont presque les mêmes, ce qui signifie la bonne approximation de la fonction (I.88).

I.6.3.3 La réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du système d'ordre fractionnaire oscillatoire, est donnée dans le domaine fréquentiel par la fonction de transfert suivante [35]:

$$Y(s) = \frac{(1+s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} R(s), \quad R(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{(1+s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \approx \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{Z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{P_i})} \quad (I.95)$$

son approximation est :

$$Y(s) = \frac{As+B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{P_i}}, \quad \tau_0 = \frac{1}{\omega_n} \quad (I.96)$$

$$Y(j\omega) = \frac{Aj\omega+B}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + j\frac{\omega}{P_i}} \quad (I.97)$$

A, B et k_i sont calculées à partir des relations (I.92), (I.93) et (I.94) respectivement.

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle de ce système est donnée par la relation suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) + \sum_{i=0}^N k_i P_i e^{-P_i t} \quad (I.98)$$

où la phase φ est donnée par:

$$\varphi = \arctg \frac{A - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{B - A\xi\xi_n} \quad (I.99)$$

La Figure I.5 montre la réponse impulsionnelle pour différentes valeurs de α :

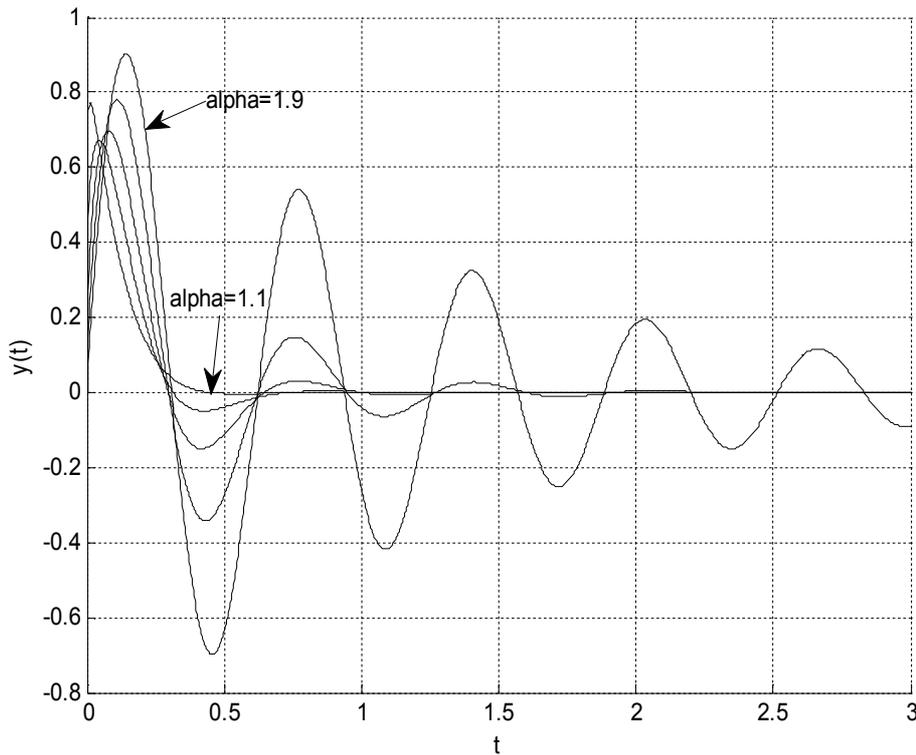


Figure I.5 La réponse impulsionnelle du système pour $y=1\text{dB}$, $\omega_n=1$ et $m=1.1, 1.2, \dots, 1.9$.

I.6.3.4 La réponse indicielle

La même chose pour la réponse indicielle avec : $E(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} E(s)$$

$$Y(s) = \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{s((s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1)} \approx \frac{1}{s((s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1)} \frac{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{Z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \tag{I.100}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse indicielle de ce système est donnée par la relation suivante [35]:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi_1) - \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t} \tag{I.101}$$

où la phase φ_1 est donnée par:

$$\varphi_1 = \text{arctg} \frac{A - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{B - A\xi\omega_n} - \text{arctg} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \tag{I.102}$$

La figure suivante montre le comportement de la réponse indicielle pour plusieurs valeurs de α :

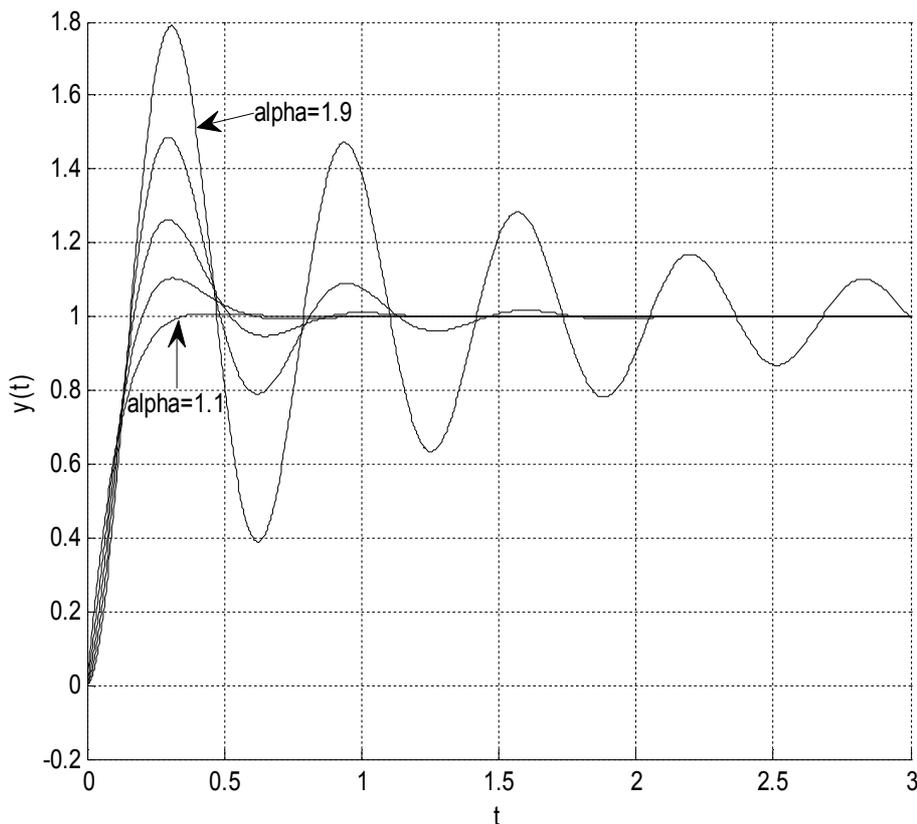


Figure I.6 La réponse indicielle du système pour $y=1\text{dB}$, $\omega_n=1$ et $m=1.1, 1.2, \dots, 1.9$.

La Figure I.6 montre la réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire oscillatoire pour différentes valeurs de α , ce système est moins oscillant lorsque la valeur de l'exposant fractionnaire α , devient de plus en plus petite. Lorsque α tend vers 1, le système se rapproche du système du premier ordre, et les oscillations diminuent. Inversement, lorsque α tend vers 2, le système se rapproche du système du second ordre, et les oscillations augmentent (se rapproche du système du second ordre régulier).

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions de base des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ainsi que leurs représentations et propriétés. La stabilité de ces systèmes a été discutée en montrant la différence de cette notion par rapport au système d'ordre entier.

Nous avons aussi présenté deux types de système d'ordre fractionnaire fondamental et leur approximation par des fonctions rationnelles, leur réponses temporelles et fréquentielles ont été dérivées à partir de ces approximations, ainsi que leur implémentation par des circuits analogiques.

Chapitre II

La Commande Adaptative

II.1 Introduction

Dans le sens commun, "s'adapter" signifie : changer un comportement pour se conformer aux nouvelles circonstances. Intuitivement, un contrôleur adaptatif est donc un contrôleur qui peut modifier son comportement en réponse à l'évolution dynamique du processus et la nature des perturbations. Comme la rétroaction ordinaire tente également de réduire les effets des perturbations et l'incertitude du processus, la question de la différence entre la commande avec rétroaction (boucle de retour) et la commande adaptative apparaît immédiatement. Il y a eu de nombreuses tentatives pour définir la commande adaptative [37]. Lors d'un colloque en 1961 une longue discussion a pris fin par la suggestion suivante : "un système adaptatif, est un système physique qui a été conçu avec un point de vue adaptatif" et un système avec boucle de retour à gain constant n'est pas un système adaptatif.

La recherche sur la commande adaptative était très active au début des années 1950. Elle a été motivée par la conception de pilotages automatiques pour les avions à hautes performances opérant sur une large plage de vitesses et d'altitudes [38]. Il a été constaté que la rétroaction linéaire avec gain constant peut bien fonctionner dans une seule condition de fonctionnement ; mais des difficultés peuvent cependant être rencontrées quand les conditions de fonctionnement changent. Un régulateur plus sophistiqué qui peut bien fonctionner sur une large gamme de conditions de fonctionnement est donc nécessaire. L'introduction de la commande dans l'espace d'état et la théorie de la stabilité dans les années 1960 a contribué au développement de la commande adaptative. La programmation dynamique introduite par Bellman [39] a aussi facilité la compréhension des processus adaptatifs. Une contribution fondamentale a également été faite par Tsypkin [40] qui a montré que de nombreux schémas pour l'apprentissage et la commande adaptative pourraient être décrits dans un cadre commun. Il y avait aussi des développements importants dans l'identification du système. Alors, une renaissance de la commande adaptative s'est produite dans les années 1970 [41], lorsque différents schémas d'estimation ont été combinés avec diverses méthodes de conception. Beaucoup d'applications ont été rapportées, mais les résultats théoriques étaient très limités. A la fin des années 1970 et au début des années 1980, des théorèmes de la stabilité des systèmes adaptatifs sont apparus [42-43], bien qu'ils étaient sous des hypothèses très limitées. Les efforts visant à fusionner les idées de la commande

robuste et l'identification du système sont d'une importance particulière. La recherche de la nécessité de ces hypothèses a suscité de nouvelles et intéressantes recherches dans la robustesse de la commande adaptative, ainsi que dans les contrôleurs globalement stabilisateurs.

A la fin des années 1980 et durant les années 1990, de nouvelles techniques de la robustesse des contrôleurs adaptatifs ont été obtenues [44-46]. L'étude des systèmes non linéaires a également conduit à améliorer de manière significative la compréhension de la commande adaptative. Dans les dernières années, un travail considérable a été fait dans le domaine de la commande adaptative pour les systèmes continus [47-49]. La robustesse des contrôleurs adaptatifs a été un sujet d'activité de recherche intensive au cours de la dernière décennie. Depuis la démonstration de l'absence inhérente de la robustesse des contrôleurs adaptatifs [43,50], une quantité considérable de recherches a été consacrée au développement de ce que l'on appelle "schémas de commande adaptative robuste". Plusieurs modifications intelligentes ont été proposées pour résoudre les problèmes d'instabilité et garantir la robustesse en présence des erreurs de modélisation [51].

Tel qu'il est défini dans [41], un contrôleur adaptatif est un contrôleur avec des paramètres réglables et un mécanisme pour ajuster les paramètres. Pour parler simplement, un système de commande adaptative se compose de deux boucles fermées. Une boucle est une commande de rétroaction régulière avec le processus et le contrôleur et l'autre boucle est la boucle d'ajustement des paramètres comme il est montré dans le schéma ci-dessous.

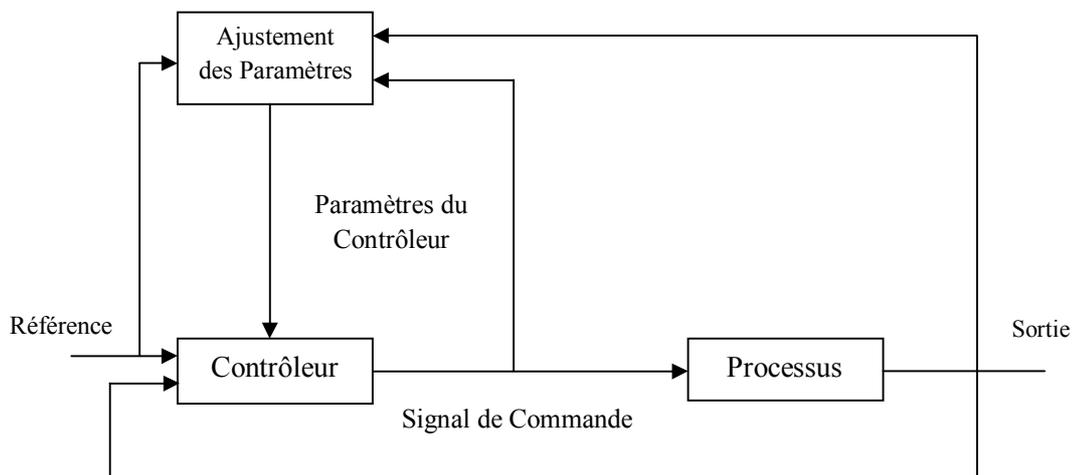


Figure II.1 schéma de la Commande Adaptative

II.2 Commande Auto-Ajustable

L'un des avantages du célèbre régulateur PID est que c'est un contrôleur (régulateur) suffisamment souple pour un grand nombre d'applications. Les trois paramètres de ce régulateur sont généralement facilement ajustés avec le processus en boucle fermée. Il peut cependant y

avoir des cas où l'ajustement est très difficile et prend du temps. L'ajustement automatique des contrôleurs devient donc important. L'idée des régulateurs auto-ajustables a été mise en place afin de simplifier le réglage des contrôleurs industriels. Dans les premières applications les régulateurs auto-ajustables ont été appliqués à des problèmes particuliers [52]. De bonnes règles pour le choix des paramètres peuvent alors être tirées.

II.2.1 Régulateurs Auto-Ajustables (STR)

Cette section donne une brève description des régulateurs auto-ajustables. La discussion est limitée à la commande des systèmes à une seule entrée et une seule sortie (SISO) décrite par

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) (u(t) + \xi(t)) \quad (\text{II.1})$$

où u est l'entrée, y la sortie, ξ est la perturbation et $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sont des polynômes de l'opérateur retard q^{-1} [41].

II. 2.1.1 Principe

Un schéma bloc d'un régulateur auto-ajustable est présenté dans la Figure II. 2 [41].

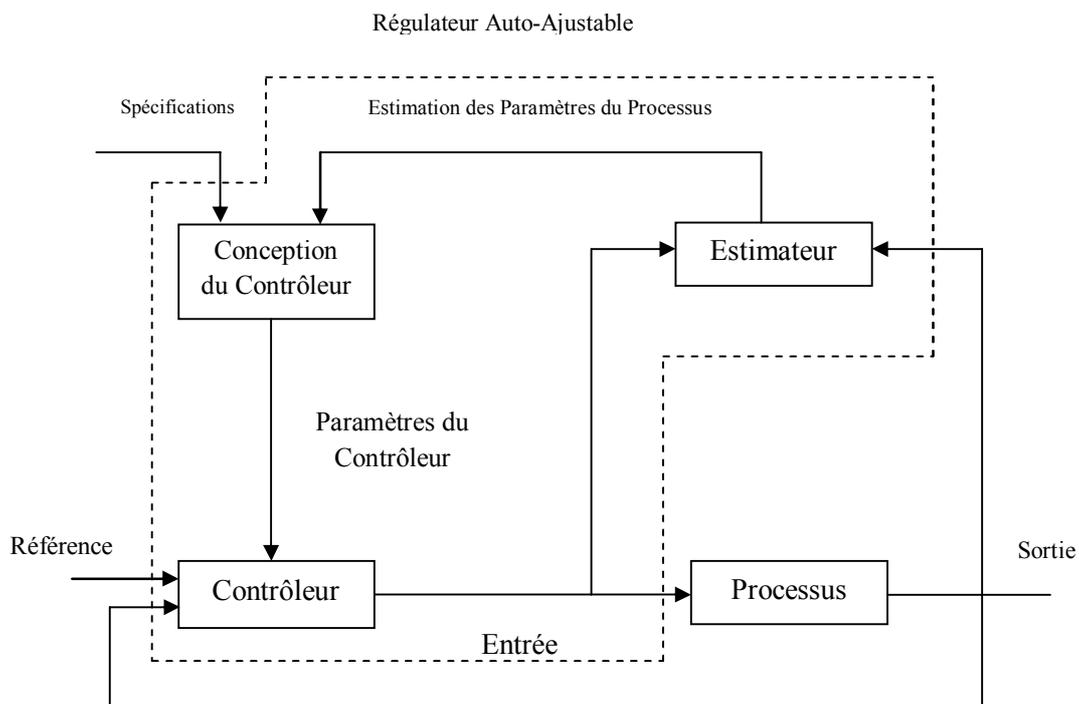


Figure II.2 Schéma d'un Régulateur Auto-Ajustable

L'auto-ajusteur peut être considéré comme étant composé de trois parties : l'estimation des paramètres, le calcul et la conception d'un régulateur avec des paramètres ajustables. Le bloc "estimateur" représente l'estimation en ligne des paramètres du processus en utilisant l'algorithme des moindres carrés ou l'algorithme de projection. Le bloc "Conception du Contrôleur" représente une solution en ligne pour un problème de conception pour un système avec des paramètres connus ou avec des paramètres estimés. Le bloc nommé "Contrôleur" est

pour calculer la commande avec les paramètres du contrôleur calculés par son bloc de processus. Le système peut être considéré comme une automatisation du traitement de la modélisation/estimation et la conception, dans lequel le modèle du processus et la conception de la commande sont mis à jour à chaque intervalle d'échantillonnage. Parfois, l'algorithme STR peut être simplifié par ré-paramétrage et directement estime les paramètres du contrôleur, pas seulement les paramètres du processus. Il est souple en ce que le système STR peut être implémenté par les différents choix des méthodes de conception et d'estimation fondamentales.

L'objectif des régulateurs auto-ajustables est la commande des systèmes avec des paramètres inconnus mais constants. Les régulateurs peuvent également être appliqués à des systèmes avec des paramètres lentement variables. Les régulateurs auto-ajustables peuvent être obtenus en partant d'un système connu et une méthode de conception. L'algorithme de commande est obtenu par l'introduction d'un estimateur de paramètre récursif. Les vraies valeurs des paramètres sont alors remplacées par leurs valeurs estimées lors de la détermination de la loi de commande en utilisant la méthode de conception [52].

Dans la Figure II. 2, la structure indirecte est donnée lorsque les paramètres du processus sont d'abord estimés, et après les paramètres du régulateur sont calculés, sur la base des paramètres estimés du processus. La forme directe unit alors ces deux étapes en une seule, donc, l'estimateur donne automatiquement les paramètres du régulateur qui doivent être donnés dans la relation fonctionnelle avec les paramètres du processus. L'avantage de la structure STR est sa capacité de résoudre plusieurs situations pratiques où nous ne savons pas à l'avance quel type de changement de notre processus va survenir. Contrairement aux systèmes adaptatifs à modèle de référence (MRAS) qui peuvent être réalisés en formes analogique et numérique, le système STR est presque exclusivement réalisé dans une technique numérique. En raison de la nécessité d'estimation de paramètres, la commande STR est parfois lente que la commande MRAS [53].

II.2.2 Conception des Contrôleurs Adaptatifs Auto-Ajustables

La conception des contrôleurs adaptatifs auto-ajustables est spécifique, parce que seulement les méthodes de conception capables de calculer les paramètres du contrôleur en temps réel peuvent être utilisées. Les méthodes classiques (telles que les méthodes fréquentielles, lieu des racines et autres) ne sont pas utiles ici. La théorie de la commande algébrique développée principalement en fin des années soixante-dix permet l'application en temps réel de la procédure de conception. Nous allons présenter la méthode de pôle/zéro qui est peut-être directement liée à l'approche MRAS de la commande adaptative [54-55].

II.2.2.1 Méthode de Conception Algébrique : Placement de Pôle/Zéro

L'idée fondamentale de la méthode de placement de pôle/zéro est très simple [53]. Elle consiste à définir la fonction de transfert de la dynamique désirée du système de commande en boucle fermée et la faire correspondre avec la fonction de transfert en boucle fermée du système réel, où les paramètres du contrôleur sont inconnus et peuvent être reliés aux paramètres du processus. Pour une fonction de transfert d'un processus causal connu donné par :

$$G_p(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \quad (\text{II.2})$$

où les polynômes A et B sont coprimés (premiers entre eux), les paramètres de régulation doivent être calculés de telle sorte que la dynamique souhaitée du système en boucle fermée donnée par le modèle:

$$G_m(q) = \frac{B_m(q)}{A_m(q)} \quad (\text{II.3})$$

est obtenue. La structure de la commande capable de résoudre ce problème est présentée dans la Figure II. 3 [53].

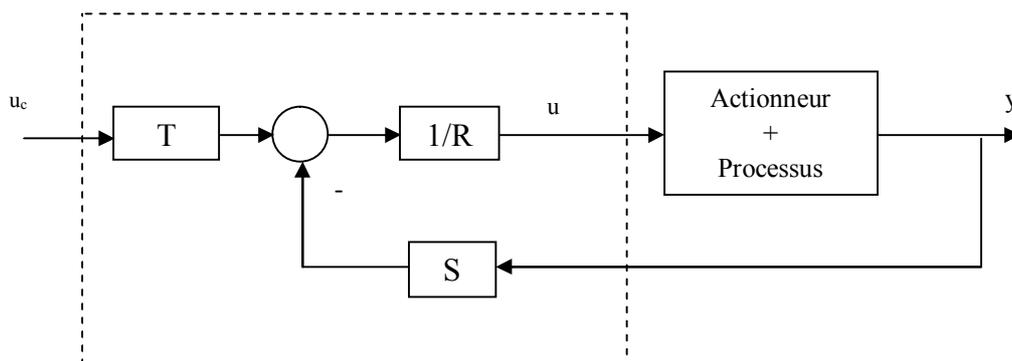


Figure II. 3 Topologie de contrôleur à deux paramètres

La fonction de transfert désirée (II.3) est réalisable si les conditions suivantes sont remplies [56]:

1. le contrôleur doit être causal,
2. le système de commande en boucle fermée est bien posé (boucle fermée causale)
3. le système en boucle fermée est totalement stable
4. il n'y a pas de perte dans le processus

Le système est bien posé ou boucle fermée causale si chaque fonction de transfert pour toutes les combinaisons possibles d'entrées/sorties est causale. Le système est totalement stable si toutes les fonctions de transfert pour toutes les combinaisons possibles entrée/sortie est stable. Il n'y a pas de perte dans le processus, s'il n'y a pas une branche directe à partir du signal de référence au signal de sortie, c.-à-d. la fonction de transfert du système de commande en boucle fermée est strictement propre.

La première condition est nécessaire si nous voulons concevoir un régulateur causal. La deuxième condition est nécessaire si nous voulons développer un système avec une petite sensibilité de bruit, tandis que la troisième condition est nécessaire si nous voulons exclure la compensation de pôle-zéro instable, c'est à dire la poursuite avec le système détectable et/ou stabilisable. La quatrième condition est nécessaire si nous voulons que l'ensemble de l'énergie passe par le processus et qu'il n'y a pas de branches parallèles où cette énergie peut contourner le processus.

Théorème: Implémentation de $G_m(q)$

Pour un processus causal donné par l'équation (II.2), la fonction de transfert du modèle de l'équation (II.3) peut être implémentée si et seulement si $G_m(q)$ est stable et encore:

$$M(q) = \frac{G_m(q)}{G_p(q)} = \frac{N(q)}{D(q)} \tag{II.4}$$

est stable et causal [53].

La condition 4 exprime le fait que $M(q)$ représente la fonction de transfert du signal de référence au signal de commande. Condition 3 a pour conséquence que $G_m(q)$ et $M(q)$ doivent être stables, tandis que la condition 2 résulte que $G_m(q)$ et $M(q)$ doivent être causaux. Les conséquences de ce théorème sont: $G_m(q) = M(q)G_p(q)$ et $\text{Deg}(A_m) - \text{Deg}(B_m) = \text{Deg}(A) - \text{Deg}(B) + \text{Deg}(D) - \text{Deg}(N)$ si $M(q)$ est causale alors: $\text{Deg}(D) \geq \text{Deg}(N)$ et par conséquent:

$$\text{Deg}(A_m) - \text{Deg}(B_m) \geq \text{Deg}(A) - \text{Deg}(B) \tag{II.5}$$

Donc, si (II.5) est valide alors $M(q)$ est causale. La stabilité de $G_m(q)$ et $M(q)$ est satisfaite lorsque les polynômes $A_m(q)$ et $D(q)$ sont Hurwitz. Alors, de (II.4) on aura:

$$M(q) = \frac{N(q)}{D(q)} = \frac{G_m(q)}{G_p(q)} = \frac{B_m(q)A(q)}{A_m(q)B(q)} \tag{II.6}$$

De (II.6), il est évident que, si le polynôme $B(q)$ a des racines à l'extérieur du cercle unité, et si elles ne sont pas compensées par $B_m(q)$, alors $D(q)$ ne peut pas être polynôme Hurwitz (stable) et par conséquent $M(q)$ stable. Ainsi, pour avoir $M(q)$ stable, il est nécessaire que les racines "instables" du polynôme $B(q)$ doivent être contenues dans le polynôme $B_m(q)$. En d'autres termes, zéros "instables" du processus doivent être conservés dans le polynôme désiré $B_m(q)$, c'est à dire le régulateur ne doit pas les compenser.

Corollaire : Implémentation de $G_m(q)$

Si le processus $G_p(q)=B(q)/A(q)$ est causal, alors $G_m(q)=B_m(q)/A_m(q)$ sera réalisable si et seulement si ce qui suit est valide [53]:

1. $[\text{Deg}(A_m) - \text{Deg}(B_m)] \geq [\text{Deg}(A) - \text{Deg}(B)]$, ce qui signifie que le retard du processus doit être plus petit que le retard du système de commande en boucle fermée.

2. tous les zéros instables du processus doivent être contenus dans l'ensemble des zéros de la dynamique en boucle fermée désirée.
3. le polynôme $A_m(q)$ doit être Hurwitz

La topologie du régulateur à retour unitaire présenté sur la Figure II.4 où il est derrière le comparateur permet le placement des pôles en boucle fermée seulement, tandis que les zéros ne peuvent pas être déplacés. Cela est montré à partir de la relation qui correspond à la fonction de transfert du système en boucle fermée avec la fonction de transfert désirée de la dynamique en boucle fermée:

$$G_{cl}(q) = \frac{B(q)S(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} = \frac{B_m(q)}{A_m(q)} = G_m(q) \quad (II.7)$$

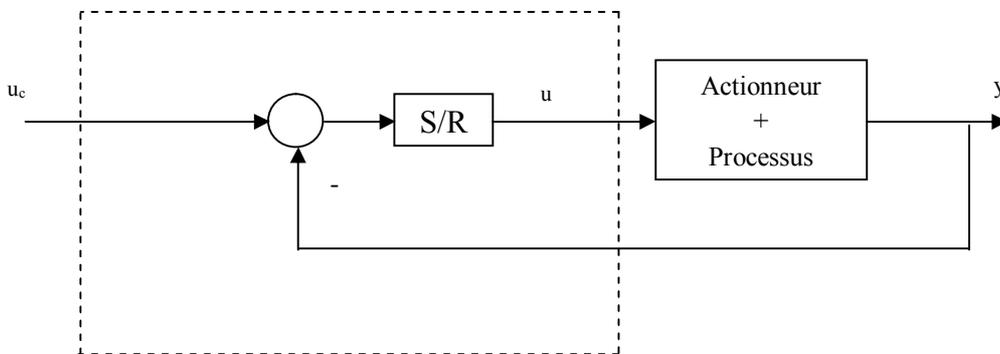


Figure II. 4 Topologie classique de la boucle de retour unitaire

Comme on le voit dans l'équation (II.7), les pôles en boucle fermée peuvent être placés en résolvant l'équation Diophantine:

$$A(q)R(q) + B(q)S(q) = A_m(q) \quad (II.8)$$

L'équation (II.8) peut être résolue pour les polynômes $R(q)$ et $S(q)$ si on connaît les polynômes $A(q)$, $B(q)$ et $A_m(q)$. Cependant, les zéros en boucle fermée ne peuvent pas être placés à volonté, parce que de (II.7) les zéros en boucle fermée sont définis par $B(q)S(q) = B_m(q)$.

Le fait que le polynôme $S(q)$ soit déjà obtenu de (II.8), les zéros en boucle fermée seront constitués par les zéros du processus en boucle ouverte donnés par les racines du polynôme $B(q)$ et les zéros du contrôleur donnés par les racines du polynôme $S(q)$. Donc, on a aucune possibilité avec la topologie classique de placer les zéros en boucle fermée aux lieux désirés donnés par $B_m(q)$. Cependant, la topologie de régulateur à deux paramètres de la Figure II. 3 peut résoudre le problème de placement des pôles et des zéros. Pour cette topologie (II.7) devient:

$$G_{cl}(q) = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} = \frac{B_m(q)}{A_m(q)} = G_m(q) \quad (II.9)$$

Comme on le voit dans (II.9) l'équation de Diophantine responsable de placement de pôles est la même que (II.8). Bien que l'équation pour le placement des zéros devienne:

$$B(q)T(q) = B_m(q) \quad (II.10)$$

Ainsi, nous pouvons conclure que deux paramètres de topologie nous donnent deux degrés de liberté:

1. Pour placer les pôles (par les polynômes $R(q)$, $S(q)$ et une partie du contrôleur agissant dans la boucle de retour)
2. Pour placer les zéros (par le polynôme $T(q)$ et une partie du contrôleur agissant dans la boucle directe).

Due à la capacité et à la simplicité de la solution, cette topologie est plus souvent trouvée dans la littérature de la commande adaptative traitant la commande auto-ajustable. L'équation $B(q)T(q)=B_m(q)$ représente les zéros du processus (racines du polynôme $B(q)$) ainsi que les zéros du polynôme $T(q)$ contenus dans l'ensemble des zéros en boucle fermée.

La seule façon pour enlever des zéros du processus est de les compenser avec un certain nombre de pôles, tandis que d'autres zéros en boucle fermée peuvent être placés à volonté avec le polynôme $T(q)$. Si le polynôme B est factorisé comme: $B=B^-B^+$, où B^- représente le polynôme dont les racines sont instables ou mal amortis, tandis que B^+ représente un polynôme monic dont les racines sont stables ou bien amorties, alors:

1. pour avoir $G_m(q)$ stable, $B_m(q)$ doit être factorisée comme suit:

$$B_m(q) = B^-(q)B'_m(q) \quad (II.11)$$

Ce qui implique que les zéros instables du processus ne peuvent pas être changés, mais doivent être inclus dans B_m . L'équation (II.11) montre que si les zéros instables du processus ne peuvent pas être changés, le polynôme B_m est divisé en deux polynômes, le polynôme B^- contient les zéros instables de B_m et le polynôme B'_m contient les zéros stables de B_m .

2. L'hypothèse était que les polynômes A et B sont premiers entre eux et que seul les zéros stables ou bien amortis peuvent être compensés. Comme B^+ est un facteur de B , donc, il doit être aussi facteur de R pour factoriser le polynôme en boucle fermée $AR+BS$. Nous avons donc:

$$R(q) = B^+(q)R'(q) \quad (II.12)$$

Finalement de (II.9) on a:

$$\frac{B^-B^+T}{B^+(AR'+B^-S)} = \frac{B^-B'_m}{A_m}$$

$$\frac{T}{(AR' + B^-S)} = \frac{B'_m}{A_m} \quad (II.13)$$

Avec ces décompositions et compensations, nous réduisons le degré du système en boucle fermée. Pour résoudre uniquement l'équation Diophantine, les degrés des polynômes des deux membres de l'équation doivent être égaux.

Afin de résoudre l'équation Diophantine uniquement, il devrait exister un polynôme A_0 (appelé polynôme observateur) qui devrait être compensé par le second membre de l'équation (II.13):

$$\frac{T}{(AR' + B^-S)} = \frac{B'_m A_0}{A_m A_0} \quad (II.14)$$

Finalement, nous avons les équations suivantes qui doivent être résolues pour le problème de placement pôle/zéro. Pour les pôles en boucle fermée, l'équation Diophantine:

$$AR' + B^-S = A_m A_0 \quad (II.15)$$

Pour les zéros en boucle fermée :

$$T = B'_m A_0 \quad (II.16)$$

Des calculs simples montrent que les conditions de causalité données par:

$$\deg R \geq \deg T$$

$$\deg R \geq \deg S$$

sont satisfaites si:

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B \quad (II.17)$$

Algorithme 2.1: placement de Pôle/zéro

Données initiales:

- Le modèle du processus est donné par la fonction de transfert : $B(q)/A(q)$
- Polynôme observateur connu $A_0(q)$
- Dynamique en boucle fermée désirée donnée par la fonction de transfert implémentable: $B_m(q)/A_m(q)$
- Région de stabilité Ω définie par l'utilisateur

Les conditions suivantes doivent être remplies:

- $B_m(q) = B^-(q)B'_m(q)$
- $\deg A_m = \deg A$
- $\deg B_m = \deg B$
- $\deg A_0 = \deg A - \deg B^+ - 1$

Etape1: factoriser le polynôme B comme suit: $B = B^-B^+$

Etape2: factoriser polynôme B_m tel que: $B_m = B^- B_m'$

où B^+ est monique avec toutes ses racines à l'intérieur de la région de "stabilité" Ω , et B^- a toutes ses racines hors de la région de "stabilité" Ω .

Etape3: résoudre l'équation de Diophantine:

$$AR' + B^-S = A_m A_0 \quad (II.18)$$

pour trouver une solution R' et S telle que:

$$\deg S < \deg A \quad (II.19)$$

Etape4 : la loi de commande est alors:

$$R(q)u(k) = T(q)u_c(k) - S(q)y(k) \quad (II.20)$$

où:

$$R = B^+ R' \quad (II.21)$$

$$\deg R \geq \deg S \quad (II.22)$$

et:

$$T = B_m' A_0 \quad (II.23)$$

$$\deg T \leq \deg R \quad (II.24)$$

Pour les systèmes stochastiques décrits par des modèles mathématiques ARMAX, le polynôme observateur optimal A_0 est égal à un polynôme C . L'équation (II.15) devient alors, [57]:

$$AR' + B^-S = A_m C \quad (II.25)$$

L'équation (II.25) montre que le polynôme C doit également être Hurwitz si nous voulons avoir un système en boucle fermée stable. L'algorithme de placement de pôle/zéro donnée ci-dessus est applicable non seulement pour les systèmes déterministes, mais aussi pour les systèmes stochastiques.

II.2.3 Régulateur Auto-Ajustable Indirecte

Pour simplifier, on suppose que la perturbation ξ dans l'équation (II.1) est nulle.

II.2.3.1 Estimation

Plusieurs méthodes récursives d'estimation peuvent être utilisées pour estimer les coefficients des polynômes A et B . Dans ce contexte, on a utilisé l'estimateur des moindres carrés récursives. Le modèle du processus de l'équation (II.1) peut être écrit explicitement comme suit [41] :

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - \dots - a_n y(t-n) + b_0 u(t-d_0) + \dots + b_m u(t-d_0-m) \quad (II.26)$$

Notez que le degré du système est $\max(n, d_0+m)$. Le modèle est linéaire par rapport aux paramètres et peut être écrit comme suit :

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta \quad (\text{II.27})$$

où

$$\theta^T = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad \dots \quad b_m) \quad (\text{II.28})$$

$$\varphi^T(t-1) = (-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n) \quad u(t-d_0) \quad \dots \quad u(t-d_0-m)) \quad (\text{II.29})$$

L'estimateur des moindres carrés avec oubli exponentiel est donné par :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)$$

$$K(t) = P(t-1)\varphi(t-1)(\lambda + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1))^{-1} \quad (\text{II.30})$$

$$P(t) = (I - K(t)\varphi^T(t-1))P(t-1)/\lambda$$

Si le signal d'entrée du processus est suffisamment excitant et la structure du modèle estimé est compatible avec le processus, les estimations convergent à leurs vraies valeurs. Il faut qu'on ait un nombre égale à $\max(n, m+d_0)$ échantillons avant que le vecteur de régression soit définie. Dans le cas déterministe, il faut au moins $n+m+1$ échantillons supplémentaires pour déterminer les $n+m+1$ paramètres du modèle, en supposant que l'entrée du processus est constamment excitante, il faut donc au moins

$$N = n + m + 1 + \max(n, m + d_0) \quad (\text{II.31})$$

échantillons pour que l'algorithme converge. Avec l'estimateur des moindres carrés récursives initialisé avec une matrice P de grandes valeurs, il peut prendre un peu plus d'étape. Comme l'entrée du processus est générée par la boucle de retour, il peut être difficile d'assurer qu'elle est constamment excitante. La présence de bruit du processus peut également ralentir la convergence.

II.2.3.2 Auto-Ajusteur Indirect

Par la combinaison de l'estimateur des moindres carrés récursives (MCR) donné par l'équation (II.30) avec la méthode de placement de pôles pour la conception du régulateur donné par l'algorithme 2.1, on obtient le régulateur auto-ajustable suivant :

Algorithme 2.2 : Régulateur Auto-Ajustable Indirect

Données: On donne les spécifications sous forme polynômiale A_m , B_m et l'observateur désiré A_0 .

Etape 1: Estimer les coefficients des polynômes A et B de l'équation (II.1) en utilisant la méthode des moindres carrés récursives donnée par l'équation (II.30).

Etape 2: Appliquer la méthode de placement de pôles donnée par l'algorithme 2.1 où les polynômes A et B sont les estimations obtenues à l'étape 1. Les polynômes R, S et T de la loi de commande sont alors obtenus.

Etape 3: Calculer la variable de commande de l'équation (II.20), soit :

$$Ru(t) = Tu_c(t) - Sy(t) \quad (II.32)$$

Répéter les étapes 1, 2, 3, à chaque période d'échantillonnage. Notez qu'il existe quelques variations dans l'algorithme en fonction de compensation des zéros du processus. Notez aussi qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer les étapes 1 et 2 à chaque intervalle d'échantillonnage.

II.2.4 Régulateurs Auto-Ajustables Directe

Le calcul dans les régulateurs auto-ajustables indirects peut prendre beaucoup de temps et il est mal conditionné pour certaines valeurs des paramètres. Il est possible de tirer un autre algorithme dans lequel les calculs sont simplifiés, voir éliminés. L'idée est d'utiliser les équations de conception pour reparamétriser le modèle en fonction des paramètres du contrôleur. Ce reparamétrage est aussi la clé pour la compréhension de la relation entre les systèmes adaptatifs à modèle de référence et les régulateurs auto-ajustables [41].

Considérons un processus décrit par l'équation suivante :

$$Ay(t) = Bu(t) \quad (II.33)$$

et la réponse désirée donnée par l'équation suivante:

$$A_m y_m(t) = B_m u_c(t) \quad (II.34)$$

Le modèle de processus va maintenant être reparamétriser en fonction des paramètres du régulateur. Pour ce faire, considérons l'équation Diophantine (II.15) donnée par :

$$A_0 A_m = AR' + B^- S$$

En l'appliquant à $y(t)$, on obtient

$$A_0 A_m y(t) = R' Ay(t) + B^- Sy(t) = R' Bu(t) + B^- Sy(t)$$

où, on a:

$$R'B = R'B^+ B^- = RB^-$$

où

$$A_0 A_m y(t) = B^- (Ru(t) + Sy(t)) \quad (II.35)$$

On note que cette équation peut être considérée comme un modèle de processus qui est paramétré par les coefficients des polynômes B^- , R, et S. Si les paramètres dans le modèle donné par l'équation (II.35) sont estimés, la loi de commande est donc obtenue directement, sans autres

calculs. On note aussi que le modèle de l'équation (II.35) est non linéaire par rapport aux paramètres parce que le second membre est multiplié par B^- . Cette difficulté peut être évitée dans le cas particulier des systèmes à phase minimale dans laquelle $B=b_0$, qui est une constante.

II. 2.4. 1 Systèmes à phase minimale

Si la dynamique du processus est à phase minimale, on a $A_0=\deg A-\deg B-1$, B^- est tout simplement une constante, et l'équation (II.35) devient :

$$A_m A_0 y(t) = b_0 (Ru(t) + Sy(t)) = \tilde{R}u(t) + \tilde{S}y(t) \quad (II.36)$$

où R est un polynôme monic, $\tilde{R} = b_0 R$ et $\tilde{S} = b_0 S$. Comme R et \tilde{R} ne diffèrent que par R soit monic, on n'utilisera pas une notation différente dans ce qui suit. Lorsque cela est nécessaire, on notera seulement à chaque fois si R est ou n'est pas monic.

Lorsque tous les zéros du processus sont compensés, il est aussi naturel de choisir les spécifications telle que :

$$B_m = q^{d_0} A_m(1)$$

où $d_0 = \deg A - \deg B$. cela donne une réponse avec un retard minimal et un gain statique unité en introduisant le vecteur des paramètres

$$\theta = (r_0 \quad \dots \quad r_1 \quad s_0 \quad \dots \quad s_1) \quad (II.37)$$

et le vecteur de régression

$$\varphi(t) = (u(t) \quad \dots \quad u(t-1) \quad y(t) \quad \dots \quad y(t-1)) \quad (II.38)$$

Le modèle donné par l'équation (II.36) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\eta(t) = A_0^*(q^{-1})A_m^*(q^{-1})y(t) = \varphi^T(t-d_0)\theta \quad (II.39)$$

Comme $\eta(t)$ peut être calculée à partir de $y(t)$, elle peut être considérée comme un signal de sortie auxiliaire et une estimation réursive de paramètres peut être obtenue.

Cette méthode d'estimation fonctionne bien s'il y a un petit bruit, mais l'opération $A_0^*(q^{-1})A_m^*(q^{-1})y(t)$ peut amplifier le bruit significativement. La méthode suivante permet d'éviter cela. On réécrit l'équation (II.36) comme suit:

$$y(t) = \frac{1}{A_0 A_m} (Ru(t) + Sy(t)) = R^* u_f(t-d_0) + S^* y_f(t-d_0) \quad (II.40)$$

où

$$u_f(t) = \frac{1}{A_0^*(q^{-1})A_m^*(q^{-1})} u(t) \quad (II.41)$$

$$y_f(t) = \frac{1}{A_0^*(q^{-1})A_m^*(q^{-1})} y(t)$$

et $d_0 = \deg A - \deg B$. On a de plus supposé que $\deg R = \deg S = \deg(A_0 A_m) - d_0 = 1$. l'équation (II.40) peut être utilisée pour l'estimation avec les moindres carrés récursives. Si on introduit:

$$\theta = (r_0 \quad \dots \quad r_1 \quad s_0 \quad \dots \quad s_1)$$

et

$$\varphi(t) = (u(t) \quad \dots \quad u(t-1) \quad y(t) \quad \dots \quad y(t-1))$$

On peut l'écrire comme

$$y(t) = \varphi^T(t - d_0)\theta$$

Les estimations sont alors obtenues de manière récursive à partir des équations (II.30).

L'algorithme de commande adaptative suivant est alors obtenu.

ALGORITHM 2.3 Régulateur Auto-Ajustable Direct Simple

Données: les spécifications en termes de polynômes A_m , B_m et A_0 et du degré relatif du système d_0 .

Etape 1: Estimer les coefficients des polynômes R et S dans le modèle (II.40) soit,

$$y(t) = R^* u_f(t - d_0) + S^* y_f(t - d_0)$$

par les moindres carrés récursives des équations (II.35)

Etape 2: Calculer le signal de commande à partir de :

$$R^* u(t) = T^* u_c(t) - S^* y(t)$$

avec R et S sont obtenus des estimations dans l'étape 1 et

$$T^* = A_0^* A_m(1) \tag{II.42}$$

avec $\deg A_0 = d_0 - 1$, on répète les étapes 1 et 2 à chaque période d'échantillonnage.

L'équation (II.42) est obtenue à partir de l'observation que l'opérateur de transfert en boucle fermée entre le signal de commande u_c et la sortie du processus y est

$$\frac{TB}{AR + BS} = \frac{Tb_0 B^+}{b_0 A_0 A_m B^+} = \frac{T}{A_0 A_m}$$

En exigeant que cela soit égal à $q^{d_0} A_m(1)/A_m$ on obtient l'équation (II.42).

Remarque 1: Une comparaison avec l'algorithme 2.2 montre que l'échelon correspondant à la conception de la commande manque dans l'algorithme 2.3. Ce qui motive le nom "de l'algorithme direct".

Remarque 2: Notez qu'il est nécessaire de connaître le degré relatif d_0 du processus a priori.

Remarque 3: Les polynômes R et S contiennent le facteur b_0 . Notez que le polynôme R n'est pas monique et que le paramètre r_0 doit être différent de zéro. Sinon, la loi de commande donnée par l'équation (II.32) n'est pas causale. Comme d_0 est le degré relatif du processus, la valeur vraie de $r_0 = b_0$ est différente de zéro. Toute estimation constante du paramètre sera ainsi différente de

zéro. L'estimation obtenue pour un temps fini peut, cependant, être égal à zéro. En pratique, il est donc indispensable de prendre quelques précautions.

Remarque 4: Notez que l'hypothèse $B \neq b_0$ implique que tous les zéros du processus sont compensés. C'est la raison pour laquelle l'algorithme nécessite que le processus doit être à phase minimale.

II.3 Commande Adaptative à Modèle de Référence (MRAC)

La Commande adaptative à modèle de référence (MRAC) se réfère à une classe particulière de la commande adaptative. La commande MRAC est l'une des approches les plus populaires de la commande adaptative, en raison de sa simplicité et de son haut niveau de performance. Dans cette classe, les contrôleurs adaptatifs sont conçus en utilisant un modèle de référence pour décrire les caractéristiques désirées du processus à commander. L'utilisation de certains modèles de référence facilite l'analyse des systèmes adaptatifs et fournit un environnement stable. Le schéma original pour un système MRAC proposé par Whitaker en 1958 a été introduit pour la commande des avions [49].

Le système de base comprend le modèle de référence, le processus à commander, le mécanisme d'ajustement et un contrôleur adaptatif. Le modèle de référence est un modèle idéal, sa sortie $y_m(t)$ représente directement la réponse dynamique désirée.

Le système MRAC a deux boucles: une boucle interne (ou boucle de régulation) qui est une boucle de commande ordinaire constituée du processus et du contrôleur et une boucle externe (ou boucle d'adaptation) qui ajuste les paramètres du contrôleur de manière à ce que l'erreur entre la sortie du modèle et la sortie du processus soit égale à zéro, comme il est représenté dans la Figure II. 5.

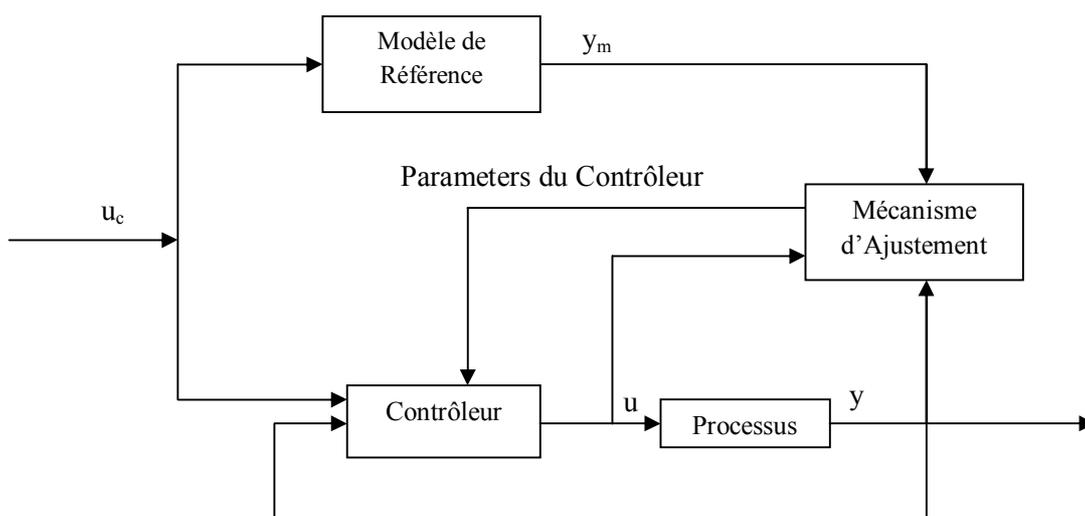


Figure II. 5 Commande adaptative à model de référence directe

II.3.1 La Règle MIT

La méthode du gradient ou la règle MIT a été développée dans le Massachusetts Institute of Technology (MIT); elle est utilisée pour appliquer l'approche MRAC à un système pratique. Dans cette règle la fonction du coût ou la fonction de perte est définie comme

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \quad (\text{II.43})$$

où, e est l'erreur de la sortie ; elle est la différence entre la sortie du modèle de référence et le modèle réel. θ est le paramètre ajustable connu sous le nom du paramètre de commande. Dans cette règle le paramètre θ est ajusté de telle sorte que si la fonction de coût est minimisée ; alors il est raisonnable de changer le paramètre dans la direction du gradient négatif de J , soit:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} \quad (\text{II.44})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (\text{II.45})$$

Le terme dérivée partielle $\partial e / \partial \theta$, est appelée la dérivée de la sensibilité du système. Cela montre comment l'erreur est dépendante du paramètre ajustable θ . Il existe plusieurs alternatives pour choisir la fonction de coût J . Par exemple, elle peut également être considérée comme le mode d'erreur. De même $d\theta/dt$ peut aussi avoir différentes relations pour différentes applications.

L'algorithme du sign-sign:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \text{sign}\left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right) \text{sign}(e) \quad (\text{II.46})$$

ou bien il peut être choisi comme :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right) \text{sign}(e) \quad (\text{II.47})$$

où: $\text{sign}(e) = 1$ pour $e > 0$
 $= 0$ pour $e = 0$
 $= -1$ pour $e < 0$

Dans certaines applications industrielles, il est constaté que le choix du gain d'adaptation est critique et sa valeur dépend des niveaux du signal. Donc, la règle MIT doit être modifiée comme :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \varphi e \quad (\text{II.48})$$

où $\varphi = \frac{\partial e}{\partial \theta}$ et

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\varphi e}{\beta + \varphi^T \varphi} \quad (\text{II.49})$$

où $\beta > 0$ est introduit pour éviter la division par zéro lorsque $\varphi^T \varphi$ est petit.

II.4 La Commande Adaptative à Grand Gain

La commande à grand gain est un outil bien connu et populaire pour la stabilisation robuste des systèmes de commande qui satisfont certaines hypothèses sur le processus. L'amplitude appropriée du gain dépend des caractéristiques du processus qui sont souvent incertaines. Donc, le choix du gain peut être soit inefficace (trop petit), ou il y a une exploitation excessive d'actionneur (trop élevé), certaines propriétés du système à commander, comme l'ordre du système, le signe de son gain en hautes fréquences et la taille de l'incertitude, doivent être connus. Dans plusieurs cas, ces informations ne sont pas disponibles ou l'effort pour les obtenir ne peut être justifié. Afin de contourner ce problème, le paramètre de grand gain peut être déterminé de manière adaptative. Car aucun mécanisme d'identification n'est utilisé, cette stratégie de commande adaptative est généralement appelée commande adaptative non basée sur l'identification et prend souvent la forme simple:

$$\begin{aligned} u(t) &= -k(t)y(t) \\ \dot{k}(t) &= \|y(t)\|^2, k(0) = k_0 \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

Cette approche a été introduite par Mareels (1984), Martensson (1985), Morse (1983) et Willems et Byrnes (1984) pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Elle n'est pas basée sur l'identification du système ou sur les algorithmes d'estimation des paramètres du processus. Ils ont montré que les contrôleurs adaptatifs continus à grand gain de l'équation (II.50) stabilisent tout système à une seule entrée, une seule sortie, à phase minimale et un gain en hautes fréquences positif [58].

Si le système nominal est linéaire et satisfait les hypothèses nécessaires, la stabilité du système à commander peut être garantie pour une large classe d'incertitudes. De plus, quelques lois de commande atteignent une désensibilisation arbitraire du système de commande à boucle de retour.

Il n'y a que peu d'articles disponibles où le système nominal est supposé non linéaire plutôt qu'avec des perturbations non linéaires [59]. Une première approche est due à Byrnes et Isidori (1984) qui considèrent les systèmes à une seule-entrée/une seule-sortie (SISO) d'ordre un, avec degré relatif unité et de signe connu du gain en hautes fréquences. Khalil et Saberi (1987) et Saberi et Lin (1990) ont considéré également le problème de stabilisation du grand gain adaptatif avec les paramètres du grand gain, qui est augmenté en ligne à des instants de temps discrets. Leur approche est basée sur la théorie des perturbations singulières et permet au système

multivariable secondaire d'avoir un degré relatif arbitraire puissant, mais connu; un ordre fini. Cependant, le «signe du gain en hautes fréquences» doit être connu. Une simple modification de (II.50) a également été appliquée avec succès pour stabiliser d'une façon adaptative un système à une seule-entrée/une seule-sortie (SISO), de degré relatif unité avec ordre inconnu et un champ de dérive de vecteurs positivement homogène (voir Ryan, 1995) [60].

II.4.1 Système Considéré et Contrôleur proposé

Considérons un système incertain décrit par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{II.51a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{II.51b}$$

où $t \in \mathfrak{R}$ est la variable de temps, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est l'état avec n inconnu, $u(t) \in \mathfrak{R}$ est la commande scalaire d'entrée et $y(t) \in \mathfrak{R}$ est la sortie scalaire mesurée, A, B, C sont des matrices inconnues de dimensions appropriées. On suppose ce qui suit :

Hypothèse 1: (A, B) est contrôlable et (C, A) est observable.

Supposons que le système (II.51) est un sujet de contrôleur linéaire à retour de sortie avec un gain $-k \in \mathfrak{R}$, c.-à-d.,

$$u = -ky \tag{II.52}$$

Alors, le système à commander avec boucle de retour résultant, peut être décrit par:

$$\dot{x} = \tilde{A}(k)x \tag{II.53}$$

avec

$$\tilde{A}(k) := A - kBC \tag{II.54}$$

Le système (II.53) est asymptotiquement stable si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que,

$$\text{Re}(\lambda) \leq -\varepsilon \text{ pour tout } \lambda \in \sigma[\tilde{A}(k)] \tag{II.55}$$

où $\sigma[\tilde{A}(k)]$ représente l'ensemble des valeurs propres de $\tilde{A}(k)$. Cela conduit aux définitions suivantes:

Définition 1. Le system (II.51) est uniformément stabilisable via un grand gain à retour de sortie si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ et $\underline{k} \in \mathfrak{R}$ tel que (II.55) est vérifiée pour tout $k \geq \underline{k}$.

Définition 2. Le système (II.51) est à phase minimale si :

$$\det \begin{pmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ a tous ses zéros dans } \mathbb{C}^-$$

Définition 3. Le système (II.51) a un degré relatif un si :

$CB \neq 0$, CB est alors appelé le gain en hautes fréquences.

L'hypothèse suivante est faite.

Hypothèse 2: Le system (II.51) est uniformément stabilisable via un grand gain à retour de sortie.

Le contrôleur adaptatif considéré ici c'est une version de paramètres adaptatifs simples de (II.52), il est donné par

$$u = -ky \quad (\text{II.56a})$$

$$\dot{k} = \gamma y^2 \quad (\text{II.56b})$$

où $k(t) \in \mathfrak{R}$ est le paramètre adaptatif et γ est un nombre réel positif.

II.4.2 Stabilité de la commande à grand gain

On peut citer le théorème suivant,

Théorème 1 Considérons un système SISO décrit par (II.51), si en plus il est de phase minimale avec un degré relatif unité et possède un gain positif en hautes fréquences, alors il est uniformément stabilisable par le régulateur adaptatif à grand gain (II.52).

Preuve du Théorème 1.

Pour la démonstration voir les références [61-64].

II.4.3 Résultat Important

Avant de procéder à une démonstration du théorème 1, nous avons besoin du théorème suivant.

Théorème 2. Considérons un système décrit par

$$\dot{x} = [A - k(t)BC]x \quad (\text{II.57a})$$

$$y = Cx \quad (\text{II.57b})$$

où A, B, C satisfait les hypothèses 1, 2 et $k(\cdot) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}, t_0 < t_1$, est une fonction différentiable satisfaisante

$$\dot{k}(t) \geq 0 \quad (\text{II.58})$$

Alors il existe $\underline{k} \in \mathfrak{R}$ et $\varepsilon > 0$ tel que si et seulement si $k(t) \geq \underline{k}$ pour tout $t \geq t_0$, et $x(\cdot) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ est une solution de (II.57a) alors

$$|y(t)| \leq M e^{-\varepsilon(t-t_0)} \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1) \quad (\text{II.59})$$

Pour un certain M .

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté différents types de la commande adaptative, commençant par des définitions de base de la commande auto-ajustable, où on a vu qu'est ce qu'un régulateur auto-ajustable (STR), son principe de fonctionnement par placement de pôles/zéros, les régulateurs auto-ajustables indirectes et directes. Comme on a présenté aussi la commande adaptative à modèle de référence (MRAC) par la définition de la règle MIT. Dans cette section on a vu aussi qu'est ce qu'un système de commande à grand gain, avec

l'introduction de quelques notions du schéma de commande adaptative à grand gain pour une classe de systèmes linéaires invariants dans le temps. Notre objectif est d'introduire des opérateurs d'ordre fractionnaire dans cet algorithme de commande, de démontrer sa stabilité et de comparer ses performances avec celles du schéma initial.

Chapitre III

Commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire

III. 1. Introduction

Les contrôleurs basés sur le calcul d'ordre fractionnaire gagnent de plus en plus d'intérêts parmi les chercheurs du domaine de la commande. Ces contrôleurs peuvent avoir des opérateurs et/ou des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur structure ou implémentation. Ils ont été introduits dans les applications de commande dans un effort continu d'améliorer les performances de commande du système.

Dans ce chapitre, nous allons, premièrement, proposer un schéma d'un contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire à grand gain avec retour de sortie pour une classe de système linéaire, invariant dans le temps, à phase minimale, monovariante (single input-single output, SISO) et de degré relatif un. Nous avons aussi proposé un contrôleur adaptatif à grand gain en modifiant le concept de σ -modification par le biais du calcul d'ordre fractionnaire.

III. 2 Contrôleur Adaptatif d'Ordre Fractionnaire à Grand-Gain

Dans cette section on va présenter le premier schéma proposé de contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire à grand gain avec retour de sortie pour une classe de systèmes linéaire invariant dans le temps à phase minimale, à une seule entrée, une seule sortie (SISO) et de degré relatif unité. L'idée fondamentale de ce nouveau schéma est l'introduction d'une intégration d'ordre fractionnaire en plus de l'intégration régulière de la sortie du système dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande. On a montré que ce contrôleur peut stabiliser asymptotiquement la classe de systèmes considérés. Ce contrôleur peut également résoudre le problème de poursuite de la sortie d'une référence échelon unité. Les résultats de simulation d'un exemple illustratif sont présentés pour montrer l'amélioration de la qualité de commande en utilisant le schéma de commande proposé comparé au schéma de commande classique.

III. 2. 1 Propriété de l'intégration d'ordre fractionnaire

Dans ce travail, les définitions de Riemann-Liouville de l'intégration et de la différentiation d'ordre fractionnaire ont été utilisées. Ainsi, pour le cas $0 < \alpha < 1$, $f(t)$ étant une fonction causale de t , c.à.d., $f(t) = 0$ pour $t < 0$, l'intégrale d'ordre fractionnaire est définie comme :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [(t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)] d\tau \quad (III.1)$$

et la dérivée d'ordre fractionnaire est également donnée comme :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left\{ I^{(1-\alpha)} f(t) \right\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t [(t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)] d\tau \right\} \quad (III.2)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma. Une des propriétés de l'opérateur d'intégration fractionnaire $I^\alpha = I_{0^+}^\alpha$ est le fait d'être borné dans l'espace $L_p(0, t_1)$ ($1 \leq p \leq \infty$) avec la norme $\|f\|_p$.

Lemme :

Les opérateurs d'intégration fractionnaire $I_{0^+}^\alpha$ avec $\alpha > 0$ est borné dans $L_p(t_0, t_1)$ ($1 \leq p \leq \infty$) :

$$\left\| I_{t_0^+}^\alpha f(t) \right\|_p \leq K \|f(t)\|_p \quad \text{avec} \quad K = \frac{(t_1 - t_0)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \quad (III.3)$$

Preuve : voir le lemme 2.1 de [65] dans la page 72.

III. 2. 2 Commande Adaptative à Grand Gain

La commande adaptative continue à grand gain est un axe de la commande adaptative où le contrôleur est d'une grande simplicité. Ce contrôleur n'est ni basé sur l'identification de système ni sur des algorithmes d'estimation de paramètres du système ni encore sur de l'injection des signaux de test [64]. Il est bien établi que la commande adaptative à grand gain peut stabiliser n'importe quel système monovarié, à phase minimale avec un gain aux hautes fréquences positif et de degré relatif un [62,64,66-68].

Considérons un système monovarié incertain décrit par :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (III.4.a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (III.4.b)$$

où $t \in \mathfrak{R}$ est la variable de temps, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est l'état avec n inconnu, $u(t) \in \mathfrak{R}$ est la commande scalaire et $y(t) \in \mathfrak{R}$ est la sortie scalaire mesurée; A, B, C , sont des matrices inconnues de dimensions appropriées.

Hypothèse A1:

Supposons que le système ci-dessus soit contrôlable et observable à phase minimale avec un gain aux hautes fréquences positif et de degré relatif un.

Théorème 1 [62,64,66-68] :

Considérons un système incertain décrit par l'équation (III.4) satisfaisant l'hypothèse A1 alors il est uniformément stabilisable par la loi de commande adaptative proportionnelle à grand gain suivante :

$$u(t) = - k(t) y(t) \tag{III.5}$$

Preuve : Pour la preuve voir [62,64,66-68].

En outre, pour s'assurer que le gain $k(t)$ augmente au delà de la limite inférieure garantissant la stabilité asymptotique, $k(t)$ est adaptée par la sortie comme suit [61-62,64,66-68]:

$$\frac{dk(t)}{dt} = y^2(t) \tag{III.6}$$

Dans ce cas, pour des conditions initiales arbitraires $x_0 = x(t_0) \in \mathfrak{R}^n$, $k_0 = k(t_0) \in \mathfrak{R}$, le problème aux limites du système en boucle fermée a une solution unique $(x(t), k(t))$ avec les propriétés suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k_\infty$$

Théorème 2 [61] :

Soit le système monovariante incertain de l'équation (III.4), satisfaisant l'hypothèse A1, alors il vérifie le théorème 1 avec la loi de commande adaptative proportionnelle de l'équation (III.5).

Le système de commande en boucle fermée résultant est donné comme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A - k(t)BC]x(t) \tag{III.7.a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{III.7.b}$$

$k(\cdot) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}$, est une fonction différentiable satisfaisant :

$$\frac{dk(t)}{dt} \geq 0$$

alors il existe $\underline{k} \in \mathfrak{R}$ et $\varepsilon > 0$ tel que si $k(t) \geq \underline{k}$ pour tout $t \geq t_0$ et pour $x(\cdot) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}^n$, toute solution de (III.7a), $\forall t \in [t_0, t_1)$, on a: $|y(t)| = |Cx(t)| \leq Me^{-\varepsilon(t-t_0)}$ pour $M > 0$.

Preuve : Pour la preuve voir Corless [61].

III. 2. 3 Position du Problème

Soit le système de l'équation (III.4) satisfaisant l'hypothèse A1, alors ce système peut être stabilisé par la loi de commande adaptative proportionnelle des équations (III.5) et (III.6); mais une caractéristique ennuyante de cette loi de commande est que le gain $k(t)$ diverge en présence de la plus légère erreur dans la sortie $y(t)$ provoquée, par exemple, par un bruit de mesure. Dans le cas d'un problème de commande à retour de sortie avec un gain constant, cela peut être facilement surmonté en introduisant le terme intégral dans la loi de commande. Ainsi, l'objectif du présent travail est de proposer une modification dans l'adaptation du gain de l'équation (III.6) de la loi de commande de l'équation (III.5) pour garder la stabilité du système de commande en boucle fermée, forcer sa sortie à converger sans erreur statique et maintenir son gain borné; sans

aucune connaissance a priori des paramètres du système et de son ordre. Donc, l'idée de base de cette nouvelle modification dans la conception de la loi de commande est l'introduction de l'intégration d'ordre fractionnaire en plus de l'intégration régulière de la sortie du système dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande de l'équation (III.6).

Alors, pour le système monovariante incertain décrit par l'équation (III.4), satisfaisant l'hypothèse A1, il est uniformément stabilisé par la commande adaptative proportionnelle à grand gain de l'équation (III.5) dont la loi d'adaptation est donnée comme suit :

$$e(t) = y(t) - r(t) \tag{III.8.a}$$

$$u(t) = -k(t) e(t) \tag{III.8.b}$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = \gamma_1 e^2(t) + \gamma_2 D^\alpha [e^2(t)] \tag{III.8.c}$$

où $r(t) \in \mathfrak{R}$ est le signal de référence, $k(t) \in \mathfrak{R}$ est le gain adaptatif et $e(t) = [y(t) - r(t)] \in \mathfrak{R}$ est le signal d'erreur. Par simplicité, on considère le cas où $r(t) = 0$ pour prouver la stabilité du système de commande avec la loi de commande proposée donnée par :

$$u(t) = -k(t) y(t) \tag{III.9.a}$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = \gamma_1 [y^2(t)] + \gamma_2 D^\alpha [y^2(t)] \tag{III.9.b}$$

où les paramètres γ_1, γ_2 et α sont des nombres réels satisfaisant

$$\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0 \tag{III.10}$$

$$-1 < \alpha < 1 \tag{III.11}$$

Alors, de l'équation (III.9.b), le gain $k(t)$ sera donné comme :

$$k(t) = \gamma_1 I^1 [y^2(t)] + \gamma_2 I^{(1-\alpha)} [y^2(t)] \tag{III.12}$$

On note que pour $\gamma_1 \neq 0$ et $\gamma_2 = 0$, on aura le cas classique donné dans [61] et si $\gamma_1 = 0$ et $\gamma_2 \neq 0$, on aura le cas fractionnaire donné dans [15]. Alors, le schéma d'adaptation du gain $k(t)$ de l'équation (III.12), pour $-1 < \alpha < 1$, n'a pas d'équivalent en utilisant seulement l'intégration et la différentiation régulières. On veut que ce terme d'intégration fractionnaire introduit dans le gain d'adaptation du contrôleur de l'équation (III.12) puisse aider à forcer la sortie pour converger sans erreur statique dans le cas sans bruit et pour maintenir le gain non borné en présence du bruit et pour améliorer le comportement de la boucle de commande sans détruire la stabilité du système en boucle fermée quand le paramètre d'ordre fractionnaire α varie dans l'intervalle $-1 < \alpha < 1$.

III. 2. 4 Analyse de stabilité du système en boucle fermée

Soit le système de l'équation (III.4) satisfaisant l'hypothèse A1 commandé par un contrôleur adaptatif de l'équation (III.9). Le système en boucle fermée résultant est décrit par :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \tilde{A}(k)x(t) = [A - k(t)BC]x(t) \quad (III.13.a)$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = \gamma_1 y^2(t) + \gamma_2 D^\alpha [y^2(t)] \quad (III.13.b)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (III.13.c)$$

Ce système peut être considéré comme un système avec l'état $(x, k) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$. Notre contribution principale portera sur les propriétés de stabilité du système de commande en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé. Ces propriétés de stabilité sont indiquées dans le théorème et lemme suivants:

Théorème 3

Pour chaque condition initiale $(t_0, x_0 = x(t_0), k(t_0) = k_0) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$ du système de commande en boucle fermée de l'équation (III.13), il existe une solution $[x(\cdot), k(\cdot)] : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$, $t_0 < t_1$. Chaque solution peut être continue sur $[t_0, \infty)$ et satisfait :

$$k(\cdot) \text{ est borné} \quad (III.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (III.15)$$

Preuve du théorème 3 : Pour la preuve du théorème 3, on va considérer deux cas en se basant sur le paramètre de la dérivée d'ordre fractionnaire α .

Cas 1 : $-1 < \alpha \leq 0$

Pour ce cas nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2 :

Le gain du contrôleur défini dans l'équation (III.12) $k(t) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}$, $t_0 < t_1$, pour $-1 < \alpha \leq 0$, est une fonction différentiable, satisfaisant :

$$\dot{k}(t) \geq 0 \quad (III.16)$$

Preuve du lemme 2 :

Soit $\alpha = -\beta$, alors $0 \leq \beta < 1$, donc le gain du contrôleur $k(t)$ de l'équation (III.13.b) devient :

$$\frac{dk(t)}{dt} = \gamma_1 y^2(t) + \gamma_2 I^\beta [y^2(t)] \quad (III.17)$$

De la définition de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville de l'équation (III.1), on a :

$$I^\beta(y^2) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^t [(t-\xi)^{\beta-1} y^2(\xi)] d\xi \quad (III.18)$$

Il est évident que le second membre de l'équation (III.18) est positif ($\Gamma(\beta) \geq 1$, pour $0 < \beta < 1$).

Et comme on a $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$, ceci implique que le second membre de l'équation (III.17) est positif. Donc, $\dot{k}(t) \geq 0$.

Continuant avec la preuve du théorème 3, on va démontrer d'abord que $k(t)$ est borné. Le comportement de $x(t)$ satisfait :

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A - k(t)BC]x(t)$$

où du lemme 2 on a $\dot{k}(t) \geq 0$, alors du théorème 2, il existe $\underline{k} \in \mathfrak{R}$, $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que si

$k(t) \geq \underline{k}$ pour tout $t \geq t_0$ et pour tout $x(.) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}^n$, solution de l'équation (III.13a), $\forall t \in [t_0, t_1)$, on a :

$$|y(t)| \leq Me^{-\varepsilon(t-t_0)} \quad (III.19)$$

et du lemme 1, pour $0 \leq \beta < 1$, on a :

$$\left\| I_{t_0^+}^{(1+\beta)} y^2(t) \right\| \leq K \left\| y^2(t) \right\| \quad (III.20)$$

D'où, les équations (III.19) et (III.20) impliquent que $k(t) = \gamma_1 I^1 y^2(t) + \gamma_2 I_{t_0^+}^{(1+\beta)} [y^2(t)]$ est borné sur $[t_0, t_1)$. Pour démontrer que $x(t)$ converge vers zéro quand $t \rightarrow \infty$, on réécrit équation (III.13.a) comme suit :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \bar{A}x(t) + B\mu(t) \quad (III.21)$$

où

$$\bar{A} = [A - \underline{k}BC] \quad (III.22)$$

est asymptotiquement stable et

$$\mu(t) = [\underline{k} - k(t)]y(t) \quad (III.23)$$

$k(.)$ borné implique que $y(.) \in L_2$ et $\mu(.) \in L_2$. Comme $x(.)$ est la sortie d'un système asymptotiquement stable ayant comme entrée $\mu(.) \in L_2$, alors $x(.) \in L_2$ et $\dot{x}(.) \in L_2$. Donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Cas 2 : $0 < \alpha < 1$

Soit $\alpha = (1 - \beta)$ avec $0 < \beta < 1$, donc le gain du contrôleur $k(t)$ de l'équation (III.13.b) devient:

$$\begin{aligned} \frac{dk(t)}{dt} &= \gamma_1 y^2(t) + \gamma_2 I^{(\beta-1)}[y^2(t)] \\ &= \gamma_1 y^2(t) + \gamma_2 I^\beta[D\{y^2(t)\}] \\ &= \gamma_1 y^2(t) + \gamma_2 I^\beta[2y(t)\dot{y}(t)] \end{aligned} \quad (III.24)$$

Le signe de $\dot{k}(t)$ sera basé sur l'intégration d'ordre fractionnaire $I^\beta[2y(t)\dot{y}(t)]$ de l'équation (III.24). Pour cela, on va considérer deux cas selon le signe du terme $[y(t)\dot{y}(t)]$.

- $[y(t)\dot{y}(t)] \geq 0$ sur tout l'intervalle de temps considéré:

L'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée comme :

$$I^\beta[2y(t)\dot{y}(t)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^t [(t-\xi)^{\beta-1} 2y(\xi)\dot{y}(\xi)] d\xi \quad (III.25)$$

Le second membre de cette équation est positif vu que $[y(t)\dot{y}(t)] \geq 0$ et $\Gamma(\beta) \geq 1$, pour $0 < \beta < 1$.

Et comme on a $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$, ceci implique que le côté droit de l'équation (III.24) est positif.

Donc, $\dot{k}(t) \geq 0$. Comme dans le cas ci-dessus où $-1 < \alpha < 0$, le même raisonnement est utilisé pour montrer que $k(\cdot)$ est borné et $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

- $[y(t)\dot{y}(t)] < 0$ sur tout l'intervalle de temps considéré:

$[y(t)\dot{y}(t)] < 0$, implique directement que la fonction $|y(t)|$ est une fonction strictement décroissante, donc on a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad (III.26)$$

et du lemme 1, pour $0 \leq \beta < 1$, on a également :

$$\left\| I_{t_0^+}^\beta y^2(t) \right\| \leq K \left\| y^2(t) \right\| \quad (III.27)$$

D'où, les équations (III.26) et (III.27) impliquent que $k(t) = \gamma_1 I^1 y^2(t) + \gamma_2 I_{t_0^+}^\beta [y^2(t)]$ est borné sur $[t_0, t_1)$. De l'équation (III.13.c) on a $y(t) = Cx(t)$ et puisque le système de l'équation (III.4) satisfaisant l'hypothèse A1 est observable, alors:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (III.28)$$

III. 2. 5 Exemple illustratif

Un exemple illustratif est présenté pour montrer l'efficacité et l'amélioration de la qualité de commande en utilisant le schéma de commande proposé. On va considérer un système continu instable à phase minimale de degré relatif un, donné par la fonction de transfert suivante [69]:

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{s(s-0.3)} \quad (III.29)$$

On peut facilement voir que le système ci-dessus satisfait l'hypothèse A1. Donc, on peut appliquer le contrôleur d'ordre fractionnaire adaptatif à grand gain proposé dans l'équation (III.12) à ce système. Basé sur la dérivée d'ordre fractionnaire α ($-1 < \alpha < 1$) de l'équation (III.9), on va voir deux cas. Pour les deux cas, toutes les conditions initiales ont été mises à zéros et la période d'échantillonnage T pour les calculs numériques est $T = 25\text{ms}$.

Cas 1 : $-1 < \alpha < 0$

Les paramètres du gain $k(t)$ du schéma de commande proposé dans l'équation (III.12) ont été pris comme: $\alpha = -0.55$, $\gamma_1 = 4.0$ et $\gamma_2 = 12.0$. Alors le gain de commande $k(t)$ est donné par :

$$k(t) = 4.0\{I^1[y^2(t)]\} + 12.0\{I^{1.55}[y^2(t)]\} \quad \text{(III.30)}$$

Pour des raisons de comparaison, le cas classique donné dans [61] a été également utilisé. On a mentionné que si $\gamma_1 = 4.0 \neq 0$ et $\gamma_2 = 0$, le schéma de commande proposé de l'équation (III.12) sera le cas classique. D'où, le gain de commande classique $k_c(t)$ est donné par :

$$k_c(t) = 4.0\{I^1[y^2(t)]\} \quad \text{(III.31)}$$

Le calcul numérique de l'intégrateur fractionnaire d'ordre 1.55 de l'équation (III.30) a été fait en utilisant un filtre numérique FIR obtenu par [70]. Les résultats de simulations sont obtenus en prenant le signal de référence $r(t)$ comme échelon unité. La Figure III.1 montre les tracés des sorties $y(t)$ et $y_c(t)$ du système de commande en boucle fermée utilisant, respectivement le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique. De la Figure III.1, on peut voir que la sortie $y(t)$ du système de commande en boucle fermée en utilisant le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé est plus rapide ; elle possède un dépassement et un temps de montée plus petits par rapport à la sortie $y_c(t)$ du système de commande en boucle fermée en utilisant le schéma de commande classique. Le tracé des signaux de commande $u(t)$ et $u_c(t)$ du système de commande en boucle fermée utilisant les schémas de commande d'ordre fractionnaire et classique proposés, respectivement, sont données dans la Figure III.2. Les tracés des gains de commande fractionnaire et classique $k(t)$ et $k_c(t)$ sont montrés dans la Figure III.3.

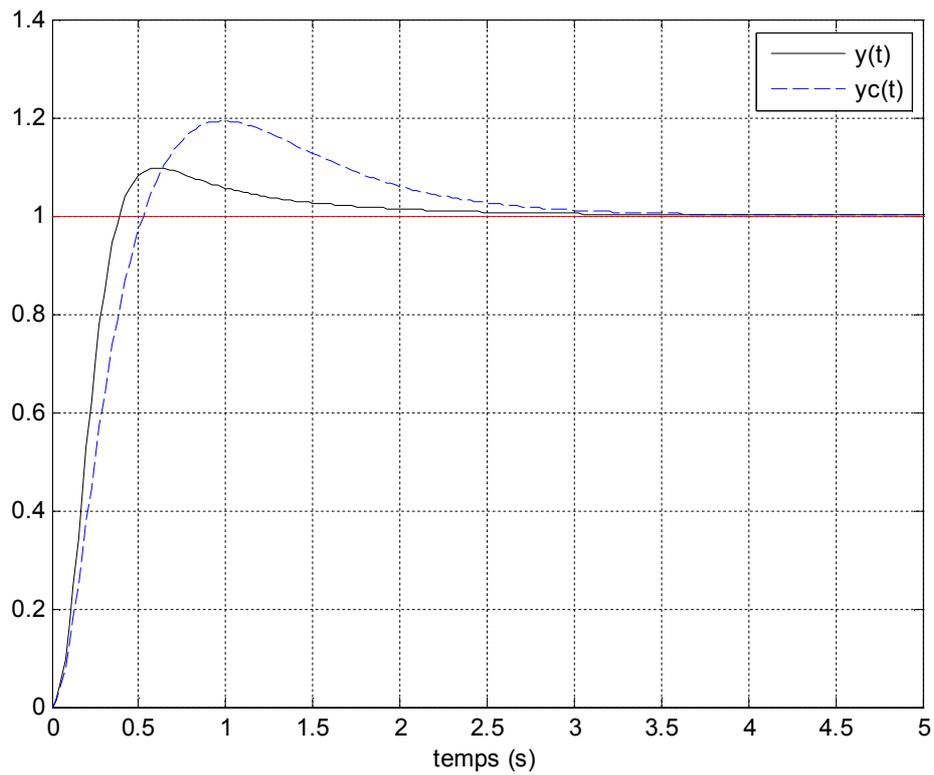


Figure III.1 Sorties $y(t)$ et $y_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique

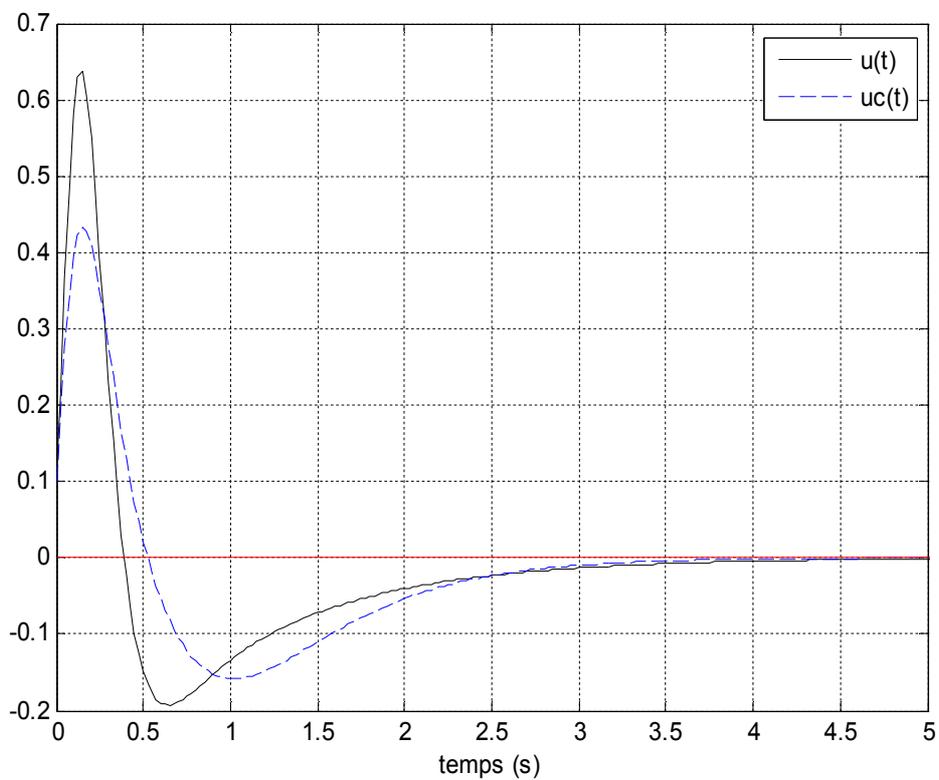


Figure III.2 Commandes $u(t)$ et $u_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique

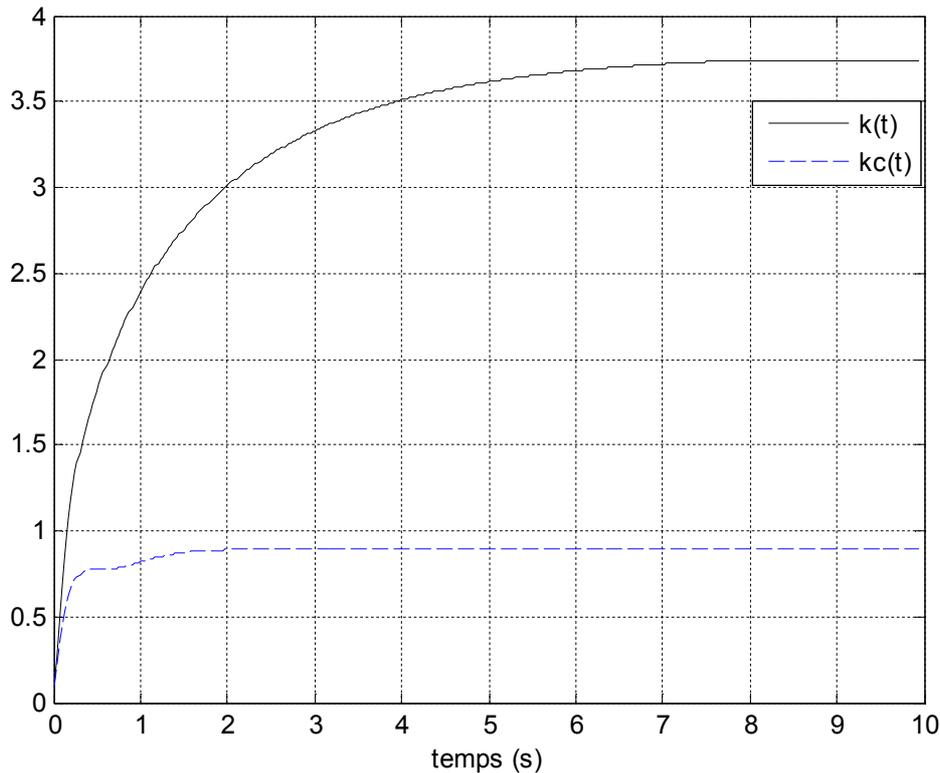


Figure III.3 Gains de commande $k(t)$ et $k_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique

On note que l'amélioration des performances obtenues en utilisant le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé exige un début du signal de commande $u(t)$ plus grand que le début du signal de commande $u_c(t)$ du schéma de commande classique comme il est montré dans la Figure III.2; mais le signal de commande $u(t)$ utilisant le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé est plus rapide que le signal de commande $u_c(t)$ utilisant le schéma de commande classique malgré sa plus grande amplitude du début. De la Figure III.3, on remarque aussi que l'amplitude du gain $k(t)$ du système en boucle fermée utilisant le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé est bornée et a une amplitude plus grande à l'état stable que l'amplitude à l'état stable du gain $k_c(t)$ du système en boucle fermée utilisant le schéma de commande classique.

Cas 2 : $0 < \alpha < 1$

Dans ce deuxième cas, les paramètres du gain de commande $k(t)$ du schéma de commande proposé de l'équation (III.12) sont donnés comme: $\alpha = 0.3$, $\gamma_1 = 4.0$ et $\gamma_2 = 12.0$. Alors le gain de commande $k(t)$ est donné par :

$$k(t) = 4.0I^1[y^2(t)] + 12.0I^{0.7}[y^2(t)] \quad (\text{III.32})$$

Dans ce cas aussi, le gain de commande classique $k_c(t)$ de l'équation (III.31) est utilisé en guise de comparaison. Le calcul numérique de l'intégrateur fractionnaire d'ordre 0.7 de l'équation (III.32) a été fait en utilisant un filtre numérique FIR obtenu par [70]. Les résultats de simulations sont également obtenus en utilisant un signal de référence $r(t)$ l'échelon unité. La Figure III.4 montre le tracé des sorties $y(t)$ et $y_c(t)$ du système en boucle fermée utilisant les schémas de commande d'ordre fractionnaire et classiques proposés, respectivement.

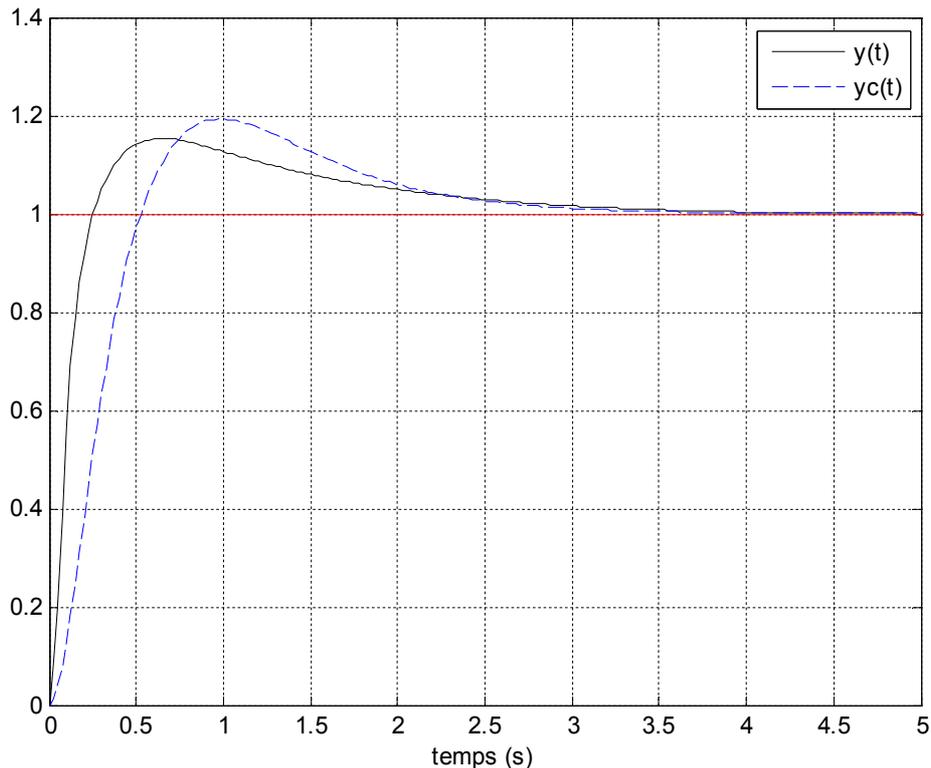


Figure III.4 Sorties $y(t)$ et $y_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique

Comme dans le premier cas, on peut facilement voir, de la Figure III.4, que la réponse de la sortie $y(t)$ du système de commande en boucle fermée utilisant le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé a un dépassement et un temps de montée plus petits que celui de la sortie $y_c(t)$ du système en boucle fermée utilisant le schéma de commande classique. La sortie $y(t)$ est autant rapide que $y_c(t)$. Cependant, la réponse de la sortie $y(t)$ peut être accélérée pour une valeur plus grande du paramètre γ_2 du gain de commande $k(t)$ de l'équation (III.32).

Le tracé des signaux de commande $u(t)$ et $u_c(t)$ du système en boucle fermée utilisant les schémas de commande d'ordre fractionnaire et classiques sont données dans la Figure III.5.

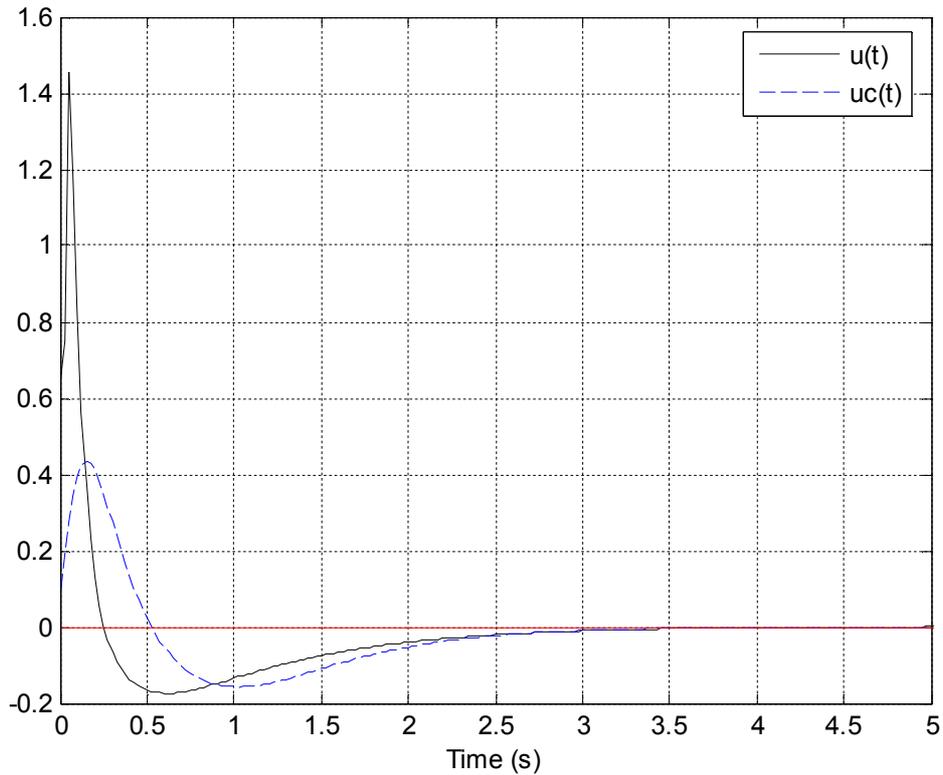


Figure III.5 Les Commande $u(t)$ et $u_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé et le schéma de commande classique

Comme dans le premier cas, même si un plus grand signal de commande initial $u(t)$ comparé au signal de commande initial $u_c(t)$ est nécessaire comme il est montré dans la Figure III.5. Le signal de commande $u(t)$ utilisant le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé est plus rapide que le signal de commande $u_c(t)$ utilisant le schéma de commande classique.

Les tracés des gains de commande d'ordre fractionnaire $k(t)$ et classique $k_c(t)$ sont donnés dans la Figure III.6. Dans ce cas, on peut aussi facilement voir, de la Figure III.6, que l'amplitude du gain $k(t)$ du schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé est bornée et a une amplitude plus petite à l'état permanent que l'amplitude à l'état permanent du gain $k_c(t)$ du schéma de commande classique.

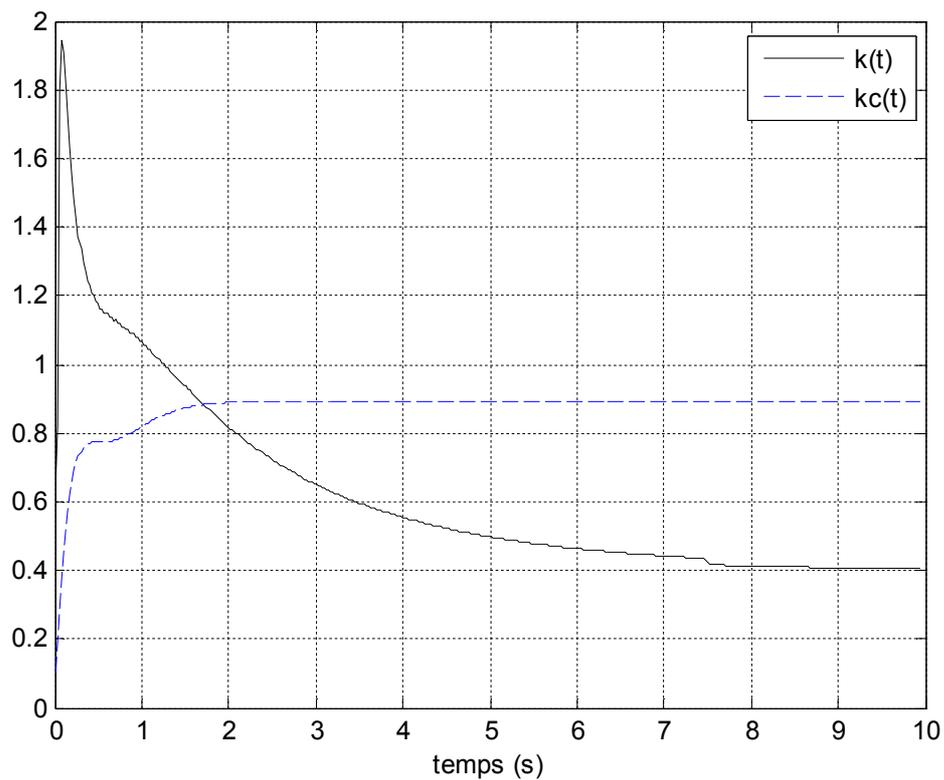


Figure III.6 Gains de commande $k(t)$ et $k_c(t)$ du système en boucle fermée avec le schéma d'ordre fractionnaire proposé et le schéma classique

De l'exemple ci-dessus, on a remarqué et noté ce qui suit :

- le contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire proposé peut résoudre le problème de poursuite de la référence échelon unité.
- les paramètres de réglage $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ affectent seulement les performances transitoires et non pas la stabilité du système de commande avec boucle de retour.
- l'introduction de l'intégration d'ordre fractionnaire dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande a amélioré le temps de montée et le temps de réponse et a diminué le dépassement de la réponse mais cette amélioration des performances a besoin d'une plus grande amplitude du signal de commande au début.
- la réponse de la sortie peut être accélérée en mettant un paramètre de réglage plus grand γ_2 du gain de commande du schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé.
- pour tout paramètre de réglage donné γ_1 du schéma de gain de commande classique, on peut toujours trouver un paramètre de réglage γ_2 du schéma de gain de commande d'ordre fractionnaire proposé pour l'amélioration des performances.

III. 3 Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire avec σ -Modification

Dans cette section on présente un contrôleur adaptatif à grand gain d'ordre fractionnaire avec le concept σ -modification pour une classe de système SISO linéaire invariant dans le temps, à phase minimale, de degré relatif unité. L'idée de la conception proposée est une autre modification dans le concept σ -modification adaptatif à grand gain en introduisant la différentiation fractionnaire dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande à la place de la différentiation régulière. La qualité du schéma de commande proposé comparé au cas régulier a été étudiée à travers les résultats de simulation d'un exemple illustratif.

III. 3. 1 Préliminaires

Dans cette section la définition de Caputo de la dérivée d'ordre fractionnaire est employée. Pour $0 < \alpha < 1$ et $f(t)$ une fonction causale, la dérivée d'ordre fractionnaire est définie comme [32]:

$$D^\alpha f(t) = I^{1-\alpha} [D(f(t))] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \{(t-\xi)^{-\alpha} [D(f(\xi))]\} d(\xi) \quad (III.33)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma.

Un système de relaxation d'ordre fractionnaire, pour $0 < m < 1$ et $\lambda > 0$, est représenté par l'équation suivante:

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + \lambda x(t) = e(t) \quad (III.34)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{(s^m + \lambda)} \quad (III.35)$$

De [35], on peut écrire que:

$$G(s) = \frac{1}{(s^m + \lambda)} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{(s + p_i)} \quad (III.36)$$

Pour un nombre donné N de l'approximation ci-dessus, les pôles p_i et les résidus r_i (pour $i = 1, 2, \dots, 2N-1$) sont donnés par [35]:

$$p_i = \frac{(\beta)^{(i-N)}}{\tau_0}, \quad r_i = \left(\frac{p_i}{2\pi\pi} \right) \left[\frac{\sin[(1-m)\pi]}{\cosh \left[m \log \left(\frac{1}{\tau_0 p_i} \right) \right] - \cos[(1-m)\pi]} \right] \quad (III.37)$$

où $\tau_0 = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{\left(\frac{1}{m} \right)}$ et β est le rapport d'un pole au pole précédent avec $\beta > 1$. On a également, pour

$s = 0$, $\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{p_i}$. En prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation (III.36), on obtient :

$$L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^m + \lambda)}\right\} = \sum_{i=1}^{2N-1} r_i \exp(-p_i t) \quad (\text{III.38})$$

III. 3. 2 Position du Problème

Considérons un système SISO incertain décrit par l'équation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état avec n inconnu, $u(t) \in \mathfrak{R}$ est la commande scalaire et $y(t) \in \mathfrak{R}$ est la sortie scalaire; A, B, C , sont des matrices inconnues de dimensions appropriées. Supposons que le système ci-dessus est contrôlable et observable à phase minimale, avec un gain en haute fréquence positif et de degré relatif unité. Il est bien connu que le système (III.39) peut être stabilisé par la loi de commande proportionnelle adaptative à grand gain $u(t) = -k(t)y(t)$. Pour s'assurer que le gain $k(t)$ s'accroît au delà de la limite après que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable, $k(t)$ est adapté par la sortie comme suit [62,66-67] :

$$\frac{dk(t)}{dt} = [y(t)]^2 \quad (\text{III.40})$$

Une caractéristique ennuyante de cette loi d'adaptation est que la moindre erreur dans la sortie $y(t)$ conduit à la divergence de $k(t)$. Pour éviter ce problème, la loi d'adaptation de l'équation (III.40) a été modifiée pour incorporer un terme d'amortissement comme suit [62,66] :

$$\frac{dk(t)}{dt} = -\sigma k(t) + [y(t)]^2 \quad (\text{III.41})$$

où $\sigma > 0$ est un terme d'amortissement positif de petite valeur. Ceci est généralement considéré comme la commande à grand gain adaptatif avec le concept σ -modification. Un effet de cette modification est clair : une sortie $y(t)$ bornée rend un gain $k(t)$ borné. Mais, les auteurs de [67] ont démontré que la loi d'adaptation de l'équation (III.41) présente quelques problèmes. D'abord, le facteur d'amortissement σ est responsable d'un effet déstabilisateur dès que le terme $[-\sigma k(t)]$ domine le terme $[y(t)]^2$; en second lieu, l'introduction de solutions qui ne convergent pas à zéro même en absence des perturbations. Troisièmement, dans le cas où le système de commande en boucle fermée n'est pas asymptotiquement stable pour $k(t) = 0$, un comportement indésirable peut apparaître [67].

Alors, pour éliminer les inconvénients énumérés ci-dessus de la commande adaptative à grand gain avec σ -modification tout en maintenant les propriétés de robustesse par rapport aux erreurs dans la sortie, une commande adaptative à grand gain avec σ -modification modifiée a été introduite en utilisant le calcul d'ordre fractionnaire. L'idée fondamentale de la conception proposée est l'introduction d'une différentiation fractionnaire dans le gain d'adaptation de la

stratégie de commande à la place de la différentiation régulière. Donc, au lieu de la loi d'adaptation de gain de l'équation (III.41), on propose une autre modification et ce par l'introduction de la dérivée d'ordre fractionnaire conduisant au nouveau schéma du gain d'adaptation suivant:

$$u(t) = -k(t) y(t) \quad (III.42.a)$$

$$\frac{d^\alpha k(t)}{dt^\alpha} = -\sigma k(t) + [y(t)]^2 \quad (III.42.b)$$

où le paramètre α est un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. Du schéma d'adaptation proposé dans l'équation (III.42), on note que si $\alpha = 1$ et $\sigma = 0$, c'est le cas classique de [66]; si $\alpha = 1$ et $\sigma \neq 0$, c'est le cas du concept de σ -modification de [67]; et si $\alpha \neq 0$ et $\sigma = 0$ c'est le cas fractionnaire de [15].

III. 3. 3 Solution de l'équation du gain d'adaptation

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (III.42.b) représentant le schéma du gain d'adaptation proposé:

$$\frac{d^\alpha k(t)}{dt^\alpha} = -\sigma k(t) + [y(t)]^2 \quad (III.43)$$

où $\frac{d^\alpha k(t)}{dt^\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) [32]. En prenant la transformée de Laplace de l'équation (III.43), on obtient:

$$K(s) = (s^\alpha + \sigma)^{-1} [s^{(\alpha-1)} k(0)] + (s^\alpha + \sigma)^{-1} E(s) \quad (III.44)$$

où $k(0)$ est la condition initiale et $E(s) = L\{[y(t)]^2\}$. L'expression de $k(t)$ est obtenue en prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation (III.44); on aura alors :

$$k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{s^{(\alpha-1)}}{(s^\alpha + \sigma)} \right\} k(0) + L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + \sigma)} \right\} * [y(t)]^2 \quad (III.45)$$

$$k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{\sigma}{s(s^\alpha + \sigma)} \right\} k(0) + L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + \sigma)} \right\} * [y(t)]^2 \quad (III.46)$$

où $\{*\}$ est le produit de convolution. De la section III. 3. 2, on a :

$$\frac{1}{(s^\alpha + \sigma)} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \left[\frac{r_i}{(s + p_i)} \right] \quad (III.47)$$

et,

$$\frac{1}{s(s^\alpha + \sigma)} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{s(s + p_i)} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{p_i} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + p_i)} \right] \quad (III.48)$$

Donc, la solution de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire du gain $k(t)$ de l'équation (III.43) est donnée par:

$$k(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{p_i} e^{-p_i t} \right\} k(0) + \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{p_i} \left\{ e^{-p_i t} * [y(t)]^2 \right\} \quad (\text{III.49})$$

On remarque de l'expression de $k(t)$ de l'équation (III.49), pour une sortie $y(t)$ bornée, le gain $k(t)$ est borné. Pour voir l'amélioration de la qualité de la commande du schéma proposé de σ -modification fractionnaire, on fait quelques simulations pour différentes situations et on compare les résultats obtenus pour les gains de commande, les sorties et les signaux de commande du système en boucle fermée pour les trois cas: le cas classique, le cas σ -modification et le cas σ -modification fractionnaire

III. 3. 4 Analyse de la Stabilité

Considérons le système incertain décrit par l'équation (III.39) satisfaisant l'hypothèse A1 de la section (III.2.2), alors il est uniformément stabilisable par la loi de commande adaptative proportionnelle à grand gain $u(t) = -k(t) y(t)$ où le gain $k(t)$ est adaptée par l'équation (III.42). Alors, le système en boucle fermée résultant est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \tilde{A}(k)x(t) = [A - k(t)BC]x(t) \\ \frac{d^\alpha k(t)}{dt^\alpha} &= -\sigma k(t) + [y(t)]^2 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

Ce système peut être considéré comme système avec l'état $(x, k) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$. La contribution principale de cette étude sera les propriétés de stabilité du système de commande en boucle fermée avec le schéma de la commande d'ordre fractionnaire proposé. Ces propriétés de stabilité sont exposées dans le théorème et les lemmes suivants.

Théorème 4

Pour chaque condition initiale $[t_0, x_0 = x(t_0), k_0 = k(t_0)] \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$ du système en boucle fermée (III.50), il existe une solution $[x(\cdot), k(\cdot)]: [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$. Chaque solution peut être continu sur $[t_0, \infty)$ et satisfait

$$k(t) \text{ est borné} \quad (\text{III.51})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (\text{III.52})$$

Preuve du théorème 4 : premièrement, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 3 : le gain du contrôleur défini en (III.49) $k(t): [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}, t_0 < t_1$, pour $0 < \alpha < 1$, est une fonction différentiable satisfaisant

$$\dot{k}(t) \geq 0 \quad (\text{III.53})$$

Preuve du lemme 3 :

L'équation proposée du gain d'adaptation $k(t)$ est donnée par:

$$\frac{d^\alpha k(t)}{dt^\alpha} = -\sigma k(t) + [y(t)]^2$$

En prenant la transformée de Laplace $L\{\cdot\}$ de cet équation, on obtient:

$$K(s) = \frac{E(s)}{(s^\alpha + \sigma)}$$

où $E(s) = L\{[y(t)]^2\}$. On peut donc écrire :

$$sK(s) = \frac{sE(s)}{(s^\alpha + \sigma)}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse $L^{-1}\{\cdot\}$ de cet équation, on aura:

$$\dot{k}(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^\alpha + \sigma)}\right\} * L^{-1}\{sE(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^\alpha + \sigma)}\right\} * \left[\frac{d[y^2(t)]}{dt}\right] = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^\alpha + \sigma)}\right\} * [2y(t)\dot{y}(t)]$$

De l'équation (III.36), pour $0 < \alpha < 1$, on a : $\frac{1}{(s^\alpha + \sigma)} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{(s + p_i)}$, alors on obtient:

$$\dot{k}(t) = \left[\sum_{i=1}^{2N-1} r_i e^{-p_i t}\right] * \{2y(t)\dot{y}(t)\} \tag{III.54}$$

On sait que $\sum_{i=1}^{2N-1} r_i e^{-p_i t} \geq 0$. Alors, le signe de $\dot{k}(t)$ est basé sur le signe du terme $\{y(t)\dot{y}(t)\}$. Donc, on considère deux cas selon le signe du terme $\{y(t)\dot{y}(t)\}$.

Cas 1 : $\{y(t)\dot{y}(t)\} \geq 0$ sur tout l'intervalle de temps considéré

Le second membre de l'équation (III.54) est positif vu que $[y(t)\dot{y}(t)] \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{2N-1} r_i e^{-p_i t} \geq 0$; donc:

$$\dot{k}(t) \geq 0$$

Continuant avec la preuve du théorème 4, on va démontrer d'abord que $k(t)$ est borné. Le comportement de $x(t)$ satisfait :

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A - k(t)BC]x(t) \tag{III.55}$$

Du lemme 3 on a $\dot{k}(t) \geq 0$, alors du théorème 2, il existe $\underline{k} \in \mathfrak{R}$, $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que si $k(t) \geq \underline{k}$ pour tout $t \geq t_0$ et pour tout $x(\cdot) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}^n$, solution de l'équation (III.55),

$\forall t \in [t_0, t_1)$, on a $|y(t)| \leq M e^{-\varepsilon(t-t_0)}$. D'où, $k(t) = \left\{\sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{p_i} e^{-p_i t}\right\} k(0) + \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{p_i} \left\{e^{-p_i t} * [y(t)]^2\right\}$ de

l'équation (III.49) est borné sur $[t_0, t_1)$.

Pour démontrer que $x(t)$ converge vers zéro quand $t \rightarrow \infty$, on réécrit l'équation (III.55) comme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \bar{A}x(t) + B\mu(t)$$

où $\bar{A} = [A - kBC]$ est asymptotiquement stable et $\mu(t) = [k - k(t)]y(t)$ avec $k(\cdot)$ borné impliquant que $y(\cdot) \in L_2$ et $\mu(\cdot) \in L_2$. Alors, comme $x(\cdot)$ est la sortie d'un système asymptotiquement stable ayant comme entrée $\mu(\cdot) \in L_2$, alors $x(\cdot) \in L_2$ et $\dot{x}(\cdot) \in L_2$. Donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Cas 2 : $\{y(t)\dot{y}(t)\} < 0$ sur tout l'intervalle de temps considéré

$\{y(t)\dot{y}(t)\} < 0$ implique que la fonction $|y(t)|$ est une fonction strictement décroissante et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Continuant aussi avec la preuve du théorème 4 pour ce cas, on va donc démontrer que $k(t)$ est borné et le comportement de $x(t)$ satisfait $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Etant donné que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$; d'où,

$k(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{p_i} e^{-p_i t} \right\} k(0) + \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{r_i}{p_i} \left\{ e^{-p_i t} * [y(t)]^2 \right\}$ de l'équation (III.49) est borné sur $[t_0, t_1)$. On a

$y(t) = Cx(t)$ et comme le système de l'équation (III.39) est observable puisqu'il satisfait l'hypothèse A1 de la section (III.2.2), alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

III. 3. 5 Exemple illustratif

Un exemple illustratif est présenté pour montrer l'efficacité du schéma de commande proposé. On considère un système continu instable à phase minimale et de degré relatif un donné par l'équation suivante [67]:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) + u + d \tag{III.56}$$

où d est une perturbation constante. Le système (III.56) peut être stabilisé par la loi de commande adaptative proportionnelle à boucle de retour de grand gain $u(t) = -k(t)y(t)$. Les paramètres des équations des lois de commande σ -modification fractionnaire et σ -modification de (III.42) et (III.41), respectivement, sont $\alpha = 0.8$ et $\sigma = 0.1$. Ainsi, les gains $k(t)$ sont adaptés par les trois lois suivantes [71] :

$$\text{classique: } \frac{dk(t)}{dt} = [y(t)]^2 \tag{III.57}$$

$$\sigma\text{-modification: } \frac{dk(t)}{dt} = -0.1k(t) + [y(t)]^2 \tag{III.58}$$

$$\sigma\text{-modification fractionnaire: } \frac{d^{0.8}k(t)}{dt^{0.8}} = -0.1k(t) + [y(t)]^2 \quad (\text{III.59})$$

Les conditions initiales de tous les systèmes de commande à boucle de retour ci-dessus sont $y(0)=1$ et $k(0)=0$ et la période d'échantillonnage T pour les calculs numériques est $T = 0.1$ s. Plusieurs simulations pour différents cas de perturbation d sont faites.

Premier cas : sans perturbation, $d = 0$

Figure III.7 montre, respectivement, les tracés des gains du système de commande en boucle fermée avec le schéma de commande $k(t)$, $k_{\text{sig}}(t)$ et du k_{reg} des schémas de commande σ -modification fractionnaire, σ -modification et régulière des équations (III.57), (III.58) et (III.59). On le voit clairement que $k(t)$ et $k_{\text{reg}}(t)$ convergent rapidement à leurs valeurs finales et sans oscillations; alors que $k_{\text{sig}}(t)$ oscille autour de sa valeur finale.

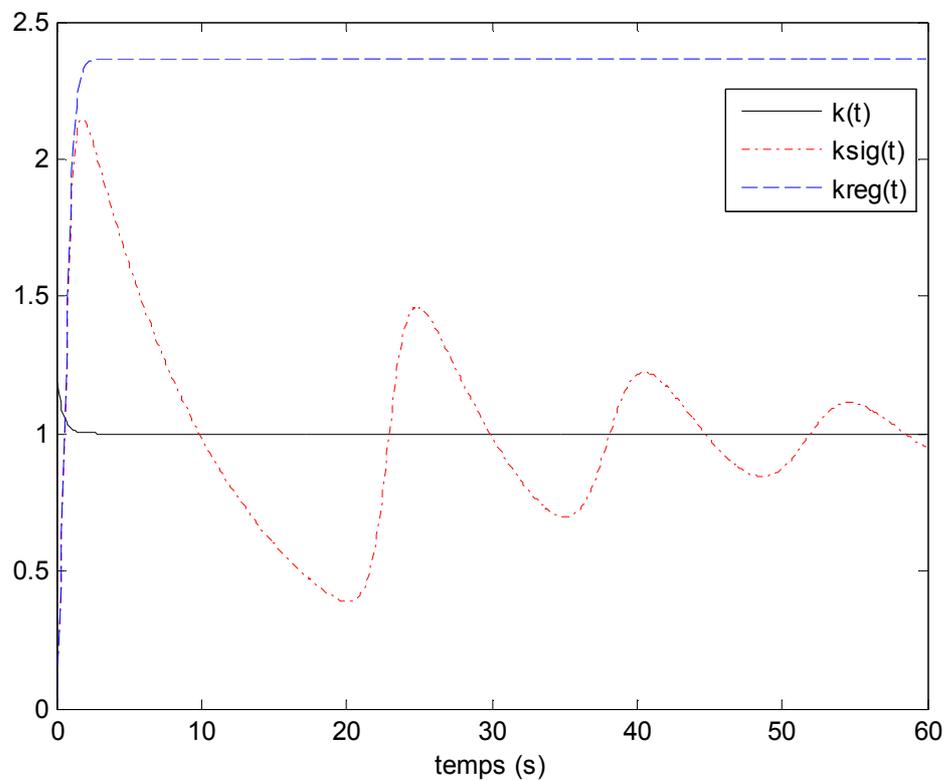


Figure III.7 Gains de commande de σ -modification fractionnaire (ligne solide), de σ -modification (ligne trait-point) et du cas régulier (ligne pointillée) sans perturbation

Figure III.8 montre aussi les tracés des sorties $y(t)$, $y_{\text{sig}}(t)$ et $y_{\text{reg}}(t)$ du système de commande en boucle fermée avec le schéma de commande proposé σ -modification fractionnaire, le schéma de commande σ -modification et le schéma de commande régulier, respectivement. On peut voir que le $y(t)$ et $y_{\text{reg}}(t)$ convergent à leurs valeurs finales sans oscillations; alors que $y_{\text{sig}}(t)$ oscille autour

de sa valeur finale. On note aussi que seulement la sortie du cas régulier converge vers zéro. La Figure III.9 montre les tracés du signal de commande $u(t)$, $u_{sig}(t)$ et $u_{reg}(t)$ du système de commande en boucle fermée avec le schéma de commande proposé σ -modification fractionnaire, le schéma de commande σ -modification et le schéma de commande régulier, respectivement. On peut également voir que $u(t)$ et $u_{reg}(t)$ convergent à leurs valeurs finales rapidement et sans oscillations; alors que $u_{sig}(t)$ oscille autour de sa valeur finale. On note aussi que seulement le signal de commande du cas régulier converge vers zéro.

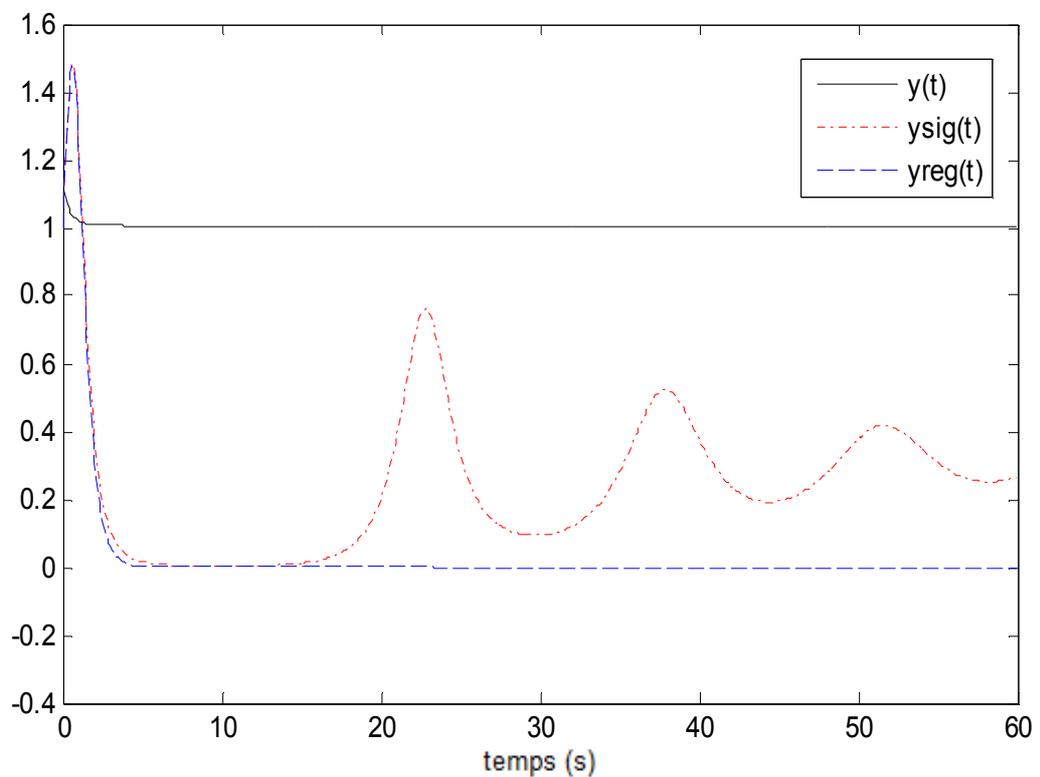


Figure III.8 Sorties de σ -modification fractionnaire (ligne solide), de σ -modification (ligne trait-point) et du cas régulier (ligne pointillée) sans perturbation

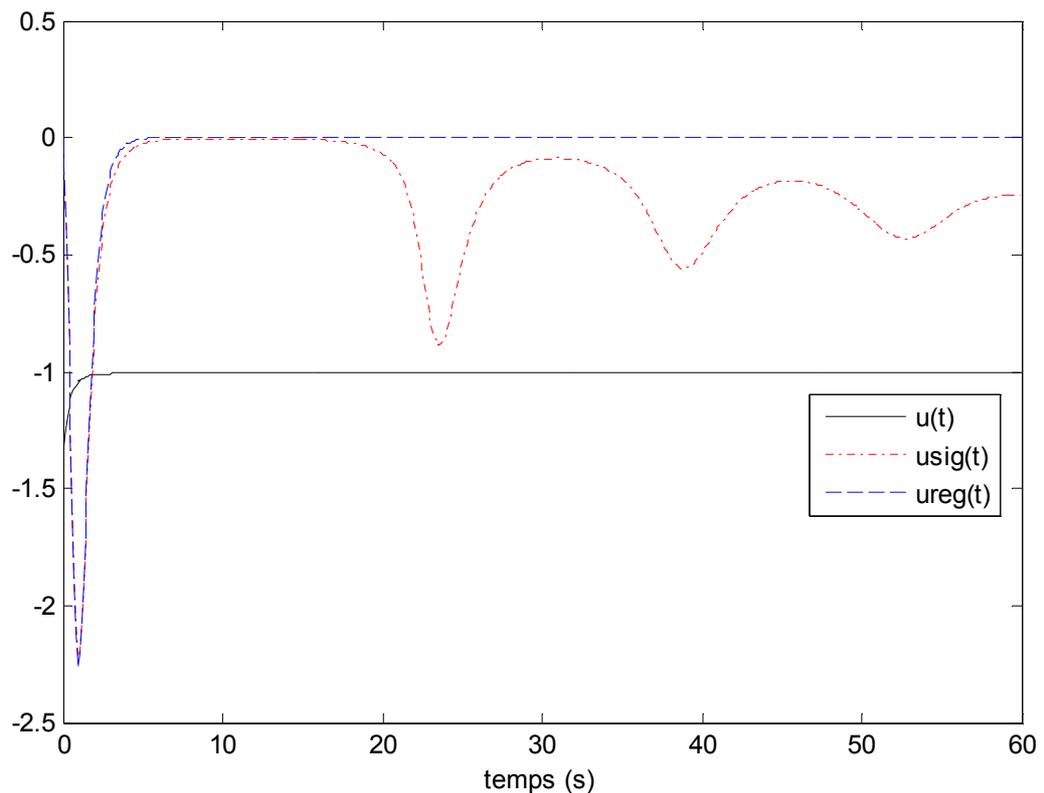


Figure III.9 Signaux de commande de σ -modification fractionnaire (ligne solide), de σ -modification (ligne trait-point) et du cas régulier (ligne pointillée) sans perturbation

Deuxième cas : avec perturbation, $d = 1$

Figure III.10 montre les tracés des gains de commande $k(t)$, $k_{sig}(t)$ et $k_{reg}(t)$ du système de commande en boucle fermée avec le schéma de commande proposé σ -modification fractionnaire, le schéma de commande σ -modification et le schéma de commande régulier, respectivement. On observe clairement que $k(t)$ et $k_{sig}(t)$ convergent à leurs valeurs de stabilité sans oscillations; alors que $k_{reg}(t)$ diverge complètement. Figure III.11 montre les tracés des sorties $y(t)$, $y_{sig}(t)$ et $y_{reg}(t)$ du système de commande en boucle fermée avec le schéma de commande proposé σ -modification fractionnaire, le schéma de commande σ -modification et le schéma de commande régulier, respectivement. Nous pouvons voir que $y(t)$ et $y_{sig}(t)$ convergent à leurs valeurs finales rapidement et sans oscillations; alors que $y_{reg}(t)$ diverge. Figure III.12 montre les tracés du signal de commande $u(t)$, $u_{sig}(t)$ et $u_{reg}(t)$ du système de commande en boucle fermée avec le schéma de commande proposé σ -modification fractionnaire, le schéma de commande σ -modification et le schéma de commande régulier, respectivement. On peut également voir que $u(t)$ et $u_{sig}(t)$ convergent vers leurs valeurs finales rapidement et sans oscillations; alors que $u_{reg}(t)$ diverge.

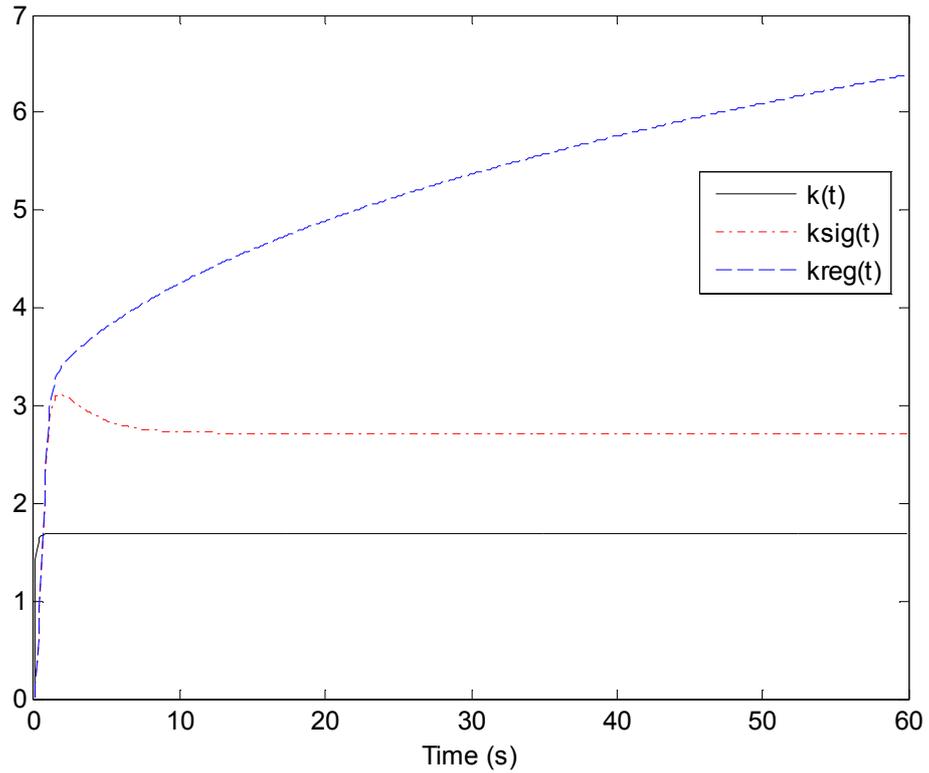


Figure III.10 Gains de commande de σ -modification fractionnaire (ligne solide), de σ -modification (ligne trait-point) et du cas régulier (ligne pointillée) avec perturbation

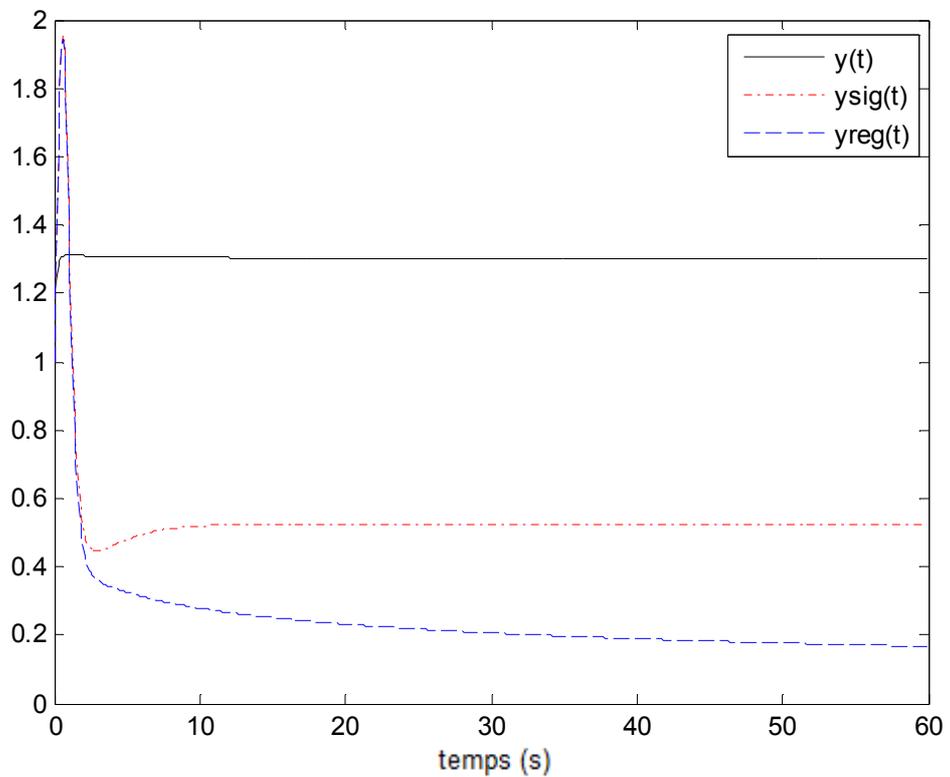


Figure III.11 Sorties de σ -modification fractionnaire (ligne solide), le σ -modification (ligne trait-point) et le cas régulier (ligne pointillée) avec perturbation

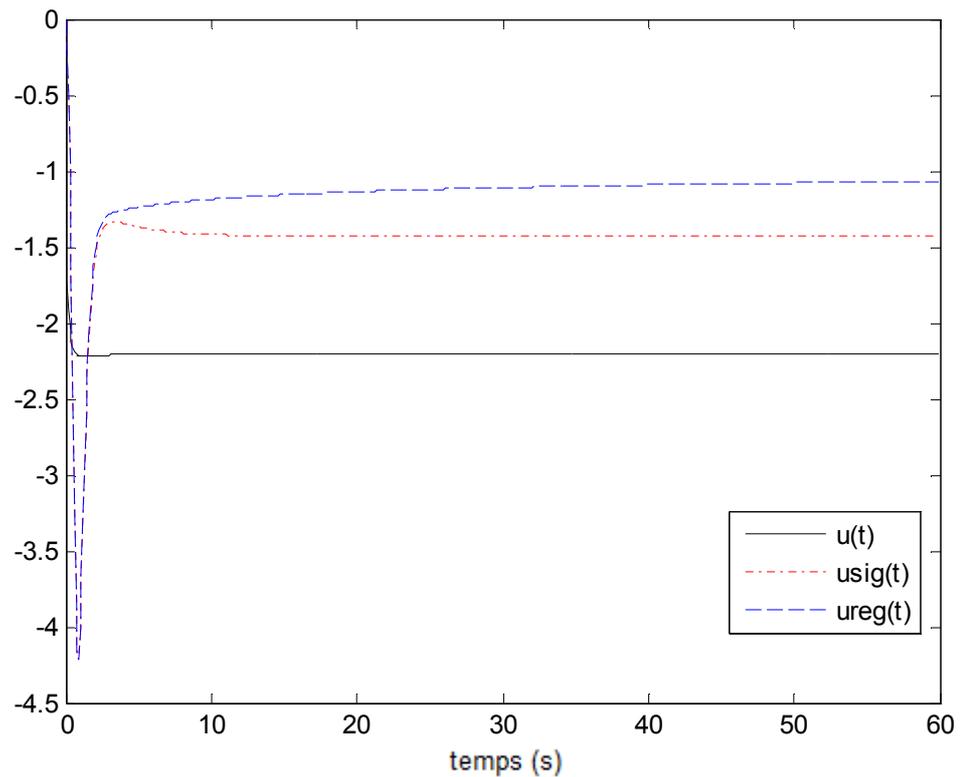


Figure III.12 Signaux de commande de σ -modification fractionnaire (ligne solide), de σ -modification (ligne trait-point) et le cas régulier (ligne pointillée) avec perturbation

III. 4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté, en premier lieu, un concept des contrôleurs adaptatifs d'ordre fractionnaire par le biais d'une boucle avec retour de sortie à grand gain pour une classe de système linéaire, invariant dans le temps, à phase minimale, monovariante, de degré relatif unité. L'idée fondamentale de ce concept est l'introduction d'une intégration d'ordre fractionnaire à côté de l'intégration régulière de la sortie du système au carré dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande. L'introduction de l'opérateur d'ordre fractionnaire dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande a fourni des paramètres de réglage supplémentaires qui ont amélioré les performances du système de commande en boucle fermée. L'analyse de stabilité du système de commande en boucle fermée utilisant le schéma de commande d'ordre fractionnaire proposé a été faite. Les résultats de simulation d'un exemple illustratif ont été présentés pour montrer l'amélioration de la qualité de commande en utilisant ce schéma de commande proposé comparé au schéma de commande classique. Les résultats obtenus ont ouvert quelques horizons pour proposer d'autres schémas de commande adaptative d'ordre fractionnaire qui n'existaient pas dans le cas régulier.

De plus, on a présenté un concept de commande adaptative fractionnaire à grand gain avec le concept de σ -modification pour une classe de systèmes monovariante, linéaire, invariant dans le temps, à phase minimale, et de degré relatif unité. L'idée du concept proposé est l'introduction de la dérivée d'ordre fractionnaire dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande de σ -modification à la place de la dérivée régulière. La stratégie proposée a éliminé le comportement indésirable de la commande adaptative classique à grand gain avec σ -modification en absence des perturbations constantes tout en maintenant les propriétés de robustesse en ce qui concerne l'erreur constante dans la sortie. Le schéma de commande proposé a également fourni un paramètre de réglage supplémentaire, la dérivée d'ordre fractionnaire, qui peut être utilisé dans l'amélioration de la qualité de contrôle du système de commande en boucle fermée. Les résultats de simulation du schéma de commande proposé ont été comparés à la commande adaptative à grand gain classique et à la commande adaptative à grand gain régulier avec σ -modification. L'intégration d'ordre fractionnaire introduite a clairement améliorée le comportement transitoire du système de commande tel qu'un dépassement plus petit et une réponse plus rapide.

Chapitre IV

Commande d'Ordre Fractionnaire

IV. 1 Introduction

Dans ce chapitre, on examine l'utilisation du calcul d'ordre fractionnaire dans la Commande Adaptative à Modèle de Référence (MRAC). L'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans la boucle de commande adaptative, et particulièrement dans la Commande Adaptative à Modèle de Référence (MRAC), s'est avéré être un bon moyen pour l'amélioration de la dynamique du système en ce qui concerne le temps de réponse et le rejet de perturbation. L'idée d'introduire des opérateurs d'ordre fractionnaire dans l'algorithme d'adaptation est très récente et doit être mieux établie, c'est pourquoi de nombreuses équipes de recherche travaillent sur le sujet. Notre contribution dans ce travail est l'utilisation des algorithmes de la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire (FMRAC) en se basant sur l'approximation de Charef des systèmes d'ordre fractionnaire oscillatoire. Des simulations sont présentées pour montrer l'efficacité du schéma de la commande adaptative d'ordre fractionnaire proposé.

D'autre part, une nouvelle stratégie d'ajustement des paramètres du contrôleur classique PID en se basant sur un modèle de référence d'ordre fractionnaire. Notre modèle est présenté par un système en boucle fermée idéale dont la boucle ouverte est donnée par la fonction de transfert idéale de Bode. Les paramètres du contrôleur PID sont réglés par la minimisation de l'intégrale de l'erreur quadratique (ISE) entre les réponses du modèle de référence fractionnaire désirée et du système avec le contrôleur PID. Le système en boucle fermée résultant (avec le contrôleur PID) possède la caractéristique souhaitée d'être robuste aux variations du gain avec des réponses à un échelon présentant la propriété d'iso-amortissement. Notre contribution dans ce travail est l'utilisation du modèle de référence d'ordre fractionnaire idéale en se basant sur l'approximation de Charef des systèmes d'ordre fractionnaire oscillatoire. Des simulations sont présentées pour montrer l'efficacité du schéma de réglage du correcteur classique PID proposé.

IV.2 Préliminaires

IV. 2. 1 la Règle de M.I.T

La méthode du gradient ou la règle MIT a été développée dans le Massachusetts Institute of Technology (MIT). Elle est utilisée dans l'approche de la Commande Adaptative à Modèle de Référence (MRAC). On considère un système en boucle fermée où le contrôleur possède un vecteur θ de paramètres ajustables. Un modèle d'une sortie y_m spécifie la sortie désirée de la boucle fermée. e est l'erreur entre la sortie y du système en boucle fermée et la sortie du modèle désiré y_m , comme il est montré dans la Figure IV.1. Il est possible d'ajuster ces paramètres pour que la fonction coût:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \tag{IV.1}$$

soit minimisée. Il faut changer les paramètres dans la direction du gradient négatif de J , soit :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \tag{IV.2}$$

Ceci mène à [41] :

$$\theta = -\frac{\gamma}{s} y_m e \tag{IV.3}$$

Le signal de commande est calculé en utilisant la relation suivante

$$u = \varphi^T \theta \tag{IV.4}$$

où φ est le vecteur de régression contenant les signaux d'entrée et de sortie mesurés u et y et l'entrée de référence u_c .

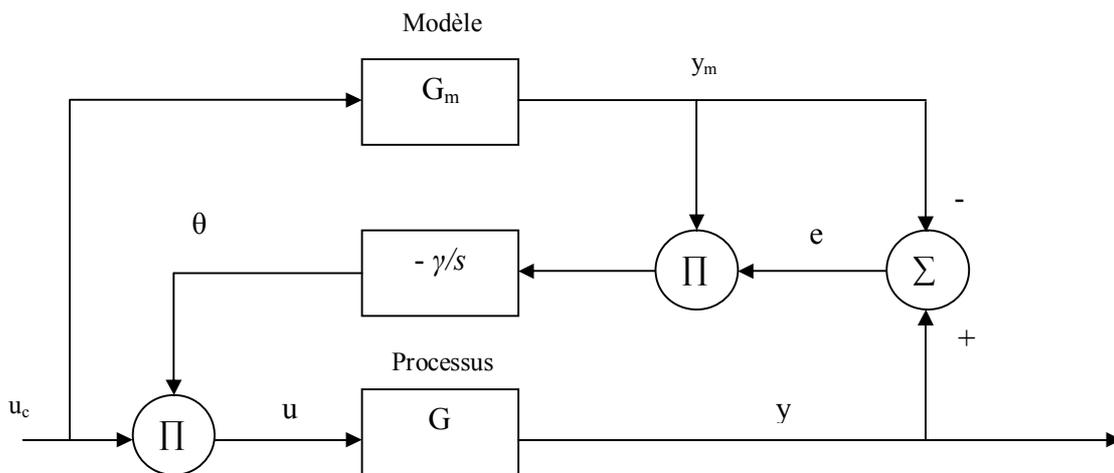


Figure IV.1 Commande adaptative à modèle de référence basée sur la règle de MIT

IV. 2. 2 Fonction de Transfert Idéale de Bode

Dans son étude sur la conception des amplificateurs à retour, Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert en boucle ouverte comme dans la Figure IV.2 [7].

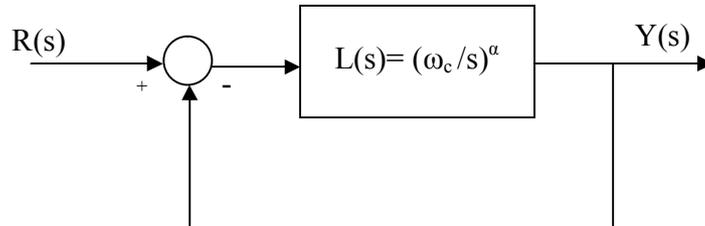


Figure IV.2 Système de commande d'ordre fractionnaire avec la fonction de transfert idéale de Bode $L(s)$.

$$L(s) = \left(\frac{\omega_c}{s} \right)^\alpha \quad \alpha \in \mathfrak{R} \quad (\text{IV.5})$$

où ω_c est la fréquence au gain unité, c'est-à-dire, $|L(j\omega_c)|=1$. Le paramètre α est la pente de la courbe d'amplitude, sur une échelle logarithmique, et peut avoir des valeurs entières ainsi que des valeurs réelles. En fait, la fonction de transfert $L(s)$ est un différenciateur fractionnaire pour $\alpha < 0$ et un intégrateur fractionnaire pour $\alpha > 0$. Les diagrammes de Bode de $L(s)$ ($0 < \alpha < 2$) sont très simples. La courbe d'amplitude est une droite de pente constante $-20\alpha\text{dB/dec}$, et la courbe de phase est une ligne horizontale de $-\alpha\pi/2$ rad. Considérons maintenant le système avec retour unitaire représenté dans la Figure IV.2 avec la fonction de transfert idéale de Bode $L(s)$ inséré dans la boucle directe. Ce choix de $L(s)$ donne un système en boucle fermée avec la propriété souhaitable d'être insensible aux variations du gain. Si le gain change, la fréquence de coupure ω_c varie, mais la marge de phase du système $PM = \pi(1-\alpha/2)$ rad reste indépendamment de la valeur du gain. Le système en boucle fermée de la Figure IV.2 sera donc utilisé comme modèle de référence pour l'ajustement des paramètres du contrôleur PID. Une stratégie sera développée pour l'ajustement des paramètres du contrôleur PID en se basant sur ce modèle de référence d'ordre fractionnaire.

IV. 2. 2. 1 Réponse Fréquentielle

La fonction de transfert en boucle fermée du système de la Figure IV.2 est donnée par :

$$H(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha} \quad (\text{IV.6})$$

où ω_c est la fréquence au gain unité et α est l'ordre fractionnaire tel que $1 < \alpha < 2$. Le diagramme de Bode de (IV.6) pour plusieurs valeurs de α est donné dans la Figure IV.3.a pour le module et la Figure IV.3.b pour la phase (voir section I.6.3.2).

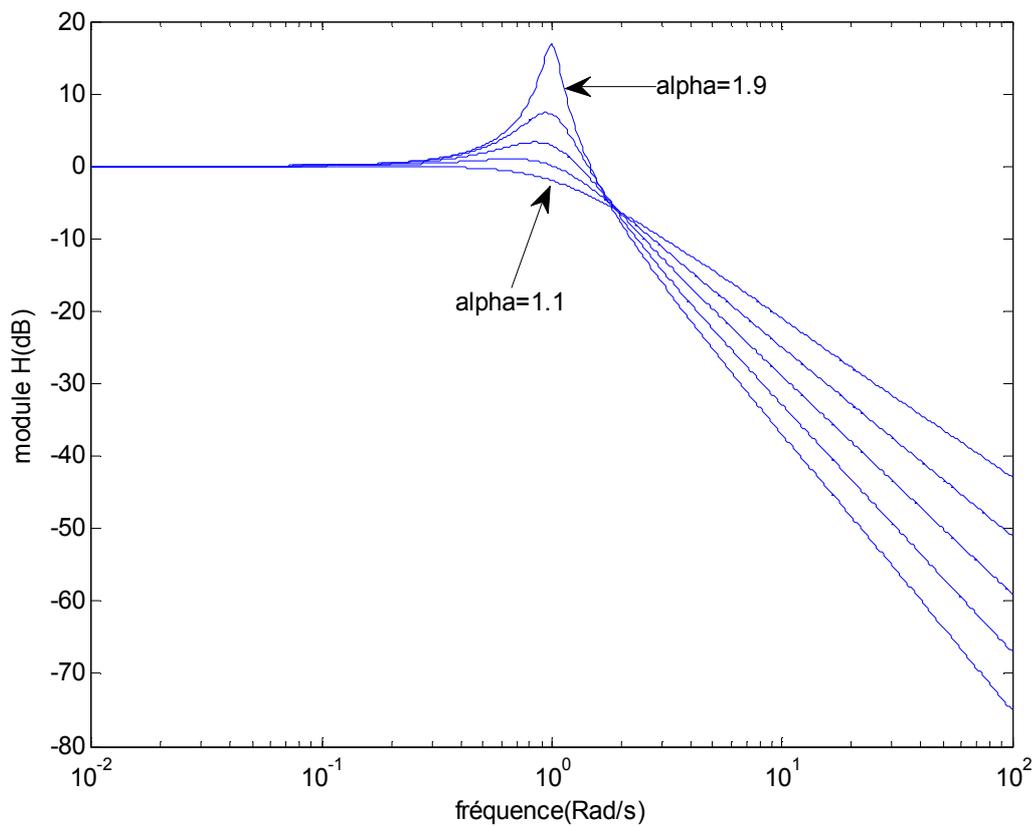


Figure IV.3.a Module du diagramme de Bode de la fonction de transfert idéale de Bode $L(s)$ en boucle fermée pour plusieurs valeurs de α .

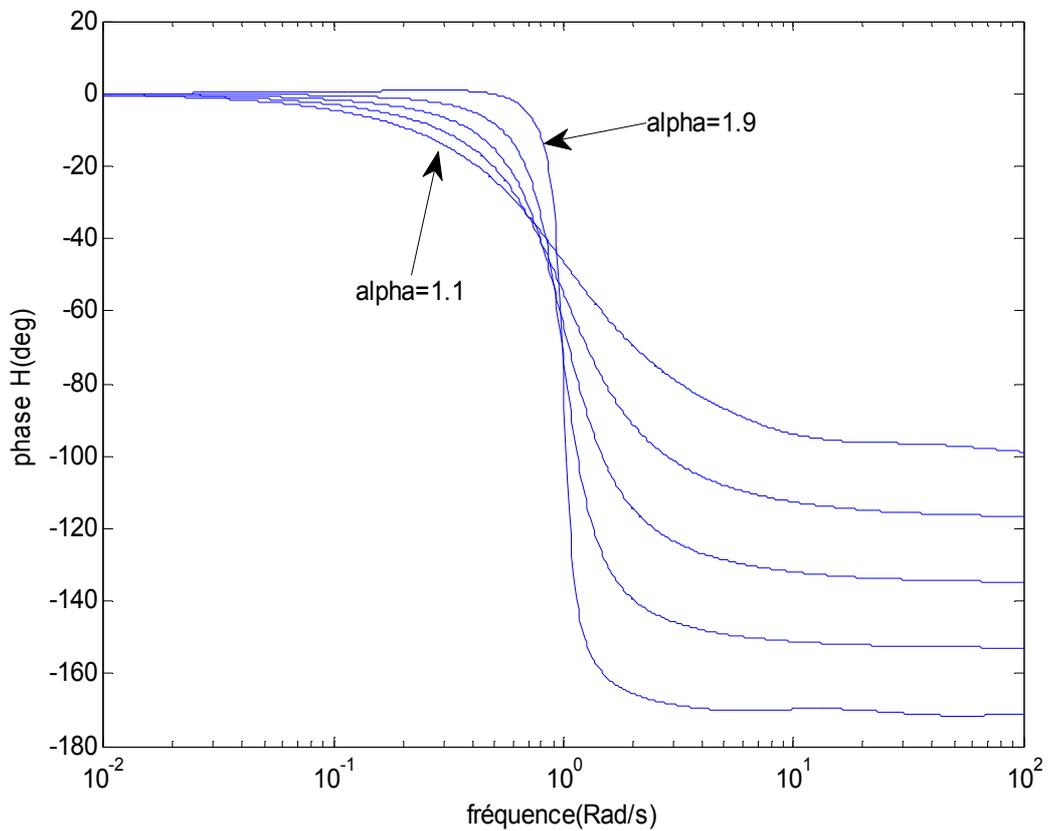


Figure IV.3.b Phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert idéale de Bode $L(s)$ en boucle fermée pour plusieurs valeurs de α .

IV. 2. 2. 2 Réponse Temporelle

Pour obtenir la réponse indicielle de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire $H(s)$, la sortie $y(t)$ pour une entrée échelon unité est donnée dans la Figure IV.4 (voir la section I.6.3.4).

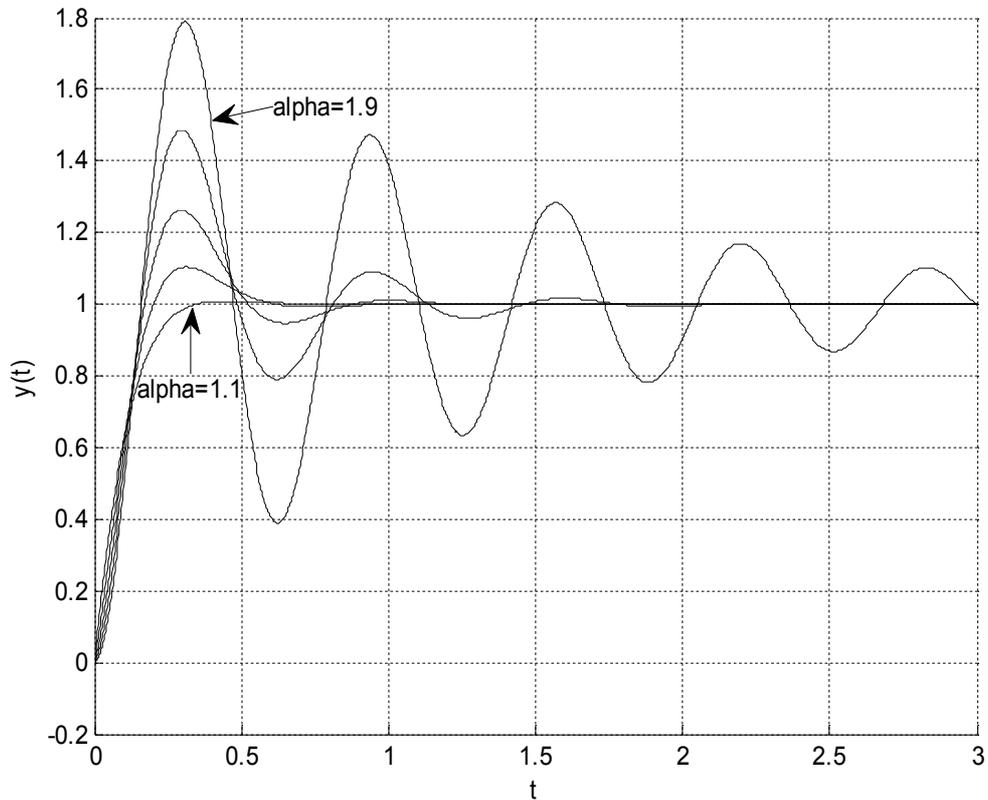


Figure IV.4 La réponse indicielle de la fonction de transfert idéale de Bode $L(s)$ en boucle fermée pour plusieurs valeurs de α .

IV. 2. 3 Modèle Utilisé dans la Commande d'Ordre Fractionnaire

Dans les deux parties suivantes le modèle utilisé est celui du système d'ordre fractionnaire oscillatoire qui est défini comme étant le système d'ordre fractionnaire représenté par l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire suivante pour $1 < \alpha < 2$

$$(\tau_0)^\alpha \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + y(t) = e(t) \quad (\text{IV.7})$$

sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]} \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{IV.8})$$

IV. 3 Commande Adaptative à Modèle de Référence d'Ordre Fractionnaire

La commande adaptative est l'un des axes de recherches de commande conçue dans les années 1950 ; cette méthode de commande est fermement restée dans le courant principal de l'activité de recherche avec des centaines d'articles et plusieurs livres publiés chaque année. Une des raisons de la croissance rapide et de la popularité continue de la commande adaptative est son objectif clairement défini: contrôler des systèmes avec des paramètres inconnus. C'est pourquoi la théorie de la commande adaptative compte de nos jours un grand nombre d'approches et de méthodes. Dans cette section, on va utiliser la commande MRAC qui est l'une des approches les plus populaires de la commande adaptative en raison de sa simplicité et de son niveau de performance élevé.

La généralisation de la commande adaptative à modèle de référence aux systèmes de commande d'ordre fractionnaire a été développée sur deux fronts: en utilisant un modèle de référence d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande, où une amélioration de la dynamique du système a été démontré, essentiellement en ce qui concerne le temps de réponse, en raison des très bonnes propriétés dynamiques du modèle de référence, et en introduisant les opérateurs d'ordre fractionnaire qui assure la capacité des algorithmes fractionnaire pour garantir la stabilité avec un niveau élevé de performances et de robustesse par rapport aux algorithmes de commande d'ordre entier.

En 2002, Vinagre et al. [9] ont introduit le Calcul d'Ordre Fractionnaire (FOC) dans la Commande MRAC. Ils ont utilisé la règle d'ajustement de paramètres d'ordre fractionnaire avec un modèle de référence d'ordre fractionnaire. Ladaci et Charef dans [10,72-73] ont utilisé différents schémas de commande adaptative à modèle référence d'ordre fractionnaire. Ils ont proposé l'introduction d'une différenciation d'ordre fractionnaire à la sortie du processus avec un comportement intéressant en présence de bruits additifs. Un schéma de commande combinant l'approche du modèle de référence et la règle d'ajustement de paramètres d'ordre fractionnaire pour l'ajustement du gain de la boucle directe a été présenté dans [74].

Dans notre cas d'étude, la performance souhaitée a été spécifiée par le choix d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire. L'ajustement des paramètres a été effectué par l'erreur entre les sorties du processus et le modèle de référence, comme il est montré dans la Figure IV.5 [75].

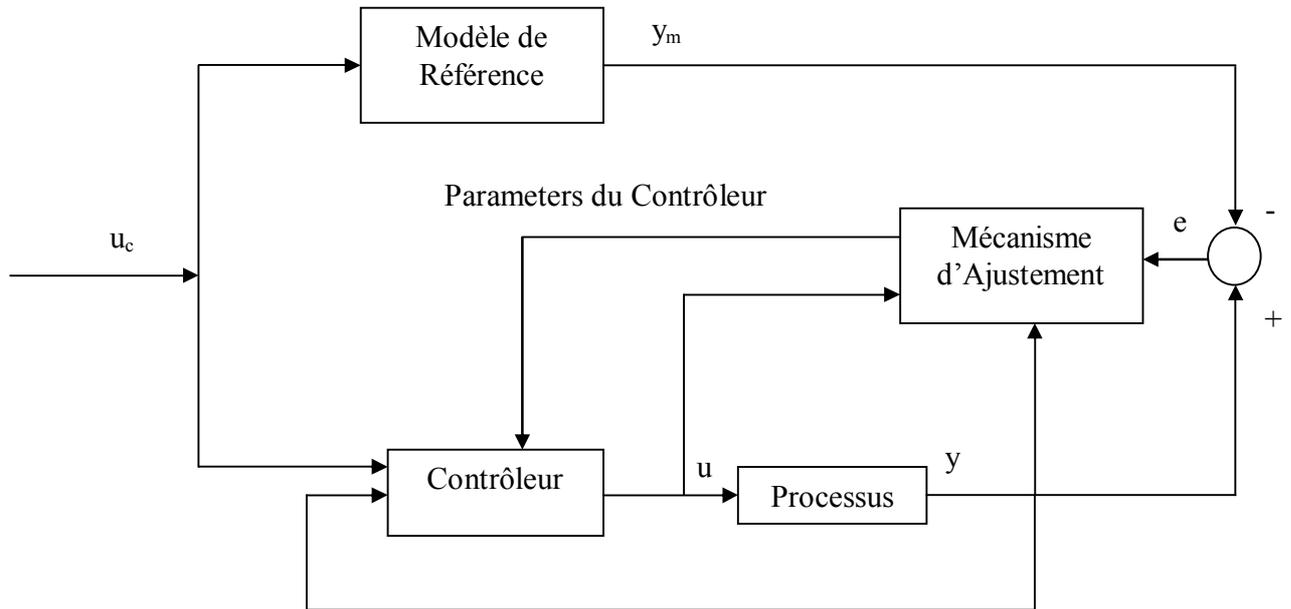


Figure IV.5 Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire

IV. 3. 1 Utilisation du Calcul Fractionnaire dans le schéma du MRAC

Dans cette section, le calcul fractionnaire est introduit dans le schéma du MRAC par l'utilisation d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire qui va permettre d'améliorer la dynamique de la réponse du processus à commander. Un exemple illustratif est donné pour montrer l'amélioration des performances de la méthode utilisée avec quelques commentaires.

Comme stratégie de commande, nous utiliserons la commande adaptative à modèle de référence (MRAC) et particulièrement l'approche utilisant la loi de M.I.T. La structure du contrôleur et la loi de commande restent donc inchangées et l'on se limite à utiliser une approximation d'ordre entier de la fonction de transfert du modèle d'ordre fractionnaire. La fonction de transfert $G_p(s)$ du processus est donnée comme :

$$G_p(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (\text{IV.9})$$

La fonction de transfert du modèle d'ordre fractionnaire choisi $G_m(s)$ est donnée aussi par :

$$G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha\right]} \quad (\text{IV.10})$$

Comme $G_m(s)$ est une fonction irrationnelle, on l'a approximé par une fonction rationnelle $G_m^*(s)$ obtenue par la méthode de la fonction des singularités (voir section I.6.3) et elle est donnée par:

$$G_m^*(s) = \frac{B_m^*(s)}{A_m^*(s)} \quad (IV.11)$$

En utilisant la loi de M.I.T. on obtient de l'équation (II.48),

$$\theta = - \left[\frac{\gamma}{s} \right] y_m e \quad (IV.12)$$

donc, on aura :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m(t) e(t) \quad (IV.13)$$

ou bien :

$$\theta(t) = -\gamma \int_0^t y_m(t) e(t) dt \quad (IV.14)$$

IV.3.1.1 Exemple illustratif

Un exemple illustratif est présenté pour montrer l'efficacité et l'amélioration de la qualité de la commande en utilisant le schéma de commande proposé [76]. Considérons un système décrit par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{0.5}{s+1} \quad (IV.15)$$

Le schéma adaptatif présenté dans la Figure IV.5 est utilisé pour ajuster le gain de la boucle directe afin de poursuivre le modèle de référence de l'équation (IV.10) pour $\omega_c=1$ rad/s :

$$y_m(s) = \frac{1}{[1+(s)^\alpha]} u_c \quad (IV.16)$$

Les résultats des simulations ont été obtenus pour le paramètre $\gamma = 0.0001$ et pour différentes valeurs du paramètre α . Les Figures IV.6 au IV.11 montrent, respectivement, les résultats obtenus des réponses du système en boucle fermée ainsi que les erreurs entre les sorties du modèle et du système en boucle fermée pour les paires des paramètres $(\gamma, \alpha) = (0.0001, 1.25)$, $(\gamma, \alpha) = (0.0001, 1.5)$ et $(\gamma, \alpha) = (0.0001, 1.7)$.

On note que pour les trois cas des paramètres (γ, α) le système en boucle fermée utilisant la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire reste stable. On remarque aussi que la réponse dans le cas $(\gamma, \alpha) = (0.0001, 1.25)$ est moins oscillante que les deux autres cas, et qu'elle réalise la poursuite la plus performante. Le niveau des performances est meilleur lorsque le paramètre α est proche de 1. Pendant les simulations, on a aussi noté que la valeur du paramètre gain d'adaptation γ nécessaire pour stabiliser le système adaptatif doit être très petite et l'augmentation de sa valeur peut déstabiliser le système. Donc, Pour des valeurs appropriées du gain d'adaptation γ et le paramètre α , la règle MIT peut résoudre le problème de poursuite du système avec le modèle de référence. Par conséquent, la méthode proposée montre qu'un modèle de référence d'ordre fractionnaire stabilise le système en boucle fermée et peut considérablement améliorer ses performances.

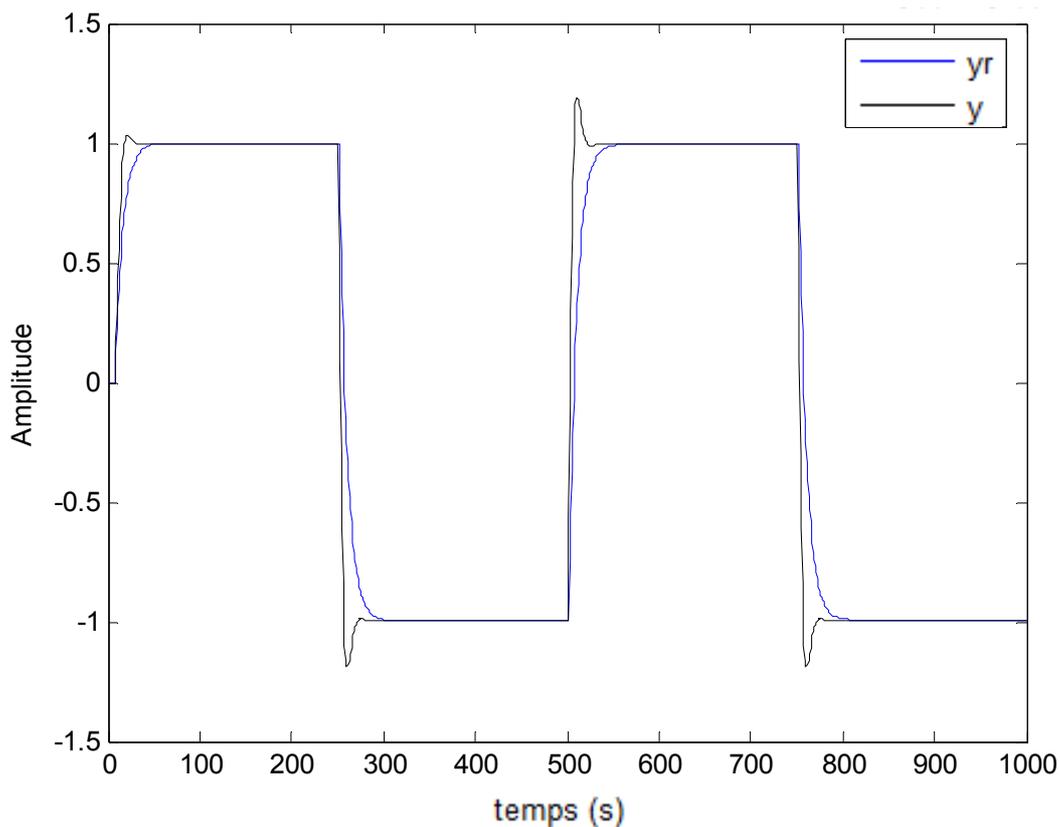


Figure IV.6 Sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.25$ et $\gamma=0.0001$

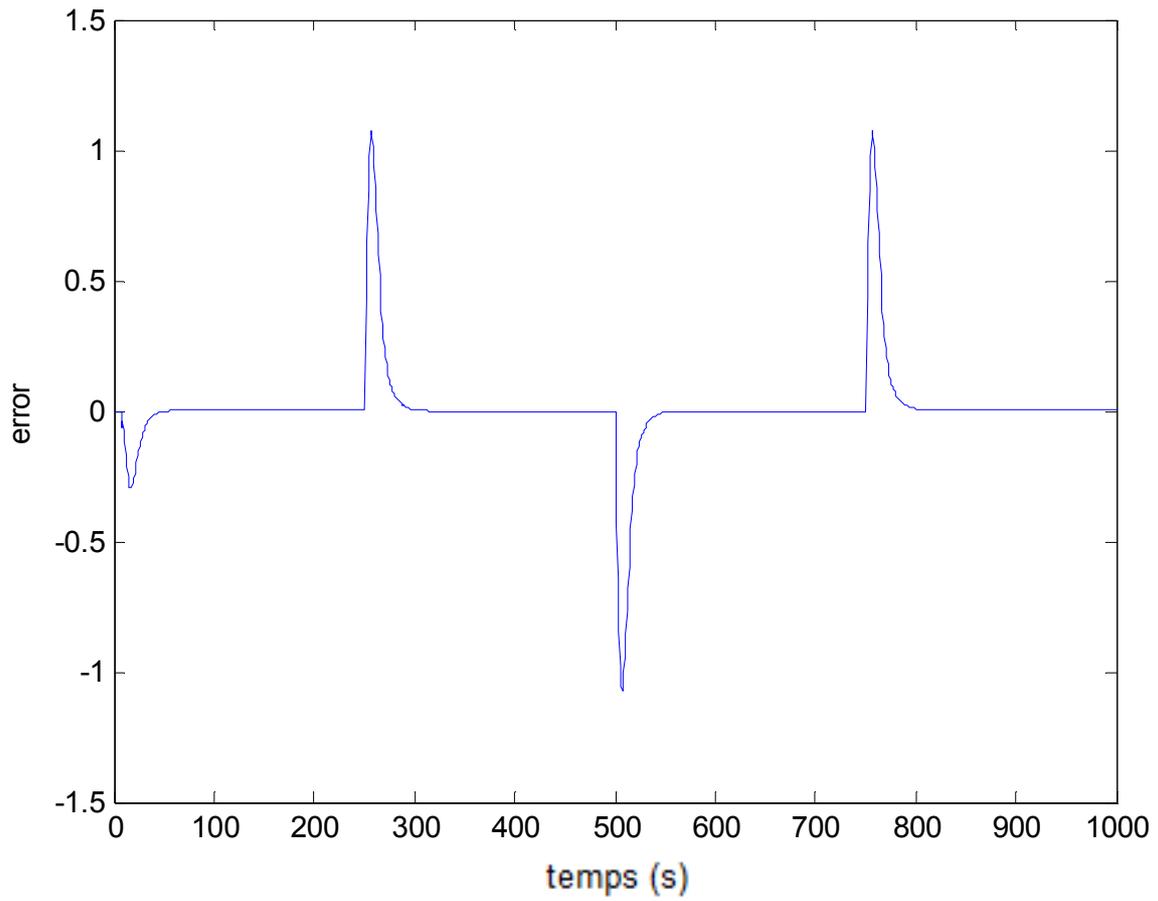


Figure IV.7 Erreur entre sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.25$ et $\gamma=0.0001$

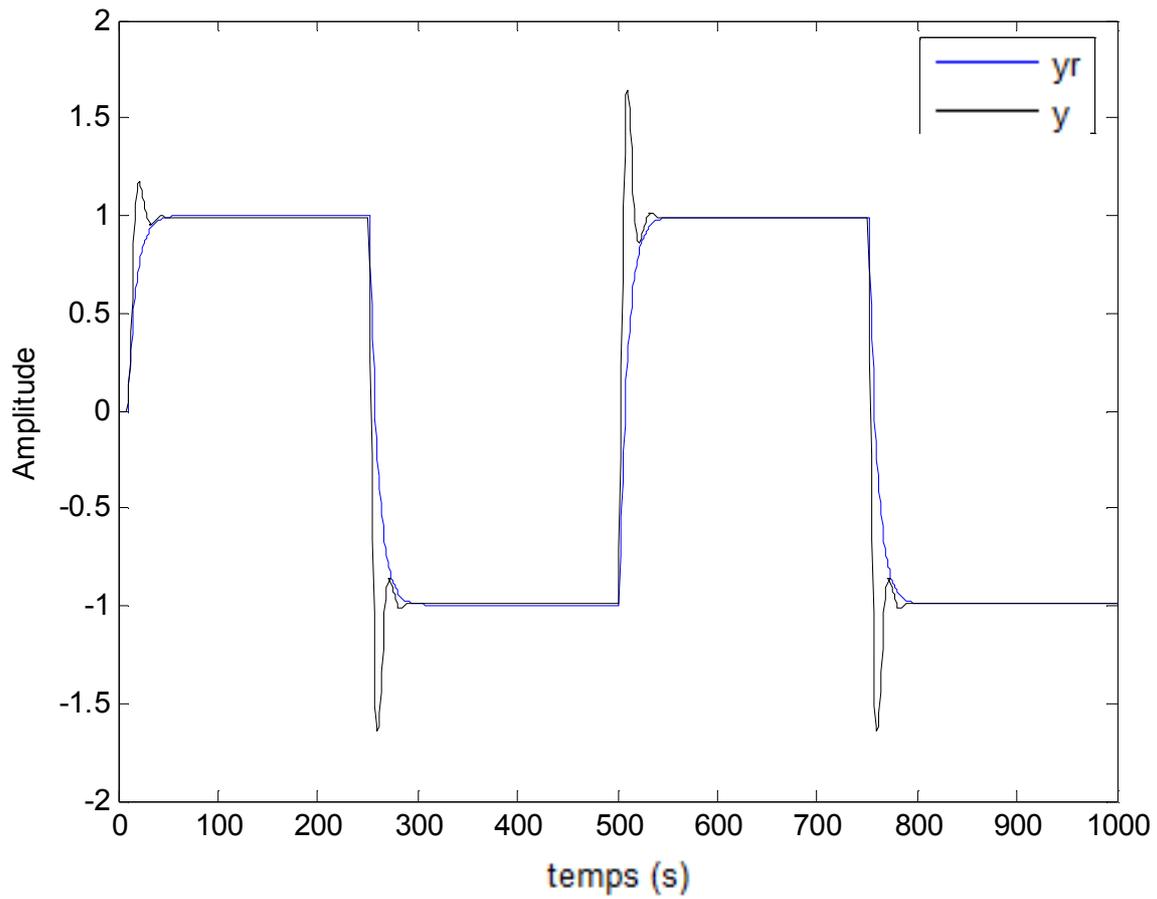


Figure IV.8 Sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.5$ et $\gamma=0.0001$

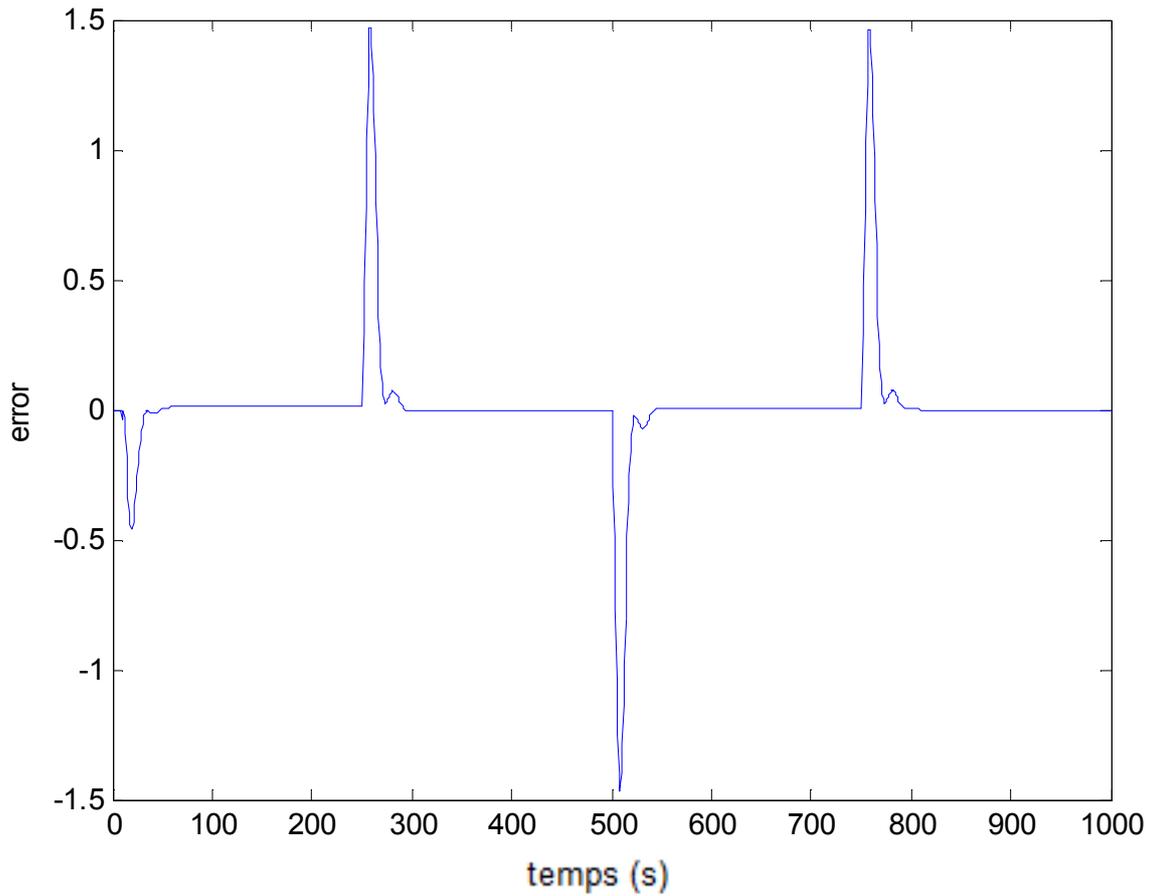


Figure IV.9 Erreur entre sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.5$ et $\gamma=0.0001$

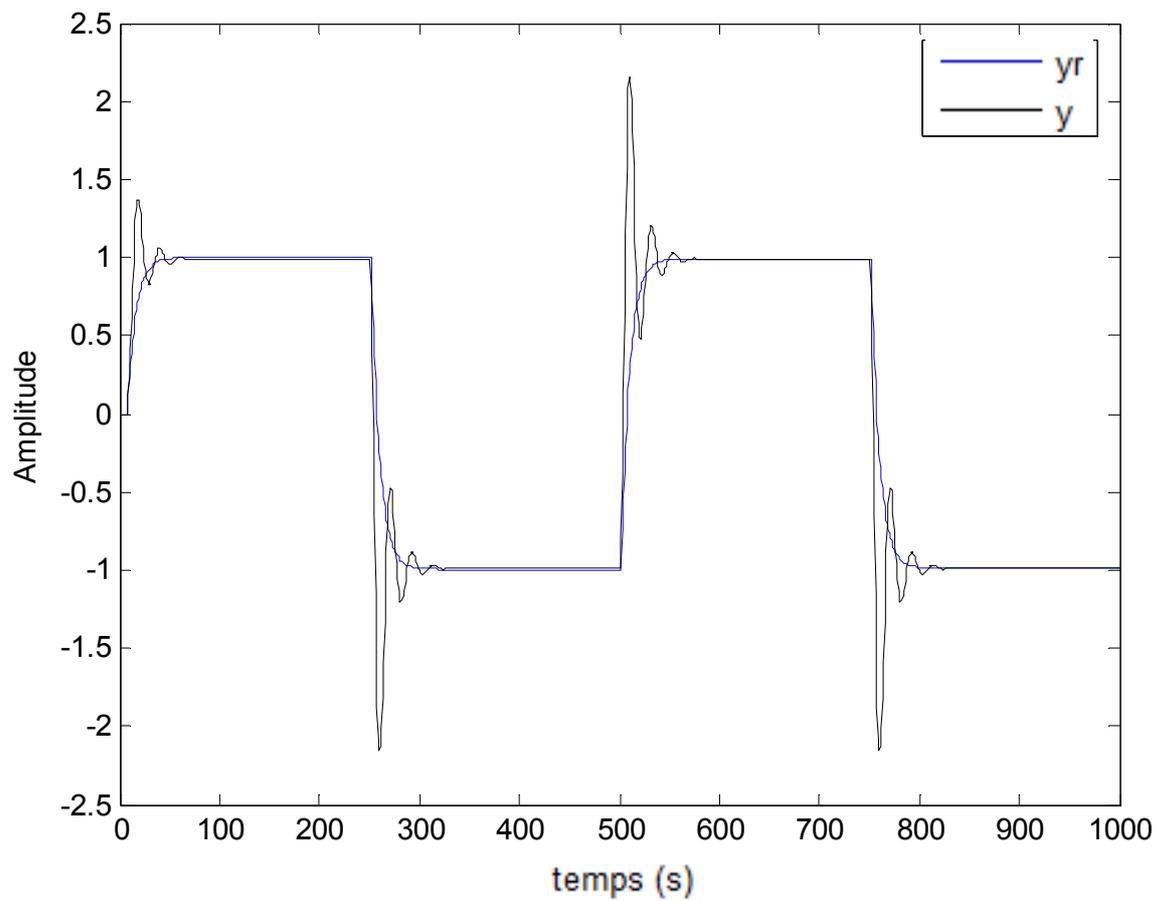


Figure IV.10 Sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.7$ et $\gamma=0.0001$

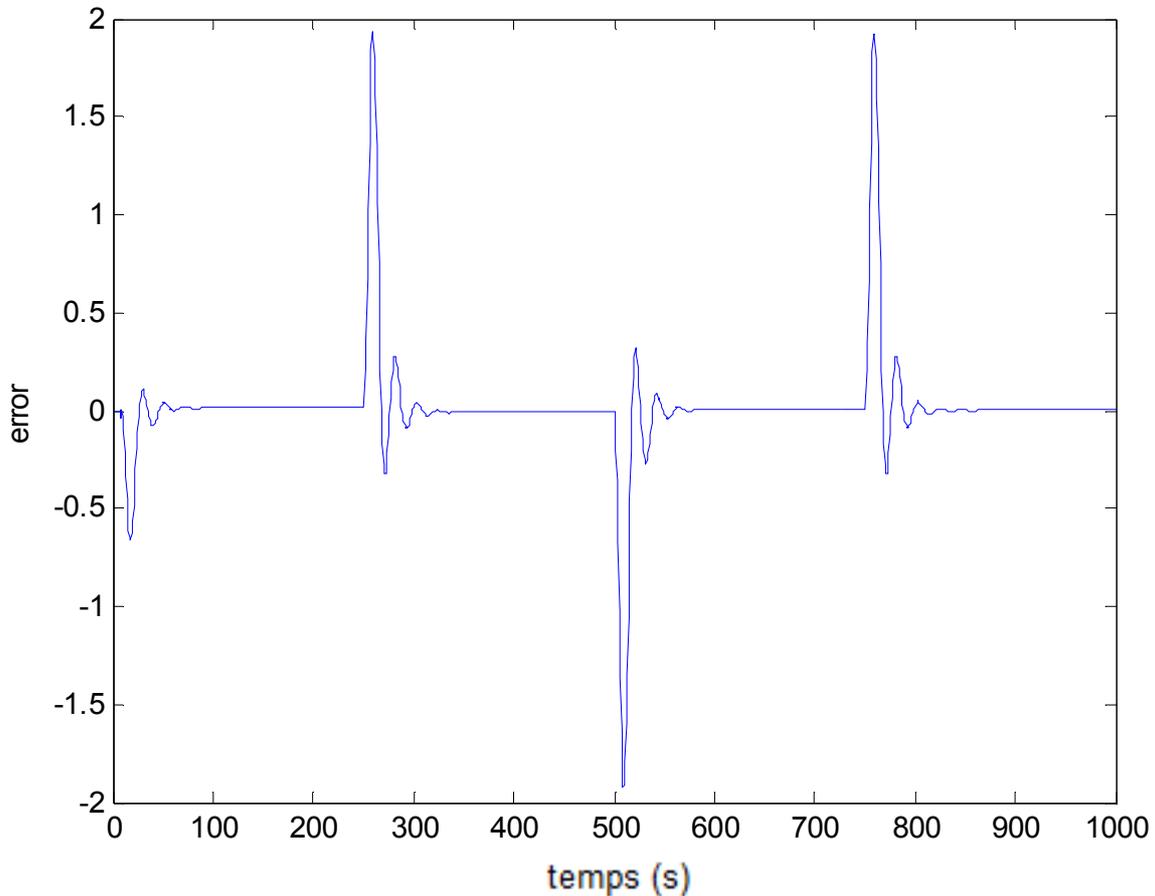


Figure IV.11 Erreur entre sorties du système réel et système avec modèle de référence fractionnaire $\alpha=1.7$ et $\gamma=0.0001$

IV.4. Ajustement des Contrôleurs PID en Utilisant la Fonction de Transfert Idéale de Bode

Dans cette section, on aborde le système en boucle fermée avec la fonction de transfert idéale de Bode comme système de référence pour l'ajustement des paramètres du contrôleur PID. A cet effet, on considère le système en boucle fermée standard représenté dans la Figure IV.12, où $G_c(s)$ et $G_p(s)$ sont les fonctions de transfert du contrôleur et du processus, respectivement. Le système peut être sujet à la fois des entrées de consigne et de perturbation, $r(t)$ et $p(t)$ respectivement. Dans ce qui suit, on va faire une description de la stratégie adoptée pour la conception des contrôleurs PID. On présente d'abord le type de contrôleur PID utilisé dans les simulations, suivie d'une description de l'algorithme d'optimisation adoptée.

Il a été montré que le système réglé selon la méthodologie proposée rend le système en boucle fermée robuste même en variant le gain avec les réponses à un échelon révélant une propriété d'iso-amortissement.

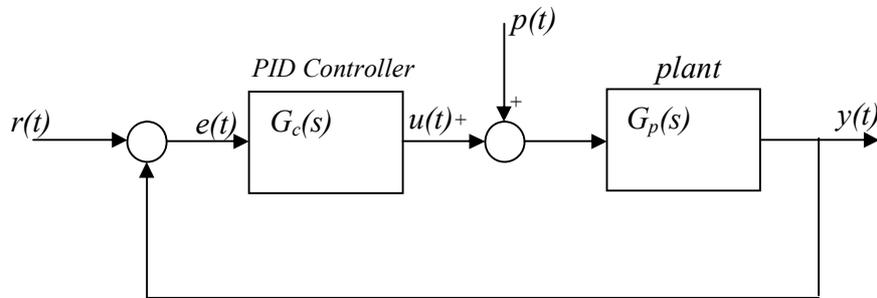


Figure IV.12 Schéma bloqué d'un système de commande à retour avec un contrôleur PID

IV.4.1 Contrôleur PID

Aujourd'hui, le contrôleur PID est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement dans l'industrie sont des contrôleurs PID. Généralement, le contrôleur PID classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la Figure V.12. Le $u(t)$ désigne le signal de commande et $e(t)$ l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la grandeur à commander $y(t)$, $G_c(s)$ est la fonction de transfert du contrôleur, $G_p(s)$ est la fonction de transfert de système avec $p(t)=0$ ce qui donne la Figure IV.13.

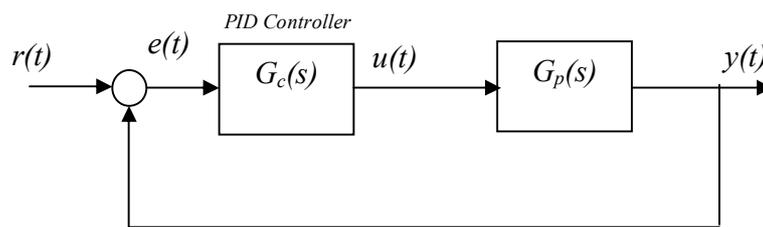


Figure IV.13 Système de commande à retour unitaire classique

L'équation idéale en fonction du temps d'un contrôleur PID a la forme suivante:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right) \quad (IV.17)$$

où $u(t)$ et $e(t)$ désignent les signaux de commande et d'erreur, respectivement, et K , T_i , T_d sont le gain proportionnel, la constante de temps d'intégration et la constante de temps de dérivation du contrôleur PID. L'ensemble des variables (K , T_i , T_d) sont les paramètres à régler.

La fonction de transfert correspondante est donnée par:

$$G_c(t) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (IV.18)$$

Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire. La partie proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander multiplié par le gain K . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart. D'un autre côté, un contrôleur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un contrôleur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation du terme intégral. Ce dernier génère, à partir d'un moindre signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du contrôleur. Mais il engendre un effet déstabilisant. Au contraire, l'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée du terme dérivé est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition [77].

IV. 4. 2. Approche d'Optimisation

La Figure IV.14 représente la structure d'ajustement du système adopté pour la détermination des paramètres du PID (K , T_i , T_d). Le modèle de référence est donné par la fonction de transfert du système en boucle fermée avec la fonction de transfert idéal de Bode $L(s)$ représenté sur la Figure IV.2. La fonction de transfert de ce système est donnée par :

$$H(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha} \quad , \text{ pour } 1 < \alpha < 2 \quad (IV.19)$$

avec les paramètres d'ajustement (α , ω_c) sont l'ordre et la fréquence au gain unité, respectivement.

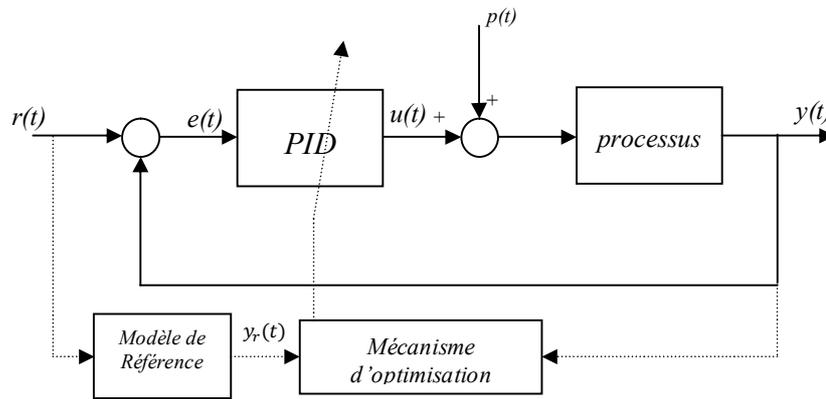


Figure IV.14 Stratégie d'ajustement des paramètres du contrôleur PID

De la Figure IV.14, on voit que la sortie $y(t)$ du système en boucle fermée avec le contrôleur PID est comparée à la sortie $y_r(t)$ du modèle de référence d'ordre fractionnaire de (IV.19). Ensuite, la fonction d'erreur qui en résulte, $e(t) = y_r(t) - y(t)$, est minimisée via un critère de performance d'optimisation pour déterminer les paramètres optimaux du PID. On a adopté la minimisation de l'erreur quadratique de l'intégral (ISE), qui est définie comme:

$$J(K, T_i, T_d) = \int_0^{\infty} (y_r(t) - y(t))^2 dt \tag{IV.20}$$

où K , T_i et T_d sont les paramètres du contrôleur PID.

La recherche de la conception optimale du contrôleur PID est supposée comme étant un problème d'optimisation sous contrainte définie comme suit:

$$\text{Minimiser } J(K, T_i, T_d) \text{ sujet à } (K, T_i, T_d) > 0 \tag{IV.21}$$

Alors, l'ajustement du contrôleur PID consiste à trouver les paramètres optimaux (K, T_i, T_d) qui minimisent $J(K, T_i, T_d)$, tout en satisfaisant la stabilité du système en boucle fermée et des paramètres du contrôleur positifs.

IV. 4.3. Exemple Illustratif

Comme illustration, on considère un processus dont la fonction de transfert est donnée par [78]:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Figure IV.15 montre la réponse indicielle du système en boucle fermée avec $G_p(s)$ et avec le PID ajusté par la méthode proposée. Dans la Figure IV.15 on représente l'évolution des réponses indicielles par rapport au modèle de référence utilisant la fonction de transfert de Bode Idéale pour un ordre fractionnaire $\alpha = 1,33$ et la fréquence au gain unité $\omega_c = 1$ rad/s.

On a trouvé que les valeurs optimaux des paramètres du contrôleur PID sont : $K = 2.06$, $T_i = 0.08$ et $T_d = 0.01$ pour $J = 0.0018$.

On remarque que le système asservi obtenu est robuste par rapport aux variations du gain et possède une propriété d'iso-amortissement autour de la fréquence du gain unité.

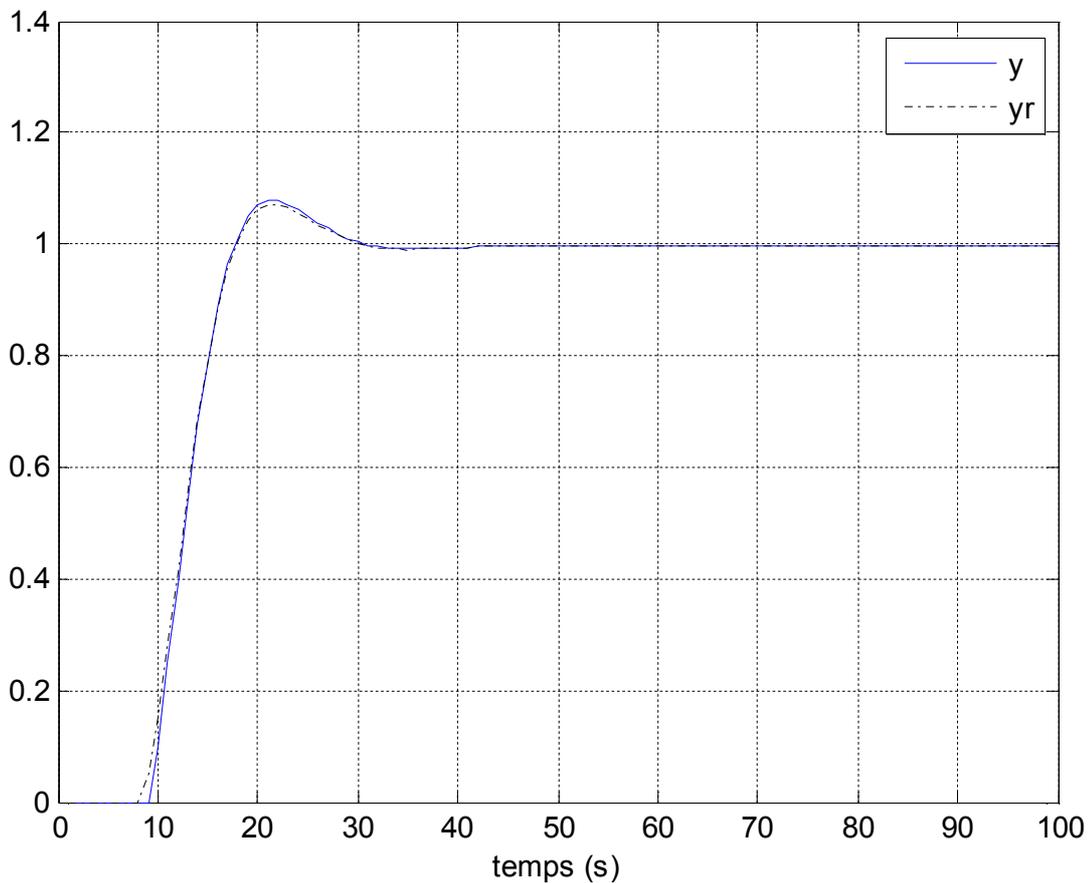


Figure IV.15 Sortie du système asservi réalisée avec celle du modèle de référence d'ordre fractionnaire pour $\alpha = 1.33$, $\omega_c = 1$ rd/s

IV.5 Conclusion

L'algorithme de la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour les systèmes SISO peut garantir la stabilité du système en boucle fermée et satisfaire un bon niveau de performance. Quoiqu'il en soit les résultats ont montré les avantages qui pourraient être de certain intérêt pour la commande des systèmes où la réponse temporelle est une priorité dans les exigences du concepteur.

Nous avons présenté l'extension de la commande adaptative à modèle de référence à un modèle de référence d'ordre fractionnaire. A travers des exemples illustratifs on a conclu que :

- La stabilité de la boucle fermée est maintenue pour plusieurs valeurs du paramètre α du modèle de référence d'ordre fractionnaire.
- Le niveau des performances, en terme du temps de réponse et du lissage de la sortie du système en boucle fermée est meilleur pour $1 < \alpha < 1.5$.
- L'utilisation du paramètre α pour augmenter la rapidité de convergence du processus.

De plus, on a présenté aussi une nouvelle stratégie pour l'ajustement des paramètres du contrôleur PID. La méthode proposée est basée sur la minimisation de l'ISE entre la réponse indicielle désirée, produite par une fonction de transfert d'ordre fractionnaire, et la réponse indicielle du système avec le contrôleur PID. Le modèle de référence est constitué d'un système en boucle fermée idéale dont sa boucle ouverte est donnée par la fonction de transfert idéale de Bode. On a appliqué la méthode proposée pour l'ajustement des paramètres du contrôleur PID, et on l'a testée sur un exemple révélant de bons résultats démontrant son applicabilité. Avec la méthode proposée, on a obtenu un système en boucle fermée robuste aux variations du gain et une réponse indicielle présentant la propriété d'iso-amortissement. Les simulations ont montré l'efficacité du schéma de commande d'ordre fractionnaire présenté.

Conclusion Générale

En étudiant le domaine de la commande adaptative d'ordre fractionnaire, nous avons proposé plusieurs améliorations dans les algorithmes adaptatifs par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire, et ainsi élargir la théorie de cette commande en développant de nouveaux algorithmes tout en montrant leurs avantages en les appliquant aux différents procédés.

Nous avons présenté deux contributions majeures relatives à la commande adaptative d'ordre fractionnaire pour améliorer la qualité de la commande des systèmes dynamiques. Notre contribution comporte une partie basée sur des exemples de simulation numériques, et une partie théorique basée sur des arguments analytiques avec l'élaboration d'un théorème de stabilité de la commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire.

Notre première contribution concerne la proposition d'un nouveau schéma de commande adaptative d'ordre fractionnaire à grand gain avec retour de sortie pour une classe de systèmes linéaires, invariants dans le temps, à phase minimale, monovariante et de degré relatif unité. L'idée fondamentale de ce nouveau schéma est l'introduction d'une intégration d'ordre fractionnaire à côté de l'intégration régulière de la sortie du système dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande. L'ordre d'intégration fractionnaire introduit avait amélioré le comportement du système de commande. On a montré que ce contrôleur peut aussi stabiliser la classe considérée des systèmes. Le contrôleur adaptatif proposé peut également résoudre le problème de poursuite d'une référence échelon unité. Les résultats de simulation présentés montrent l'amélioration de la qualité de commande en comparant le schéma de commande proposé au schéma de commande classique.

La deuxième contribution concerne une autre proposition d'un contrôleur adaptatif à grand gain avec une modification du concept de σ -modification en utilisant le calcul fractionnaire. Par cette modification, on a l'intention de maintenir la robustesse en présence des perturbations et d'éliminer le comportement indésirable en absence des perturbations, par l'introduction de la dérivée d'ordre fractionnaire dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande à la place de la dérivée régulière. Les résultats de simulation montrent l'efficacité du schéma de commande proposé par rapport au cas régulier de la commande adaptative à grand gain et le cas de la commande adaptative à grand gain avec σ -modification.

Une autre contribution a été présentée concernant l'introduction d'un système d'ordre fractionnaire oscillatoire approximé par la technique de Charef comme modèle dans la commande adaptative à modèle de référence (MRAC) conventionnel. Les simulations ont montrés l'efficacité du schéma MRAC avec modèle fractionnaire dans l'amélioration de la dynamique de la réponse du processus commandé avec une poursuite parfaite de la sortie.

Une dernière contribution a été présentée en introduisant la stratégie d'ajustement des paramètres du contrôleur PID en se basant sur un modèle de référence d'ordre fractionnaire. Le modèle utilisé dans ce cas est un système d'ordre fractionnaire dit fonction de transfert idéale de Bode. Les paramètres du contrôleur PID sont ajustés par la minimisation de l'intégrale de l'erreur quadratique entre les réponses du modèle de référence fractionnaire désirée et du système asservi en boucle fermée avec le contrôleur PID. Le système en boucle fermée résultant possède la caractéristique souhaitée d'être robuste aux variations du gain avec les réponses indicielles présentant la propriété d'iso-amortissement. Le système d'ordre fractionnaire utilisé comme modèle a été aussi approximé par la technique de Charef. Des simulations ont été faites pour tester ce schéma de commande d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus ont été très satisfaites.

Quant aux perspectives de recherche, elles s'inscrivent directement dans la continuité des travaux réalisés et en cours de réalisation. On suggère alors :

- Proposition des arguments théoriques de stabilité pour les différents schémas de commande proposés.
- Proposer d'autres schémas de la commande adaptative d'ordre fractionnaire.
- Etendre les approches proposées à la commande prédictive d'ordre fractionnaire.
- Etendre les approches proposées de la commande adaptative d'ordre fractionnaire aux systèmes multi-variables.
- Etendre la commande d'ordre fractionnaire aux systèmes à retard.

Bibliographie

- [1] Manabe, S., “The non-integer integral and its application to control systems”, JIEE (Japanese Institute of Electrical Engineers) Journal, 1960, 80(3/4): 589–597
- [2] Sabatier, J., Agrawal, O. P., and Tenreiro Machado, J. A., Advances in fractional calculus: Theoretical developments and applications in physics and engineering, Springer-Verlag, Dordrecht, the Netherlands, 2007.
- [3] Bode, H.W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrand, New York, 1945.
- [4] Oustaloup, A., Systèmes Asservis Linéaires d’Ordre Fractionnaire: Théorie et Pratique Editions Masson, Paris, 1983.
- [5] Axtell, M., and Bise, E.M., “Fractional Calculus Applications in Control Systems”, Proceedings of the IEEE Nat. Aerospace and Electronics Conf., N.Y, 1990, pp 563-566
- [6] Podlubny, I., “Fractional Order Systems and $PI\lambda D\mu$ Controllers”, IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, Vol. 44, No. 1, pp 208-214.
- [7] Oustaloup, A., La commande CRONE Hermès, Paris, 1991.
- [8] Chen, Y. Q., Petras, I., and Xue, D., “Fractional Order Control - A Tutorial”, Proceedings of the 2009 American Control Conference, St. Louis, MO, USA, June 10-12, 2009, pp 1397-1411
- [9] Vinagre, B. M., Petras, I., Podlubny, I., and Chen, Y. Q., “Using Fractional Order Adjustment Rules and Fractional Order Reference Models in Model-Reference Adaptive Control”, Nonlinear Dynamics, 2002, Vol. 29, No. 1-4, pp. 269-279
- [10] Ladaci, S., and Charef, A.: “On Fractional Adaptive Control”, Nonlinear Dynamics, 2006, Vol. 43, No. 4, pp. 365-378
- [11] Suárez, J. I., Vinagre, B. M., and Chen, Y.Q., “A Fractional Adaptation Scheme for Lateral Control of an AGV”, J. of Vibration and Control., 2008, Vol. 14, No. 9-10, pp. 1499-1511

- [12] Ladaci, S., and Charef, A., "An adaptive fractional $PI\lambda D\mu$ controller", Proceedings of the International symposium series on Tools and Methods of Competitive Engineering, TMCE'2006, Ljubljana, Slovenia, April 18-22, 2006, pp. 1533–1540
- [13] Li, Y., Chen, Y. Q., and Cao, Y. C., "Fractional Order Universal Adaptive Stabilization", Proceedings of the 3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Ankara, Turkey, November 05-07, 2008
- [14] Li, Y., and Chen, Y.Q., "Fractional Order Universal Adaptive Stabilization for Fractional Order MIMO System", In Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications, Badajoz, Spain, October 18-20, 2010
- [15] Ladaci, S., Loiseau, J.-J., and Charef, A., "Fractional Order Adaptive High-Gain Controllers for Class of Linear Systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations, 2008, Vol. 13, No. 4, pp. 707-714
- [16] Ladaci, S., Charef, A., and Loiseau, J. J., "Robust Fractional Adaptive Control based on the Strictly Positive Realness Condition", International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2009, Vol. 19, No. 1, pp. 69-76
- [17] Oldham, K.B., and Spanier, J., The Fractional calculus, Academic Press, New York, 1974.
- [18] Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I., Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.
- [19] Brin, I.A., "On the stability of certain systems with distributed and lumped parameters", Automat. Remote Control, 1962, 23:798-807
- [20] El-Sayed, A.M.A., and Gaafar, F.M., "Fractional calculus and some intermediate physical processes", Applied Mathematics and Computation, 144 :117-126, 2003.
- [21] Lorenzo, C.F., and Hartley, T.T., "Variable order and Distributed order Fractional Operators", Nonlinear Dynamics, 2002, 29:57-98
- [22] Podlubny, I., "Fractional Differential Equations", Academic Press. San Diego, 1999.
- [23] Petras, I., Podlubny, I., O'Leary, P., Dorcak L., and Vinagre, B. M., Analogue Realization of Fractional Order Controllers, Fakulta BERG, TU Kocise, 2002.
- [24] Charef, A., Sun, H.H., Tsao, Y.Y., Onaral, B., "Fractal System as represented by singularity function", IEEE Transaction on Automatic Control, 1992, vol. 37, n° 9, pp. 1465-1470
- [25] Charef, A., "Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI\lambda D\mu$ controller", IEE Proc. Control Theory Appl, 2006, Vol. 153, No. 6, pp: 714-720
- [26] Van Der Ziel, A., "Unified presentation of 1/f noise in electronic devices": fundamental 1/f noise sources, Proceedings of the IEEE, 1988, Volume 76, Issue 3, pages 233–258

- [27] Leland, W.E. Wilson, V. Wilinger, W., Taquu M.S., “Self-similarity in high-speed packed traffic: analysis and modelling of Ethernet traffic measurements”, *Statistical Science*, 1995, 10:676–685,.
- [28] Black, R. P. Hurst, H. E. and Sinaika, Y. M., *Long term storage in reservoirs, an experimental study.*, Constable, London, 1965.
- [29] Scotti, A. Meneveau, S.G., “Fractal dimension of velocity signals in high-reynoldsnumbers hydrodynamic turbulence”, *Physical Review*, 1995, 51:5594–5608
- [30] Sun, H. and Onaral, B., “A unified approach to represent metal electrode interface”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 1983, vol. BME-30, Issue 7
- [31] Oustaloup, A., Olivier, C., Le Lay, L., *Représentation et identification par modèle non entier*, Hermes Science, Paris, 2005.
- [32] Monje, C.A., Chen, Y.Q., Vinagre, B.M., Xue, D., Feliu, V., *Fractional-Order Systems and Controls Fundamentals and Applications*, Springer-Verlag, England, UK, 2010
- [33] Ogata K., *Modern control engineering*, 3rd ed. London: Prentice Hall International, 1997.
- [34] Matignon, D., “Stability results for fractional differential equation with application to control processing”, *Proc. CESA’96, Symp. On Control, Optimisation and Supervision*, 1996, pp. 963-968, Lille, France,.
- [35] Charef, A., “Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation”, *Nonlinear Dynamics*, 2006, Vol. 46, pp.195-210
- [36] MacDonald, J. R., *Impedance spectroscopy*, NY, John Wiley, 1987
- [37] Astrom, K. J., “Adaptive Feedback Control”, *Proceedings Of The IEEE*, Vol. 75, No. 2, February 1987, pp 185-217.
- [38] Gregory, P. C., *Proceedings of the Self Adaptive Flight Control Systems Symposium.*, (WADC Tech. Rept. 59-49, Wright Air Development Center, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio), 1959.
- [39] Bellman, R., *Adaptive Control- A Guided Tour*, Princeton University Press, 1961
- [40] Tsypkin, Y.Z., “Adaption and Learning in Automatic Systems”, Academic Press, New York, 1971
- [41] Astrom K.J.; and Wittenmark, B., *Adaptive Control*, Addison-Wesley, 1995
- [42] Praly, L., “Robustness of Model Reference Adaptive Control”, in *Proc. 3rd Yale Workshop on Adaptive Systems Theory*, pp224-226, 1983
- [43] Rohrs, C.E., Valavani, L., Athans, M., and Stein, G., “Robustness of Continuous Time Adaptive Control Algorithms in the Presence of Unmodeled Dynamics”, *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. 30, N. 9, pp 881-889, 1985

- [44] Ioannou, P.A., and Tsakalis, K.S., "A robust direct adaptive controller", IEEE Trans. Auto. Control, Vol. 31, pp 1033-1043, 1986
- [45] Khargonekar, P.P., and Orgeta, R., "Comments on the Robust Stability Analysis of Adaptive Controllers Using Normalizations", IEEE Trans. Auto. Control, Vol. 34, pp 478-479, 1989
- [46] Tao, G., and Ioannou, P., "Robust Adaptive Control—A Modified Scheme", Int. J. Control, Vol. 54, N°1, pp 241-256, 1991
- [47] Krstić, M., Kanellakopoulos, I., and Kokotović, P., Nonlinear and Adaptive Control Design. John Wiley and Sons Ltd., 1995.
- [48] Ioannou, P. A., and Sun, J., Robust Adaptive Control. Prentice Hall, 1996.
- [49] Kaufman, H., Barkana, I., and Sobel, K., Direct adaptive control algorithms, theory and applications, Springer, New York NY, USA, second edition, 1998.
- [50] Ioannou, P. A., and Kokotovic, P. V., Adaptive System with Reduced Models. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [51] Datta, A., "Robustness of Discrete-time Adaptive Controllers: An Input-Output Approach", IEEE Transactions on Automatic Control, VOL. 38, NO. 12, December 1993, pp 1852-1857.
- [52] Astrom, K. J., Borisson, U., Ljungand L., Wittenmark, B., "Theory and Applications of Self-Tuning Regulators", Automatica, Vol. 13, pp. 457-476, 1977.
- [53] Vukić, Z., A Tutorial on Adaptive Control: The Self-Tuning Approach, University of Zagreb, Croatia, Faculty of Electrical Engineering and Computing, Department of Control and Computer Engineering in Automation, March 28,2000.
- [54] Desoer, G. A., and Vidyasagar, M., Feedback Systems: Input-Output Properties, New York: Academic Press, 1975.
- [55] Blomberg, H., and Ylinen, R., Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems, New York: academic Press. 1983.
- [56] Chen, C. T., Linear System Theory and Design, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [57] Wellstead, P. E., Edmunds, J. M., Prager, D., and Zanker, P., "Self-tuning Pole/Zero Assignment Regulators", International Journal of Control, Vol. 36, pp. 695-710, 1982.
- [58] Gravagne, I. A., Davis, J. M., and DaCunha, J. J., "A Unified Approach to High-Gain Adaptive Controllers", Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2009, Article ID 198353, 13 pages doi:10.1155/2009/198353.
- [59] Martensson. B., "The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization", Syst. Control Lett., 6:87–91, 1985.

- [60] Allgower, F., Ashman, J., and Ilchmann, A., "High-gain Adaptive A-tracking for Nonlinear Systems", *Automatica*. Vol. 33, No. 5, pp. 881-888, 1997.
- [61] Corless, M.,: "Simple adaptive controllers for systems which are stabilizable via high-gain feedback", *IMA Journal of mathematical control and information*, 1991, Vol. 8, No. 4, pp. 379-387.
- [62] Ilchmann, A., "Non-identifier-based high-gain adaptive control", *Lecture notes in control and information sciences*, No. 189, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1993
- [63] Ilchmann. A., "Universal adaptive stabilization of nonlinear systems", *Dynamics and Control*, 7 :199-213, 1997.
- [64] Willems, J.C., and Byrnes, C.I., "Global adaptive stabilization in the absence of information on the sign of the high frequency gain", *Lecture Notes in Control and Informatics and Sciences*, Springer, Berlin, 1984, Vol. 62, pp. 49-57
- [65] Kilbas, A. A., Srivastava, H.M., and Trujillo, J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006
- [66] Corless, M., *First order adaptive controllers for systems which are stabilizable via high gain output feedback*, *Analysis and Control of Nonlinear Systems*, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1988, pp. 13–16
- [67] Polderman, J.W., and Mareels, I.M.Y., *High gain adaptive control revisited: first and second order case*, in the *Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control*, Phoenix, Arizona, USA, 1999, pp. 3329-3333
- [68] Ilchmann, A., and Ryan, E. P., *On tracking and disturbance rejection by adaptive control*, *Systems & Control Letters*, 2004, No. 52, pp. 137-147
- [69] Charef, A., Assabaa, M., Ladaci, S., Loiseau, J. J., *Fractional order adaptive controller for stabilised systems via high-gain feedback*, *IET Control Theory Appl.*, 2013, Vol. 7, No. 6, pp. 822-828
- [70] Charef, A., and Bensouici, T., "Design of digital FIR variable fractional order integrator and differentiator", *Signal, Image and Video Processing*, 2011, Vol. 6, pp. 679-689
- [71] Assabaa, M., Charef, A., Ladaci, S., *Fractional Adaptive High-Gain Control with σ -Modification*, *Proceedings of the 3rd International Conference on Systems and Control (ICSC'13)*, October 29-31, 2013. Algiers, Algeria, pp. 248-252
- [72] Ladaci, S., Charef, A., "MIT adaptive rule with fractional Integration", in *Proc. CESA'2003, IMACS Multiconf. on Computational Engineering in Systems Applications*, Lille, France, 9-11 July, 2003.
- [73] Ladaci, S., Charef, A., "Model reference adaptive control with fractional derivative", In *Proc. of CISTEMA'2003, Conf. Int. sur les systèmes de Télécommunication d'Electronique*

- Médicale et d'Automatique, Université Aboubekr Blkaid, Tlemcen, Algeria, 27-29 september, 2003.
- [74] Suarez, J.I., Vinagre, B.M., “A fractional model reference adaptive system: A method of adjusting the parameters controller”, *Journal Européen des Systèmes Automatisés* 2008; 42 (6-8): 977.998.
- [75] Landau, I. D., Lozano, R., M'Saad, M., Karim, A., *Adaptive Control Algorithms, Analysis and Applications*, Second Edition, Springer-Verlag London Limited 2011, ISBN: 978-0-85729-663-4 (Print) 978-0-85729-664-1
- [76] Assabaa, M., Charef, A., Ladaci, S., “Using Fractional Model-Reference Adaptive Control”. 1ère Conférence nationale sur les systèmes d'ordre fractionnaire et leurs applications SOFA 2010, Skikda, Algérie, les 18-19 Mai 2010.
- [77] Aström, K., and Hägglund, T., *PID controllers: theory, design and tuning*. Instrument Society of America. 2nd edition, 1995.
- [78] Assabaa, M., Charef, A., Ladaci, S., Santouh, Z., “Tuning of PID Controllers Based on Bode’s Ideal Transfer Function Using Fractional Calculus”. First International Conference on Signal, Image, Vision and their Applications at Guelma University, Algeria, November 21-24, 2011.

Résumé

Les contrôleurs basés sur le calcul d'ordre fractionnaire gagnent de plus en plus d'intérêt de la communauté scientifique intéressée par la commande des systèmes. Ce type de contrôleurs peut impliquer des opérateurs et/ou des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur structure ou implémentation. Ils ont été introduits dans des boucles de commande dans un effort continu d'améliorer la qualité des performances et la robustesse des systèmes asservis. Dans ce travail, de nouvelles schémas de commande adaptative d'ordre fractionnaire à grand gain à retour de sortie pour une classe de système monovariante, linéaire, invariant de le temps, à phase minimale et de degré relative un ont été proposés. En plus, un modèle d'ordre fractionnaire a été introduit dans le schéma conventionnel de la commande adaptative à modèle de référence. Une stratégie de réglage du contrôleur PID classique en se basant sur un modèle d'ordre fractionnaire a été aussi présentée. Les idées de conception de ces schémas de commande ont été présentées. Quelques preuves analytiques de stabilité du système asservi ont obtenues. L'amélioration de la qualité des performances et de la robustesse des systèmes asservis utilisant les schémas de commande proposés par rapport aux cas classiques a été faite par le biais des résultats de simulation d'exemples illustratifs pour valider et évaluer leur efficacité

Mots Clés : Commande adaptative, Commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire, Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire, Contrôleur PID

Abstract

Controllers based on fractional order calculus are gaining more and more interests from the control community. This type of controllers may involve fractional operators and/or fractional systems in their structure or implementation. They have been introduced in the control applications in a continuous effort to enhance the system control quality performances and robustness. In this work, new schemes of fractional order adaptive controller via high-gain output feedback for a class of linear, time-invariant, minimum phase and single input-single output systems of relative degree one have been proposed. Besides, a fractional order model has been introduced in the conventional model reference adaptive control scheme. A classical PID tuning strategy has also been presented based on a fractional order model. The basic ideas of these control designs have been presented. Some analytical stability proofs of the feedback control system have been derived. The control quality enhancement and the robustness of the proposed control schemes compared to the classical ones has been done through simulation results of illustrative examples to validate and evaluate their efficiency.

Key Words: Adaptive control, Fractional order high-gain adaptive control, Fractional order model reference adaptive control, PID controller

ملخص

تكتسي المراقبات المرتكزة أساسا على الحساب ذو الأس الجزئي المزيد الإهتمام من طرف منظومة البحث العلمي المشتغلة في مجال مراقبة الأنظمة، هذا النوع من المراقبات يتضمن معاملات أو أنظمة ذات أس جزئي في بنيتها. كما تم إدراجها في حلقات التحكم ضمن جهد متواصل من أجل تحسين نوعية الأداء و متانة الأنظمة. في هذا العمل، تم إقتراح تركيبات جديدة في مجال التحكم المتكيف ذو ربح كبير بأس جزئي مع عودة من المخرج من أجل قسم من الأنظمة ذات متغير واحد، خطية و غير متغيرة مع الزمن ذات طور محدود مع درجة نسبية واحدة. بالإضافة إلى ذلك تم إدخال في تركيبية التحكم المتكيف ذي النموذج المرجعي الكلاسيكي نموذج ذو أس جزئي. كما تم تقديم إستراتيجية تعديل للمراقب PID الكلاسيكي إعتقادا على نموذج ذي أس جزئي. و لقد تم عرض أفكار التصاميم الخاصة بتركيبات التحكم المقدمة. كما تم الحصول على بعض البراهين التحليلية من أجل إستقرار النظام. و تم التأكد من تحسين نوعية خصائص الأنظمة و متانتها باستعمال تركيبات التحكم المقترحة مقارنة بالحالة الكلاسيكية بواسطة نتائج المحاكاة لأمتلة توضيحية من أجل تأكيد و تقييم فعاليتها.

كلمات المفاتيح: تحكم متكيف، تحكم متكيف ذو ربح كبير بأس كسري، تحكم متكيف ذو نموذج مرجعي بأس كسري، المراقب PID.

