

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L' 'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

N° d'ordre :

Série :

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : COMPOSONS ET MICROSYEMES

Présentée par :

SAOULI ABDELALI

**Algorithme pour la reconstruction d'images
cérébrales obtenues par tomographie optique dans le
proche de l'infrarouge**

Soutenue le : 20 - 03 - 2013

Devant le Jury composé de :

Président :	SAHLI. S	Professeur	Université de Constantine 1
Rapporteur :	MANSOUR. K	Professeur	Université de Constantine 1
Examineur :	CHAABI. A	Professeur	Université de Constantine 2
Examineur :	FORTAKI. T	Professeur	Université de Batna
Examineur :	BOULEMDEN. M	Professeur	Université de Batna

الإهداء

اهدي هذا العمل المتواضع:

*إلى روح أمي الطاهرة وارجوا من كل من يستفيد

منه الدعاء إليها بالرحمة و المغفرة.

*إلى أبي.

*إلى إخوتي و أخواتي.

*إلى زوجتي.

إلى أصدقائي.

REMERCIEMENTS.

J'exprime ma plus grande reconnaissance et mes remerciements à :

Madame **MANSOUR. F**, Professeur à l'université de Constantine 1, Directrice du laboratoire d'étude des matériaux Electronique pour Application Médicales, de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Monsieur, **SAHLI. S**, Professeur à l'université de Constantine 1, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse. Je le prie de trouver ici le témoignage de ma très sincère gratitude et de mon profond respect.

Monsieur **MANSOUR. K**, Professeur à l'université de Constantine 2, de m'avoir proposé le sujet de cette thèse et de m'avoir suivi la progression de ma recherche avec compétence et disponibilité. Je le remercie très profondément. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance et la marque de mon profond respect.

Monsieur **CHAABI. A**, Professeur à l'université de Constantine 1, département d'électronique, d'avoir accepté de faire partie du jury, je le remercie très vivement et lui adresse l'expression de ma reconnaissance.

Monsieur **FORTAKI. T**, Professeur à l'université de Batna, département d'électronique, d'avoir accepté de faire partie du jury, je le remercie très vivement et lui adresse l'expression de ma reconnaissance.

Monsieur **BOULEMDEN. M**, Professeur à l'université de Batna, département d'électronique, d'avoir accepté de faire partie du jury, je le remercie très vivement et lui adresse l'expression de ma reconnaissance.

Résumé

L'objectif de notre travail a été de contribuer au développement de la tomographie optique (TO) dans le proche de l'infrarouge. Pour ce faire, nous avons opté pour la technique de reconstruction d'images pour le système résolu en temps ou tomographie optique diffusé en temps (TOD). Nous avons mis en évidence le système expérimental utilisé. Nous avons ensuite étudié les propriétés optiques des tissus biologiques, les informations fournies par celles-ci, ainsi que l'aspect mathématique de la diffusion dans un milieu biologique. Par ailleurs, nous nous sommes intéressés à la réponse d'une impulsion lumineuse dans le proche de l'infrarouge dans une géométrie cylindrique, ce signal est appelé TPSF (Time Pulse Spread Function). Cette réponse a été simulée à l'aide de la méthode des éléments finis (MEF) programmée en Matlab. Cette étape présente le système direct dans la reconstruction de l'image optique. En effet, la TPSF induite est étudiée pour trois sources différentes. Pour valider notre programme en (MEF), nous avons fait le même travail à l'aide du logiciel professionnel Comsol multiphysics qui est basé sur la même méthode numérique. Cependant, la programmation du problème direct est utilisée pour une seconde étape appelée résolution du problème inverse. Cette dernière présente l'interface logiciel entre les mesures expérimentales et l'image reconstruite. En absence d'un système expérimental, nous avons considéré les résultats de la simulation obtenus par le logiciel professionnel Comsol multiphysics comme des résultats expérimentaux pour la reconstruction de l'image. Enfin, l'apport de l'imagerie par résonance magnétique (IRM) dans la reconstruction d'images en tomographie optique dans le proche de l'infrarouge est discuté en prenant comme exemple l'image de l'activité cérébrale.

Mots Clés :

Tomographie Optique Diffusée en temps (DOT) - Proche de l'infrarouge - TPSF (Time Pulse Spread Function) - Méthode des Eléments Finis (MEF) - Problème direct

Abstract

The objective of our work is to contribute to the development of the optical tomography (OT) in near infra-red radiation. With this intention we chose the technique of image reconstruction for the time solved system or diffused optical tomography in time (DOT). We highlighted the experimental system to use, We then studied optics phenomena in biological tissues and the information provided by the optical properties thus it mathematical of the diffusion in a biological environment. In addition, us sums be interested in the response of a luminous impulse near infra-red radiation in a cylindrical geometry, this signal call TPSF (Time Pulse Spread Function). This response is simulated by the finite element method (MEF) programmed in Malab software, this stage presents the direct system in the reconstruction of the optical image. Indeed, the induced TPSF is studied for three different sources. To validate our program in (MEF), we do the same work by the professional software Comsol multiphysics which based on the same numerical method. However, the program of direct system is to use for a second stage which call the resolution of the inverse system, this latter presents the interface software between measurements experimental and the reconstructed image. With the absence of the experimental system, we considered the results of obtained simulation from the professional software Comsol multiphysics as experimental results for the reconstruction image. Finally, we discusses the contribution of the magnetic resonance image (RMI) in the reconstruction optical tomography images in near infra-red radiation and one takes as example of the cerebral activity image.

Key Words.

Optical Tomography (OT), TPSF (Time Pulse Spread Function), Finite Element Method (MEF), Optical image Reconstruction.

المخلص.

إن الهدف المرجو من عملنا هذا هو المساهمة في تطوير أنظمة الصورة السطحية البصرية في المجال الطيفي القريب إلى الأشعة الضوئية ما فوق الحمراء. من أجل ذلك اخترنا تقنية إعادة بناء الصورة في الأنظمة المصممة في الزمن أو المسماة بأنظمة الصورة السطحية المتدفقة في الزمن. لقد وضعنا في الاعتبار النظام التجريبي المستعمل، ثم الطبيعة البصرية للأنسجة البيولوجية، أيضا الجانب الرياضي للتدفق البصري في الأنسجة البيولوجية. وبالتالي، لقد اهتمنا بنتيجة تدفق نوبة من الضوء في المجال الطيفي القريب إلى الأشعة الضوئية ما فوق الحمراء داخل شكل اسطواناني، الإشارة الناتجة تسمى بـ (Time Pulse Spread Function) TPFS. هذه الإشارة تم محاكاتها بواسطة طريقة العناصر المحدودة الرقمية، والتي تم برمجتها بلغة البرمجة Matlab، هذه المرحلة تسمى بالنظام المباشر تقنية إعادة بناء الصورة البصرية. في الواقع، الـ TPFS الناتجة تم دراستها من أجل ثلاث منابع ضوئية مختلفة. للتحقق من صحة برنامجنا، قمنا بنفس العمل بواسطة البرنامج الاحترافي Comsol multiphysics الذي يعتمد على نفس الطريقة الرقمية. في الحين، برنامج النظام المباشر استعمل في مرحلة تالية وهي حل النظام العكسي والذي يمثل واجه برمجة ما بين القياسات التجريبية والصورة المنشئة. وانه وفي غياب أجهزة القياس، قمنا باعتبار النتائج المحصل عليها من البرنامج الاحترافي Comsol multiphysics كنتائج لقياسات تجريبية لبناء الصورة البصرية. وفي الأخير، تكلمنا عن مساهمة تقنية التصوير بالرنين المغناطيسي في بناء الصورة البصرية في المجال الطيفي القريب إلى الأشعة الضوئية ما فوق الحمراء اتخذنا كمثال صورة النشاط الدماغي.

كلمات المفتاح:

الصورة السطحية البصرية، المجال الطيفي القريب إلى الأشعة الضوئية ما فوق الحمراء،
TPFS (Time Pulse Spread Function)، في المجال الطيفي القريب إلى الأشعة الضوئية ما فوق الحمراء،
طريقة العناصر المحدودة الرقمية، بناء الصورة البصرية.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	1
Chapitre I. Etat de l'art	6
I. Les différents types de couples source-détecteur	7
I.1. Source continue en intensité	8
I.2. Source modulée en intensité	9
I.3. Système résolu en temps	10
II. Présentation d'un exemple de système expérimental	11
II.1. L'objectif	11
II.2. La Source	12
II.3. Le système de détection	13
II. Principe de la reconstruction d'images en tomographie optique	13
II.1. Le problème direct	14
II.2. Le problème inverse	14
III. Principe de l'imagerie par résonance magnétique (IRM)	15
Références bibliographiques	19
Chapitre II. Propriétés optiques des tissus biologiques	21
I. Les propriétés optiques dans les tissus biologiques	21
II. Les propriétés optiques de différents tissus	24
III. Mathématique de la diffusion dans un milieu biologique	26
IV. Solutions analytiques de l'équation de diffusion	32
Références bibliographiques	34
Chapitre III. Application de la MEF pour la résolution de l'équation de diffusion en 2D	35
I. Discrétisation de domaine 2D	36
II. La fonction d'interpolation d'un élément triangulaire	36
III. Dérivation de la formulation faible de l'équation différentielle gouvernante	40

IV. Évaluation des matrices et des vecteurs d'élément	46
V. Assemblage du système matriciel global	53
VI. Solution de la matrice globale	54
VII. Poste-traitements des résultats	54
Références bibliographiques	57
Chapitre IV. Modélisation du dispositif de la détection	58
I. Les films épais en technologie ASIC	58
I. 1. Les films épais en concept ASIC	58
I. 2. Détection des radiations dans le Si-a:H	61
I. 3. La technique TFA pour la détection des radiations	64
II. Mobilité des porteurs et champ électrique interne dans le Si-a:H	66
III. Modélisation du signal dans le détecteur TFA	69
III. 1. Signal induit par les électrons	70
III. 1. Signal induit par les trous	73
Références bibliographiques	79
Chapitre V. Résultats et discussion	81
I. Résolution du problème direct	81
I. 1. Composition de l'objet test.	81
I. 2. Paramètres de la simulation	82
I. 3. Résultats et discussion	84
I. 4. Résultats obtenus avec le Comsol multiphysics.	89
II. Résolution du problème inverse	91
II. 1. Les méthodes de Newton	93
II. 2. Algorithme de reconstruction d'image	96
III. Application et perspectives	99
III. 1. Rappels	99
III. 2. Apport de l'imagerie par résonance magnétique dans la tomographie optique	103
Références bibliographiques	105
Conclusion générale	107

Introduction générale

Introduction générale

La première technique d'imagerie médicale à avoir été mise au point est la radiographie aux rayons X (Roentgen 1895) [1]. Les progrès qui ont réellement marqué l'imagerie moderne sont dus à l'informatique et au traitement numérisé des images. En effet, ils ont permis d'aboutir à la mise au point de la Tomodensitométrie aux rayons X, communément appelée scanner X (Hounsfield 1972) [2] puis à l'Imagerie par Résonance Magnétique (1973) [3]. Par ailleurs, c'est en 1955 qu'est naît l'échographie [4], en 1990 la scintigraphie mono photonique (SPECT) est mise au point [5], suivie, plus tard, par la Tomographie par Emission de Positons (TEP) [5]. Malgré l'intérêt qu'elles présentent pour le diagnostic médical [6], elles ne sont cependant pas sans risques pour les nombreux patients soumis à de tels examens [7]. De ce fait, les chercheurs en imagerie médicale se fixent souvent pour objectif de trouver de nouvelles techniques de moins en moins invasives et qui utilisent des radiations non ionisantes. C'est le cas de la tomographie optique dans le proche de l'infrarouge qui permet de révéler un contraste chimique important, apportant ainsi des informations physiologiques supplémentaires [8,9].

Dans la tomographie optique dans le proche de l'infrarouge, les interactions observées sont dues aux phénomènes d'absorption et de diffusion par les tissus [10,11,12,13]. C'est pour cette raison que l'image médicale obtenue par cette technique est basée sur la présentation cartographique des propriétés optiques de l'objet à étudier [14]. Selon la nature du signal source utilisé, la tomographie optique dans le proche de l'infrarouge est constituée de trois techniques différentes : continu en intensité, modulé en intensité et résolu en temps [15,16,17,18]. Dans la tomographie optique résolue en temps, le signal source est une impulsion lumineuse ultracourte proche de l'infrarouge (<1 ps). Le signal détecté est dit TPSF (Temporal Point Spread Function). Le temps de propagation d'un photon de la source au détecteur est déterminé par la longueur du chemin suivi [19,20,21,22]. Plus le milieu est diffusant, plus le chemin suivi est statistiquement long et plus le temps d'arrivée moyen des photons sera élevé. Au contraire, plus le milieu est absorbant, plus le nombre de photons émergents à un temps long sera faible à cause de la probabilité d'absorption. Le temps d'arrivée moyen des photons sera donc diminué.

L'objectif de notre travail est d'étudier le signal induit pendant la détection à travers une modélisation de dispositifs de détection en technologie TFA (Thin Film en ASIC). Il est donc question de réaliser une interface logicielle qui prend en charge la reconstruction d'une cartographie bidimensionnelle de l'absorption et de la diffusion à partir de données mesurées sur des objets tests hétérogènes. Les parties nécessaires à la compréhension du travail effectué, ainsi que les résultats obtenus, sont présentés en cinq chapitres.

Le premier chapitre présente les différentes technologies de la tomographie optique (TO) dans le proche de l'infrarouge, bien qu'on basé sur la tomographie optique résolue (TOD) en temps où on fait une présentation d'un exemple de système expérimental. De plus, sont abordés le principe de la reconstruction d'images en tomographie optique et l'Imagerie par Résonance Magnétique.

Le second chapitre porte sur les propriétés optiques des tissus biologiques tant sur le plan physique que mathématique. Une solution analytique est proposée pour les structures homogènes. Cependant, la non homogénéité des tissus biologiques nous oblige à utiliser les méthodes numériques.

Le troisième chapitre décrit l'application de la MEF à la résolution de l'équation de diffusion en 2D, car c'est la méthode numérique la plus adaptée aux structures non homogènes telles que les tissus biologiques.

Le quatrième chapitre présente le principe de la détection du détecteur TFA «Thin-Film on ASIC» et traite du signal induit par une modélisation numérique.

Le cinquième chapitre regroupe les résultats obtenus et les conclusions auxquelles nous avons abouti. Nous présentons dans un premier temps, la résolution du problème direct par une simulation basée sur la méthode des éléments finis et programmée en langage Matlab, Cette dernière est faite à l'aide de trois sources optiques différentes dans le proche de l'infra rouge. L'influence de chaque source sur la TPSF ou sur l'un des ses paramètres tels que la valeur moyenne, le temps moyen et la variance, est étudiée. Cette même simulation est refaite en utilisant le logiciel professionnel Comsol multiphysics. La comparaison des résultats obtenus avec ceux

obtenus à l'aide de notre programme a permis de valider ce dernier. En l'absence d'outil expérimental, nous avons considéré les résultats obtenus par le logiciel professionnel Comsol multiphysics comme des résultats expérimentaux pour l'étape suivante de la reconstruction de l'image optique.

Enfin, nous présentons dans ce même chapitre la reconstruction de l'image à l'aide de la résolution du problème inverse et nous discutons l'apport de l'imagerie médicale par résonance magnétique (IRM) sur l'image en tomographie optique, en prenant comme exemple l'image de l'activité cérébrale.

Références Bibliographiques.

- [1] MLA style: "Wilhelm Conrad Röntgen - Biography". Nobelprize.org. 23 Jan 2013 http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1901/rontgen-bio.html
- [2] Ian Isherwood, CBE, (2005) «Sir Godfrey Hounsfield 1919-2004 », *Radiology*, vol. 234, pp. 975-976.
- [3] Michl Décorps, (2011), " Imagerie de résonance magnétique: Bases physiques et méthodes ", Livre, EDP Sciences, p. 316.
- [4] I. Edler, K. Lindström, (2004), "The history of echocardiography", *Ultrasound in medicine & biology*. Vol. 30, N°12, p. 1565-1644.
- [5] Tugdual Oger., (2012), "Développement expérimental d'un télescope Compton au xénon liquide pour l'imagerie médicale fonctionnelle", Thèse doctorat Spécialité : Traitement d'images, Ecole des Mines, Université Nantes Angers Le Mans, France, pp. 208.
- [6] Jean-Louis Coatrieux, Jérôme Velut, et al, (2010), " De l'imagerie médicale à la thérapie guidée par l'image ", *MEDECINE/SCIENCES*, Vol. 26, N°12, p. 1103-1110.
- [7] Horesh, L., Schweiger, M., Bollhöfer, M., Douiri, A., Holder, D. S., Arridge, S. R. , (2005), "MULTILEVEL PRECONDITIONING FOR 3D LARGE-SCALE SOFT-FIELD MEDICAL APPLICATIONS MODELLING", *INTERNATIONAL JOURNAL OF INFORMATION AND SYSTEMS SCIENCES*, Vol. 2, N. 4, pp. 532-556.
- [8] Delpy, D.T., Cope, M., (1997), "Quantification in tissue near-infrared spectroscopy", *Phil. Trans. Royal Society*, vol. 352, pp. 649-659.
- [9] Alexander D. Klose, (2010), " The forward and inverse problem in tissue optics based on the radiative transfer equation: A brief review", *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, vol. 111, 1852-1853.
- [10] B. Chance, M. Cope, E. Gratton, N. Ramanujam, and B. Tromberg, ,(1998), "Phase measurement of light absorption and scatter in human tissue," *Rev. Sci. Instrum*, vol. 69, pp. 3457-3481.
- [11] R. Cubeddu, A. Pifferi, P. Taroni, A. Torricelli, and G. Valentini, (1999), "Noninvasive absorption and scattering spectroscopy of bulk diffuse media: An application to the optical characterization of human breast," *Appl. Phys.Lett*, vol. 74, pp. 874-876.
- [12] J. C. Hebden, F. E. W. Schmidt, M. E. Fry, M. Schweiger, E. M. C. Hillman, D. T. Delpy, and S. R. Arridge, (1999), "Simultaneous reconstruction of absorption and scattering images by multichannel measurement of purely temporal data," *Opt. Lett*, vol. 24, pp. 534-536.
- [13] A. Torricelli, L. Spinelli, A. Pifferi, P. Taroni, and R. Cubeddu, (2003), "Use of a nonlinear perturbation approach for in vivo breast lesion characterization by multi-wavelength time-resolved optical mammography," *Opt. Expr*, vol. 11, 853-867.
- [14] Martin Schweiger and Simon R. Arridge. (1997), «Direct calculation with a finite-element method of the Laplace transform of the distribution of photon time of flight in tissue ", *APPLIED OPTICS*, Vol. 36, N°. 34, pp. 9042-9049.
- [15] M. A. O'Leary, D. A. Boas, X. D. Li, B. Chance, and A. Yodh, (1996), "Fluorescence lifetime imaging in turbid media", *Opt. Lett.*, vol. 21, no. 2, pp. 158–160.
- [16] B. B. Das, F. Liu, and R. R. Alfano, (1997), "Time-resolved fluorescence and photon migration studies in biomedical and model random media", *Rep. Prog. Phys.*, vol. 60, pp. 227–292.

- [17] R. Roy, A. Godavarty, and E. M. Sevick-Muraca, (2007), "Fluorescence-enhanced three-dimensional lifetime imaging: A phantom study", *Phys. Med. Biol.*, vol. 52, pp. 4155–4170.
- [18] V. Y. Soloviev, J. McGinty, K. B. Tahir, and all, (2007), "Fluorescence lifetime tomography of live cells expressing enhanced green fluorescent protein embedded in a scattering medium exhibiting background auto fluorescence", *Opt. Lett.*, vol. 32, pp. 2034–2036.
- [19] C. Dunsby and P. M. W. French, (2003), "Techniques for depth-resolved imaging through turbid media including coherence-gated imaging," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 36, pp. 207-227.
- [20] A. Liebert, H. Wabnitz, D. Grosenick, M. Möller, R. Macdonald, and H. Rinneberg, (2003), "Evaluation of optical properties of highly scattering media by moments of distributions of times of flight of photons," *App. Opt.*, vol. 42, 5785-5792.
- [21] A. Liebert, H. Wabnitz, J. Steinbrink, H. Obrig, M. Möller, R. Macdonald, A. Villringer, and H. Rinneberg, (2004), "Timeresolved multidistance near-infrared spectroscopy at the human head: Intra- and extracerebral absorption changes from moments of distribution of times of flight of photons," *Appl. Opt.*, vol. 43, 3037-3047.
- [22] J. Steinbrink, H. Wabnitz, H. Obrig, A. Villringer, and H. Rinneberg, (2001), "Determining changes in NIR absorption using a layered model of the human head," *Phys. Med. Biol.*, vol. 46, 879-896.

Chapitre I.

Etat de l'art

Chapitre I.

Etat de l'art.

La tomographie optique est une cartographie tridimensionnelle des propriétés optiques des régions situées à l'intérieur du volume examiné, elle est basée sur le positionnement de plusieurs sources et plusieurs détecteurs pour acquérir les données dans le proche infrarouge. Son principe repose sur l'emploi d'une géométrie source-détecteur particulière qui permet à l'onde électromagnétique de traverser des régions situées en profondeur, afin de pouvoir produire une image des structures internes. Deux arrangements géométriques sont alors possibles pour l'acquisition des données tomographiques (Figure 1).

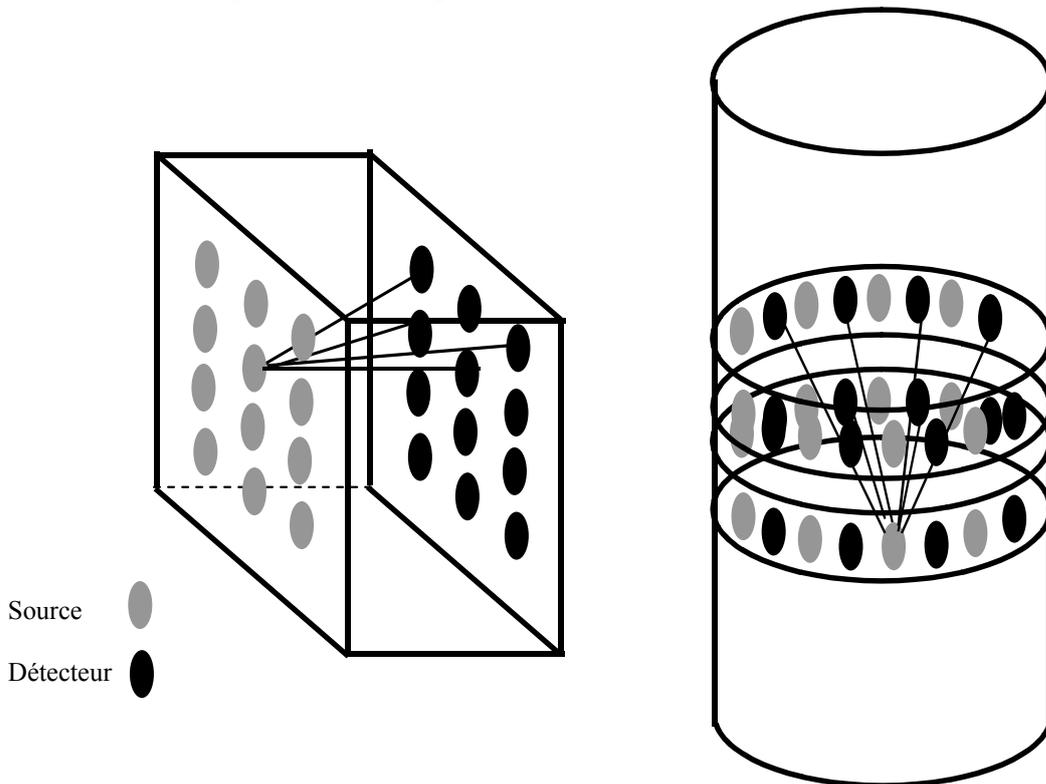


Figure 1. Différentes géométries de combinaisons de source-détecteur utilisées en tomographie optique [1], [2].

De nombreux groupes de recherche ont utilisé la disposition en couche pour obtenir une image d'un sein comprimé [1]. Dans cette structure, chaque source peut être utilisée par tous les détecteurs (s'il y a un dispositif de détecteurs multiples). Pour la géométrie cylindrique, les données sont acquises dans de multiples directions et

généralement, tous les détecteurs acquièrent parallèlement, pour chaque illumination des sources.

Il est donc recommandé d'utiliser plusieurs détecteurs pour chaque source et la géométrie cylindrique pour obtenir une meilleure résolution dans la détection des petites régions. Cependant, l'avantage majeur de la géométrie en couche est que tous les détecteurs ont approximativement la même sensibilité par rapport à une source [3]. En effet, dans le cas de l'arrangement cylindrique, les détecteurs proches de la source ont un signal très différent de ceux situés bien plus loin. Il est alors nécessaire d'utiliser des atténuateurs spécifiques à chaque position de détecteurs. La géométrie cylindrique a été utilisée pour l'examen du sein [2,4]. L'utilisation de la géométrie cylindrique pour l'imagerie du cerveau a été étudiée par Eda [5], Hintz [6] et Hillman [7].

Les méthodes de tomographie ont aussi été appliquées à l'imagerie du doigt pour mettre en évidence les propriétés optiques du liquide synovial dans le cas d'arthrite [8,9]. Enfin, quelques systèmes d'imagerie du bras ont été développés [10,11].

I. Les différents types de couples source-détecteur.

Les méthodes utilisant le proche infrarouge, présentées dans ce chapitre permettent de mettre en évidence les propriétés d'absorption et de diffusion de la lumière. Chaque type de source-détecteur peut être, en général, utilisé dans les deux géométries présentées précédemment. On peut généralement les classer dans trois catégories : continus en intensité, modulés en intensité et résolus dans le temps (figure 2).

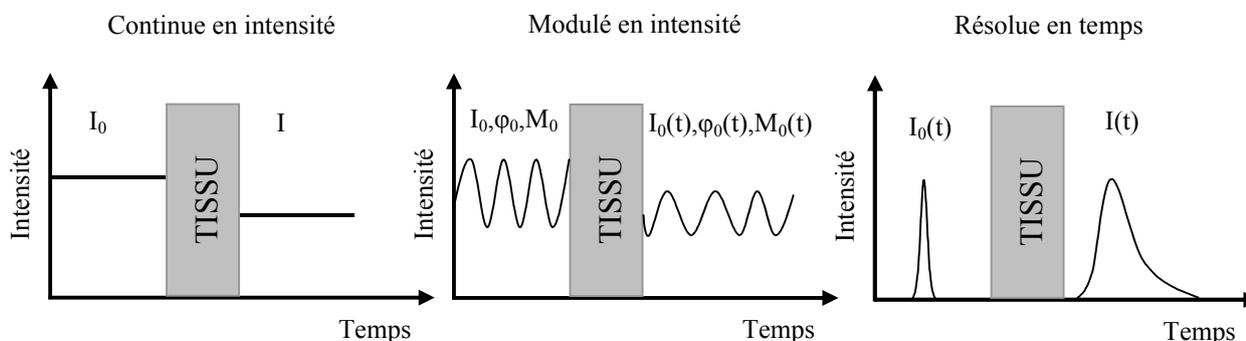


Figure 2. Différents types de source et détecteur utilisés en tomographie optique

I.1. Source continue en intensité.

Les premiers spectromètres (Proche Infra-Rouge) PIR basé sur ces dispositifs, utilisent généralement une lumière blanche filtrée ou plusieurs sources monochromatiques (diodes laser, diodes électroluminescentes) et mesurent uniquement l'intensité transmise à l'aide d'un photomultiplicateur (PM), d'une photodiode ou d'une photodiode à avalanche. La plupart des sources et des détecteurs sont reliés au tissu par des fibres optiques, quoique dans certains systèmes à photodiodes, le détecteur soit posé à même la peau. Récemment, des systèmes sans contact ont été développés [12].

Dépendant de la longueur d'onde de la lumière, les dispositifs continus en intensité mesurent des changements d'atténuation. A l'aide de la loi de Beer-Lambert modifiée, les variations de l'absorption peuvent être calculées, pour des géométries simples:

$$I = I_0 e^{-\mu(\lambda)DPF_x + G} \quad (1)$$

Où DPF ("differential pathlength factor", ou longueur de chemin différentielle) dépend

du paramètre de diffusion μ'_s , de l'anisotropie g , du paramètre d'absorption μ_a et de la géométrie de l'objet. G représente les pertes dues à la géométrie. On mesure les variations entre deux états, on obtient alors :

$$\Delta A_{(2-1)} = \text{Log} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) = DPF_x (\Delta \mu_{a(2-1)}) \quad (2)$$

Où $\Delta A_{(2-1)}$ est la variation d'atténuation mesurée entre l'état 2 et l'état 1.

Pour des géométries complexes, μ_a peut être approximé en comparant les données mesurées, avec un modèle analytique ou numérique. Cependant, pour une seule mesure d'atténuation, il n'est pas possible de prouver l'unicité de la distribution des paramètres μ_a et μ'_s .

Il est possible d'obtenir plusieurs cartographies des coefficients d'absorption à partir de sources composées de plusieurs longueurs d'onde. Ces données permettent de

faire une analyse spectroscopique des propriétés des tissus (même si des problèmes, liés à l'extraction de μ_a lorsque μ_s' dépend de la longueur d'onde, subsistent [13]).

Dans le cas où les sources utilisant la lumière blanche, un spectre continu peut être mesuré, en utilisant un spectromètre CCD. La portion du spectre correspondant aux chromophores tels que l'oxy- et la deoxyhémoglobine est observée, une meilleure évaluation de la concentration de ces chromophores peut être obtenue, comparativement aux expériences pour lesquelles les données sont obtenues avec seulement quelques longueurs d'onde. Cette technique est utilisée dans le cas d'acquisitions fonctionnelles des paramètres dans le cortex cérébral [14].

I.2. Source modulée en intensité.

Dans ce cas et si le signal source est modulé en intensité, à des fréquences de l'ordre du MHz, le déphasage du signal détecté extrait le temps mesuré nécessaire à la traversée du tissu.

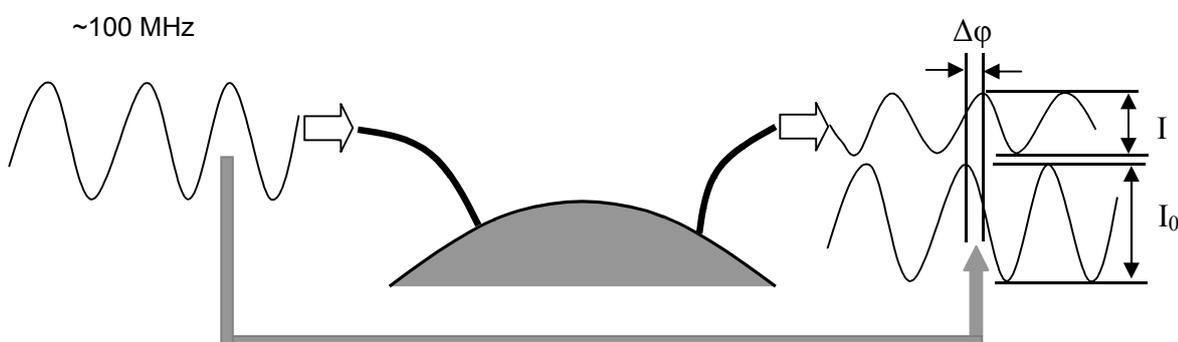


Figure 3. Effet de l'absorption et de la diffusion sur la phase et sur l'amplitude d'un signal [7]

Les effets de l'absorption et de la diffusion sont différents aussi bien sur la phase que sur l'amplitude du signal, l'utilisation d'une instrumentation dans le domaine fréquentiel permet de séparer ces deux paramètres. En effet, en utilisant la loi de Beer-Lambert modifiée pour extraire les coefficients μ_a , la phase est utilisée pour évaluer la longueur du chemin. Comme précédemment, les paramètres optiques peuvent être extraits, en ajustant les données expérimentales par des modèles analytiques ou numériques. Lorsque l'amplitude et la phase sont disponibles, ces modèles permettent de mieux déterminer les paramètres μ_a et μ_s' .

La résolution de l'image et sa sensibilité est déterminée à partir de la fréquence choisie. Il apparaît ainsi, que plus les fréquences sont hautes, plus le résultat se détériore [15].

Les détecteurs utilisés sont des PM et des photodiodes. Les fréquences employées sont comprises entre 100 MHz et quelques GHz [16,17,18]. Les sources sont généralement des diodes laser [19]. Plusieurs longueurs d'onde peuvent être utilisées. Un tomographe à intensité modulée est employé par Franceschini [20]. Pogue [19] décrit le développement d'un tomographe optique dans le domaine fréquentiel, système qui utilise plusieurs diodes laser à différentes longueurs d'onde, modulées à 100 MHz et un détecteur de type PM, successivement illuminé par chaque fibre de détection [21].

I.3. Système résolu en temps.

Dans ces dispositifs, des impulsions lumineuses ultracourtes (picoseconde ou femtoseconde) sont envoyées à la surface du tissu. L'intensité émergente du tissu ("Temporal Point Spread Function", ou TPSF) est détectée en fonction du temps d'arrivée des photons avec une résolution de l'ordre de la picoseconde [22]. L'utilisation de lumière impulsionnelle et monochromatique nécessite l'emploi d'un laser solide à colorant ou à semi-conducteur. En général, ces lasers ont une fréquence de répétition de 40 à 80MHz et une puissance allant de 0,5 à 100mW. Deux types de détecteurs sont généralement utilisés pour mesurer une intensité en fonction du temps : une caméra à balayage de fente synchroscan [23,24,1] ou un système de comptage de photons corrélés dans le temps (Time Correlated Single Photon Counting ou TCSPC) [7,5,3]. Les inconvénients majeurs de la caméra à balayage de fente sont sa non-linéarité et la largeur de sa fenêtre temporelle limitée à quelques nanosecondes.

La TPSF correspond à la réponse impulsionnelle du tissu et est fonction de ses propriétés optiques. En principe, les propriétés optiques du tissu peuvent être déterminées à l'aide d'un modèle de transport de la lumière. Néanmoins, il est important de noter que les propriétés optiques obtenues de cette manière, dépendent fortement de la précision du modèle utilisé.

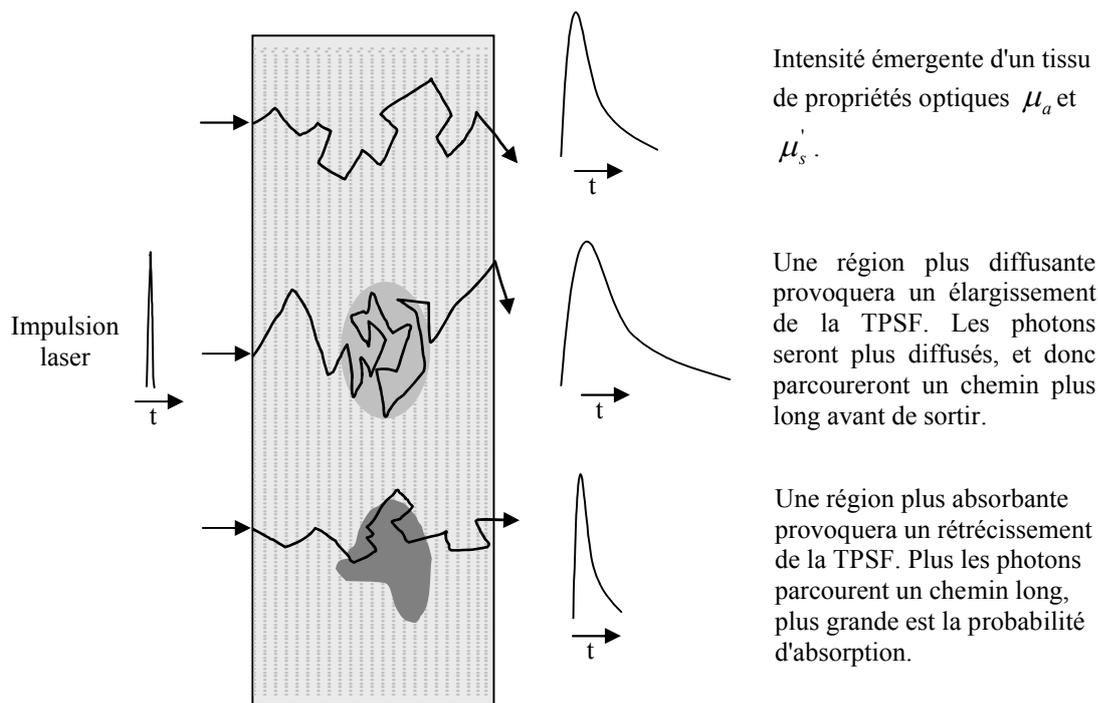


Figure .4. Influence des propriétés optiques sur la TPSF [7]

II. Présentation d'un exemple de système expérimental.

Dans notre thèse, nous nous sommes basés sur les systèmes à dispositif résolu en temps. Nous avons utilisé le système de Poulet [25]. Les spécifications et la construction de ce dispositif sont détaillées dans la référence [25].

II.1. L'objectif.

Comme décrit plus haut, les dispositifs résolus en temps mesurent des TPSFs. Pour créer une image, plusieurs TPSFs sont nécessaires. Les impulsions sont générées par des diodes laser et les données sont acquises pour différents couples source-détecteur placés tout autour de l'objet (figure 5). Pour cela, le système possède huit fibres optiques qui récupèrent le signal émis en différents points, chacune étant connectée à un système de détection différent. Le dispositif peut donc mesurer huit TPSFs en parallèle. En pratique, une des fibres sert de référence temporelle, seulement sept TPSFs sont donc détectées simultanément. Pour une même source, les fibres subissent trois rotations successives afin d'obtenir non pas sept, mais vingt-huit (28) TPSFs. Le dispositif est présenté dans la figure 6. Les différents éléments sont tour à tour détaillés dans ce chapitre.

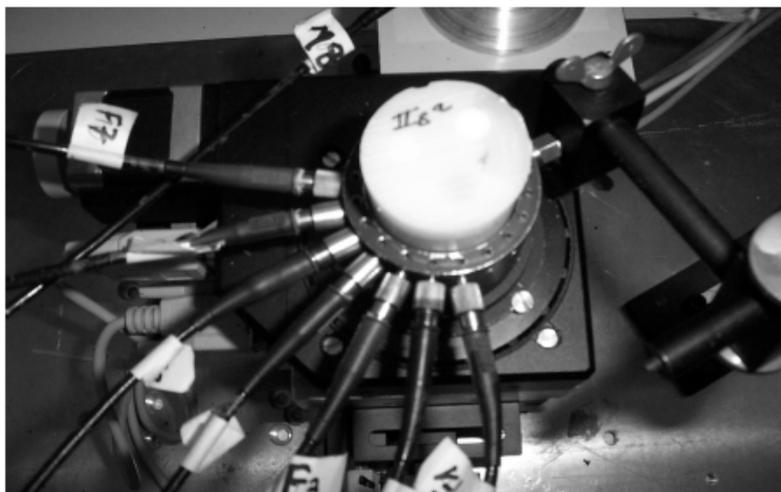


Figure 5. Exemple d'un objet en résine entouré par les fibres de détection [26]

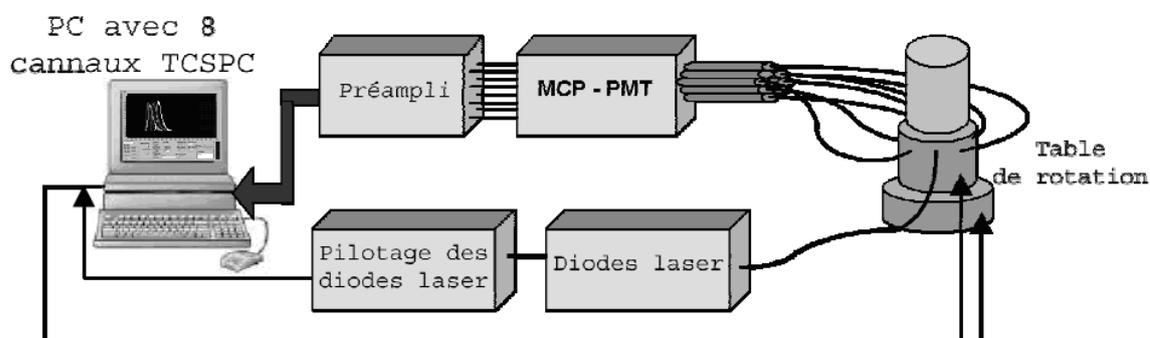


Figure 6. Système expérimental développé [25]

II.2. La Source.

La génération des impulsions est basée sur des diodes laser impulsionnelles de quelques picosecondes (système Sepia fourni par Picoquant). Le système Sepia (figure 7) peut piloter jusqu'à huit diodes laser en mode séquentiel et ce avec une fréquence de répétition allant de 5 à 80 MHz. Deux diodes ont une longueur d'onde de 690 nm, deux diodes de 785 nm et quatre diodes de 831 nm.

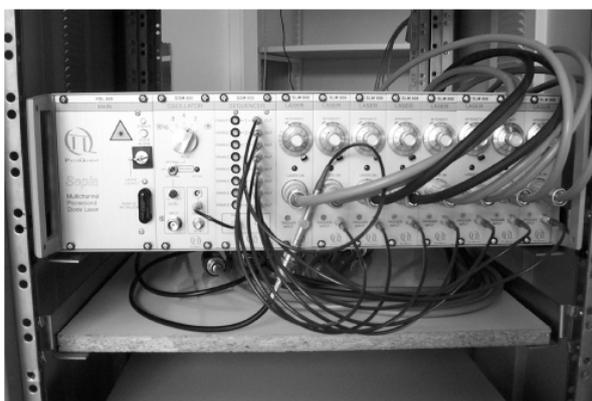


Figure 7. Système de pilotage des diodes [26].



Figure 8. Diodes [26]

II.3. Le système de détection.

Le dispositif expérimental utilise un système de comptage de photons corrélés dans le temps, TCSPC, pour reconstruire les TPSFs. Les diodes laser émettent à une fréquence de 80 MHz. Chaque détecteur, un photomultiplicateur (MCP-PMT, fabriqué par Hamamatsu), détecte un seul (ou zéro) photon, à chaque impulsion. La photocathode le convertit en électron. Cet électron est alors amplifié par les galettes de micro canaux et le signal détecté par l'anode est transmis via un préamplificateur à la carte de comptage (SPCM, pour Single Photon counting module, fournie par Becker&Hickl). Celle-ci détermine son retard relatif à un signal de synchronisation fourni par le système de pilotage des diodes. Ce retard est enregistré et intégré dans un histogramme. Ce procédé est répété pour un grand nombre d'émissions laser et l'histogramme final représente la TPSF. La figure 9 schématise le système.

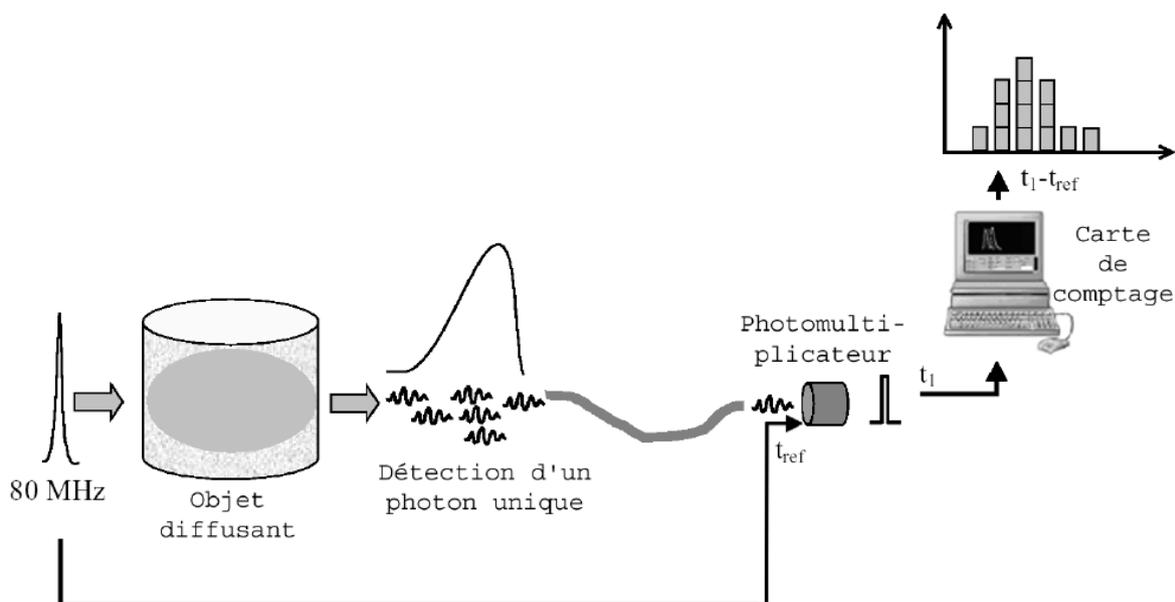


Figure 9. Schéma du système de détection [7]

II. Principe de la reconstruction d'images en tomographie optique.

La détermination de la distribution interne des paramètres optiques μ_a et μ_s' est l'objectif de la reconstruction d'image en tomographie optique. Elle permet d'obtenir des prédictions similaires aux mesures fournies par l'instrumentation. Ceci peut être considéré comme un problème d'estimation de paramètres, encore appelé problème inverse. Mais l'existence de ce dernier est reliée à l'existence du problème direct.

II.1. Le problème direct.

Le problème direct peut s'énoncer de la manière suivante :

Etant donnée une distribution de sources lumineuses Q , disposées sur la surface

$\partial\Omega$ d'un objet Ω , et une distribution de paramètres optiques : $p = \begin{Bmatrix} \mu_{a1} & \mu'_{s1} \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{aD} & \mu'_{sD} \end{Bmatrix}$

contenue dans Ω , il faut déterminer une série de mesures, $\Gamma_{n,m}$ correspondantes sur $\partial\Omega$, à partir d'un modèle physique F .

Ce qui peut être présenté par :

$$\{\Gamma_{n,m}\} = F\{p\} \quad (3)$$

Où F est un opérateur général, qui représente notre modèle physique.

La modélisation du phénomène physique a été détaillée dans un prochain chapitre. La méthode choisie pour résoudre ce problème est la méthode des éléments finis. Cette méthode discrétise l'objet en éléments triangulaires, lorsque l'on travaille en 2 dimensions. A chaque sommet sont attribués deux paramètres : μ_a pour l'absorption et μ'_s pour la diffusion réduite. Ainsi, il est possible de modéliser un objet hétérogène. L'étape de discrétisation est importante, puisqu'elle fixe la précision des modélisations.

II.2. Le problème inverse.

Par analogie, le problème inverse peut s'énoncer ainsi :

Etant donnée une distribution de sources lumineuses Q , disposées sur la surface

$\partial\Omega$ d'un objet Ω , et une série de mesures, $\Gamma_{n,m}$ définie sur $\partial\Omega$, il faut déterminer une

distribution de paramètres optiques : $p = \begin{Bmatrix} \mu_{a1} & \mu'_{s1} \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{aD} & \mu'_{sD} \end{Bmatrix}$ contenue dans Ω .

Ce qui peut s'écrire :

$$\{p\} = F^{-1}\{\Gamma_{n,m}\} \quad (4)$$

Où F^{-1} est un opérateur inverse.

Les spécificités du problème inverse en tomographie optique sont les suivantes :

- Le problème est dit mal posé, et ce de par la nature même du phénomène de diffusion. On dit d'un problème, qu'il est mal posé, lorsqu'une des trois conditions de Hadamard n'est pas vérifiée. Ces trois conditions sont l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution.
- Le problème est fortement non linéaire et a pour objectif de reconstruire non pas un seul paramètre, mais deux, simultanément.

Ces difficultés entraînent des erreurs de reconstruction et posent un problème de séparation des paramètres.

III. Principe de l'imagerie par résonance magnétique (IRM).

La résonance des noyaux des atomes (résonance magnétique nucléaire ou RMN) soumis à un champ magnétique a été découverte dès 1945 par Edward Purcell et Felix Bloch, tous deux prix Nobel en 1952. Pourtant, ce n'est qu'en 1973 que le chimiste américain Paul Lauterbur obtient, chez un animal, le premier cliché en imagerie par résonance magnétique (IRM).

Le principe de cette technique repose sur l'interaction des moments magnétiques des noyaux, principalement les protons du corps humain placé dans un aimant, avec le champ magnétique d'une onde radiofréquence.

Des antennes spécifiques émettent une onde radiofréquence qui excite ou stimule les noyaux d'hydrogène de l'eau composant nos cellules (près de 70% du poids corporel est constitué d'eau). Après arrêt de l'excitation, les atomes d'hydrogène restituent l'énergie lors de leur relaxation.

L'énergie est alors captée par des antennes réceptrices puis analysée par un ordinateur qui construit une carte énergétique de la partie du corps étudiée. En effet, un proton possède un moment magnétique \vec{m}_p . Lorsque l'on place ce proton dans un champ magnétique \vec{B}_0 continu (figure 10), ce moment \vec{m}_p s'oriente suivant une des deux orientations quantifiées : spin+1/2 et spin-1/2, par rapport au champ \vec{B}_0 et décrit, autour de son axe, un mouvement de précession avec une vitesse angulaire

$\omega_0 = \gamma B_0$ (pulsation de Larmor), où γ est le rapport gyromagnétique du noyau (figure 11).

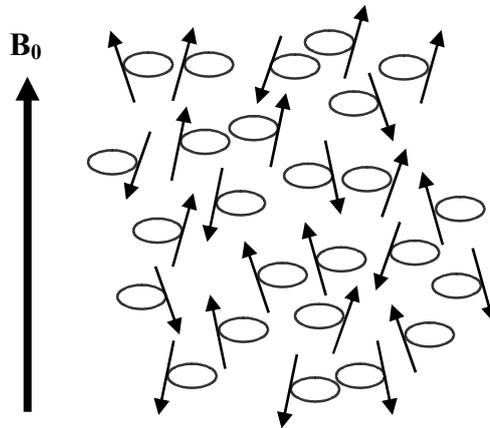


Figure .10 . Orientation des protons suivant B_0

Pour un grand nombre de noyaux, interagissant avec le champ \vec{B}_0 , les populations sur les deux niveaux d'énergie sont régies par la distribution de Boltzmann. L'état le plus stable étant $\text{spin}+1/2$, il sera légèrement plus peuplé, créant ainsi une aimantation macroscopique \vec{M}_0 , dirigée selon \vec{B}_0 (figure 12).

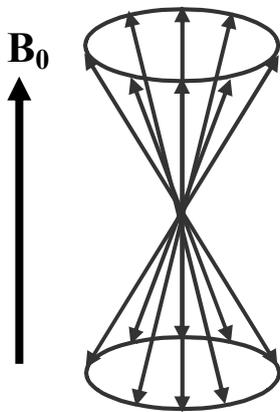


Figure 11. Précession



Figure 12. Aimantation macroscopique de M_0 suivant B_0

L'application d'une impulsion radiofréquence, créant un champ magnétique \vec{B}_1 , perpendiculaire à \vec{B}_0 , va faire basculer l'aimantation globale \vec{M} , d'un angle $\gamma B_1 \tau$ qui dépend de la durée τ et de l'amplitude B_1 de l'impulsion (figure 13).

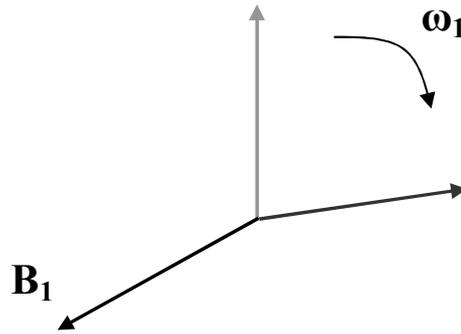


Figure.13. L'aimantation globale bascule

A l'arrêt de l'impulsion, l'aimantation \vec{M} revient à sa position d'équilibre (figure 14). On peut décomposer ce mouvement en une composante longitudinale qui va en croissant vers sa valeur d'équilibre M_0 avec un temps de relaxation T_1 , et une composante transversale qui tourne autour de B_0 à ω_0 et dont l'amplitude va en décroissant vers sa valeur d'équilibre nulle avec un temps de relaxation T_2 . Le signal enregistré est induit par cette aimantation transversale lors de son retour à l'équilibre. Les valeurs T_1 et T_2 caractérisent les différents tissus.

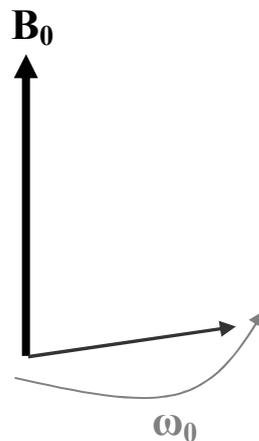


Figure.14. Retour à l'équilibre

Pour passer de la RMN à l'IRM, c'est à dire à l'imagerie, il faut pouvoir localiser la provenance des signaux. Pour cela, on utilise différentes impulsions de gradients du champ magnétique \vec{B}_0 , qui permettent de coder en tranche, en fréquence ou en phase, le signal issu de l'objet placé dans l'aimant.

L'IRM possède de nombreux avantages. Les contrastes sont très bons, tous les plans de coupe sont possibles et la résolution spatiale est de l'ordre du millimètre.

Cette technique utilise des ondes radiofréquences et de nombreux facteurs de contraste sont accessibles (T_1 , T_2 , densité de proton, IRM métabolique, T_2^* , diffusion, flux, ...).

Grâce aux progrès techniques des années 1990, de nombreux groupes de recherches se sont orientés vers l'étude du cerveau, en utilisant l'IRM fonctionnelle. Cette technologie permet, par exemple, d'observer l'activation cérébrale.

Références Bibliographiques.

- [1] Hebden J. C., Hall D. J., Firbank M., Delpy D. T. (1995), "Time-resolved optical imaging of a solid tissue-equivalent phantom", *Applied Optics* Vol 34 N°34, p. 8038-804.
- [2] Hoogenraad, J H, van-der-Mark, M B, Colak, S B, 't-Hooft, G W and E. S. van-der-Linden (1997): "First results from the Philips optical mammoscope," *SPIE Proc.* 3194 p 184-190.
- [3] Ntziachristos V., Ma X., Chance B. (1998), "Time-correlated single photon counting imager for simultaneous magnetic resonance and near-infrared mammography", *Rev. Sci. Instrum.* 69, p. 4221-4233.
- [4] Hebden J. C., Veenstra H., Dehghani H., Hillman E. M. C., Schweiger M., Arridge S. R., Delpy D. T. (2001), "Three dimensional time-resolved optical tomography of a conical breast phantom," *Applied Optics* Vol 40 N°19, p. 3278-3287.
- [5] Eda H., Oda I., Ito Y., Wada Y., Tsunazawa Y., Takada M. (1999), "Multi-channel timeresolved optical tomographic imaging system", *Rev. Sci. Instrum.* Vol 70 N°9, p. 3595-3602.
- [6] Hintz S. R., Benaron D. A., Houten J. P., Duckworth J. L., Liu F. W. H., Spilman S. D., Stevenson D. K., Cheong, W. F. (1998), "Stationary headband for clinical time-of-flight optical imaging at the bedside", *Photochem. Photobiol.* Vol 68, p. 361-369.
- [7] Hillman E. M. C. (2002), "Experimental and theoretical investigations of near infrared tomographic imaging methods and clinical applications", PhD thesis, University College London.
- [8] Xu Y., Iftimia N., Jiang H., Key L., Bolster M. (2001), "Imaging of in vitro and in vivo bones and joints with continuous-wave diffuse optical tomography", *Optics Express* Vol 8 N°7, p. 447-451.
- [9] Klose A., Hielscher A., Hanson K., Beuthan J. (1998), "Two- and three- dimensional optical tomography of finger joints for diagnostics of rheumatoid arthritis", *Proc. SPIE* 3566, p. 151-159.
- [10] Hillman E. M. C. (2001), "Development of optical tomography techniques for functional imaging of the neonatal brain", Mphil to PhD transfer thesis, University College London.
- [11] Zhao H., Gao F., Tanikawa Y., Homma K., Yamada Y. (2003), "NIR time domain diffuse optical tomography experiments on human forearm", *Proc. SPIE* 4955, p. 437-446.
- [12] Luo Q., Wu G., Chance B. (2003), "General diffusion approximation to transport equation for small separation", *Proc. SPIE* 4955.
- [13] Kohl M., Nolte C., Heekeren H. R., Horst S., Scholtz U., Obrig H., Villringer A. (1998), "Determination of the wavelength dependence of the differential pathlength factor from near-infrared pulse signals", *Physics in medicine and biology*, Vol. 43 p. 1771-1782.
- [14] Meek J. H., Firbank M., Elwell C. E., Atkinson J., Braddick O., Wyatt J. S. (1998), "Regional haemodynamic responses to visual stimulation in awake infants", *Pediatrics Research* Vol 42, p. 840-843.
- [15] Boas D. A. (1996), "Diffuse photon probes of structural and dynamical properties of turbid media : Theory and biomedical applications", PhD thesis, University of Pennsylvania, USA.
- [16] Jacques S. L., Hielscher A. H. (1995), "Discriminating the size and density of objects within tissue: frequency-domain versus steady- state measurements", *Proc. SPIE* 2389, p. 228-239.
- [17] Madsen S. J., Anderson E. R., Haskell R. C., Tromberg B. J. (1995), "High-bandwidth frequencydomain photon migration instrument for clinical use" *Proc. SPIE* 2389, p. 257- 263.

- [18] Cerussi A. E., Berger J. A., Bevilacqua F., Shah N., Jakubowski D., Butler J., Holcombe R. F., Tromberg B. J. (2001), "Sources of Absorption and Scattering Contrast for Near- Infrared Optical Mammography", *Acad Radiol* 8 (3), p. 211-218.
- [19] Pogue B., Österberg U., Paulsen K., McBride T. (1997), "Instrumentation and design of a frequency-domain diffuse optical tomography imager for breast cancer detection", *Optics Express Vol 1 N°13*, p. 391-403.
- [20] Franceschini M. A., Toronov V., Filiaci M. E., Gratton E., Fantini S. (2000): "On-line optical imaging of the human brain with 160-ms temporal resolution," *Optics Express Vol 6 N°3*, p. 49-57.
- [21] Dehghani H., Pogue B. W., Poplack S. P., Paulsen K. D. (2003), "Optical images from pathophysiological signals within breast tissue using 3 D near infrared light", *Proc. SPIE 4955*, p. 191-198.
- [22] Chance B., Leigh J.S., Miyake H., Smith D.S., Nioka S., Greenfeld R., Finander M., Kaufmann K., Levy W., Young M., Cohen P., Yoshioka H., Boretsky R. (1988), "Comparison of time resolved and unresolved measurements of deoxyhaemoglobin in brain", *Proc. Natn. Acad. Sci. USA*, 85, p. 4971-4975.
- [23] Zint C.V., Torregrossa M., Gao F., Poulet P. (2001), "Near infrared optical tomography of scattering cylindrical phantoms using time-resolved detection", *Proc. SPIE 4250*, p. 514- 521.
- [24] Zint C.V., Uhring W., Torregrossa M., Cunin B., Poulet P. (2003), "Streak camera: a multi-detector for diffuse optical tomography", *Applied Optics Vol 42*, pp. 3313-3320.
- [25] Poulet P., Zint C. V., Torregrossa M., Uhring W., Cunin B. (2003), "Comparison of two time-resolved detectors for diffuse optical tomography: photomultiplier tube – time correlated single photon counting and multi-channel streak camera," *Proc. SPIE 4255*, p. 154-163.
- [26] Murielle TORREGROSSA., (2003), "Reconstruction d'images obtenues par tomographie optique dans le proche infrarouge", Thèse doctorat Spécialité : Traitement d'images, Institut de Physique Biologique, Université Louis Pasteur Strasbourg, France, pp. 283.

Chapitre II.
Propriétés optiques des
tissus biologiques

Chapitre II.

Propriétés optiques des tissus biologiques.

Ce chapitre porte sur la description des propriétés optiques des tissus biologiques. L'étude mathématique de la diffusion dans un milieu biologique, est à la base de la propagation de l'onde électromagnétique dans le tissu. Pour cela, nous examinerons dans un premier temps l'équation de transport de Boltzmann puis les conditions de sa simplification. A partir de l'équation de diffusion, nous présenterons les solutions analytiques de l'équation de diffusion et leurs limites pour les géométries complexes.

I. Les propriétés optiques des tissus biologiques.

Dans les tissus biologiques, deux phénomènes importants sont à étudier pour comprendre leurs propriétés optiques : l'absorption et la diffusion.

Au niveau microscopique, l'absorption d'un photon incident dans le proche de l'infrarouge (PIR) par une molécule a lieu quand son énergie correspond à celle d'une transition électronique ou vibrationnelle de cette molécule. Cette énergie peut par exemple être réémise sous forme d'un photon de fluorescence, ou alors participer à une réaction photochimique, mais le plus souvent elle est dissipée dans les tissus sous forme de chaleur.

D'un point de vue macroscopique, on considère généralement qu'un milieu réel est constitué de populations de différents chromophores réparties localement de façon uniforme. Chaque chromophore est assimilé à une sphère d'une taille proportionnelle à son pouvoir d'absorption. Dans ce cas on définit la section efficace d'absorption σ_{ai} (m^2) du chromophore i qui est relié à sa taille géométrique A_i (m^2) par le facteur de proportionnalité appelé l'efficacité d'absorption Q_{ai} (sans dimension) (figure.1) tel que :

$$\sigma_{ai} = A_i Q_{ai} \quad (1)$$

En considérant l'ensemble des chromophores, le coefficient d'absorption μ_a (m^{-1}) s'exprime en introduisant la densité de chromophores ρ_i (m^{-3}) par :

$$\mu_a = \sum_i \rho_i \sigma_{ai} \quad (2)$$

L'inverse du coefficient d'absorption ($1/\mu_a$) est le libre parcours moyen d'absorption, il représente le parcours moyen d'un photon avant son absorption.

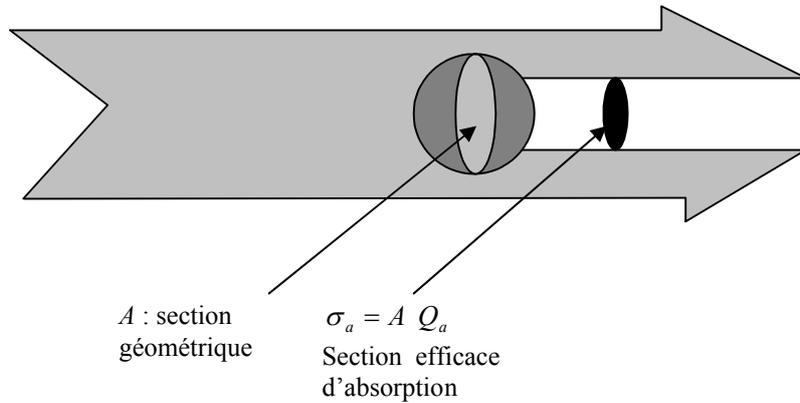


Figure 1. Illustration de la section efficace d'absorption.

Les processus d'absorption sont liés à l'énergie du photon, par conséquent l'absorption d'un chromophore varie avec la longueur d'onde. Le spectre d'absorption d'un milieu complexe est la somme des spectres de ses différents constituants.

La diffusion est quant à elle, caractérisée par l'intensité lumineuse émise en fonction de l'angle d'observation par rapport à l'onde incidente. On introduit le coefficient de diffusion de façon analogue à l'absorption. Chaque centre diffuseur est assimilé à une sphère d'une taille proportionnelle à son pouvoir de diffusion. Dans ce cas, on définit la section efficace de diffusion σ_s (m^2), qui est liée à la taille géométrique du centre diffuseur A_s (m^2) par le facteur de proportionnalité appelé l'efficacité de diffusion Q_s (sans dimension) (figure 2) tel que :

$$\sigma_s = A_s Q_s \quad (3)$$

Le coefficient de diffusion μ_s (m^{-1}) s'exprime en introduisant la densité des centres diffuseurs ρ_s (m^{-3}) par :

$$\mu_s = \rho_s \sigma_s \quad (4)$$

L'inverse du coefficient de diffusion ($1/\mu_s$) est le libre parcours moyen de diffusion, il représente le parcours moyen d'un photon entre deux évènements consécutifs de diffusion.

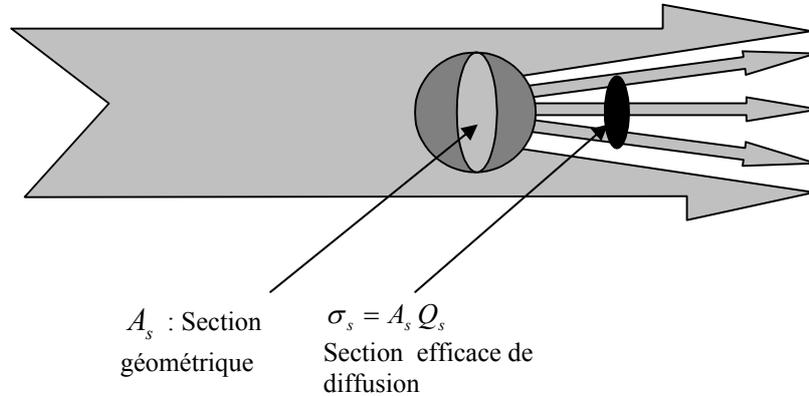


Figure 2. Illustration de la section efficace de diffusion.

Afin de tenir compte de l'anisotropie du processus de diffusion, on introduit le facteur d'anisotropie g qui est une mesure de l'angle moyen de diffusion. Lorsqu'un photon incident suivant la direction \vec{s}' subit un évènement de diffusion, la probabilité qu'il reparte dans la direction \vec{s} est donnée par la fonction de phase normalisée $f(\vec{s}, \vec{s}')$. Dans les tissus biologiques, on suppose généralement que la fonction de phase ne dépend que de l'angle entre \vec{s} et \vec{s}' . On peut ainsi exprimer la fonction de phase en fonction du cosinus de l'angle θ de rediffusion ($\cos(\theta) = \vec{s} \cdot \vec{s}'$). Le facteur d'anisotropie est défini comme le cosinus moyen de l'angle de rediffusion :

$$g = \int_{-1}^1 f(\cos(\theta)) \cos(\theta) d \cos(\theta) \quad (5)$$

Ce facteur varie de 0 pour une diffusion isotrope, à 1 pour une diffusion uniquement vers l'avant.

A partir de μ_s et g on définit le coefficient de diffusion réduit $\mu'_s = \mu_s(1 - g)$ qui peut être considéré comme un coefficient de diffusion isotrope équivalent. L'inverse du coefficient de diffusion réduit ($1/\mu'_s$) est le libre parcours moyen de transport. Il représente la distance au bout de laquelle un photon a perdu la mémoire de sa direction initiale. En combinant les coefficients de diffusion et d'absorption on obtient le coefficient d'extinction total $\mu_t = \mu_a + \mu_s$ qui définit l'atténuation globale de la lumière balistique.

II. Propriétés optiques de différents tissus.

Les propriétés optiques des tissus sont difficiles à mesurer, en particulier *in vivo*. Le tableau I présente une sélection de propriétés optiques mesurées *in vitro* et rapportées dans la littérature. Ces propriétés optiques représentent une moyenne des propriétés du tissu. En réalité, les tissus sont composés d'un grand nombre de substances différentes, dont chacune a un effet sur la propagation de l'onde. C'est pourquoi, les valeurs des propriétés optiques des tissus *in vivo* peuvent être différentes de celles présentées.

Tableau I : Quelques propriétés optiques mesurées *in vitro* [1].

Tissu	Coefficient d'absorption μ_a (mm^{-1})	Coefficient de diffusion réduit μ_s' (mm^{-1})	g
Sang : artère (98%, 2mmol/L) [1]	0.398 (800 nm)	1 (800 nm)	-
Sang : veine (75%, 2mmol/L) [1]	0.396 (800 nm)	1 (800 nm)	-
Sang partiellement oxygéné [2]	1.55 (760 nm)	0.79 (760 nm)	0.9972
Cerveau : matière grise adulte [2]	0.27 ± 0.02 (632.8 nm)	2.06 ± 0.2 (632.8 nm)	0.94 ± 0.004
Cerveau : matière blanche adulte [2]	0.22 ± 0.02 (632.8 nm)	9.1 ± 0.5 (632.8 nm)	0.82 ± 0.01
Os (crane) [3]	0.025 (800 nm)	1.8 (800 nm)	-
Peau: derme [4]	0.008 (800 nm)	1.2 (800 nm)	-
Peau: épiderme [4]	0.008 (800 nm)	1.2 (800 nm)	-
Muscle [4]	0.03 (800 nm)	0.7 (800 nm)	-
Sein (glandulaire) [2]	0.05 ± 0.01 (700 nm)	1.4 ± 0.3 (700 nm)	-
Sein (adipose) [2]	0.07 ± 0.01 (700 nm)	0.9 ± 0.1 (700 nm)	-

Dans la figure 3 sont présentées les variations du coefficient d'absorption de divers tissus pour une longueur d'onde entre 100 nm et 10 μ m. On observe que la mélanine et l'hémoglobine sont beaucoup plus absorbantes que l'eau dans la région du proche de l'infrarouge. Dans le proche infrarouge, la diffusion (scatter) est relativement faible.

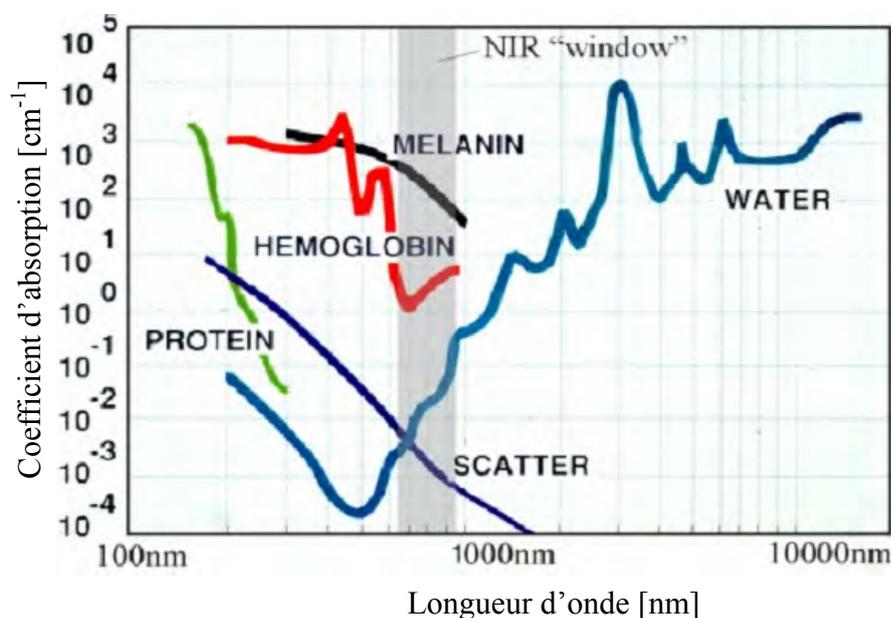


Figure 3. Evolution du coefficient d'absorption de divers tissus [1].

Les tissus étant constitués de plus de 60% d'eau, son absorption peut affecter les mesures, même si son coefficient n'est pas très élevé.

Dans la région du proche infrarouge, comme le montre la figure 4, pour des longueurs d'onde comprises entre 780nm et 815nm, le coefficient d'absorption varie de 0.0021mm^{-1} à 0.0026mm^{-1} .

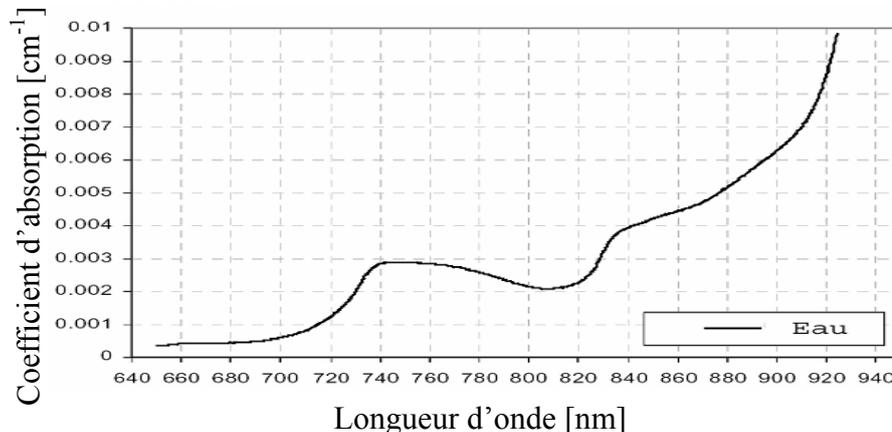


Figure 4 : Spectre d'absorption de l'eau dans les longueurs d'onde du proche infrarouge [5].

L'oxygène est transporté jusqu'aux tissus grâce à l'hémoglobine (sous sa forme oxydée : oxyhémoglobine, ou HbO_2). Dans le tissu, l'oxygène se dissocie en laissant l'hémoglobine sous sa forme réduite : déoxyhémoglobine, ou Hb. La teneur en oxy- et déoxyhémoglobine est un indicateur de l'oxygénation du sang directement lié à l'activité du tissu. Le spectre d'absorption des deux formes de l'hémoglobine est présenté dans la figure 5. Entre 600 nm et 800 nm, l'absorption de l'hémoglobine réduite est supérieure à celle de l'oxyhémoglobine. Dans la région rouge du spectre visible et dans le proche infra rouge, les coefficients d'absorption des deux formes de l'hémoglobine sont faibles. Cette bande spectrale est couramment appelée fenêtre thérapeutique.

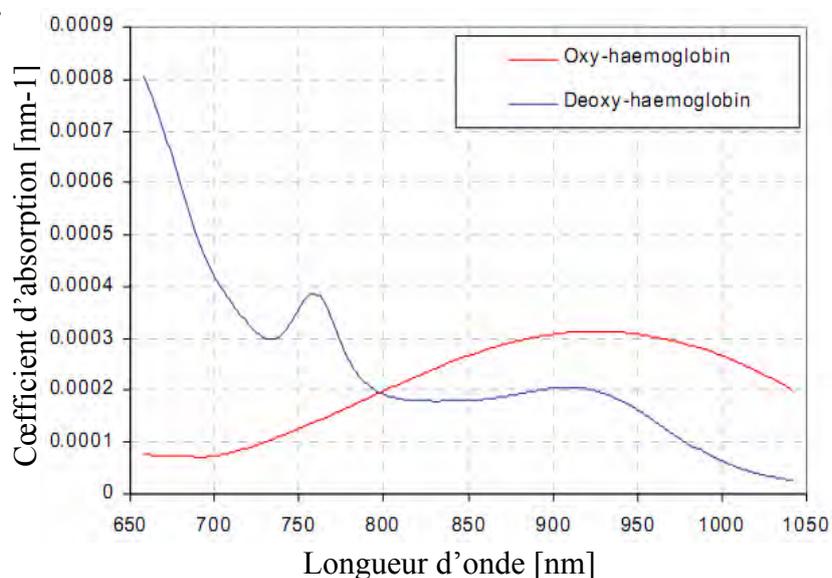


Figure 5 : Spectre de l'hémoglobine [1].

Les propriétés optiques de l'ensemble des tissus, pour des longueurs d'onde allant de 400 à 2500 nm, sont étudiées en détail par Roggan [6]. Le tableau II donne un aperçu des valeurs, dans la fenêtre thérapeutique [7], des différents paramètres présentés dans cette partie.

Tableau II : Tableau récapitulatif des valeurs des propriétés optiques.

Dénomination	Symbole	Unité	Valeur
Indice de réfraction	n	/	1.40
Coefficient d'absorption	μ_a	mm ⁻¹	de 0.001 à 1
Coefficient de diffusion	μ_s	mm ⁻¹	de 10 à 100
Coefficient de diffusion réduit	μ_s'	mm ⁻¹	de 0.3 à 10
Coefficient d'anisotropie	g	/	de 0.68 à 0.99

La mesure du coefficient d'absorption à plusieurs longueurs d'onde correctement choisies, permet de déterminer les taux d'oxy et de déoxyhémoglobine, et par conséquent, d'étudier l'oxygénation des tissus, par exemple d'un muscle ou d'une tumeur [8].

Le coefficient de diffusion donne une information sur la structure d'un tissu. Cette information peut être utilisée pour déterminer la malignité d'une tumeur [8]. En effet, une tumeur bénigne possède une structure moins désorganisée qu'une tumeur maligne [8].

Connaître les propriétés optiques des tissus est donc très important. L'obtenir de manière non invasive représente l'un des enjeux majeurs de l'imagerie médicale. Dans ce mémoire, nous présentons différentes méthodes permettant d'obtenir de tels paramètres, et surtout nous nous emploierons à détailler la partie informatique d'une méthode de tomographie optique par temps de vol dans le proche infrarouge.

III. Mathématique de la diffusion dans un milieu biologique.

La propagation de la lumière dans un tissu biologique est gouvernée par l'équation de transfert radiatif, ou équation de transport de la densité d'énergie radiative. Cette équation suppose que la diffusion se fait de manière élastique (pas d'effet Raman). De plus, elle ne prend en compte ni les effets de polarisation, ni ceux de cohérence. Trois coefficients sont nécessaires pour décrire le transport des photons dans un tissu donné :

- le coefficient d'absorption μ_a (en mm^{-1}), qui représente la probabilité pour un photon d'être absorbé à une distance donnée.
- le coefficient de diffusion μ'_s (en mm^{-1}), qui représente la probabilité pour un photon d'être diffusé à une distance donnée.
- la fonction de phase normalisée $f(\vec{s}, \vec{s}')$, qui représente la probabilité pour un photon d'être diffusé dans la direction \vec{s} depuis la direction incidente \vec{s}' .

L'intensité $L(\vec{r}, \vec{s}, t)$ est décrite par l'équation de transport de Boltzmann et exprimée en $\text{W.s.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$, suivant l'équation :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t}(\vec{r}, \vec{s}, t) + \vec{s} \cdot \vec{\nabla} L(\vec{r}, \vec{s}, t) + (\mu_a + \mu_s) L(\vec{r}, \vec{s}, t) = \mu_s \iint_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{s}', t) f(\vec{s}, \vec{s}') d\vec{s}' + S(\vec{r}, \vec{s}, t) \quad (6)$$

Où $S(\vec{r}, \vec{s}, t)$ est une source locale de rayonnement, exprimée en $\text{W.m}^{-3}.\text{sr}^{-1}$ et c est la vitesse de la lumière dans le milieu.

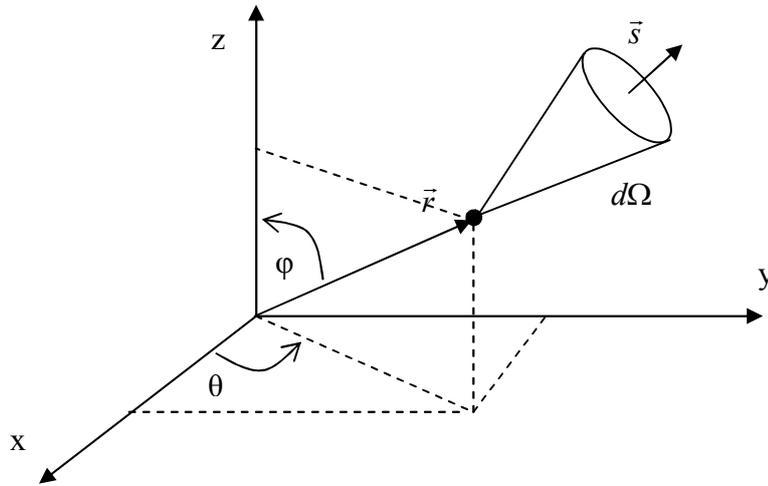


Figure 6. Notations utilisées pour écrire l'équation de transport de Boltzmann.

L'intensité moyenne est définie par :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \iint_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{s}, t) d\Omega \quad (7)$$

Et le courant moyen, par :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \iint_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{s}, t) \vec{s} d\Omega \quad (8)$$

L'équation de transport (ETR) peut être considérée comme une équation de conservation de l'énergie. Si on considère un petit élément de volume autour de la position \vec{r} qui occupe un angle solide élémentaire $d\Omega$ dans la direction \vec{s} (figure 1), l'ETR est composée de trois parties :

- la variation temporelle de l'intensité égale au nombre de photons entrant dans l'élément moins le nombre de photons sortant, est représentée par :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t}(\vec{r}, \vec{s}, t) \quad (9)$$

- les pertes :

- perte par flux de photons le long de la direction \vec{s} est :

$$\vec{s} \cdot \vec{\nabla} L(\vec{r}, \vec{s}, t) \quad (10)$$

- pertes de photons à l'intérieur du volume dues à l'absorption et les pertes de photons dans la direction \vec{s} dues à la diffusion sont représentées par :

$$(\mu_a + \mu_s) L(\vec{r}, \vec{s}, t) \quad (11)$$

- les gains :

- les photons qui sont diffusés selon la direction \vec{s} , depuis toutes les autres directions \vec{s}' de l'espace sont représentés par :

$$\mu_s \iint_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{s}', t) f(\vec{s}, \vec{s}') d\vec{s}' \quad (12)$$

- la source locale de photons est :

$$S(\vec{r}, \vec{s}, t) \quad (13)$$

Une traduction mathématique classique est connue sous le nom d'approximation PN [9]. Elle consiste à décomposer les termes de l'ETR en série d'harmoniques sphériques jusqu'à l'ordre N. On considère généralement que l'approximation P1 représente le meilleur compromis entre précision et complexité mathématique. Dans ce cadre, l'intensité se décompose alors comme la somme d'un terme isotrope et d'une contribution anisotrope :

$$L(\vec{r}, \vec{s}, t) = \frac{1}{4\pi} \varphi(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \vec{s} \quad (14)$$

Et la source s'écrit de manière similaire :

$$S(\vec{r}, \vec{s}, t) = \frac{1}{4\pi} S_0(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{S}_1(\vec{r}, t) \vec{s} \quad (15)$$

L'approximation de l'ETR par l'équation de diffusion passe par deux étapes.

Etape 1 : On intègre les deux membres de l'ETR sur tout l'espace (soit une intégration sur $d\Omega$).

La variation temporelle de l'intensité est donnée par :

$$\iint_{4\pi} \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t}(\vec{r}, \vec{s}, t) d\Omega = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{s}, t) d\Omega = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (16)$$

-les pertes,

- perte par flux de photons le long de la direction \vec{s} :

$$\begin{aligned} \iint_{4\pi} \vec{s} \vec{\nabla} L(\vec{r}, \vec{s}, t) d\Omega &= \frac{1}{4\pi} \underbrace{\iint_{4\pi} \vec{s} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) d\Omega}_{\iint_{4\pi} (\vec{A}, \vec{s}) d\Omega = 0} + \frac{3}{4\pi} \iint_{4\pi} \vec{s} \vec{\nabla} (\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{s}) d\Omega \\ &= \frac{3}{4\pi} \underbrace{\iint_{4\pi} \vec{s} [(\vec{\nabla} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{s})] d\Omega}_{\iint_{4\pi} (\vec{A}, \vec{s}) \vec{s} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \vec{A}} = \vec{\nabla} \vec{J}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (17)$$

- les pertes de photons, dues à l'absorption et la diffusion :

$$\iint_{4\pi} (\mu_a + \mu_s) L(\vec{r}, \vec{s}, t) d\Omega = (\mu_a + \mu_s) \varphi(\vec{r}, t) \quad (18)$$

- les gains,

- les photons qui sont diffusés selon la direction \vec{s} :

$$\begin{aligned} &\iint_{4\pi} \mu_s \left[\iint_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{s}', t) f(\vec{s}, \vec{s}') d\Omega' \right] d\Omega \\ &= \iint_{4\pi} \mu_s \left[\iint_{4\pi} \left(\frac{1}{4\pi} \varphi(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \vec{s}' \right) f(\vec{s}, \vec{s}') d\Omega' \right] d\Omega \\ &= \iint_{4\pi} \mu_s \left[\left(\frac{1}{4\pi} \varphi(\vec{r}, t) \underbrace{\iint_{4\pi} f(\vec{s}, \vec{s}') d\Omega'}_{=1} + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \underbrace{\iint_{4\pi} \vec{s}' f(\vec{s}, \vec{s}') d\Omega'}_{g\vec{s}} \right) \right] d\Omega \\ &= \iint_{4\pi} \mu_s \left[\left(\frac{1}{4\pi} \varphi(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) g\vec{s} \right) \right] d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \mu_s \varphi(\vec{r}, t) \underbrace{\iint_{4\pi} d\Omega}_{=4\pi} + \frac{3}{4\pi} \mu_s \underbrace{\iint_{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) g\vec{s} d\Omega}_{=0} \\ &= \mu_s \varphi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (19)$$

- la source locale de photons :

$$\iint_{4\pi} S(\vec{r}, \vec{s}, t) d\Omega = S_0(\vec{r}, t) \quad (20)$$

L'équation (1) s'écrit alors :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \vec{J}(\vec{r}, t) + (\mu_a + \mu_s) \varphi(\vec{r}, t) = \mu_s \varphi(\vec{r}, t) + S_0(\vec{r}, t) \quad (21)$$

On réunissant les termes en $\varphi(\vec{r}, t)$:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \vec{J}(\vec{r}, t) + \mu_a \varphi(\vec{r}, t) = S_0(\vec{r}, t) \quad (22)$$

Etape 2 : Il faut multiplier tous les termes de l'ETR par \vec{s} , puis l'intégrer sur tout l'espace (soit une intégration sur $d\Omega$).

- la variation temporelle de l'intensité :

$$\iint_{4\pi} \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t}(\vec{r}, \vec{s}, t) \vec{s} d\Omega = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{s}, t) \vec{s} d\Omega = \frac{1}{c} \frac{\partial J(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (23)$$

- les pertes,

- perte par flux de photons le long de la direction \vec{s} :

$$\begin{aligned} \iint_{4\pi} \vec{s} \vec{\nabla} L(\vec{r}, \vec{s}, t) \vec{s} d\Omega &= \frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} \underbrace{(\vec{s} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t)) \vec{s} d\Omega}_{\iint_{4\pi} (\vec{A}, \vec{s}) \vec{s} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \vec{A}} + \frac{3}{4\pi} \iint_{4\pi} (\vec{s} \vec{\nabla} (\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{s})) \vec{s} d\Omega \\ &= \frac{1}{3} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \iint_{4\pi} \underbrace{\vec{s} [(\nabla \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{s})] \vec{s} d\Omega}_{\iint_{4\pi} (\vec{A}, \vec{s}) \vec{s} d\Omega = 0} \\ &= \frac{1}{3} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (24)$$

- les pertes de photons, dues à l'absorption à la diffusion :

$$\iint_{4\pi} (\mu_a + \mu_s) L(\vec{r}, \vec{s}, t) \vec{s} d\Omega = (\mu_a + \mu_s) \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (25)$$

- les gains,

- les photons qui sont diffusés selon la direction \vec{s} :

$$\begin{aligned}
& \iint_{4\pi} \mu_s \left[\iint_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{s}', t) f(\vec{s}, \vec{s}') d\Omega' \right] \vec{s} d\Omega \\
&= \iint_{4\pi} \mu_s \left[\iint_{4\pi} \left(\frac{1}{4\pi} \varphi(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \vec{s}' \right) f(\vec{s}, \vec{s}') d\Omega' \right] \vec{s} d\Omega \\
&= \iint_{4\pi} \mu_s \left[\left(\frac{1}{4\pi} \varphi(\vec{r}, t) \underbrace{\iint_{4\pi} f(\vec{s}, \vec{s}') d\Omega'}_{=1} + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \underbrace{\iint_{4\pi} \vec{s}' f(\vec{s}, \vec{s}') d\Omega'}_{g\vec{s}} \right) \right] \vec{s} d\Omega \\
&= \iint_{4\pi} \mu_s \left[\left(\frac{1}{4\pi} \varphi(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) g\vec{s} \right) \right] \vec{s} d\Omega \\
&= \frac{1}{4\pi} \mu_s \varphi(\vec{r}, t) \underbrace{\iint_{4\pi} \vec{s} d\Omega}_{=0} + \frac{3}{4\pi} \mu_s \underbrace{\iint_{4\pi} [\vec{J}(\vec{r}, t) (g\vec{s})] \vec{s} d\Omega}_{\iint_{4\pi} (\vec{A}, \vec{s}) \vec{s} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \vec{A}} \\
&= \mu_s g \vec{J}(\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{26}$$

- la source locale de photons :

$$\iint_{4\pi} S(\vec{r}, \vec{s}, t) \vec{s} d\Omega = S_1(\vec{r}, t) \tag{27}$$

L'équation (1) s'écrit alors:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) + (\mu_a + \mu_s) \vec{J}(\vec{r}, t) = \mu_s \vec{J}(\vec{r}, t) + S_1(\vec{r}, t) \tag{28}$$

En réunissant les termes en $\vec{J}(\vec{r}, t)$:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) + (\mu_a + \mu_s') \vec{J}(\vec{r}, t) = \mu_s \vec{J}(\vec{r}, t) + S_1(\vec{r}, t) \tag{30}$$

En faisant l'hypothèse que :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} \ll (\mu_a + \mu_s') \vec{J}(\vec{r}, t) \tag{31}$$

Et que la source est isotrope (ce qui est le cas lorsque la lumière a parcouru une distance de $\frac{1}{\mu_s}$ à l'intérieur du tissu), on obtient alors la loi de Fick :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{3(\mu_a + \mu_s')} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) \tag{32}$$

L'équation de diffusion s'en déduit en substituant $\vec{J}(\vec{r}, t)$ dans l'équation 21 :

$$-\nabla \frac{1}{3(\mu_a + \mu_s')} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \mu_a \varphi(\vec{r}, t) = S_0(\vec{r}, t) \quad (33)$$

IV. Solutions analytiques de l'équation de diffusion.

Malheureusement les solutions analytiques de l'équation de diffusion qu'il existe ne concernent que des géométries simples, telles que des milieux homogènes infinis (ou semi-infinis), illuminés par une source continue ponctuelle isotrope.

On peut être trouvées des solutions de l'équation de diffusion en utilisant les fonctions de Green Γ . Ces fonctions agissent sur la source :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \Gamma[S_0(\vec{r}, t)] \quad (34)$$

La solution est donnée par :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \int_{-\infty, \Omega}^{+\infty} g^{(\varphi)}(\vec{r}, \vec{r}', t - t') S_0(\vec{r}', t') d^n r dt' \quad (35)$$

Où Ω est la zone d'intérêt.

Si la source est une impulsion de Dirac, la réponse impulsionnelle du système est égale à :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \int_{-\infty, \Omega}^{+\infty} g^{(\varphi)}(\vec{r}, \vec{r}', t - t') \delta(\vec{r}', t') d^n r dt' \quad (36)$$

La fonction de Green pour un milieu infini en 3 dimensions est de la forme :

$$g_{3D_inf}(t) = \frac{(3n(\mu_a + \mu_s'))^{3/2}}{(4\pi ct)^{3/2}} e^{-\left(\frac{\mu_a ct}{n} + \frac{3d^2 n(\mu_a + \mu_s')}{4tc}\right)} \quad (37)$$

Où d représente la distance entre la source et le détecteur [10]. Des fonctions de Green pour des géométries plus complexes, telles que des cercles, des sphères ou des milieux semi-infinis ont été développées et détaillées dans [11]. Bien qu'il n'y ait pas de solution générale pour des milieux hétérogènes, des expressions analytiques ont été dérivées pour un milieu homogène contenant des perturbations.

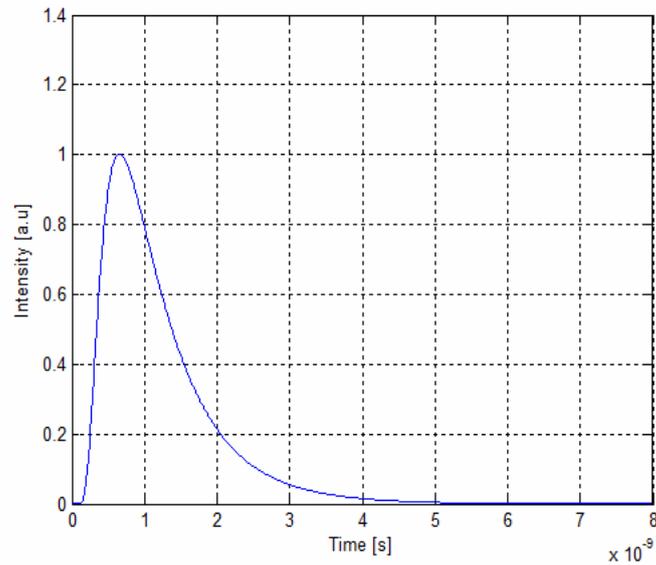


Figure 7 : Exemple de la fonction de Green pour un milieu infini avec comme paramètres : $d=20$ mm, $n=1.54$, $\mu_a = 0.005 m^{-1}$, $\mu'_s = 0.4 m^{-1}$

Pour les cas plus complexes où les géométries sont hétérogènes, une résolution numérique (comme par exemple, la Méthode des éléments finis) s'impose. Enfin, la méthode des éléments finis sera détaillée dans le chapitre III, puisque cette dernière a été utilisée pour résoudre l'équation de diffusion.

Références bibliographiques.

- [1] Hillman E. M. C. (2002), "Experimental and theoretical investigations of near infrared tomographic imaging methods and clinical applications", PhD thesis, University College London.
- [2] Cheong W. F., Prah S. A., Welch A. J (1990), "A review of the Optical Properties of Biological Tissues", IEEE J. Quantum Electron, Vol. 26, p. 2166-2185.
- [3] Firbank M., Hiraoka M., Essenpreis M., Delpy D. T. (1993), "Measurement of the optical properties of the skull in the wavelength range 650-950nm", Physics in medicine and biology, Vol. 38, p. 503.
- [4] Simpson C. R., Khol M., Essenpreis M., Cope M. (1998), "Near infrared optical properties of ex-vivo human skin and sub-cutaneous tissues measured using the Monte-Carlo inversion technique", Physics in medicine and biology, Vol 43, p. 2465-2478.
- [5] Hollis V. S, Binzoni T., Delpy D. T (2001), "Non invasive monitoring of brain tissue temperature by near-infrared spectroscopy", Proc. SPIE, vol. 2, N°. 7, p. 470-481.
- [6] Roggan A., Friebel M., Dörschel K. Hahn A. Müller G (1999), "Optical Properties of circulating human blood in the wavelength range 400-2500 nm", J. Biomed Vol 4, p.36-46.
- [7] Egan W. G., Hilgeman T. W. (1979), "Optical Properties of inhomogeneous materials", Academic, New York.
- [8] Dupouy C., Jouanin J. C., Tinet E., Avriillier S., Revel F., Ollivier J. P., Guezennec C. Y. (2002), "Etude de l'oxygénation musculaire par spectroscopie infrarouge de l'hémoglobine : Application à l'étude de la zone transitionnelle aérobie-anaérobie", Opt-Diag.
- [9] Arridge S.R., (1999) "Optical tomography in medical imaging", Inverse Problems, vol.15, p. 41-93,
- [10] Patterson M. S., Chance B., Wilson B. C. (1989), "Time resolved reflectance and Transmittance for non-invasive measurement of tissue optical properties", Applied Optics, Vol 28 N° 12, p. 2331-2336.
- [11] Arridge S. R., Cope M., Delpy D. T. (1992), "The theoretical basis for the determination of optical pathlengths in tissue: temporal and frequency analysis", Physics in medicine and biology Vol 37 N° 7, p. 1531-1560.

Chapitre III.
Application de la Méthode
des Eléments Finis (MEF)
à la résolution de
l'équation de diffusion en
2D

Chapitre III.

Application de la Méthode des Eléments Finis (MEF) à la résolution de L'équation de diffusion en 2D.

La propagation de la lumière à travers un tissu biologique est gouvernée par l'équation de diffusion :

$$-\nabla \cdot \frac{c}{3(\mu_a + \mu'_s)} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) + \frac{\delta \varphi(\vec{r}, t)}{\delta t} + c\mu_a \varphi(\vec{r}, t) = cS_0(\vec{r}_0, t) \quad (1)$$

Où C est la vitesse de la lumière dans le vide, μ_a , le Coefficient d'absorption, μ'_s , coefficient de diffusion réduit, $S_0(\vec{r}_0, t)$, source locale des photon et $\varphi(\vec{r}, t)$, l'intensité des photons.

En 2D, l'ETR peut être simplifiée sous la forme suivante :

$$\frac{\delta}{\delta x} \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) \right) + \frac{\delta \varphi(x, y, t)}{\delta t} + \beta \varphi(x, y, t) = g \quad (2)$$

$$\text{Avec : } \alpha_x = \alpha_y = -\frac{c}{3(\mu_a + \mu'_s)} \quad , \quad \beta = c\mu_a \quad , \quad g = cS_0(x_0, y_0, t)$$

Pour les géométries hétérogènes, il n'existe pas une solution analytique de l'ETR, ce qui nous oblige à utiliser les méthodes numériques. Parmi les méthodes numériques la Méthode des Eléments Finis (MEF) semble être la plus adaptée à notre domaine. Les étapes majeures de l'application de la MEF à la résolution de l'ETR en 2D sont :

- Discrétisation du domaine 2D.
- Dérivation de la formulation faible de l'équation différentielle gouvernante.
- Choix approprié des fonctions d'interpolation.
- Assemblage du système matriciel global.
- Imposition des conditions aux limites.
- Solution de la matrice globale du système.
- Post-traitement des résultats.

I. Discrétisation du domaine 2D.

Nous avons utilisé une forme triangulaire des éléments puisque qu'elle s'adapte mieux aux formes irrégulières (figure 1). Quelque soit la forme de l'élément, il y a toujours une erreur due à la forme complexe des tissus biologiques.

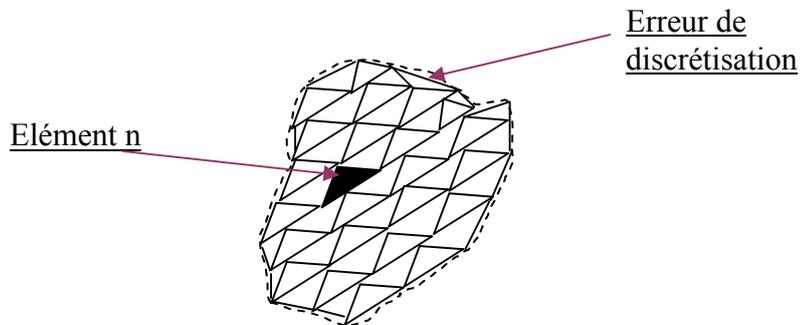


Figure 1 : Maillage des éléments finis utilisant des éléments triangulaires

II. La fonction d'interpolation d'un élément triangulaire.

La fonction d'interpolation doit répondre à certaines exigences principales. Elle doit garantir la continuité de la quantité primaire inconnue à travers les frontières de l'inter-élément. Elle doit être au moins une fois différentiable comme l'équation différentielle gouvernante qui est du deuxième ordre (ETR). Finalement, elle doit être complètement polynomiale pour fournir une représentation suffisante de la solution dans le domaine de l'élément fini. Dans notre travail, nous nous concentrerons sur le développement des fonctions d'interpolation basées sur des éléments linéaires. L'élément en triangle linéaire dans le plan x-y est illustré dans la figure 2a. Le triangle est constitué de trois sommets qui correspondent aux trois noeuds de l'élément. Les noeuds sont localement numérotés dans un sens anti-horaire pour éviter d'avoir un secteur négatif en utilisant la définition du Jacobien. Une fonction linéaire d'interpolation enjambant un triangle doit être linéaire dans deux directions orthogonales. Ceux-ci ont pu être les axes orthogonaux des noeuds par les coordonnées normales ξ et η . Ainsi, un triangle de forme arbitraire (figure 2a), peut être tracé comme triangle principale (figure 2b), qui se trouve sur le système du même rang normal.

Chaque fonction linéaire d'interpolation correspond à un noeud du triangle. Notons les trois fonctions d'interpolation par $N_1(\xi, \eta)$, $N_2(\xi, \eta)$ et $N_3(\xi, \eta)$

correspondant respectivement aux nœuds 1,2 et 3. La fonction de forme $N_1(\xi, \eta)$ doit être 1 au nœud 1 et 0 aux deux autres nœuds : nœuds 2 et 3. Commençons par la représentation linéaire de la fonction de forme $N_1(\xi, \eta)$.

$$N_1(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta \quad (3)$$

En utilisant les conditions suivantes :

$$\text{Au nœud 1 : } \xi = 0, \eta = 0 \Rightarrow N_1(\xi, \eta) = c_1 = 1$$

$$\text{Au nœud 2 : } \xi = 1, \eta = 0 \Rightarrow N_1(\xi, \eta) = 1 + c_2 + 0 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$$

$$\text{Au nœud 3 : } \xi = 0, \eta = 1 \Rightarrow N_1(\xi, \eta) = 1 + 0 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -1$$

on peut déduire que la fonction d'interpolation qui correspond au nœud 1 est donnée par :

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (4)$$

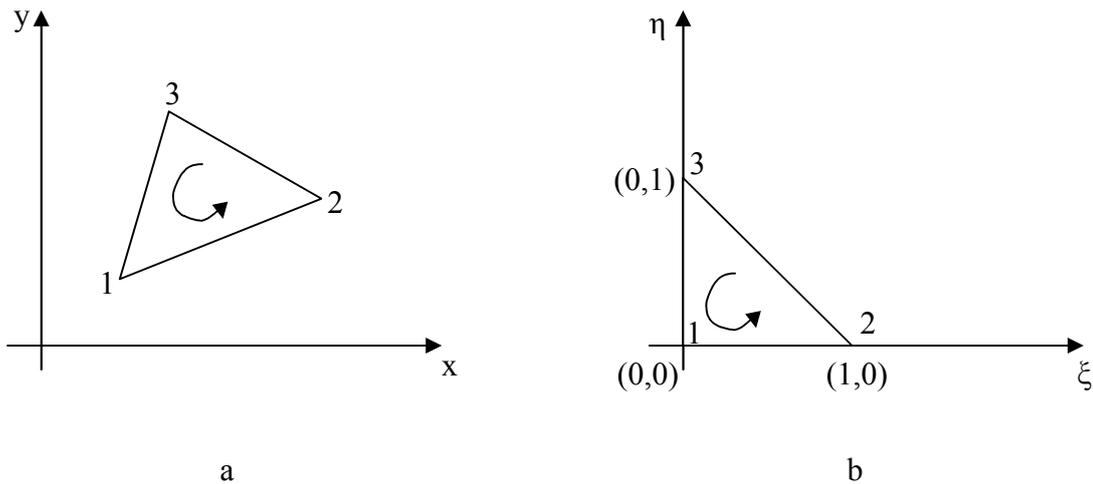


Figure 2. a) Élément en triangle linéaire dans le plan x-y. b) élément en triangle linéaire (l'élément maître) dans le plan ξ - η .

De même, La fonction de forme $N_2(\xi, \eta)$ doit être 1 au nœud 2 et 0 aux deux autres nœuds :

$$N_2(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta \quad (5)$$

En imposant les conditions ci-dessus :

$$\text{Au nœud 1 : } \xi = 0, \eta = 0 \Rightarrow N_2(\xi, \eta) = c_1 = 0$$

$$\text{Au nœud 2 : } \xi = 1, \eta = 0 \Rightarrow N_2(\xi, \eta) = 0 + c_2 + 0 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$\text{Au nœud 3 : } \xi = 0, \eta = 1 \Rightarrow N_2(\xi, \eta) = 0 + 0 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

Ainsi :

$$N_2(\xi, \eta) = \xi \quad (6)$$

Finalement, $N_3(\xi, \eta)$ doit être égale à 1 au noeud 3 et 0 aux deux autres noeuds du triangle maître. En général, $N_3(\xi, \eta)$ peut être exprimé par:

$$N_3(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta \quad (7)$$

Pour obtenir les constantes c_1 , c_2 et c_3 , les conditions ci-dessus doivent être imposées :

$$\text{Au noeud 1 : } \xi = 0, \eta = 0 \Rightarrow N_3(\xi, \eta) = c_1 = 0$$

$$\text{Au noeud 2 : } \xi = 1, \eta = 0 \Rightarrow N_3(\xi, \eta) = 0 + c_2 + 0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{Au noeud 3 : } \xi = 0, \eta = 1 \Rightarrow N_3(\xi, \eta) = 0 + 0 + c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 1$$

La forme finale de $N_3(\xi, \eta)$ est donc donnée par :

$$N_3(\xi, \eta) = \eta \quad (8)$$

Les trois fonctions d'interpolation sont présentées dans la figure 3. Il est important de souligner que ces fonctions d'interpolation ne sont pas linéairement indépendantes. Seules N_2 et N_3 sont indépendantes; N_1 est une combinaison linéaire de N_2 et de N_3 :

$$N_1 = 1 - N_2 - N_3 \quad (9)$$

Ce qui peut également être écrit :

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \quad (10)$$

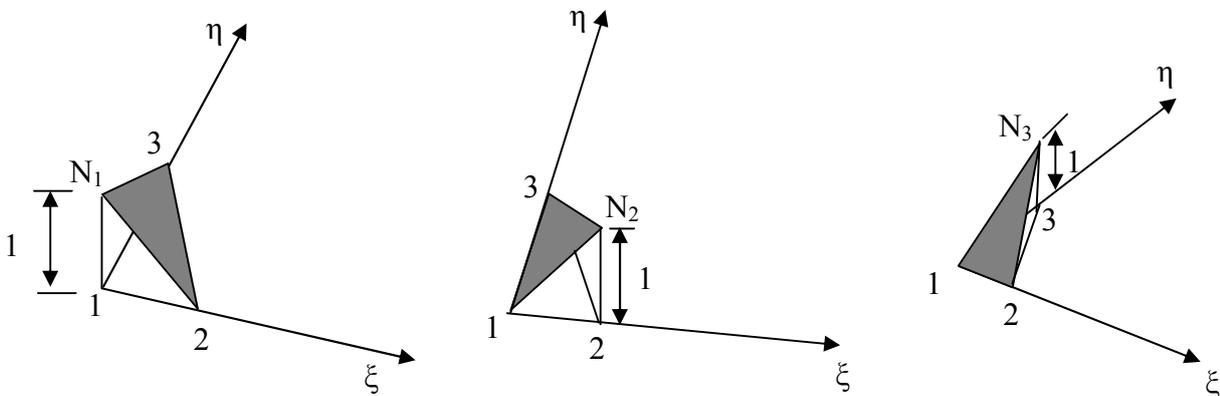


Figure 3 : Fonction d'interpolation linéaire du triangle.

Les fonctions d'interpolation linéaires du triangle de bas peuvent également être écrites en termes de coordonnées de secteur. Soit un point arbitraire (ξ, η) à l'intérieur du triangle maître représentée sur la figure 4. Relions chacun des trois sommets au point intérieur (ξ, η) , trois sub-triangles A_1 , A_2 et A_3 sont formés. A_i correspond au sub-triangle faisant face au nœud local i . Les fonctions d'interpolation linéaire N_1 , N_2 , et N_3 sont alors données par ::

$$N_1 = \frac{A_1}{A} \quad (11)$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A} \quad (12)$$

$$N_3 = \frac{A_3}{A} \quad (13)$$

où A est la surface du triangle principal.

Notons que :

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} = \frac{A}{A} = 1 \quad (14)$$

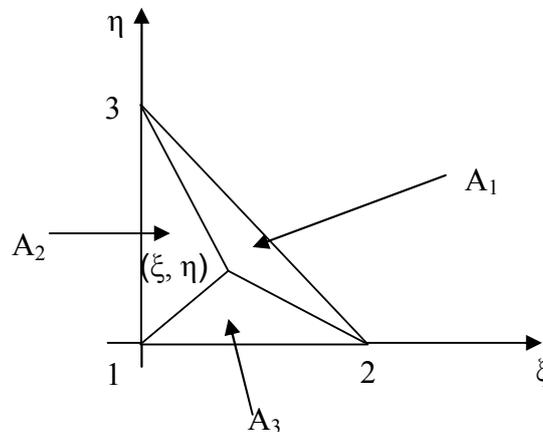


Figure 4. Coordonnées de surface.

Cet ensemble de fonctions triangulaires de base est employé dans la MEF pour interpoler la quantité inconnue primaire à l'intérieur d'un élément. La quantité inconnue primaire à l'intérieur d'un élément – φ par exemple – peut être exprimée par:

$$\varphi = \varphi_1^e N_1 + \varphi_2^e N_2 + \varphi_3^e N_3 = \sum_{i=1}^3 \varphi_i^e N_i \quad (15)$$

Où φ_1^e , φ_2^e et φ_3^e sont les valeurs nodales de la quantité inconnue primaire aux trois sommets du triangle. Pour les éléments isoparamétriques, les mêmes fonctions de forme employées pour interpoler la quantité inconnue primaire à l'intérieur d'un élément sont également employées pour interpoler les coordonnées de l'espace x et y . En d'autres termes :

$$\begin{aligned} x &= x_1^e N_1 + x_2^e N_2 + x_3^e N_3 = \sum_{i=1}^3 x_i^e N_i \\ y &= y_1^e N_1 + y_2^e N_2 + y_3^e N_3 = \sum_{i=1}^3 y_i^e N_i \end{aligned} \quad (16)$$

On remplace N_1 , N_2 et N_3 par ces formules, on aboutit alors à :

$$\begin{aligned} x &= x_1^e + \bar{x}_{21}\xi + \bar{x}_{31}\eta \\ y &= y_1^e + \bar{y}_{21}\xi + \bar{y}_{31}\eta \end{aligned} \quad (17)$$

Où :

$$\begin{aligned} \bar{x}_{21} &= x_2^e - x_1^e \\ \bar{x}_{31} &= x_3^e - x_1^e \\ \bar{y}_{21} &= y_2^e - y_1^e \\ \bar{y}_{31} &= y_3^e - y_1^e \end{aligned} \quad (18)$$

III. Dérivation de la formulation faible de l'équation différentielle gouvernante.

La formulation faible de notre problème peut être obtenue en construisant d'abord le poids résiduels de l'équation 2 pour un élément simple de domaine Ω^e . L'élément résiduel est constitué en déplaçant le côté droit de l'équation 2 vers le côté à gauche:

$$r^e = \frac{\delta}{\delta x} \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) \right) + \frac{\delta \varphi(x, y, t)}{\delta t} + \beta \varphi(x, y, t) - g \quad (19)$$

Cet élément résiduel est idéalement égal à zéro, à condition que la solution numérique φ obtenue soit identique à la solution exacte. Cependant, ce n'est pas le cas. L'élément résiduel r^e est donc en général différent de zéro. Notre objectif est de minimiser cet élément résiduel en termes de poids. Pour réaliser ceci, nous devons d'abord multiplier r^e par une fonction poids w , puis on intègre le résultat sur la surface de l'élément. Enfin, on annule l'intégrale :

$$\iint_{\Omega^e} w \left[\frac{\delta}{\delta x} \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) \right) + \frac{\delta \varphi(x, y, t)}{\delta t} + \beta \varphi(x, y, t) - g \right] dx dy = 0 \quad (20)$$

On sait que :

$$\frac{\delta}{\delta x} \left(w \alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) = \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right) \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) + w \frac{\delta}{\delta x} \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) \quad (23)$$

Ce qui peut être réarrangé de la manière suivante :

$$w \frac{\delta}{\delta x} \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) = \frac{\delta}{\delta x} \left(w \alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) - \alpha_x \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right) \left(\frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) \quad (24)$$

On remplace l'équation (24) dans (20) on aboutit alors à :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega^e} \left[\frac{\delta}{\delta x} \left(w \alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(w \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) \right) \right] dx dy - \iint_{\Omega^e} \left[\alpha_x \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right) \left(\frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) + \alpha_y \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right) \left(\frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) \right) \right] dx dy \quad (25) \\ & + \iint_{\Omega^e} w \frac{\delta \varphi(x, y, t)}{\delta t} dx dy + \iint_{\Omega^e} w \beta \varphi(x, y, t) dx dy = \iint_{\Omega^e} w g dx dy \end{aligned}$$

Puis, en vertu du théorème de Green, l'intégrale de surface de la divergence d'une quantité de vecteur est égale à tout le flux extérieur de la quantité de vecteur par la découpe à la limite de la surface :

$$\iint_{\Omega^e} (\nabla_t \vec{A}) dA = \oint_{\Gamma^e} \vec{A} \cdot \hat{a}_n dl \quad (26)$$

Ou simplement :

$$\iint_{\Omega^e} \left(\frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma^e} \left(\hat{a}_x A_x + \hat{a}_y A_y \right) \cdot \hat{a}_n dl \quad (27)$$

où \vec{A} est la quantité de vecteur d'intérêt et \hat{a}_n est le vecteur unité extérieur qui est normal à la frontière de l'élément. L'intégrale de l'équation 27 doit être évaluée le long de la périphérie de l'élément dans un sens anti-horaire. En comparant la première intégrale de l'équation 27 avec la première intégrale de l'équation 25, il apparaît clairement que :

$$A_x = w \alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \quad (28)$$

et

$$A_y = w \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) \quad (29)$$

Le vecteur normal unité est défini par :

$$\hat{a}_n = \hat{a}_x n_x + \hat{a}_y n_y \quad (30)$$

En appliquant le théorème de Green à la première intégrale de l'équation (25), le dernier devient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^e} \left[\frac{\delta}{\delta x} \left(w \alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(w \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) \right) \right] dx dy = \\ \oint_{\Gamma^e} w \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_y \right) dl \end{aligned} \quad (31)$$

On remplace ce résultat dans l'équation (25), la forme faible de l'équation se réduit à :

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega^e} \left[\alpha_x \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right) \left(\frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) \right) + \alpha_y \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right) \left(\frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) \right) \right] dx dy + \\ \iint_{\Omega^e} w \frac{\delta \varphi(x, y, t)}{\delta t} dx dy + \iint_{\Omega^e} w \beta \varphi(x, y, t) dx dy = \iint_{\Omega^e} w g dx dy - \oint_{\Gamma^e} w \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_y \right) dl \end{aligned} \quad (32)$$

Selon l'approche de Galerkin [1], la fonction de poids w doit appartenir au même ensemble des fonctions de forme qui sont employées pour interpoler la quantité inconnue primaire : dans notre cas, φ . Dans la section précédente, il a été montré que la quantité inconnue primaire est interpolée en utilisant un ensemble de polynôme de Lagrange (équation 15). On remplace l'équation 15 dans 32 avec l'arrangement suivant :

$$w = N_i \quad (33)$$

La forme faible de l'équation différentielle gouvernante est discrétisée par :

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega^e} \left[\alpha_x \left(\frac{\delta N_i}{\delta x} \right) \left(\frac{\delta}{\delta x} \sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^n N_i \right) + \alpha_y \left(\frac{\delta N_i}{\delta y} \right) \left(\frac{\delta}{\delta y} \sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^n N_i \right) \right] dx dy + \iint_{\Omega^e} N_i \frac{\sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^n N_i - \sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^{n-1} N_i}{dt} dx dy + \\ \iint_{\Omega^e} N_i \beta \sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^n N_i dx dy = \iint_{\Omega^e} N_i g dx dy - \oint_{\Gamma^e} N_i \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_y \right) dl \end{aligned} \quad (34)$$

L'équation (34) peut également être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega^e} \left[\alpha_x \left(\frac{\delta N_i}{\delta x} \right) \left(\frac{\delta}{\delta x} \sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^n N_i \right) + \alpha_y \left(\frac{\delta N_i}{\delta y} \right) \left(\frac{\delta}{\delta y} \sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^n N_i \right) \right] dx dy + \iint_{\Omega^e} N_i \frac{\sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^n N_i}{dt} dx dy + \\ \iint_{\Omega^e} N_i \beta \sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^n N_i dx dy = \iint_{\Omega^e} N_i g dx dy - \oint_{\Gamma^e} N_i \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_y \right) dl + \iint_{\Omega^e} N_i \frac{\sum_{i=1}^3 (\varphi_i^e)^{n-1} N_i}{dt} dx dy \end{aligned} \quad (35)$$

Cette équation peut être exprimée sous forme matricielle donnée par :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e & M_{13}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e & M_{23}^e \\ M_{31}^e & M_{32}^e & M_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\varphi_1^e)^n \\ (\varphi_2^e)^n \\ (\varphi_3^e)^n \end{Bmatrix} + \frac{1}{dt} \begin{bmatrix} MM_{11}^e & MM_{12}^e & MM_{13}^e \\ MM_{21}^e & MM_{22}^e & MM_{23}^e \\ MM_{31}^e & MM_{32}^e & MM_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\varphi_1^e)^n \\ (\varphi_2^e)^n \\ (\varphi_3^e)^n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{11}^e & T_{12}^e & T_{13}^e \\ T_{21}^e & T_{22}^e & T_{23}^e \\ T_{31}^e & T_{32}^e & T_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\varphi_1^e)^n \\ (\varphi_2^e)^n \\ (\varphi_3^e)^n \end{Bmatrix} = \\
& \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \end{Bmatrix} + \frac{1}{dt} \begin{bmatrix} MM_{11}^e & MM_{12}^e & MM_{13}^e \\ MM_{21}^e & MM_{22}^e & MM_{23}^e \\ MM_{31}^e & MM_{32}^e & MM_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\varphi_1^e)^{n-1} \\ (\varphi_2^e)^{n-1} \\ (\varphi_3^e)^{n-1} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{35}$$

où :

$$M_{ij}^e = -\iint_{\Omega^e} \left[\alpha_x \left(\frac{\delta N_i}{\delta x} \right) \left(\frac{\delta N_j}{\delta x} \right) + \alpha_y \left(\frac{\delta N_i}{\delta y} \right) \left(\frac{\delta N_j}{\delta y} \right) \right] dx dy \tag{36}$$

$$MM_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} N_i N_j dx dy \tag{37}$$

$$T_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \beta N_i N_j dx dy \tag{38}$$

$$f_i^e = \iint_{\Omega^e} N_i g dx dy \tag{39}$$

$$p_i^e = -\oint_{\Gamma^e} N_i \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_y \right) dl \tag{40}$$

Sous une forme plus compacte, le système matricielle dans l'équation 35 peut être exprimé par :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\varphi_1^e)^n \\ (\varphi_2^e)^n \\ (\varphi_3^e)^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \\ b_3^e \end{Bmatrix} \tag{41}$$

où :

$$\begin{aligned}
K_{ij}^e &= M_{ij}^e + \frac{1}{dt} MM_{ij}^e + T_{ij}^e \\
b_i^e &= f_i^e + p_i^e + \frac{1}{dt} \sum_{j=1}^3 MM_{ij}^e (\varphi_j^e)^{n-1}
\end{aligned} \tag{42}$$

Il est à noter que l'intégrale de contour dans l'équation 40 doit être évaluée le long de la frontière fermée de chaque élément simple dans le domaine. Dans notre cas, la maille d'éléments finis se compose des éléments triangulaires linéaires. Cette intégrale de contour doit être évaluée le long des trois contours de chaque triangle

dans un sens anti-horaire. Cependant, il est important de signaler qu'un contour qui n'est pas à la frontière, appartient à deux triangles voisins (figure 5). C'est pour cette raison que l'évaluation de l'intégrale de ligne dans l'équation (40) pour l'élément e_1 (figure 5.b) le long du contour du noeud 1 au noeud 2, donne exactement le même résultat, mais de signe opposé, avec le même principe on évalue l'intégrale de ligne pour l'élément e_2 le long du contour du noeud 3 au noeud 1. La raison du signe opposé provient du fait que les deux vecteurs extérieurs d'unité normaux au contour commun des deux triangles voisins, comme représenté sur la figure 5.b, pointent dans des directions opposées. En d'autres termes :

$$\hat{a}_{n1} = \hat{a}_{n2} \tag{43}$$

où :

$$\hat{a}_{n1} = \hat{a}_x n_x^{(e_1)} + \hat{a}_y n_y^{(e_1)} \tag{44}$$

$$\hat{a}_{n2} = \hat{a}_x n_x^{(e_2)} + \hat{a}_y n_y^{(e_2)}$$

Ainsi :

$$n_x^{(e_1)} = -n_x^{(e_2)} \tag{45}$$

Et :

$$n_y^{(e_1)} = -n_y^{(e_2)} \tag{46}$$

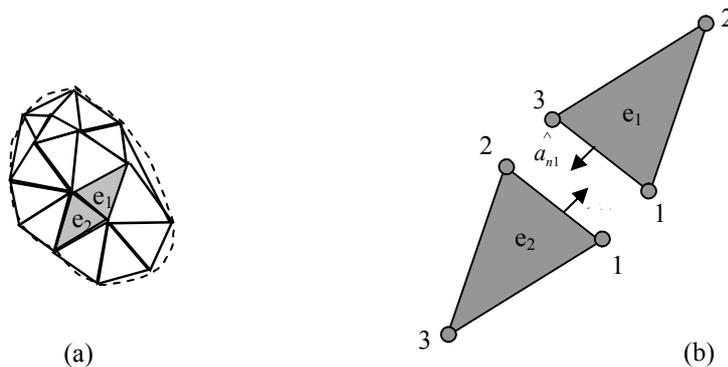


Figure 5 : (a) contour intérieur partagé par deux triangles voisins (b) vecteur unité normal extérieur au point commun de contour dans des directions opposées.

Pour donner un exemple, calculons la contribution à l'entrée globale du vecteur P par le noeud local 1 de l'élément e_1 et le noeud local 1 de l'élément e_2 qui est présenté par l'intégrale dans l'équation 40 et évalué le long du contour commun

aux deux triangles. Notons cette contribution à l'entrée globale spécifique par p_{1-1} , nous obtenons alors :

$$p_{1-1} = -\oint_{1 \rightarrow 2} N_1^{(e_1)} \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x^{(e_1)} + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_x^{(e_1)} \right) dl - \oint_{3 \rightarrow 1} N_1^{(e_2)} \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x^{(e_2)} + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_x^{(e_2)} \right) dl \quad (47)$$

On remplace l'équation (45) et (46) dans (47) en utilisant le fait suivant :

$$N_1^{(e_1)} = N_1^{(e_2)} \quad (48)$$

On suit le même raisonnement pour le calcul de la contribution à l'entrée globale du vecteur P par le noeud local 2 de l'élément e_1 et le noeud local 3 de l'élément e_2 qui est une intégration au long du contour commun des deux triangles et donnée par :

$$p_{2-3} = -\oint_{1 \rightarrow 2} N_2^{(e_1)} \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x^{(e_1)} + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_x^{(e_1)} \right) dl - \oint_{3 \rightarrow 1} N_3^{(e_2)} \left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x^{(e_2)} + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_x^{(e_2)} \right) dl \quad (49)$$

On remplace l'équation (45) et (46) dans (49) en utilisant le fait suivant :

$$N_2^{(e_1)} = N_3^{(e_2)} \quad (50)$$

En conséquence, la contribution de l'intégrale de l'équation 40 de vecteur global P est zéro pour tous les contours intérieurs. Elle est différente de zéro seulement pour les contours qui appartiennent à la frontière de domaine Γ , où :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (51)$$

Pour les contours de frontière qui appartiennent à Γ_1 , où les conditions aux limites de Dirichlet doivent être imposées, la contribution de l'intégrale de ligne de l'équation 40 sera rejetée. Ainsi, la seule contribution de l'intégrale de ligne de l'équation 40 est attribuée aux seuls contours de frontière qui résident sur Γ_2 . Rappelons que Γ_2 est caractérisés par les conditions aux limites mixtes qui sont de la forme :

$$\left(\alpha_x \frac{\delta}{\delta x} \varphi(x, y, t) n_x + \alpha_y \frac{\delta}{\delta y} \varphi(x, y, t) n_y \right) + \gamma \varphi(x, y, t) = q \quad (52)$$

On remplace le terme de l'équation 52 dans l'équation 40, on aboutit alors à :

$$p_i^e = - \oint_{\Gamma^e} N_i (q - \gamma \varphi_i^e) dl \quad (53)$$

L'intégrale dans l'équation 53 n'existe que pour des éléments de frontière, c'est-à-dire, les éléments qui ont un ou plusieurs contours sur la frontière externe du domaine d'élément fini. Spécifiquement, il doit être évalué seulement le long des bords de la frontière qui résident sur Γ_2 . Pour les contours intérieurs, sa contribution est nulle.

IV. Évaluation des matrices et des vecteurs d'élément.

Les expressions pour les entrées de toutes les matrices et les vecteurs d'éléments qui sont présents dans le système linéaire des équations données dans l'équation 35 sont dérivés analytiquement. Ces valeurs d'entrée dépendent du type et de l'ordre des fonctions d'interpolation utilisées dans la MEF. Nous commençons l'évaluation des matrices et des vecteurs d'élément par la matrice M_e selon l'équation 36. Les fonctions d'interpolation gouvernantes pour les éléments triangulaires linéaires sont présentées dans les équations 4, 6 et 8. Les coordonnées y et x de n'importe quel point à l'intérieur d'un élément, peuvent être exprimées par l'équation 17. En utilisant la règle des chaînes de différentiation, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\delta N}{\delta \xi} &= \frac{\delta N}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta \xi} + \frac{\delta N}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N}{\delta \eta} &= \frac{\delta N}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta \eta} + \frac{\delta N}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta \eta} \end{aligned} \quad (54)$$

Sous la forme de matrice :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\delta N}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N}{\delta \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \xi} & \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\delta x}{\delta \eta} & \frac{\delta y}{\delta \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta N}{\delta x} \\ \frac{\delta N}{\delta y} \end{Bmatrix} \quad (55)$$

La matrice 2×2 est appelée matrice Jacobienne, notée J , et peut être évaluée en utilisant les expressions de l'équation 36. La matrice Jacobienne est donnée par:

$$J = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (56)$$

L'équation 55 peut être réarrangée en inversant la matrice Jacobienne et en exprimant le système de matrice sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\delta N}{\delta x} \\ \frac{\delta N}{\delta y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\delta N}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N}{\delta \eta} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

Où J^{-1} est la matrice inverse de la matrice Jacobienne donnée par :

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \bar{y}_{31} - \bar{y}_{21} \\ -\bar{x}_{31} \quad \bar{x}_{21} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Il est à noter que $|J|$, le déterminant de la matrice Jacobienne, est donné par :

$$|J| = \bar{x}_{21} \bar{y}_{31} - \bar{x}_{31} \bar{y}_{21} = 2A_e \quad (59)$$

où A_e est l'aire du triangle. En utilisant les équations 59 et 57 en même temps que les équations 4, 6 et 8, il est possible d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta x} \\ \frac{\delta N_1}{\delta y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} \bar{y}_{31} - \bar{y}_{21} \\ -\bar{x}_{31} \quad \bar{x}_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_1}{\delta \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} \bar{y}_{31} - \bar{y}_{21} \\ -\bar{x}_{31} \quad \bar{x}_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{Bmatrix} \bar{y}_{21} - \bar{y}_{31} \\ \bar{x}_{31} - \bar{x}_{21} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{Bmatrix} \bar{y}_{23} \\ \bar{x}_{32} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned} \frac{\delta N_1}{\delta x} &= \frac{1}{2A_e} \bar{y}_{23} \\ \frac{\delta N_1}{\delta y} &= \frac{1}{2A_e} \bar{x}_{32} \end{aligned} \quad (61)$$

De même que,

$$\begin{aligned} \frac{\delta N_2}{\delta x} &= \frac{1}{2A_e} \bar{y}_{31} \\ \frac{\delta N_2}{\delta y} &= \frac{1}{2A_e} \bar{x}_{13} \end{aligned} \quad (62)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\delta N_3}{\delta x} &= \frac{1}{2A_e} \bar{y}_{12} \\ \frac{\delta N_3}{\delta y} &= \frac{1}{2A_e} \bar{x}_{21} \end{aligned} \quad (63)$$

Pour évaluer l'intégrale double dans l'équation 36, il est nécessaire de changer les variables de l'intégration x et y par ξ et η . En d'autres termes, au lieu de l'intégration au-dessus de l'élément triangulaire sur le système de coordonnées

régulier, il est plus commode que l'intégration soit effectuée sur le triangle principale qui se trouve sur le système normal de coordonnées. La transformation d'une double intégrale du système régulier de coordonnées au système normal de coordonnées est donnée par :

$$\iint_{\Omega^e} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-n} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta \quad (64)$$

Ce qui est attribué au mathématicien allemand Carl Gustav Jacob Jacobi (1851 –1804). on utilise les équations 61 et 63 et la transformation de Jacobi dans l'équation 64, les entrées de la matrice d'élément Me peuvent être évaluées d'une façon franche, Spécifiquement :

$$\begin{aligned} M_{11}^e &= \int_0^1 \int_0^{1-n} \left[\alpha_x \frac{1}{2A_e} \bar{y}_{23} \frac{1}{2A_e} \bar{y}_{23} + \alpha_y \frac{1}{2A_e} \bar{x}_{32} \frac{1}{2A_e} \bar{x}_{32} \right] 2A_e d\xi d\eta \\ &= - \left[\alpha_x \frac{1}{4A_e} (\bar{y}_{23})^2 + \alpha_y \frac{1}{4A_e} (\bar{x}_{32})^2 \right] \end{aligned} \quad (65)$$

De même que :

$$M_{12}^e = M_{21}^e = - \left[\alpha_x \frac{1}{4A_e} \bar{y}_{23} \bar{y}_{31} + \alpha_y \frac{1}{4A_e} \bar{x}_{32} \bar{x}_{13} \right] \quad (66)$$

$$M_{13}^e = M_{31}^e = - \left[\alpha_x \frac{1}{4A_e} \bar{y}_{23} \bar{y}_{12} + \alpha_y \frac{1}{4A_e} \bar{x}_{32} \bar{x}_{21} \right] \quad (67)$$

$$M_{22}^e = - \left[\alpha_x \frac{1}{4A_e} (\bar{y}_{31})^2 + \alpha_y \frac{1}{4A_e} (\bar{x}_{13})^2 \right] \quad (68)$$

$$M_{23}^e = M_{32}^e = - \left[\alpha_x \frac{1}{4A_e} \bar{y}_{31} \bar{y}_{12} + \alpha_y \frac{1}{4A_e} \bar{x}_{13} \bar{x}_{21} \right] \quad (69)$$

$$M_{33}^e = - \left[\alpha_x \frac{1}{4A_e} (\bar{y}_{12})^2 + \alpha_y \frac{1}{4A_e} (\bar{x}_{21})^2 \right] \quad (70)$$

Il est à noter que la matrice est symétrique, c'est-à-dire que :

$$M_{ij}^e = M_{ji}^e \quad (71)$$

L'autre matrice d'éléments du système linéaire régissant les équations est la matrice T_e donnée par l'équation 38. En utilisant la transformation de Jacobi dans l'équation 64, l'intégrale dans l'équation 38 peut être commodément exprimée au-dessus de l'élément triangulaire principal par :

$$\begin{aligned}
T_{ij}^e &= \int_0^1 \int_0^{n-1} \beta N_i N_j |J| d\xi d\eta \\
&= \beta 2A_e \int_0^1 \int_0^{n-1} N_i N_j d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{72}$$

La première entrée diagonale de la matrice T_e est donnée par :

$$\begin{aligned}
T_{11}^e &= \beta 2A_e \int_0^1 \int_0^{n-1} (N_1)^2 d\xi d\eta \\
&= \beta 2A_e \int_0^1 \int_0^{n-1} (1-\xi-\eta)^2 d\xi d\eta \\
&= \frac{\beta A_e}{6}
\end{aligned} \tag{73}$$

Les entrées restantes de la matrice T_e peuvent être évaluées d'une manière semblable. Cependant, afin de minimiser le temps dans l'évaluation de la matrice T_e , il y a une formule générique simple qui peut être employée :

$$\iint_{\Omega^e} (N_1)^l (N_2)^m (N_3)^n dx dy = \frac{(l+m+n!)}{(l+m+n+2)!} 2A_e \tag{74}$$

Pour valider la formule 74, employons-la pour réévaluer l'entrée T_{11}^e . Ainsi,

$$\begin{aligned}
T_{11}^e &= \iint_{\Omega^e} \beta (N_1)^2 dx dy \\
&= \beta \frac{(2!+0!+0!)}{(2+0+0+2)!} 2A_e \\
&= \frac{\beta A_e}{6}
\end{aligned} \tag{75}$$

Ce qui est le même résultat obtenu dans l'équation 74. Les entrées restantes de la matrice T_e sont données par:

$$T_{12}^e = T_{21}^e = \frac{\beta A_e}{12} \tag{76}$$

$$T_{13}^e = T_{31}^e = \frac{\beta A_e}{6} \tag{77}$$

$$T_{22}^e = \frac{\beta A_e}{6} \tag{78}$$

$$T_{23}^e = T_{32}^e = \frac{\beta A_e}{12} \tag{79}$$

$$T_{33}^e = \frac{\beta A_e}{6} \tag{80}$$

Les matrices MM_e peuvent être évaluées de la même manière que la matrice T_e sauf que leurs éléments ne contiennent pas la constante β :

$$MM_{11}^e = \frac{A_e}{6} \quad (81)$$

$$MM_{12}^e = MM_{21}^e = \frac{A_e}{12} \quad (82)$$

$$MM_{13}^e = MM_{31}^e = \frac{A_e}{6} \quad (84)$$

$$MM_{22}^e = \frac{A_e}{6} \quad (85)$$

$$MM_{23}^e = MM_{32}^e = \frac{A_e}{12} \quad (86)$$

$$MM_{33}^e = \frac{A_e}{6} \quad (87)$$

Le vecteur f_e dont les entrées sont données par l'équation (39), peut être exprimé sous une forme plus commode en utilisant la transformation de Jacobi dans l'équation 64:

$$f_i^e = 2A_e \int_0^1 \int_0^{n-1} N_i(\xi, \eta) g d\xi d\eta \quad (88)$$

Si g dans l'argument de l'intégrale est constant, alors il peut être pris hors de l'intégrale. Ce qui se résume à l'intégrale de la fonction de forme au-dessus de l'élément principal. Par contre si g est une fonction des coordonnées de l'espace x et y , alors il doit être tracé au système du même rang normal en utilisant l'équation 17 avant de procéder à l'intégration au-dessus de l'élément principal. Dans le cas où l'intégration s'avère être difficile à réaliser analytiquement, il peut être plus commode de l'évaluer numériquement. On suppose dans ce qui suit, que g est constant à l'intérieur de l'intégrale et que les entrées f_e sont données par :

$$\begin{aligned} f_1^e &= g \iint_{\Omega^e} (N_1) dx dy = g \frac{(1!+0!+0!)}{(1+0+0+2)!} 2A_e = \frac{gA_e}{3} \\ f_2^e &= g \iint_{\Omega^e} (N_2) dx dy = g \frac{(0!+1!+0!)}{(0+1+0+2)!} 2A_e = \frac{gA_e}{3} \\ f_3^e &= g \iint_{\Omega^e} (N_3) dx dy = g \frac{(0!+0!+1!)}{(0+0+1+2)!} 2A_e = \frac{gA_e}{3} \end{aligned} \quad (89)$$

Enfin, nous devons évaluer le vecteur p_e dont les entrées sont données par l'équation 40. Il est à noter que l'équation 40 est réduite à l'équation 53 lorsque les conditions aux limites mixtes (équation 52) lui sont imposées.

$$\begin{aligned}
p_i^e &= -\int_{L_b^e} N_i \left(q - \gamma \sum_{j=1}^3 \varphi_j^e N_j \right) dl \\
&= -\int_{L_b^e} N_i q dl + \int_{L_b^e} N_i \gamma (\varphi_1^e N_1 + \varphi_2^e N_2 + \varphi_3^e N_3) dl
\end{aligned} \tag{90}$$

Là où L_b^e représente le bord de la frontière de l'élément qui coïncide avec Γ_2 .

Considérons l'élément triangulaire de la figure (6a) avec un bord se trouvant sur Γ_2 . Numérotons les nœuds locaux de l'élément comme indiqué dans la figure (6b), l'intégrale dans l'équation 90 doit être évaluée le long du bord du noeud 1 au noeud 2 ($1 \rightarrow 2$). En d'autres termes,

$$p_i^e = -\int_{1 \rightarrow 2} N_i q dl + \int_{1 \rightarrow 2} N_i \gamma (\varphi_1^e N_1 + \varphi_2^e N_2 + \varphi_3^e N_3) dl \tag{91}$$

Pour évaluer l'intégrale de dans l'équation 91, le triangle e doit être tracé sur le triangle principale dans le système normal de coordonnées (figure 6b). Intégrer le long du bord $1 \rightarrow 2$ dans le triangle régulier est équivalent à intégrer de 0 à 1 le long de l'axe ξ du système normal de coordonnées multiplié par la longueur du bord. En d'autres termes,

$$dl = l_{12} d\xi \tag{92}$$

L'expression dans 92 peut être prouvée très facilement. Pour un point quelconque le long du bord $1 \rightarrow 2$, x et y sont donnés par :

$$\begin{aligned}
x &= x_1^e N_1(\xi, 0) + x_2^e N_2(\xi, 0) = x_1^e (1 - \xi) + x_2^e \xi = x_1^e + \bar{x}_{21} \xi \\
y &= y_1^e N_1(\xi, 0) + y_2^e N_2(\xi, 0) = y_1^e (1 - \xi) + y_2^e \xi = y_1^e + \bar{y}_{21} \xi
\end{aligned} \tag{93}$$

Le différentiel dl est défini par :

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \tag{94}$$

où :

$$\begin{aligned}
dx &= \bar{x}_{21} d\xi \\
dy &= \bar{y}_{21} d\xi
\end{aligned} \tag{95}$$

La substitution de l'équation (95) dans (94) donne :

$$\begin{aligned}
dl &= \sqrt{(\bar{x}_{21})^2 + (\bar{y}_{21})^2} d\xi \\
&= l_{12} d\xi
\end{aligned} \tag{96}$$

Ainsi, en utilisant le résultat de l'équation 92, l'intégrale dans l'équation 91, évaluée pour le noeud local 1 de l'élément, devient :

$$\begin{aligned}
p_1^e &= -\int_0^1 N_1(\xi, 0) q l_{12} d\xi + \int_0^1 N_1(\xi, 0) \gamma (\varphi_1^e N_1(\xi, 0) + \varphi_2^e N_2(\xi, 0) + \varphi_3^e N_3(\xi, 0)) l_{12} d\xi \\
&= -\int_0^1 (1-\xi) q l_{12} d\xi + \int_0^1 (1-\xi) \gamma (\varphi_1^e (1-\xi) + \varphi_2^e \xi + \varphi_3^e 0) l_{12} d\xi \\
&= -\frac{q l_{12}}{2} + \left[\frac{\gamma l_{12}}{3} \varphi_1^e + \frac{\gamma l_{12}}{6} \varphi_2^e + 0 \varphi_3^e \right]
\end{aligned} \tag{97}$$

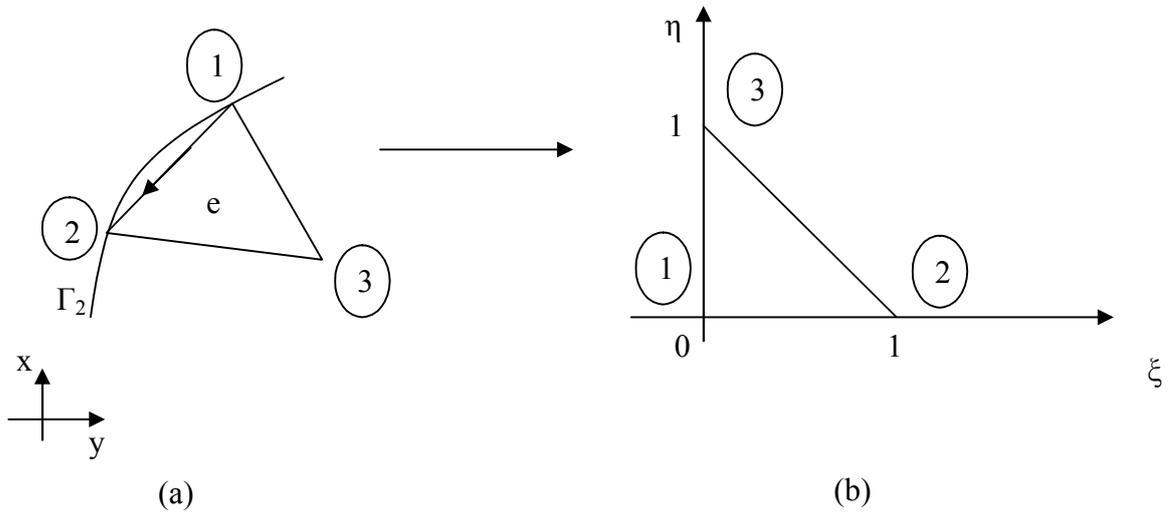


Figure 6 : (a) L'élément triangulaire avec un bord sur la frontière Γ_2 . (b) l'élément triangulaire maître. Le chemin de l'intégration est indiqué avec des flèches

Les limites incluses dans les crochets doivent être transférées au côté à gauche du système de matrice d'élément dans l'équation 41. C'est équivalent à soustraire les coefficients φ_1^e, φ_2^e et φ_3^e de trois entrées K_{11}^e, K_{12}^e et K_{13}^e de la matrice K_e , respectivement, c.-à-d :

$$\begin{aligned}
K_{11}^e &= K_{11}^e - \frac{\gamma l_{12}}{3} \\
K_{12}^e &= K_{12}^e - \frac{\gamma l_{12}}{6} \\
K_{13}^e &= K_{13}^e - 0
\end{aligned} \tag{98}$$

De même, l'entrée de vecteur qui correspond au noeud local 2 est donnée, selon l'intégrale dans l'équation (91), par:

$$\begin{aligned}
p_2^e &= -\int_0^1 N_2(\xi, 0) q l_{12} d\xi + \int_0^1 N_2(\xi, 0) \gamma (\varphi_1^e N_1(\xi, 0) + \varphi_2^e N_2(\xi, 0) + \varphi_3^e N_3(\xi, 0)) l_{12} d\xi \\
&= -\int_0^1 \xi q l_{12} d\xi + \int_0^1 \xi \gamma (\varphi_1^e (1 - \xi) + \varphi_2^e \xi + \varphi_3^e 0) l_{12} d\xi \\
&= -\frac{q l_{12}}{2} + \left[\frac{\gamma l_{12}}{6} \varphi_1^e + \frac{\gamma l_{12}}{3} \varphi_2^e + 0 \varphi_3^e \right]
\end{aligned} \tag{99}$$

De plus, les limites entre crochets doivent être transposées vers le côté gauche du système de matrice et soustraites des entrées de la matrice K_e , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
K_{21}^e &= K_{11}^e - \frac{\gamma l_{12}}{6} \\
K_{22}^e &= K_{12}^e - \frac{\gamma l_{12}}{3} \\
K_{33}^e &= K_{13}^e - 0
\end{aligned} \tag{100}$$

Finalement, l'entrée du vecteur qui correspond au noeud local 3 est :

$$\begin{aligned}
p_3^e &= -\int_0^1 N_3(\xi, 0) q l_{12} d\xi + \int_0^1 N_3(\xi, 0) \gamma (\varphi_1^e N_1(\xi, 0) + \varphi_2^e N_2(\xi, 0) + \varphi_3^e N_3(\xi, 0)) l_{12} d\xi \\
&= -\int_0^1 0 q l_{12} d\xi + \int_0^1 0 \gamma (\varphi_1^e (1 - \xi) + \varphi_2^e \xi + \varphi_3^e 0) l_{12} d\xi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{101}$$

Étant donné que $N_3(\xi, 0) = 0$ le long de l'axe ξ , le vecteur P_e pour un élément de frontière localement numéroté (figure 5a), est donc donné par :

$$P^e = -\frac{q l_{12}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{102}$$

V. Assemblage du système matriciel global.

Initialement, la matrice globale est une matrice nulle. Le processus d'assemblage commence en faisant une boucle passant par tous les éléments un par un et en identifiant les coefficients d'entrée de la matrice globale selon l'algorithme suivant (développé sous Matlab) :

```

for e=1:N % boucle par les éléments dans le domaine
    for i=1:3 % faites une boucle par les noeuds locaux (1ère boucle) de l'élément e
        for j=1:3 % faites une boucle par les noeuds locaux (2ème boucle) de l'élément e
             $K(n(e,i),n(e,j)) = K(n(e,i),n(e,j)) + ke(i,j);$ 
        end
    end
end
end

```

où K représente la matrice globale, K_e la matrice d'élément et $n(e,i)$ le numéro du nœud de l'élément e ($i=1,2,3$). Pour assembler le vecteur global b , le processus est similaire au processus précédent. Il commence par l'initialisation du vecteur global b à zéro dont les entrées sont mises à jour selon l'algorithme suivant :

```

for e = 1:N % % boucle par les éléments dans le domaine
    for i = 1:3 % boucle par les noeuds locaux de l'élément e
         $b(n(e,i)) = b(n(e,i)) + be(i);$ 
    end
end
end

```

VI. Solution de la matrice globale.

Une fois appliquée la MEF il est toujours comme conséquence un ensemble d'équations linéaires qui est habituellement présenté sous une forme de matrice:

$$K \varphi = b \quad (103)$$

où K est la matrice globale, φ est le vecteur global représentant la quantité inconnue primaire aux noeuds du domaine, et b est le vecteur global. La taille de la matrice globale est égale au nombre de noeuds dans le domaine d'éléments fini. La solution de ce système matriciel a été déterminée par un programme sous Matlab.

VII. Post-traitements des résultats.

En résolvant le système de matrice dans l'équation (103), un vecteur contenant les valeurs de la quantité inconnue primaire aux noeuds globaux du domaine d'éléments finis est obtenu. Pour évaluer la quantité inconnue primaire en

un point à l'intérieur d'un élément, nous devons nous servir de l'ensemble régissant les fonctions d'interpolation, c'est-à-dire,

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i^e N_i(x, y) \quad (104)$$

Il est à noter que dans les fonctions d'interpolation, N_i doit être exprimé en termes de x et y . les fonctions d'interpolation pour les éléments triangulaires ont été données en termes de coordonnées normales. Pour pouvoir exprimer N_i en termes de x et y , il est important que les coordonnées normales ξ et η soient exprimées en termes de x et y d'un point à l'intérieur d'un triangle (équation 17). Cette équation peut être écrite sous forme matricielle :

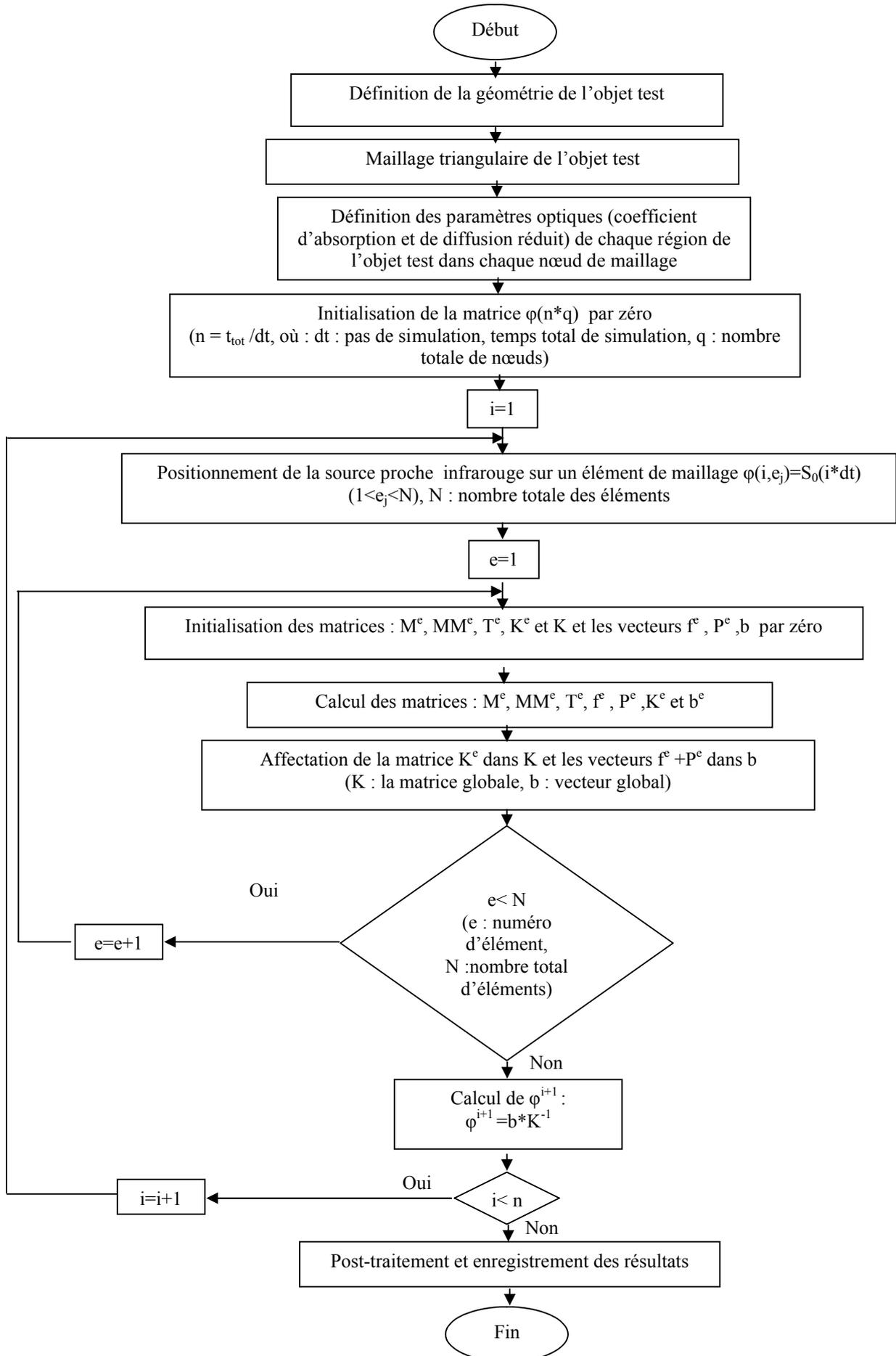
$$\begin{Bmatrix} x - x_1^e \\ y - y_1^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} & \bar{x}_{31} \\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (105)$$

Pour résoudre le système précédent en fonction de ξ et η , il est nécessaire d'inverser la matrice carré 2×2 dans l'équation 105, on aboutit alors à :

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\bar{x}_{21}\bar{y}_{31} - \bar{x}_{31}\bar{y}_{21}} \begin{bmatrix} \bar{y}_{31} & -\bar{x}_{31} \\ -\bar{y}_{21} & \bar{x}_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_1^e \\ y - y_1^e \end{Bmatrix} \quad (106)$$

La substitution de ξ et η par x et y , dans les fonctions d'interpolation $N_i(\xi, \eta)$, fait que ces dernières deviennent fonctions de x et de y .

Organigramme



Références bibliographiques.

- [1] Anastasis. C. Polycarpou (2006), "Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics", (livre),vol.01, Printed in the United States of America.

Chapitre IV.

Modélisation du dispositif de la détection

Chapitre IV.

Modélisation du dispositif de la détection.

Les images médicales, réalisées à l'aide de différentes modalités (IRM, scanner X, échographie, scintigraphie, Tomographie optique), permettent une exploration à l'intérieur du corps humain sans acte invasif sur celui-ci.

La relation entre la physique des particules et l'imagerie médicale n'est pas évidente, pourtant les outils de base reposent sur le même principe : la détection de radiations ionisantes ou non ionisantes qui est le cas du signal optique proche infrarouge. Les détecteurs sont basés sur des systèmes électroniques, ce qui permet de transformer les signaux générés par les particules en codes numériques qui sont par la suite stockés et traités par ordinateur. La numérisation par détecteurs semi-conducteurs est actuellement en cours de développement, elle pourrait allier l'aspect dynamique à la finesse de l'image.

Le présent chapitre s'inscrit directement dans cet axe de recherche, l'objectif étant de contribuer au développement d'un détecteur à base de silicium amorphe hydrogéné. Pour ce faire, nous avons opté pour la technique appelée «Thin-Film on ASIC» (TFA) qui est basée sur la déposition d'un capteur en Silicium Amorphe Hydrogéné directement sur un circuit intégré [1].

I. Les films épais en technologie ASIC.

Les films épais en technologie ASIC représentent une solution alternative et attrayante pour la construction de détecteurs de radiations pour les applications en physique de haute énergie (PHE) et en imagerie médicale. Dans ce partie, nous présentons le concept de la technologie et les propriétés des dispositifs de détection en Si-a:H développés pour la détection des radiations. Les différents avantages qu'offre la technologie TFA pour la détection des radiations ainsi que les difficultés rencontrées dans son développement seront discutés.

I.1. Les films épais en concept ASIC.

Le silicium amorphe hydrogéné est un excellent matériau pour la détection optique [2]. Il présente un haut coefficient d'absorption dans le spectre visible

comparé à celui du silicium cristallin. Sa réponse spectrale correspond à la réponse de l'œil humain. Ses caractéristiques de dépôt font de lui un matériau intéressant. Cependant, son utilisation dans les circuits électroniques n'est pas encore très développée. En effet, malgré le fait que le silicium cristallin ne possède pas de bonnes propriétés photoélectriques, il est cependant largement utilisé dans une large gamme de composants de très haute technologie, comme par exemple les circuits intégrés [3]. Par dépôt de Si-a:H sur le haut d'un ASIC, il est possible de combiner les avantages de chaque matériau. Le silicium amorphe hydrogéné présente un avantage technologique d'être déposé à basse température sur de grandes surfaces avec un coût réduit [2]. Par la méthode PE-CVD (Plasma Enhanced Chemical Vapor Deposition), le Si-a :H peut être déposé dans un intervalle de température de 150°C à 250°C. Pour le substrat CMOS en silicium cristallin avec des contacts en aluminium, le maximum de température de post-traitement est légèrement faible et au-dessus de 450 °C [3]. Dans ce cas, les raccordements de l'aluminium commencent à fondre. La température de dépôt du Si-a:H est donc au dessous de cette limite. Les films en Si-a:H peuvent être déposés sur le haut d'un substrat CMOS post-traité. Il est possible d'intégrer dans le dispositif de détection en Si-a:H, l'électronique de lecture. C'est ce qui appelé film épais en ASIC (TFA) ou film épais en technologie CMOS (TFT). Il a un potentiel intéressant pour la haute détection, l'imagerie dynamique, l'imagerie en petites zones de pixels et pour l'imagerie par rayons X en zones larges pour les applications médicales.

Le détecteur TFA consiste en un dépôt d'un film épais de Si-a:H comme dispositif de détection directement sur le haut de l'ASIC. Le dispositif de détection peut être réalisé sous forme de couches n-i-p ou dispositif Shottky. Dans le cas d'une structure n-i-p (figure 1), l'électrode en Oxyde Conducteur Transparent (OCT) est déposée sur le haut de la couche p.

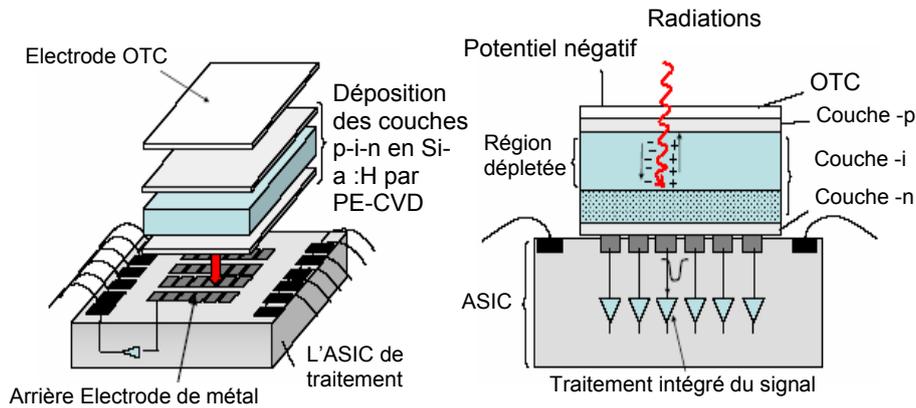


Figure .1 . (a) dépôt de couches n-i-p en Si-a :H sur le haut de l'ASIC pour construire le détecteur TFA. (b) coupe du détecteur : les porteurs photogénérés dans la région déplétée de la zone -i- sont séparés et collectés par l'électrode.

Le contact en bas de coupe est en métal, il représente la dernière électrode intégrée en ASIC raccordée à l'électronique. Une tension inverse est appliquée à toutes les électrodes du haut. La génération des porteurs par les photons ou les particules dans la couche i crée une région déplétée séparée par un champ électrique, Ces porteurs sont collectés par les électrodes. Le signal induit correspondant est traité par l'électronique intégrée de lecture. La technologie TFA offre un haut niveau d'intégration des dispositifs de détection et de l'électronique de lecture, il en résulte une réduction du coût de fabrication. Elle permet également d'obtenir des géométries optimales (rapport entre la zone active de détecteur et la zone totale de détecteur égal à 1). L'électronique de lecture est intégrée dans la zone active du détecteur. Cette technologie présente un autre avantage qui est la flexibilité : le dispositif de détection et le circuit de l'électronique de lecture peuvent être conçus séparément et optimisés.

Le premier détecteur basé sur la technologie TFA a été développé en imagerie [4, 5]. La première compagnie à avoir commercialisé un tel imageur est la société *Silicon Vision* fondée en 1996 en Allemagne. Ce type de détecteur est constitué d'une structure n-i-p utilisée comme dispositif de détection pour un imageur en noir et blanc. Les multicouches en Si-a:H comme les structures n-i-p-i-n ou p-i-n-i-p ou les structures n-i^x-p (couches i subdivisées), peuvent être employées pour la reconnaissance des couleurs [5]. Aussi, pour les couches épaisses actives, le Si-a:H reste le matériau de choix de par sa haute absorption optique. La flexibilité est l'un

des avantages clés de la technologie TFA. En effet, il est possible de connecter à l'ASIC, différentes structures de détecteurs. Les propriétés photoélectriques comme la sensibilité, peuvent être adaptées aux besoins spécifiques des applications. Un exemple d'un détecteur d'imagerie en technologie TFA de Silicon Vision est présenté dans la figure 2.

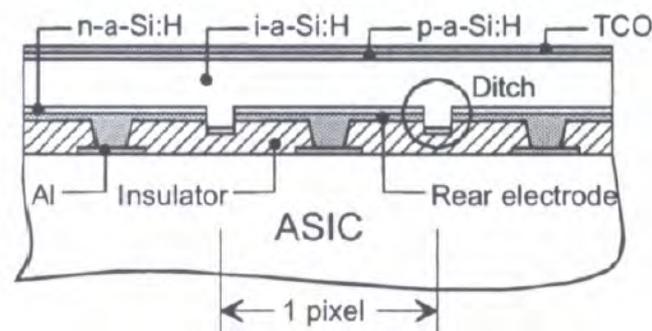


Figure 2 : Schéma d'un détecteur d'imagerie en technologie TFA de Silicon Vision

Lors de la réalisation de l'ASIC, la couche finale de métal est déposée sur l'ouverture de passivation (isolant). Préalablement au dépôt du film épais, les fossés peuvent être gravés dans l'isolant entre le détecteur et l'ASIC. Pendant le dépôt du dispositif, la couche n épaisse est déposée aux bords des fossés, le courant latéral entre les pixels est donc supprimé.

I.2. Détection des radiations dans le Si-a:H.

Le silicium amorphe a fait l'objet de recherches récentes dans le domaine de la détection des radiations de haute énergie [2]. De nombreux travaux ont montré la très grande résistance du Si-a:H aux radiations ionisantes comparativement au silicium cristallin [6,7,8]. Les dispositifs de Si-a:H à couche mince avec des épaisseurs de $1\mu\text{m}$ ne sont cependant pas adaptés à la détection des radiations de haute énergie. Les radiations de haute énergie diffusent plus facilement à travers une couche de Si-a:H que des radiations de basse énergie. Le signal induit par les radiations seules est donc faible pour être lu. Les détecteurs TFA ou à pixel actif, basés sur le Si-a:H et développés pour les dispositifs de l'imagerie, ne peuvent pas être utilisés directement pour la détection des radiations. La détection des radiations de haute énergie avec un dispositif de Si-a:H ne peut avoir lieu qu'avec le dépôt de dispositifs épais ou par l'utilisation de couches de scintillateurs.

La couche de scintillateur fabriquée à partir d'un matériau à nombre atomique (Z) élevé, peut être déposée sur un photodétecteur en Si-a:H. Ce scintillateur convertit l'énergie des radiations incidentes en photons ou en radiations détectables par le dispositif d'imagerie en Si-a:H. Les détecteurs de rayon X utilisent le phosphore ou l'iodure de césium comme couche de scintillateur [9]. Cependant, cette technologie nécessite l'addition d'une couche de scintillateur d'épaisseur égale à $1000\mu\text{m}$, ce qui dégrade la résolution spatiale du détecteur et augmente le coût de fabrication.

La détection directe des radiations dans un dispositif de détection en Si-a:H nécessite que la radiation crée un signal électrique suffisant. L'amplitude du signal induit dépend de l'épaisseur du dispositif de détection à travers lequel les particules passent. L'épaisseur déplétée d'une couche en Si-a:H ($\sim 50\mu\text{m}$) fournit un signal très suffisant comparativement au bruit. Dans une diode p-i-n, la zone i est la partie sensible, elle est déplétée sous une polarisation inverse appropriée. Les zones n et p peuvent être minces ($\sim 20\mu\text{m}$), puisqu'elles ont pour but de fournir la déplétion de la couche i. Les porteurs générés dans cette zone ne peuvent pas être collectés à cause du rythme de leur recombinaison due à la haute densité de défauts dans la zone dopée dans le Si-a:H. Les porteurs générés dans la zone i déplétée sont séparés et accélérés par un champ électrique inverse induisant le signal aux bornes des électrodes. Mais les porteurs générés dans la zone i non déplétée ne sont pas séparés et ne participent pas au signal (figure 3).

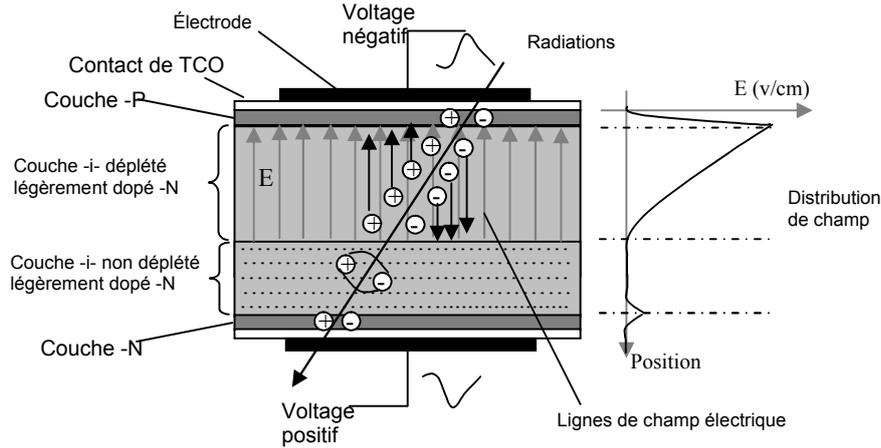


Figure 3 : Schéma d'une diode p-i-n épaisse. Les porteurs chargés induits dans la zone i déplétée sont séparés et accélérés par le champ électrique interne. Ils contribuent à la formation du signal.

Une zone i épaisse avec une déplétion complète répond au besoin de la détection des particules.

Une couche épaisse en Si-a:H légèrement dopée n, c'est-à-dire une partie des états profonds du semi conducteur amorphe sont des donneurs chargés positivement sous une polarisation inverse. Par conséquent, le champ électrique n'est pas constant, il a une forme plutôt linéaire dans la quasi-totalité de l'épaisseur déplétée de la couche i (figure 3). Le profil de champ électrique à l'intérieur de la zone i est donné par l'équation de Poisson :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-\rho}{\epsilon_0 \epsilon_{Sia}} = \frac{-q N_{ab}^*}{\epsilon_0 \epsilon_{Sia}} \quad (1)$$

où V est le potentiel électrique, ρ la densité de charge électrique, ϵ_0 la constante diélectrique de l'air, ϵ_{Sia} la constante diélectrique relative, q la charge de l'électron et N_{ab}^* la densité des défauts ionisés. En considérant un modèle simple où la densité des défauts ionisés est uniforme dans la région déplétée, la tension V_f nécessaire pour dépléter une épaisseur d de la zone i est donnée par :

$$V_f = \frac{-q N_{ab}^* d^2}{2 \epsilon_0 \epsilon_{Sia}} \quad (2)$$

Par conséquent, la tension nécessaire pour la déplétion de la zone i varie linéairement avec la densité des défauts ionisé N_{ab}^* , elle est de plus, proportionnelle au carré de l'épaisseur de la zone i. Si on suppose que la densité des dopants est de $2 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$ pour le Si-a:H et que 30% environ de cette densité sont ionisés, alors une tension $V_f > 1100\text{V}$ déplète une épaisseur de $50\mu\text{m}$ d'une diode en Si-a:H. Pour les

dispositifs épais, même si le dépôt de Si-a:H est de bonne qualité, la haute tension fait dépléter la diode p-i-n mais n'augmente pas le courant de fuite du fait de la présence d'un très haut champ électrique à l'interface p-i. Pour une diode d'épaisseur de 100 μ m une tension de 4.5 kV est nécessaire pour une déplétion complète de la couche.

Plusieurs travaux se sont intéressés à la caractérisation de la détection des radiations dans le Si-a:H [2]. Ils ont relevé la complexité de la modélisation de la charge des porteurs collectés et du signal généré dans un détecteur en Si-a:H. L'intégration d'un détecteur en Si-a:H directement sur le haut de l'ASIC peut minimiser la capacité parasite et permettre la réalisation de petits pixels. Les films minces en technologie ASIC apparaît donc comme étant une solution de choix pour la détection des particules.

I.3. La technique TFA pour la détection des radiations.

La technologie TFA est intéressante pour les détecteurs de radiations car elle permet une intégration comparable à celle des détecteurs à pixels monolithiques, qui présentent l'avantage de l'approche des pixels hybrides.

Les propriétés de cette technologie sont très intéressantes, mais plusieurs défis sont à relever. Le premier défi est le développement technologique du détecteur TFA à pixel :

- le dépôt d'une diode épaisse en Si-a:H sur le haut d'un ASIC classique,
- une basse densité des défauts pour permettre la déplétion totale du dispositif de détection en Si-a:H,
- les diodes présentent un bas courant de fuite.

Les radiations créent un faible signal dans le Si-a:H comparativement aux détecteurs classiques en silicium cristallin. Cette différence dans la charge collectée d'un détecteur en silicium cristallin et celle d'un détecteur en silicium amorphe peut être attribuée à l'énergie élevée de création des paires électrons-trous dans le Si-a:H et à la collection partielle des trous due à leur transport dispersif dans le Si-a:H. Le contact entre le détecteur en Si-a:H (couche n) et le circuit intégré est également

atteint pendant le dépôt. L'excitation de la couche de passivation dans le dispositif classique en ASIC résulte sur l'irrégularité du substrat.

Enfin, les différents mécanismes de l'interaction des radiations, la charge collectée et le signal induit dans le Si-a:H sont complexes et ne sont pas bien connus.

Le détecteur que nous avons modélisé est constitué d'une diode p-i-n épaisse en Si-a:H déposée par PE-CVD directement sur le haut de l'ASIC fabriqué en technologie CMOS sub-micronique. La figure 4 présente une coupe d'un tel détecteur. Dans cet exemple, l'ASIC comprend trois niveaux de métal et une partie intégrée de traitement du signal. La couche de passivation couvre la surface de l'ASIC.

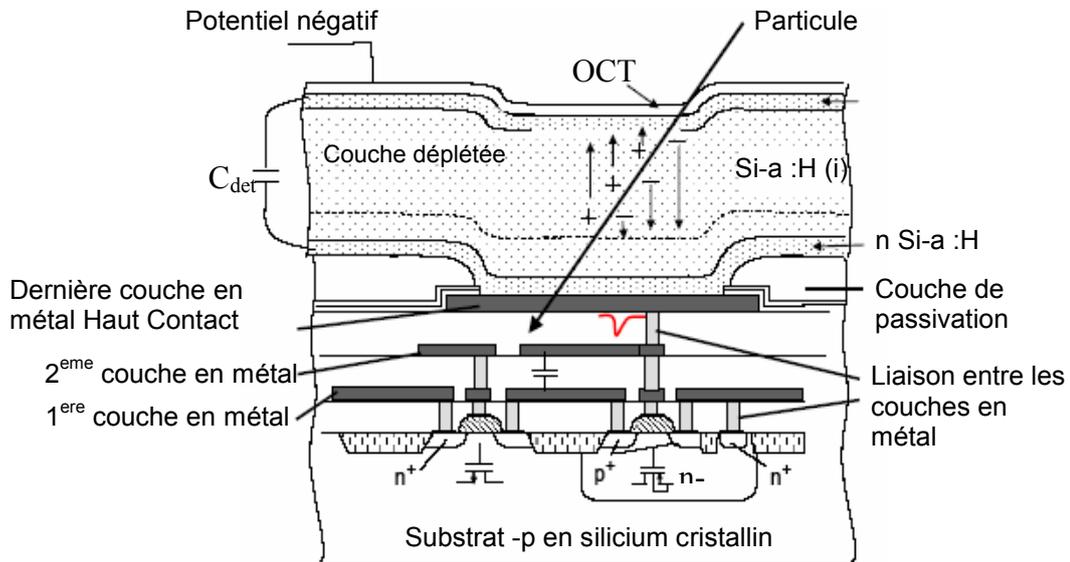


Figure 4 : Tranche coupe détecteur pixel TFA. Une couche p-i-n est déposée sur un circuit CMOS à trois couches de métal.

La diode p-i-n épaisse en Si-a:H est déposée sur la surface transparente de l'ASIC. Une électrode transparente en Oxyde de Zinc (ZnO) ou en oxyde d'Indium de Tin est déposée sur le haut de la structure p-i-n. Elle est transparente pour permettre la caractérisation du détecteur par des techniques utilisant des lasers. Le mouvement de la charge générée par les particules dans la couche i induit le signal dans la dernière couche de métal de l'électrode. Ce signal est directement traité par le circuit électronique intégré.

II. Mobilité des porteurs et champ électrique interne dans le Si-a:H.

A température ambiante, la mobilité des porteurs dans le Si-a:H est expliquée par le modèle de piégeage multiple. Au dessus de la température T_V , le transport est considéré non-dispersif et défini par la constante de la mobilité de diffusion. Pour une température inférieure à T_V , le transport est considéré dispersif et la mobilité de diffusion varie avec le temps [10] :

$$\mu_d(t) = \alpha(1 - \alpha)\mu_0(\omega t)^{(\alpha-1)} \quad (3)$$

où μ_0 est la mobilité ohmique, α le paramètre de dispersion égal à T/T_V ($0 < \alpha < 1$).

Au niveau de la bande de conduction, la température T_V est égale à 270~300°K, donc à température ambiante $\alpha \sim 1$ et le transport des électrons est considéré non-dispersif. La mobilité dans ce cas, est constante ($\mu_{de} \sim 1-5 \text{ cm}^2 \text{v}^{-1} \text{s}^{-1}$) [11].

Au niveau de la bande de valence, la température T_V vaut environ 450°K, donc à température ambiante $\alpha \sim 0.65$ et le transport des trous est considéré dispersif. La valeur moyenne de la mobilité est égale environ à $0.01 \text{ cm}^2 \text{v}^{-1} \text{s}^{-1}$ [11].

La durée de vie τ des porteurs de charges correspond à l'intervalle de temps pour qu'un électron ou un trou recombine ou soit piégé au niveau des états profonds. La vitesse de diffusion des porteurs v_{diff} et la durée de vie définissent la longueur de diffusion des porteurs L_{diff} qui représente la distance où les porteurs peuvent diffuser puis être piégés au niveau profond ou se recombiner.

$$V_{diff} = \mu_d E \quad (4)$$

$$L_{diff} = V_{diff} \tau \quad (5)$$

La mobilité de diffusion dans le silicium cristallin est de l'ordre de $1350 \text{ cm}^2/\text{V/s}$ pour les électrons et $480 \text{ cm}^2/\text{V/s}$ pour les trous [12]. Aussi la durée de vie des porteurs est de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-3} s [12], elle dépend de la concentration des dopants.

Le produit $\mu.t$ pour le silicium amorphe hydrogéné est très petit par rapport à celui du silicium cristallin et joue un rôle très important dans les détecteurs basés sur la technologie TFA. Le détecteur fonctionne sous une haute tension inverse pour

obtenir une grande valeur du champ électrique interne. Cette dernière peut augmenter la vitesse de diffusion.

Quand la tension inverse est appliquée aux bornes de la jonction p-i-n en Si-a:H, une longue ionisation thermique des défauts profonds cause la formation d'un champ électrique stable dont le profil varie pendant un temps compris entre 10 et 600s [13].

Les électrons des défauts profonds excités sortent grâce au champ électrique interne et laissent derrière eux, une zone de charges positives. Dans une première approximation, la zone de charge déplétée de la jonction intrinsèque est déterminée par la densité des défauts ionisés N_{db}^* . L'état constant du profil du champ électrique peut être calculé à partir de l'équation de Poisson (équation 1). La tension inverse est liée à la longueur de déplétion d par l'équation 2. Pour un haut potentiel, N_{db}^* est supposé constant, donc le champ électrique diminue linéairement sur une distance x à partir de l'interface p-i (figure 5).

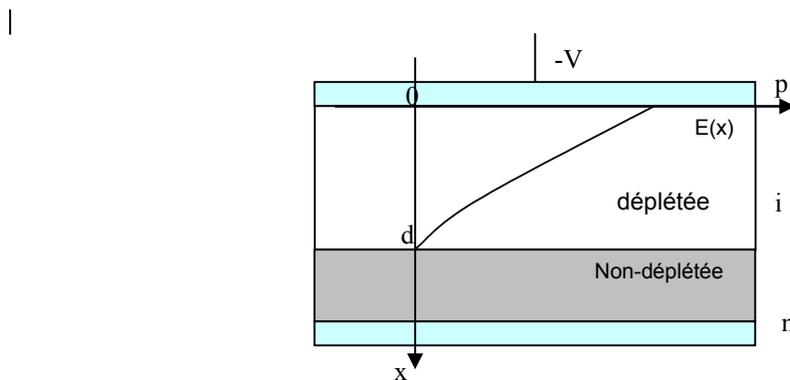


Figure 5 : Structure p-i-n en Si-a:H et le champ électrique $E(x)$ sur une longueur de déplétion d .

Pour une diode incomplètement déplétée, le champ électrique prend sa valeur maximale à l'interface p-i et on peut simplifier son expression par une fonction en racine carrée de la tension inverse appliquée, définie par l'équation 6 :

$$E(x) = \frac{-qN_{db}^*}{\epsilon_0 \epsilon_{Si a}} x + \sqrt{\frac{2qN_{db}^*}{\epsilon_0 \epsilon_{Si a}} \sqrt{V}} \quad (6)$$

Entre la déplétion complète et la région de base, pour une distance x jusqu'à d , N_{db}^* varie linéairement avec le champ électrique, il en résulte une forme

exponentielle de la diminution jusqu'à la valeur nulle du champ électrique [14]. Ce modèle de champ électrique est représenté dans la figure 6a. Il est basé sur la densité de charge définie par la concentration de défauts ionisés ainsi que par la densité des électrons et des trous (libres et piégés). Le champ électrique est calculé à partir de l'équation de Poisson et les équations basiques qui gouvernent les propriétés de transport d'un dispositif semi-conducteur, sont appelées équations de la densité et de la continuité du courant [15]. Le champ électrique a une forme linéaire pour les grandes valeurs de la tension et une forme exponentielle pour les faibles tensions (figure 6b).

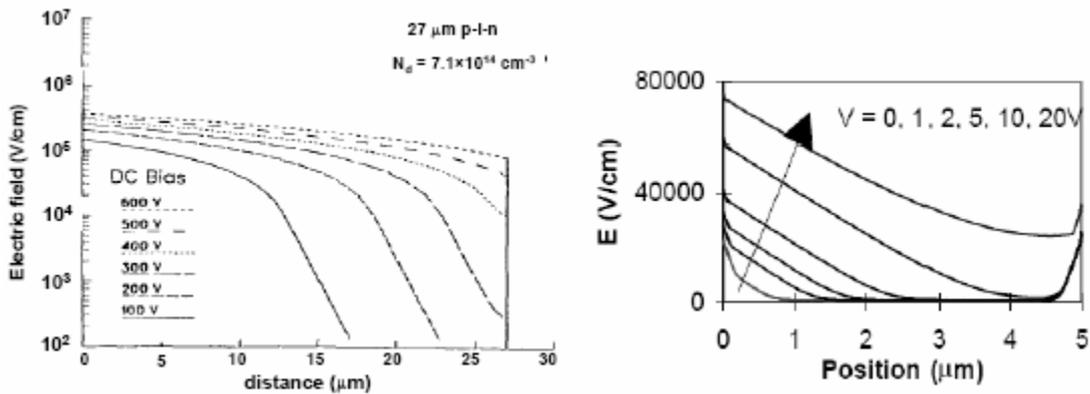


Figure 6 : (a) profil du champ électrique dans une diode p-i-n d'épaisseur de 27 μ m [14]. (b) le profil du champ électrique dans une diode p-i-n d'épaisseur de 27 μ m [16].

La valeur moyenne du champ électrique dans la région déplétée est par définition $E(x=0)/2$. Il correspond au rapport V/d (équation 4). Il est égale à 10^5 V/cm lorsque la tension appliquée vaut 200V sur une épaisseur de 20 μ m. Le temps de diffusion des électrons et des trous peut être estimé par division de l'épaisseur du détecteur, la mobilité des porteurs et la valeur moyenne de champ électrique.

Malgré le fait que la mobilité des porteurs de charges est faible dans le Si-a:H, la tension inverse élevée doit être appliquée, il en résulte un champ électrique interne élevé.

III. Modélisation du signal dans le détecteur TFA.

Les dispositifs de détection à semi-conducteurs sont généralement conçus à l'aide de jonctions p-n [17]. Ainsi, il peut être réalisé sous forme de couches n-i-p ou dispositif Shottky [18]. Les mécanismes nécessaires à la création du signal créé par l'interaction des rayonnements dans le détecteur sur Si-aH dépend principalement de deux facteurs : le profil de perte d'énergie dans le détecteur et l'énergie de création des paires électron-trou [19]. Le courant est induit dans l'électrode du détecteur après la création des paires électron-trou par l'interaction des photons dans le détecteur. Le signal dépend du mouvement des porteurs de charges libres dans la région déplétée [17]. Nous avons établi un modèle simple [20] pour calculer le courant induit par une paire électron-trou créée à la position x_0 dans un détecteur en Si-a:H de bonne qualité (Densité de matériau: $\rho \approx 2.15 \text{ g cm}^{-3}$, Densité des défauts : $N_{db} \approx 2 \times 10^{15}$, Constant diélectrique : $\epsilon_{\text{Si-a:H}} \approx 12$, Densité des défauts ionisés dans la couche intrinsèque -i : $N_{db}^* \approx 30\% \text{ de } N_{db}$, la mobilité du diffusion des électrons : $\mu_e = 1-10 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, la mobilité du diffusion des trous : $\mu_t = 0.01-1 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$) [17] incomplètement déplétée (figure 7).

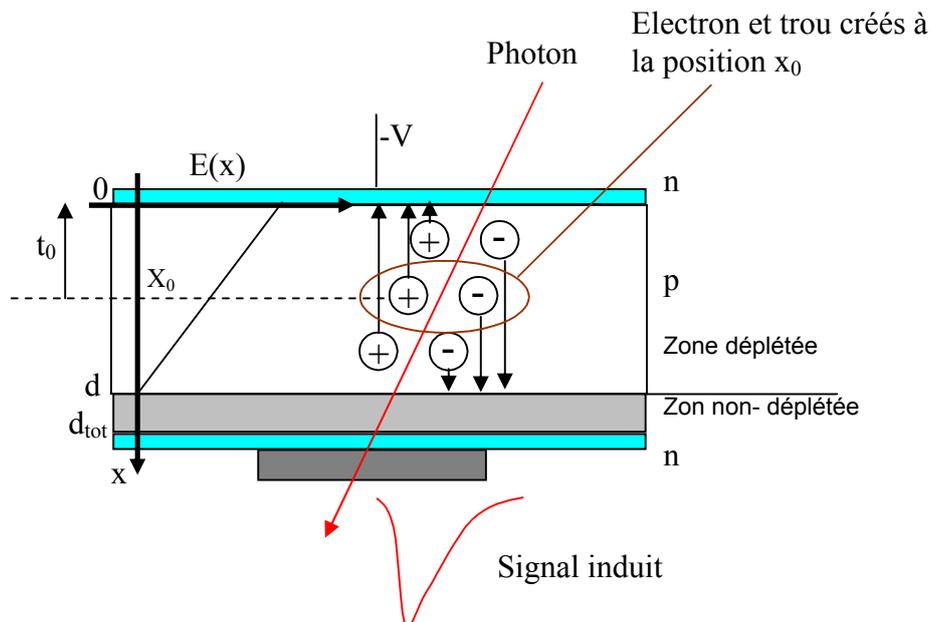


Figure 7 : Schéma d'une coupe d'un détecteur en Si-a :H. Les paires électron-trou sont générés à la position x_0 dans la région déplétée par le photon. Les électrons générés diffusent jusqu'à $x=d$ ($x=0$) puis ils sont collectés. Leurs mouvements déterminent l'amplitude du signal [20].

III. 1. Signal induit par les électrons.

Les électrons créés à la position x_0 sont accélérés par le champ électrique jusqu'à la région non déplétée. Leur position en fonction du temps, peut être calculée à partir de l'équation ci-dessous :

$$x(t) = d - (d - x) \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) \quad (7)$$

où d est l'épaisseur de déplétion et τ_c la constante de transit de l'électron (équation 8).

$$\tau_c = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{Si a}}{q \mu_a N_{ab}^*} \quad (8)$$

Le signal généré au niveau de l'électrode peut être calculé par l'utilisation du théorème de Scokly-Ramo étendu au cas des électrodes connectées à un élément résistive [21]. Le courant induit peut être exprimé par :

$$I(t) = -q N(t) V_{diff}(t) E_w \quad (9)$$

où $N(t)$ est le nombre de porteurs diffusés, q la charge élémentaire et E_w le champ de pondération. La haute résistivité de la zone non déplétée de la couche de Si-a:H intervient dans la génération du courant quand les charges se déplacent dans le champ électrique (figure 8). Le champ de pondération au fond de l'électrode peut être calculé en ne considérant qu'une simple configuration des plates parallèles du détecteur.

Le détecteur peut être représenté par deux zones : la zone déplétée et la zone non déplétée, avec les épaisseurs d et d' respectivement, les perméabilités relatives sont ϵ_{r1} et ϵ_{r2} pour chaque zone respectivement (figure 8).

La valeur de E_w est donnée par l'expression suivante [21]:

$$E_w = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2} d + \epsilon_{r1} d_2} \quad (10)$$

Les perméabilités relatives de la zone déplétée et de la zone non déplétée du Si-a:H intrinsèque sont égales, le potentiel de pondération est donc simplifié, il est réduit à $1/d+d'$,

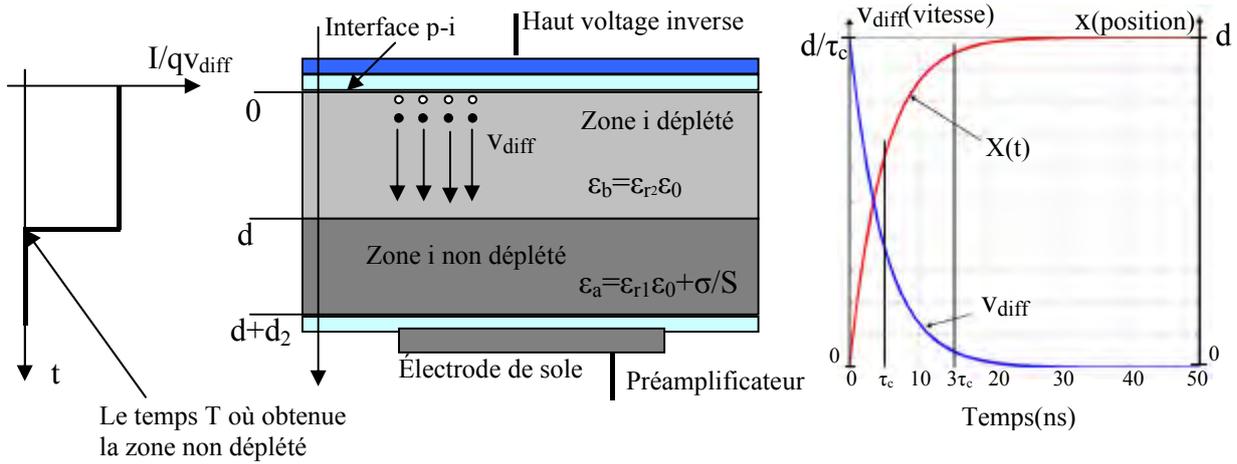


Figure 8 : de la gauche vers la droite : courant induit pour une zone non déplétée de haut résistivité ; géométrie représente le détecteur à silicium amorphe sous déplétion ; variation de position et de vitesse d'électron avec $\tau_c=5\text{ns}$ et on utilise l'équation 7 et sa dérivé.

La vitesse de diffusion de la charge en mouvement qN est obtenue par la dérivation de l'équation 7. Le potentiel de pondération peut être approximé par $1/d_{tot}$ (d_{tot} étant l'épaisseur de la zone active i).

Le courant induit sur le haut de l'électrode peut donc être exprimé par :

$$I(t) = \frac{-qN}{d_{tot}} (d - x_0) \frac{1}{\tau_c} \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) \tag{11}$$

Le signal induit par 10^6 électrons créés à la position x_0 pour une épaisseur du détecteur de $25\mu\text{m}$ pour une tension de polarisation inverse de 282V est simulé. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 9 pour différentes positions x_0 .

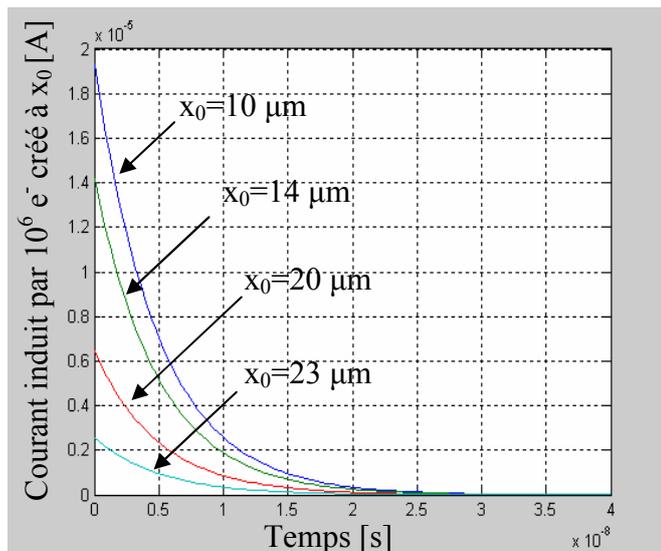


Figure 9 : Courant absolu généré par $10^6 e^-$ créés à la position x_0 de la région déplétée du détecteur, pour une diode d'épaisseur $25\mu\text{m}$ et une polarisation inverse de 282V [20].

La charge totale Q_e induite par N électrons créés à la position x_0 peut donc être calculée par intégration de l'équation 11. Pour un temps $t > 3\tau_c$:

$$Q_e = \frac{qN}{d_{tot}}(d - x_0) \quad (12)$$

La charge totale dépend de la longueur de diffusion totale des électrons. Cette relation est illustrée par la simulation présentée dans la figure 4. La charge totale Q_e est intégrée pendant 20 ns. Le signal induit par les électrons créés diminue linéairement avec l'augmentation de la longueur le long de laquelle les électrons sont créés.

Le signal induit par les trous à la position x_0 a également été étudié, mais son calcul est plus compliqué. La mobilité de diffusion des trous μ_d est dispersive et dépend du champ électrique, elle varie donc en fonction du temps et de la position à l'intérieur du détecteur.

Nous remarquons qu'au-delà la valeur de la charge créée à la position x_0 croît rapidement pour atteindre finalement un plateau. Plus la distance est grande et plus la charge collectée est faible et le plateau est atteint plus rapidement. En effet, les charges étant loin de l'électrode l'énergie nécessaire pour atteindre celle-ci sont grandes. De ce fait, la probabilité pour atteindre l'électrode devient faible.

Par ailleurs, nous constatons que plus l'épaisseur du détecteur est faible et plus la charge collectée diminue.

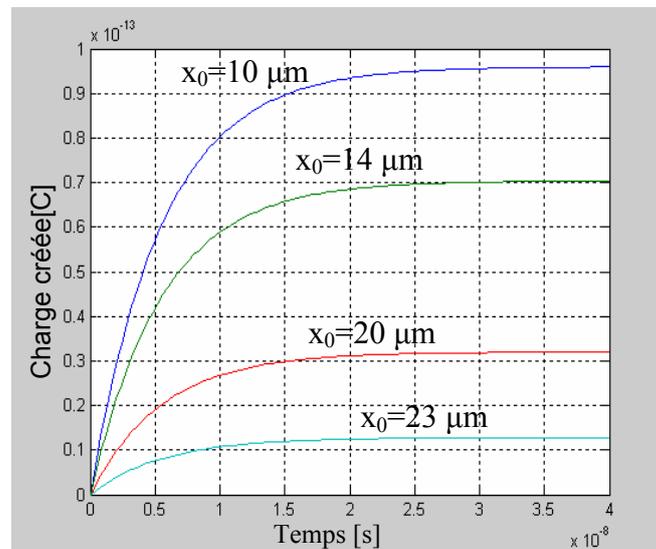


Figure 10 : Intégrale du signal représentant la charge totale collectée ($d_{tot}=25\mu\text{m}$, $N=10^6 e^-$, $v=282\text{V}$) [20].

III. 2. Signal induit par les trous.

L'expression définissant la mobilité de diffusion des trous est donnée par l'équation 13. Ses variations dépendent du temps et de l'intensité du champ électrique [22] :

$$\mu_d(t, x) = \alpha(1-\alpha)\mu_0\omega[E(x)]^{(\alpha-1)}t^{(\alpha-1)} \quad (13)$$

$$\omega[E(x)] = \omega_0 \exp\left[-\frac{E(x)}{E_0}\right] \quad (14)$$

où $E(x)$ est le champ électrique à la position x dans le détecteur (équation 7).

$$E(x) = \frac{qN_{ab}^*}{\epsilon_0 \epsilon_{Sia}}(d-x) \quad (15)$$

$\alpha=0.65$ à la température ambiante, $\mu_0 \sim 1 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, $\omega = 10^{11} - 10^{12} \text{ s}^{-1}$ et $E_0 \sim 5.7 \cdot 10^4 \text{ V/cm}$ [22]. Le calcul direct tel qu'il a été développé pour les électrons ne peut pas être fait dans ce cas. Cependant, le calcul de la position et du temps peut être développé à partir des relations suivantes :

$$dt = -\frac{dx}{\mu_d(t, E(x))E(x)} \quad (16)$$

$$\int_0^t \alpha(1-\alpha)\mu_0 t^{(\alpha-1)} dt = \int_{x_0}^x \frac{-1}{E(x)[\alpha(E(x))]^{(\alpha-1)}} dx \quad (17)$$

La relation de base (équation 6) est négative du fait que le champ électrique et l'axe des abscisses sont en directions inverses (figure 1), mais l'intégrale de droite de l'équation 19 ne peut pas être exprimée dans une forme simple. Le calcul a été développé par l'utilisation de l'intégrale d'une fonction exponentielle :

$$E_i = \int_Z^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{x} dx \quad (18)$$

L'expression temporelle de la position $x(t)$ ne peut pas être obtenue analytiquement comme il a été fait pour le cas des électrons, mais le temps $t(x)$ nécessaire pour atteindre la position x peut être formulé à partir de la résolution de l'équation 19. De ce fait,

$$t(x) = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\mu_0\omega_0^{(\alpha-1)}} \frac{\epsilon_0 \epsilon_{Sia}}{qN_{ab}^*} \left[E_i \left[\frac{qN_{ab}^*(1-\alpha)}{E_0 \epsilon_0 \epsilon_{Sia}}(d-x) \right] - E_i \left[\frac{qN_{ab}^*(1-\alpha)}{E_0 \epsilon_0 \epsilon_{Sia}}(d-x_0) \right] \right] \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (19)$$

$t(0)$ définit le temps nécessaire à la diffusion complète des trous à la position x_0 , si bien sûr les porteurs ne subissent aucune recombinaison. Ce temps de diffusion peut

être calculé analytiquement à partir de l'équation 19 ($t=0$). La vitesse de diffusion peut être considérée comme fonction de x à partir de cette même équation ($v_{diff}(x)=I/t'(x)$). Les variations de la vitesse dans le temps $v_{diff}(t)$ peut être représentée numériquement par une courbe paramétrique de $v_{diff}(x)$. La fonction globale prend en compte le fait que les trous diffusés à la position $x=0$ sont aussi collectés. Le courant induit à l'électrode par N trous créés à la position x_0 est donné :

$$I(t) = -\frac{qN}{d_{tot}} v_{diff}(t) \quad (20)$$

Les différentes équations permettent la simulation du signal induit par le mouvement des trous. La simulation du signal créé par 10^6 trous générés à la position x_0 pour une épaisseur du détecteur de $25\mu\text{m}$ et pour un potentiel inverses de 282V est présentée dans la figure 11.

Le courant induit présente un pic bien aiguisé dans les premières nano-secondes. Ce signal correspond à une haute mobilité de diffusion des trous (proche de μ_0) juste après leurs créations. Le mouvement des trous est donc caractérisé par la diminution de la mobilité avec le temps, mais augmente avec le champ électrique, et par une augmentation de champ électrique le long du chemin de diffusion du trou.

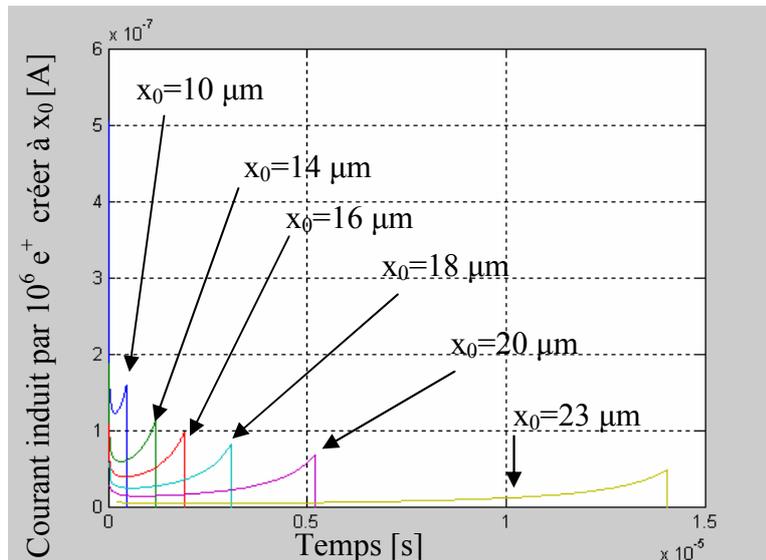


Figure 11 : Courant induit par $10^6 e^+$ créés à la position x_0 dans la région déplétée du détecteur, pour une diode d'épaisseur de $25\mu\text{m}$, une polarisation inverse de 282V et pour différentes valeurs de x_0 [20].

Ces figures montrent d'abord une diminution puis une augmentation du signal et une brusque diminution de celui-ci. Cette transition brusque observée à $t=t_0$ est due à la collecte des trous dans la couche p^+ .

La charge totale créée par N trous générés à la position x_0 , peut être calculée par intégration de l'équation 20. S'il n'y a aucun piégeage ou recombinaison, les trous diffusent et la charge totale qu'ils induisent Q_t et la charge totale Q_{signal} collectées après un temps $t > t_0$ sont données par :

$$Q_t = \frac{qNx_0}{d_{tot}} \quad (21)$$

$$Q_{Signal} = Q_e + Q_t = \frac{qNd}{d_{tot}} \quad (22)$$

La charge créée par le mouvement des trous est représentée dans la figure 12. Elle est obtenue par intégration du courant induit que nous avons simulé (figure 11). La charge au temps t_0 (qui correspond à la fin de la courbe 6) est en accord avec l'équation 13. Cette relation n'est vraie que pour $t > t_0$ et pour $t < t_p$, t_p est le temps de piégeage. Cependant, comme observé dans la figure 10, le temps de diffusion des trous t_0 devient très long quand la distance de diffusion augmente, $t_0 > 5.5 \mu s$ pour $x_0 > 20 \mu m$ (figure 11).

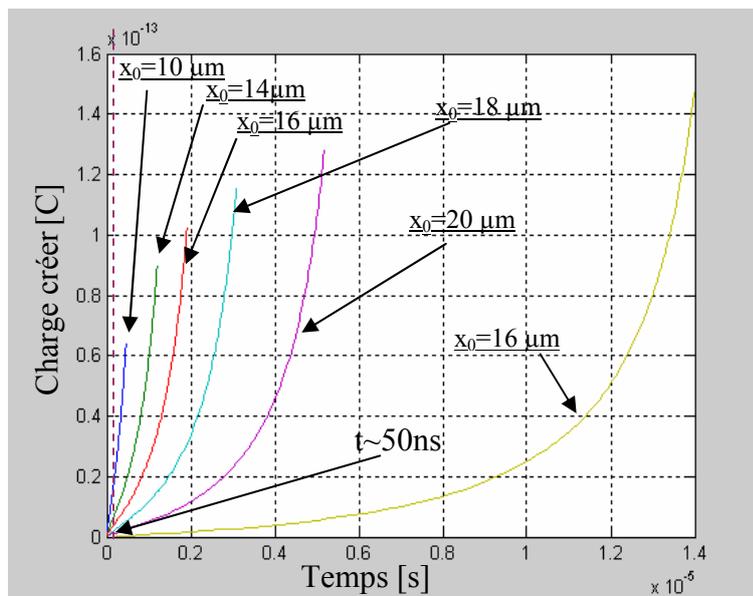


Figure 12 : Variations de la charge totale collectée en fonction du temps ($d_{tot}=25\mu m$, $N=10^6 e^-$, $v=282V$) [20].

De ce fait, les préamplificateurs intégrés aux détecteurs TFA doivent avoir un temps de formation $t_f < 50\text{ns}$ pour pouvoir avoir une large gamme de détection. Ce temps de résolution de l'électronique de lecture est inférieur au temps de diffusion des trous t_0 , et au temps de piégeage τ_p . En absence de piégeage des trous, le signal créé par ces derniers pendant ce faible temps t_f ne constitue qu'une petite partie du courant créé par les trous pendant ce temps. Le signal créé par les trous pendant le temps t_f est équivalent à la charge qui peut être exprimée par : $Q_{ieff} = (qN/d_{tot})(x_0 - x(t_f))$.

Lorsque les trous se déplacent pendant 50ns, ils parcourent une distance moyenne $(x_0 - x(50\text{ns}))$ égale à $0.3\mu\text{m}$ (création à la position $x \sim 23\mu\text{m}$ dans un détecteur d'épaisseur de $25\mu\text{m}$ avec un potentiel inverse de 282V). L'amplitude du signal dépend du champ électrique à la position x_0 , elle diminue quand x_0 augmente. La charge Q_{ieff} créée par les trous diminue donc par augmentation de x_0 pour un bas temps de formation. Ce comportement est représenté par les courbes de la figure 6. Le courant induit et la charge totale subissent une diminution par augmentation de x_0 .

Ces propriétés limitent la sensibilité des détecteurs TFA puisque seule une petite partie du signal créé par les trous contribue au signal total amplifié par l'électronique de lecture pour un temps de formation inférieur à 50 ns. Dans de telles conditions, la forte contribution des trous dépend du champ interne du détecteur. Pour un temps de formation infini, le rapport Q_e/Q_t est égal à $(d-x_0)/x_0$ (figures 10 et 12). Cependant, pour un temps de formation de 50 ns, ce rapport augmente avec x_0 (~ 6 pour $x_0 = 10\mu\text{m}$, ~ 10 pour $x_0 = 14\mu\text{m}$ et ~ 16 pour $x_0 = 20\mu\text{m}$, $d_{tot} = 25\mu\text{m}$). Le rapport est donc définie par $(d-x_0)/(x_0 - x(t_f))$.

Ce modèle de signal créé par les trous est basé sur l'hypothèse de la forte variation de la mobilité avec le champ électrique. La charge totale amplifiée pendant le temps de formation par l'électronique de lecture, est attribuée à la génération des trous par les photons incidents. Elle dépend ainsi fortement du potentiel inverse appliqué au détecteur et du temps de formation. Il est à noter que la simulation a été réalisée en utilisant des valeurs standards de μ_0 , ω_0 et E_0 . Cependant, la forte variation de ces paramètres a un impact sur le temps et la vitesse de diffusion des trous et induit une variation de la charge et du temps de formation t_f . Le modèle

présenté peut donc décrire les bases et les mécanismes de formation du signal. Néanmoins, une prévision exacte de la charge de sortie est difficile à obtenir.

Le signal induit par N paires électron-trou créées à la position x_0 est donc défini par :

- La charge Q_e induite par les électrons :

Elle dépend de l'épaisseur de déplétion (qui dépend de N_{ab}^* et du potentiel inverse appliqué) et de la position x_0 . Pour $t_f \gg \sim 20$ ns, $Q_e = (qN/d_{tot})(d-x_0)$, et le maximum de signal est obtenu pour une déplétion complète du détecteur.

- La charge Q_t induite par les trous :

Pour un temps de formation inférieur au temps de formation du signal de l'électronique de lecture (<50 ns), en absence de piégeage des trous, seule une partie du signal induit est amplifiée à cause du mouvement lent des trous : $Q_t = (qN/d_{tot})(x_0 - x(t_f))$. Le signal créé dépend de la vitesse des trous et du temps de formation du signal de préamplificateur. La mobilité et la vitesse des trous dépendent étroitement du champ électrique. Le signal maximum est obtenu pour une tension inverse maximale appliquée au détecteur.

La charge totale Q collectée par l'électrode d'un détecteur TFA, induite par l'interaction avec des radiations électromagnétiques, peut être calculée par :

$$Q = \int_0^d \frac{\left[\frac{dE}{dx} \right]^{x_0}}{w} (Q_e(x_0) + Q_t(x_0)) dx_0 \quad (23)$$

où $[dE/dx]^{x_0}/w$ est le nombre de paires créées à la position x_0 dans le détecteur. $Q_e(x_0)$ et $Q_t(x_0)$ correspondent respectivement à la charge créée par un électron et par un trou à la position x_0 dans le détecteur. L'intégration de $x_0=0$ jusqu'à $x_0=d$ (épaisseur de déplétion) permet donc de calculer la charge totale collectée par les électrodes du détecteur.

La détection des radiations électromagnétiques par un détecteur TFA a été caractérisée et les mécanismes nécessaires à la création du signal ont été étudiés dans le but de mieux comprendre les performances et les limites du détecteur TFA.

Le signal créé par l'interaction des radiations dans le détecteur de Si-aH dépend en premier, du profil de perte d'énergie dans le détecteur et de l'énergie moyenne de création des paires. Il dépend donc de la distribution des paires électron-trou dans le détecteur. La charge totale collectée est égale à la somme des charges créées par le mouvement des électrons et de celui des trous. Pour un temps de formation du signal de préamplificateur de quelques nano-secondes, la charge induite par les électrons est collectée entièrement. Cependant, seule une partie de la charge créée par les trous est intégrée, et ce à cause du transport lent de ces derniers, ce qui constitue une limite importante pour ce type de détecteur.

Les résultats de simulation que nous avons obtenus ainsi que l'approche théorique qui a permis d'y aboutir, montrent que les détecteurs épais peuvent offrir une détection optimisée. En effet, le signal induit par les électrons est maximum pour une déplétion complète du détecteur et celui induit par les trous, pour un temps de formation de l'électronique de lecture très court, est maximum pour une tension de polarisation inverse maximum. La basse mobilité des trous est étroitement liée à l'intensité du champ électrique. De ce fait, l'utilisation des détecteurs épais améliore l'efficacité de détection par augmentation du volume utile et permet également d'appliquer une tension inverse élevée, ce qui augmente le signal induit par les trous.

Référence bibliographique.

- [1] M Despiesse, G Aneli, S Cpmichau et al, (2004), "Characterization of 13 μm thick hydrogenated amorphous silicon diodes deposited over CMOS integrated circuits for particle detection application", (Nuclear instruments and methods in physics research A), vol. 518, N°1-2, pp. 357-361.
- [2] Clément Miazza, (2005), "DÉVELOPPEMENT DE PHOTODÉTECTEURS MONOLITHIQUES PAR INTÉGRATION VERTICALE DE COUCHES DE SILICIUM AMORPHE HYDROGÉNÉ ", Thèse de docteur ès sciences, Université de Neuchâtel.
- [3] SEDKY S., WITVROUW A., BENDER H., et al, (2001), "Experimental Determination of the maximum post-process annealing temperature for standard CMOS wafer", IEEE Transaction on electron devices, vol. 48, n° 2, pp. 377-385.
- [4] FISCHER H., SCHULTE J., GIEHL J., et al, (1992), "Thin Film on ASIC-A novel concept for intelligent image sensors", Material research society symposium proceedings, vol. 285, pp. 1139-1145.
- [5] SCHNEIDER B., RIEVE P., BOHM M., (1999), "Image sensor in TFA (Thin Film on Asic) technology", Handbook of Computer Vision and application, vol. 1, pp. 237-270.
- [6] SROUR J.R., VENDURA G.J., LO D.H., et al., (1998), "Damage Mechanisms in radiation-tolerant Amorphous Silicon Solar", IEEE Transaction on nuclear science, vol. 45, n° 6, pp. 2624.
- [7] KISHIMOTO N., AMEKURA H., KONO K., et al, (1998), "Stable photoconductivity in metastable a-Si: H under high-energy proton irradiation", Journal of non-crystalline solids, vol. 227-230, pp. 238-242.
- [8] KUNDIG J., (2003), "Cellules solaires en couches minces de silicium: Résistance aux radiations et applications spatiales", Thèse sciences et techniques de l'ingénieur Microtechnique, n° 2874, Lausanne : Ecole Polytechnique Fédérale de lausanne, pp. 121.
- [9] FISCHBACH F., FREUND T., PECH M, et al, (2003), "Comparison of indirect CsI/a:Si direct a:e digital radiography", Act Radiologica, vol. 44, pp. 616-621.
- [10] J-H .Zhou, (1994), "Estimation of the Mobility-Lifetime products in Amorphous Silicon in the Presence of Dispersive Transport", Journal of Applied Physics Vol. 33, pp. 1655-1658.
- [11] HONG W.S., MIRESHGI A., DEWERY J.S, et al, (1995), "Charged particle Detectors based on high quality amorphous silicon deposited with hydrogen or helium dilution of Silane " , IEEE Transaction on nuclear science, vol. 42, n°4, pp. 240-246.
- [12] SZE S.M, (1981), "Physics of Semiconductor Devices", 2nd edition, New York: John Wiley & Sons, pp. 564.
- [13] DUBEAU J., POCHET T., HAMEL L.A., et al, (1991), "Response of amorphous p-i-n detectors to ionizing particles ", Nuclear instrumentation and method in physics research B, vol. 54, pp. 458-471.
- [14] QURESHI S., PEREZ-MENDEZ V., KAPLAN S.N., et al, (1989), "Signal generation in a hydrogenated amorphous silicon detector", IEEE Transaction on nuclear science, vol. 36, n°1, pp. 194-198.
- [15] FISCHER D, (1994), "Electric Field and photocarrier collection in amorphous silicon p-i-n solar cells, effects of light-induced degradation and low-level i-layer doping", Thèse Microtechnique, Neuchatel, Suisse: Université de Neuchatel, pp. 131.
- [16] CHABLOZ P, (1996), "Les couches épaisses en silicium amorphe, application comme détecteur

de rayons X", Thèse Microtechnique n° 1485, Lausanne, Suisse : Ecole Polytechnique Fédérale de lausanne, pp. 88.

- [17] LUTZ G, (1999), "Semiconductor Radiation Detectors", (Berlin: Springer-Verlag), 378 p.
- [18] Sen-Shyong Fann, Yen-Long Jiang, and Huey-Liang Hawang Fellow, (2003), "Operation of a Novel A-Si:H P-I-N Based X-Ray Detector for Medical Image Applications", IEEE Transactions on Electron Devices, Vol. 50, No. 2, February.
- [19] M. Despeisse, D. Moraes, G. Anelli, et al., (2005), "Hydrogenated Amorphous Silicon Sensors based on Thin Film on ASIC technology", IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record , N35-55 , pp.1389- 1394.
- [20] A. Saouli et K. Mansour, (2011) "Modelling of detector radiations response p-i-n in technology Thin Film on ASIC (TFA) intended for digitalization in medical imagery", Advanced Materials Research, vol. 227, pp. 125-128.
- [21] RIEGLER W, (2004), " Extended theorems for signal induction in particle detectors VCI", Nuclear instruments and method in physics research A, vol. 535, pp. 287-293.
- [22] SCHIFF E.A, (2004), "Drift-mobility measurements and mobility edges in disordered silicon's". Journal of physics: condensed matter, vol. 16, pp. S5256-S5275.

Chapitre V.

Résultats et discussion

Chapitre V.

Résultats et discussion.

I. Résolution du problème direct

La qualité de l'image reconstruite dépend fortement de l'exactitude du problème direct [1]. Cette partie est justement consacrée à cette question et porte notamment sur le programme en Matlab, qui est basé sur la méthode des éléments finis (MEF) et développé pour la résolution du problème direct. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par le logiciel professionnel Comsol multiphysics. En effet, notre idée est basée sur la simulation de ce problème pour trois sources dans le proche de l'infrarouge, différentes en fréquence mais ayant la même amplitude. Cette simulation a été réalisée grâce à un objet test à deux dimensions dont les propriétés optiques sont équivalentes à celles du tissu biologique.

I. 1. Composition de l'objet test.

L'objet test utilisé dans notre travail, a une géométrie cylindrique et contient trois hétérogénéités de propriétés optiques (μ_a : coefficient d'absorption et μ_s' : coefficient de diffusion réduit) différentes entre elles et différentes de celles de l'objet test dont l'indice de réfraction est de 1,54 (figure 1).

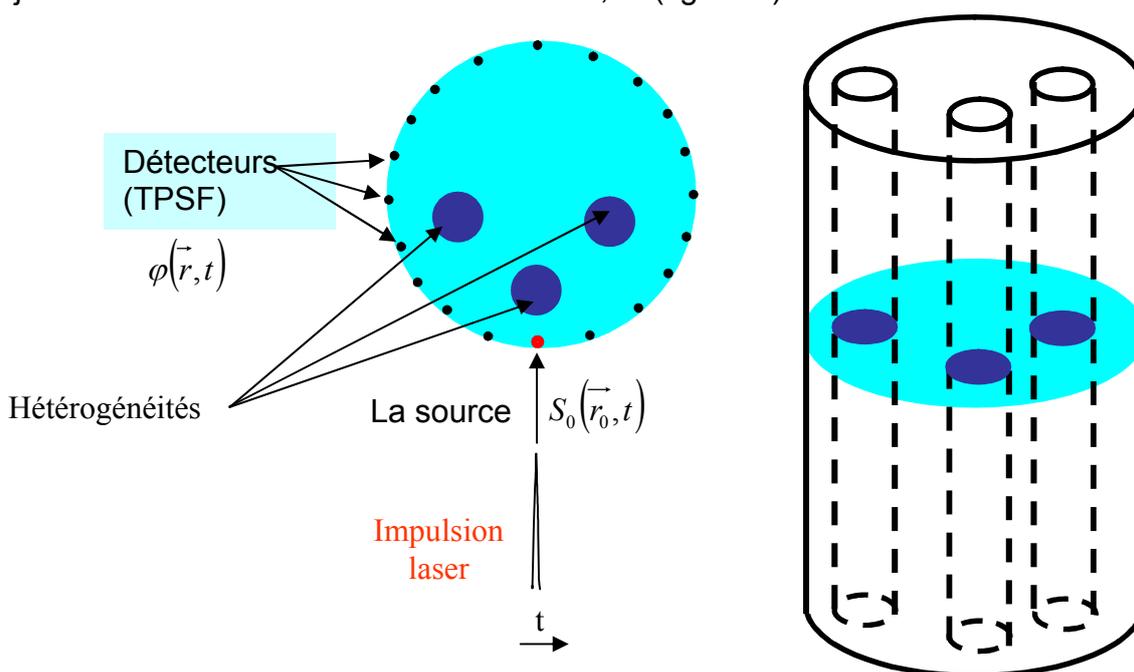


Figure 1 : À droite l'objet test, à gauche Coupe à deux dimensions de l'objet test.

Ces hétérogénéités jouent le rôle de tumeurs dans un tissu biologique (figure 1). La simulation est basée sur une coupe perpendiculaire de l'objet test qui a une forme circulaire. Le positionnement de la source et des détecteurs est présenté dans la figure 1. La cartographie optique de l'objet test est présentée dans la figure 2.

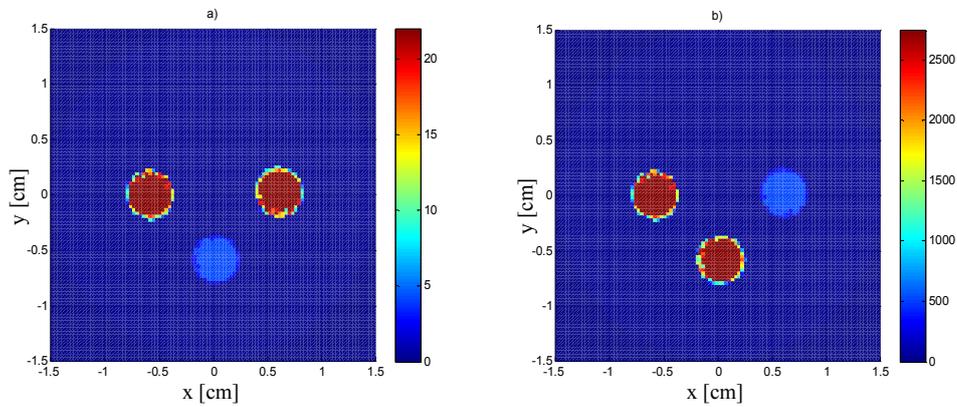


Figure 2 : (a) Coefficient d'absorption μ_a , (b) Coefficient de diffusion réduit μ'_s .

I. 2. Paramètres de la simulation.

Dans une modélisation structurale, la discrétisation de l'objet étudié est la plus importante pour résoudre un problème. La figure 3a présente le maillage utilisé pour la résolution du problème à l'aide de la méthode des éléments finis étudiée dans le chapitre III. Les sept détecteurs sont positionnés sur la frontière de l'objet test et sont équidistants (figure 3b).

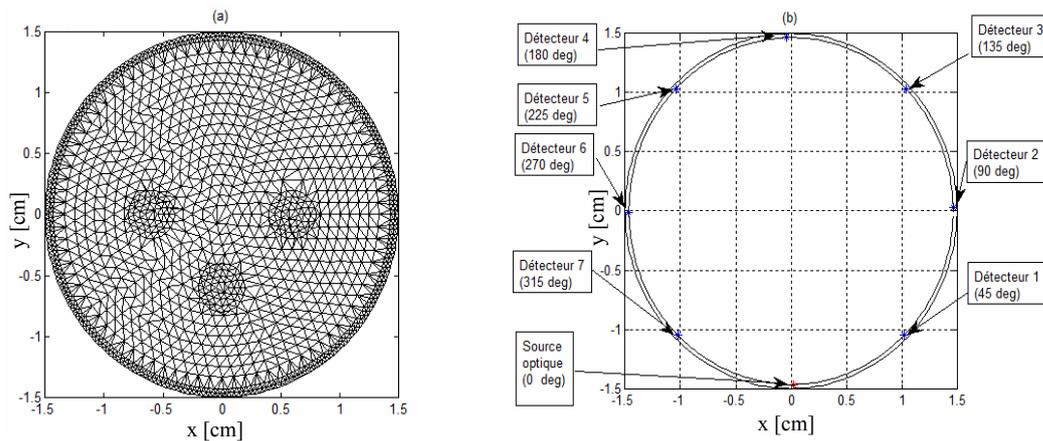


Figure 3 : (a) Maillage de l'objet test en 2 D (1526 noeuds, 2814 éléments). (b) Positionnement source détecteurs.

Les trois sources utilisées dans la simulation sont présentées par leur profil temporel, dont les formes sont des impulsions avec une largeur temporelle (LT) pour chaque source (source 1 : $LT_1=0.65 \cdot 10^{-9}$ s, source 2 : $LT_2=1.4 \cdot 10^{-9}$ s, source 3 : $LT_3=$

$21 \cdot 10^{-9}$ s) (Figures 4a₁, 4b₁ et 4c₁). Les spectres des sources sont présentés dans les figures 4a₂, 4b₂ et 4c₂. On peut observer que le profil spectral présente deux pics, le pic de droite est une image de celui de gauche. Cet effet miroir est dû au prélèvement des signaux d'impulsion, qui créent toujours un spectre image autour de la fréquence de prélèvement. Donc pour chaque source on peut distinguer sa propre fréquence (f) (Source1 : $f_1=1.48$ [THz], Source2 : $f_2=0.5$ [THz], Source3 : $f_3=50$ [GHz]) .

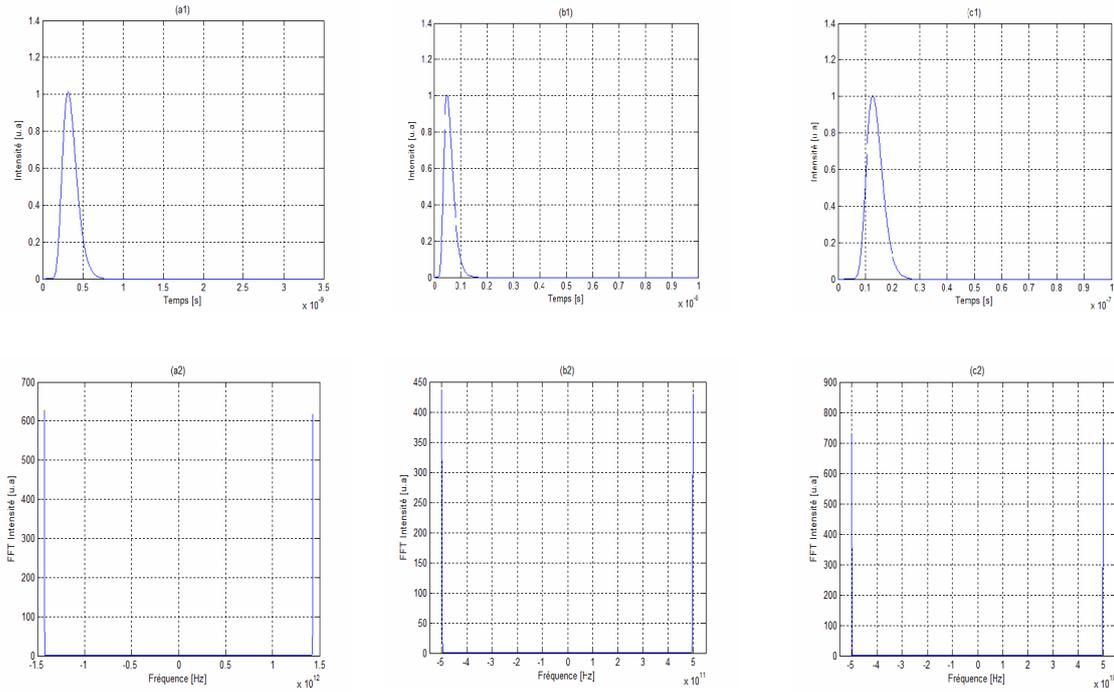


Figure 4 : (a₁) Source 1, (a₂) FFT Source 1, (b₁) Source 2, (b₂) FFT Source 2. (c₁) Source 3, (c₂) FFT Source 3.

Finalement, on utilise les conditions aux limites de Dirichlet et Robin présentées dans l'équation 1 (DBC) et l'équation 2 (RBC) respectivement.

$$\varphi(\vec{r}, t) = 0 \quad (1)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) + 2 \frac{1}{3(\mu_a + \mu_s)} \frac{1+R}{1-R} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

où n est le vecteur normal et ($R = 0$) le paramètre de réflexion.

I. 3. Résultats et discussion.

En tomographie optique proche infrarouge diffusée en temps, la reconstruction de l'image est basée sur la combinaison entre le signal mesuré et simulé à la frontière de l'objet étudié d'une TPSF (Time Pulse Spread Function) résultante de la propagation d'une impulsion lumineuse dans le proche infrarouge. La simulation de ce signal est donc le but final de la résolution du problème direct afin de l'utiliser dans la reconstruction de l'image optique proche infrarouge. Les profils temporels des TPSFs détectées pour les trois sources sont présentés dans la figure 5. Ces courbes confirment la validité de notre approche par rapport à la réalité physique. En effet, on constate que chaque TPSF détectée pour les détecteurs à droite de la source est symétrique d'une TPSF obtenue pour un des détecteurs se trouvant à gauche de la source (détecteur 1 avec détecteur 7, détecteur 2 avec détecteur 6, détecteur 3 avec détecteur 5) avec une petite variation d'amplitude.

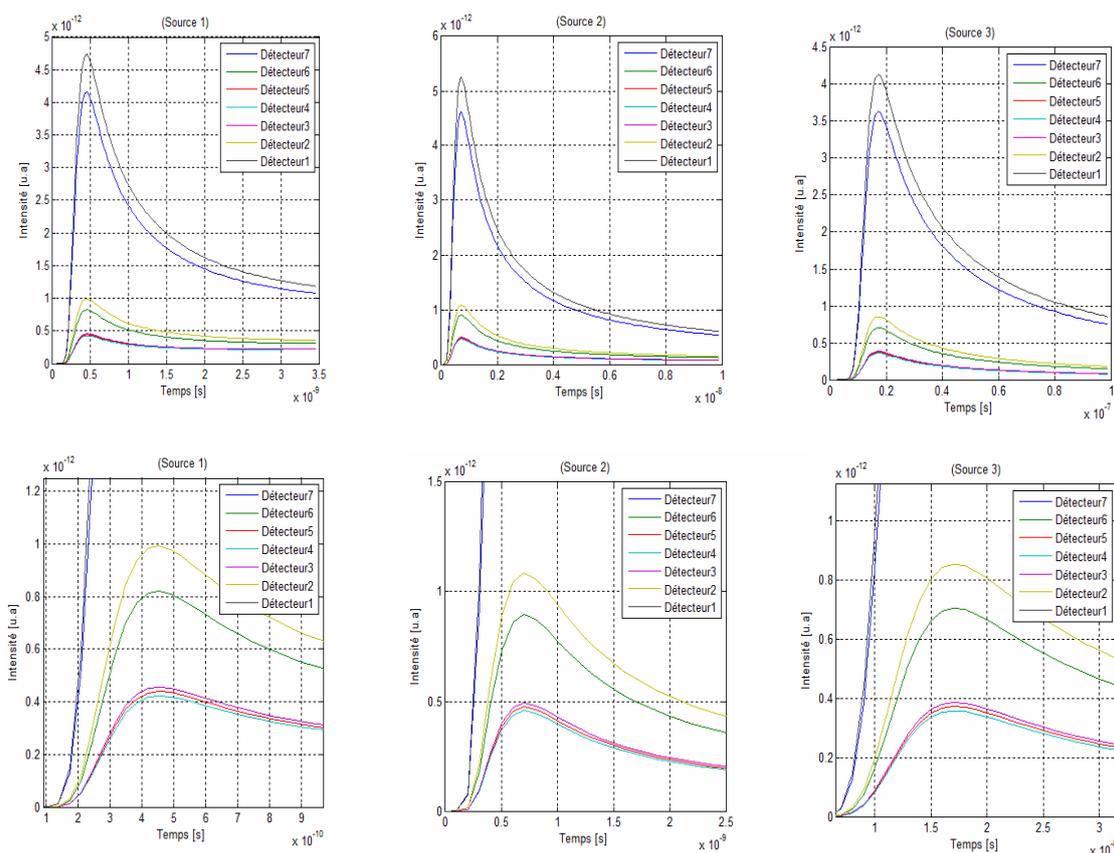


Figure 5 : En haut - Profil temporel des TPSFs détectées pour les trois sources.
En bas - Zoom de profil temporel des TPSFs détectées pour les trois sources.

On peut aussi voir que l'amplitude des TPFS à gauche, est plus faible que celles des TPFS de droite. Cette diminution est due à la présence des

hétérogénéités. Les hétérogénéités se trouvant à droite et à gauche de la source (Figure 2) ont le même coefficient d'absorption ($\mu_a = 0.022 \cdot 10^3 \text{ [m}^{-1}\text{]}$), mais ont des coefficients de diffusion réduits différents (droite : $\mu_s' = 0.55 \cdot 10^3 \text{ [m}^{-1}\text{]}$, gauche : $\mu_s' = 2.75 \cdot 10^3 \text{ [m}^{-1}\text{]}$). Par conséquent, le signal propagé à gauche est plus diffusé que celui de droite, ce qui signifie que les pertes d'intensité dans la direction gauche sont plus importantes que dans la direction droite. C'est ce qui justifie la diminution de l'intensité entre chaque deux TPSFs symétriques (détecteur 1 avec détecteur 7, détecteur 2 avec détecteur 6, détecteur 3 avec détecteur 5).

Dans le domaine de la reconstruction d'image optique dans le proche infrarouge, la comparaison entre les TPSFs mesurées et simulées est basée sur plusieurs algorithmes, l'un des plus importants d'entre eux est basé sur la superposition des TPSFs mesurées et simulées. Dans ce cas, le temps de calcul est plus important par rapport aux autres algorithmes qui utilisent la comparaison par valeur moyenne (équation 3), temps moyen (équation 4) ou variance des (équation 5) TPSFs.

$$E_{n,m} = \sum_t \varphi_{n,m}(t) \quad (3)$$

$$\langle t \rangle_{n,m} = \frac{\sum_t t \varphi_{n,m}(t)}{E_{n,m}} \quad (4)$$

$$C_{n,m} = \frac{\sum_t (t - \langle t \rangle_{n,m})^2 \varphi_{n,m}(t)}{E_{n,m}} \quad (5)$$

C'est pour cette raison que nous présentons les différents profils de temps moyen, valeur moyenne ou variance des TPSFs simulées pour les trois sources. Pour le temps moyen (figure 6), on remarque que quand la largeur temporel (LT) des sources augmente ou (leur fréquence (f) diminue), le temps moyen des TPSFs augmente. Ce phénomène est justifié par la diminution de l'énergie du signal source avec la diminution de la fréquence, puisque plus l'énergie du signal est grande, plus le temps de propagation est diminué. En d'autres termes, on remarque que pour chaque source, la forme du temps moyen est symétrique sur l'axe 180° . Cette symétrie est due à la symétrie entre les positions des détecteurs, ceux de droite et ceux de gauche.

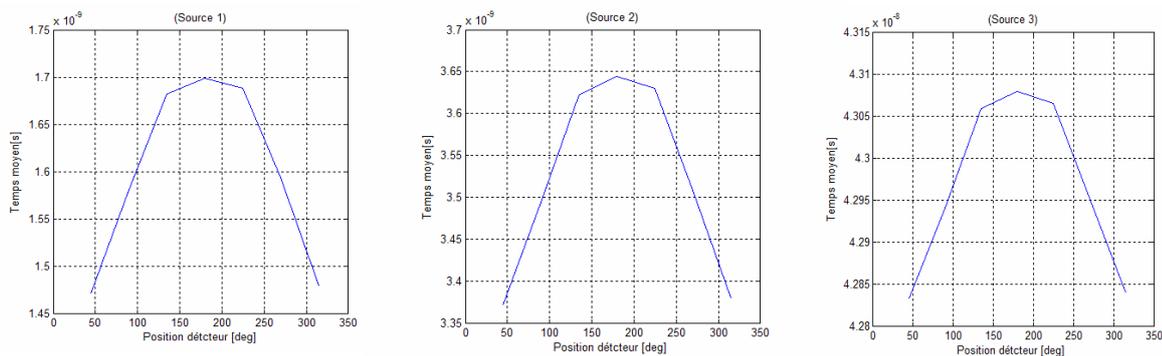


Figure 6 : Variation du temps moyen des TPSFs détectées en fonction de l'angle de détection [3].

Aussi, les valeurs du temps moyen entre 180° et 360° sont plus grandes que celles se situant à 0 et 180° . Cette différence est due à l'existence des hétérogénéités, puisque la plus diffusante d'entre elles est située sur la partie gauche de l'objet et l'existence d'une région plus diffusante provoquera un élargissement de la TPSF. Les photons seront plus diffusés, ils parcourent donc un chemin plus long avant de sortir et prennent plus de temps pour arriver aux détecteurs. La figure 7 met en évidence les variations de la valeur moyenne des TPSFs détectées en fonction de l'angle de détection. On remarque que pour les trois sources, la valeur moyenne est plus grande du côté droit que du côté gauche de l'objet test. Cette différence est due aux caractéristiques de l'hétérogénéité gauche qui est plus diffusante que celle de droite. La perte de signal du côté gauche est plus grande que celle de droite. Par ailleurs, on remarque que la valeur moyenne pour la source 1 est plus grande que pour la source 3, qui elle même est plus grande pour la source 2.

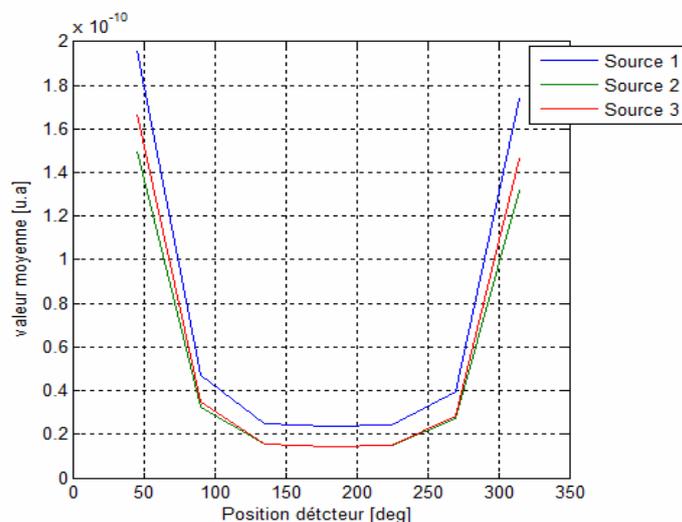


Figure 7 : Variations de la valeur moyenne des TPSFs détectées en fonction de l'angle de détection [3].

La figure 8 montre les variations de la variance des TPSFs détectées en fonction de l'angle de détection pour les trois sources. On remarque que la variance diminue avec la fréquence des sources. On remarque également que lorsque la fréquence diminue, la différence de la valeur de la variance d'un détecteur et celle de son proche voisin, augmente.

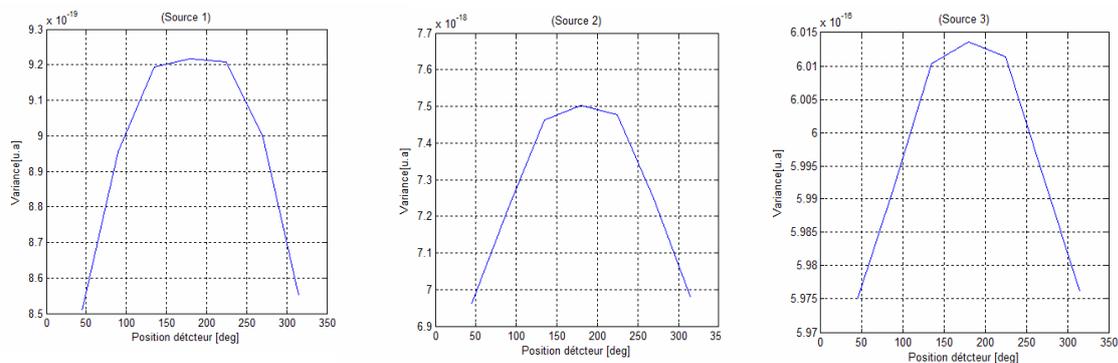


Figure 8 : Variations de la variance des TPSFs détecteurs en fonction de l'angle de détection.

Enfin, pour étudier l'influence des sources en chaque point de notre structure, on présente la cartographie de la valeur moyenne, du temps moyen et de la variance des TPSFs des trois sources (Figures 9, 10 et 11). En effet, si on compare les résultats obtenus, on remarque qu'avec la cartographie de temps moyen on peut distinguer la composition de notre objet test où les hétérogénéités sont bien claires pour les sources 1 et 2 (Figures 9b et 10b), mais la clarté de la source 1 est optimale. Pour la variance, on trouve que le niveau de clarté diminue de la source 1 à la source 2 et de la source 2 à la source 3 (Figure 9c, 10c et 11c). En ce qui concerne la valeur moyenne, on remarque qu'il n'y a presque aucune différence entre les trois sources (Figure 9a, 10a et 11a). Aussi, on peut donc conclure que d'une part la source 1 est la meilleure des trois sources pour faire la reconstruction de l'image, et que d'autre part on peut classer les paramètres de la reconstruction de la manière suivante : temps moyen, variance puis valeur moyenne selon la qualité cartographique de chaque paramètre.

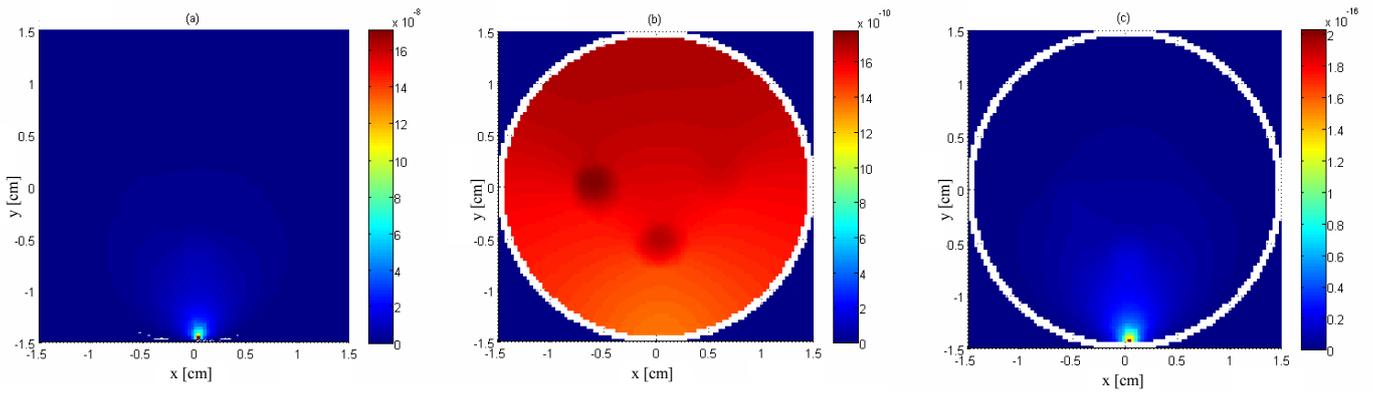


Figure 9 : Cartographie de (a) valeur moyenne, (b) temps moyen, (c) variance des TPSFs détectées de la source 1.

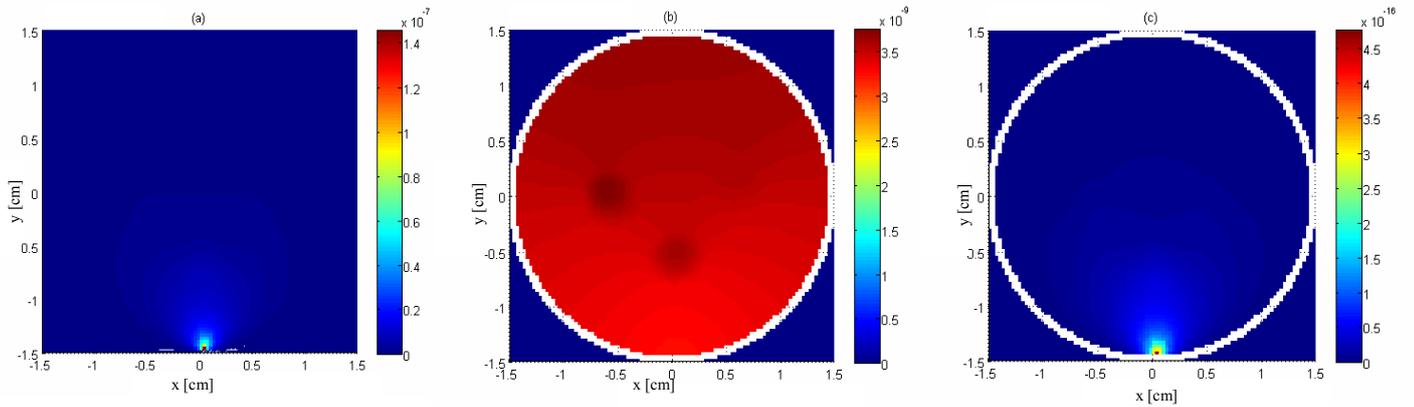


Figure 10 : Cartographie de (a) valeur moyenne, (b) temps moyen, (c) variance des TPSFs détectées de la source 2.

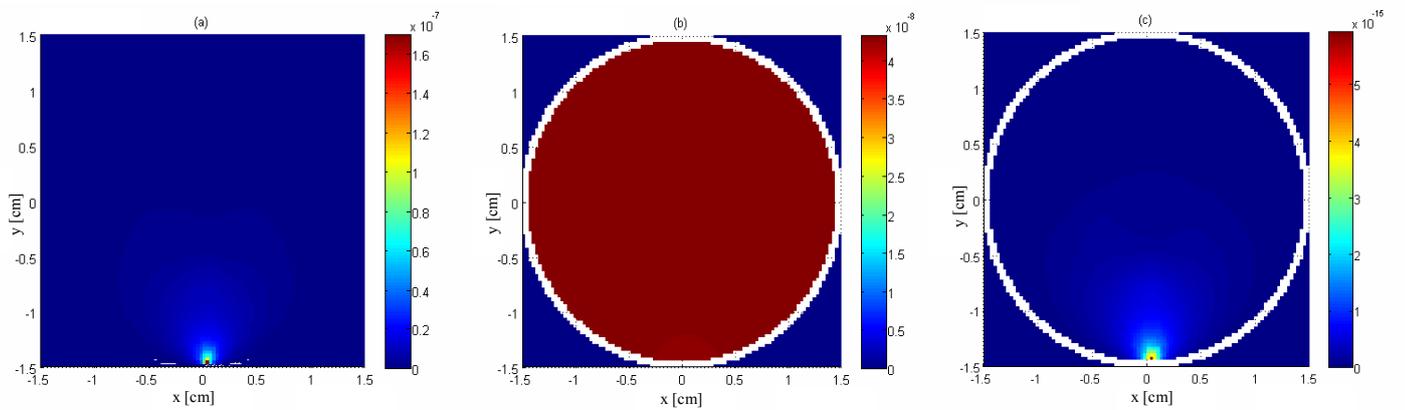


Figure 11 : Cartographie de (a) valeur moyenne, (b) temps moyen, (c) variance des TPSFs détectées de la source 3.

I. 4. Résultats obtenus avec le Comsol multiphysics.

Dans cette partie nous comparons nos résultats à ceux que nous avons obtenus à l'aide du logiciel professionnel Comsol multiphysics qui est basé sur la méthode des éléments finis. Ces résultats obtenus à l'aide de ce dernier seront utilisés pour résoudre le problème inverse en tomographie optique.

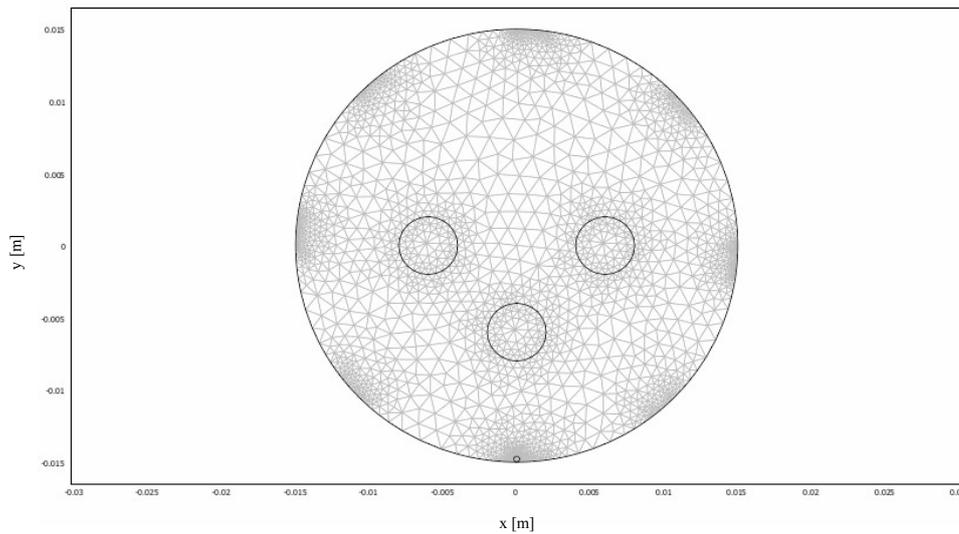


Figure 12 : Maillage de l'objet test en 2 D généré par Comsol Multiphysics (2372 nœuds, 4513 éléments).

En effet, la simulation est basé sur les mêmes paramètres précédents sauf que nous utilisons le maillage généré par le logiciel Comsol multiphysics (Figure 12), qui est un maillage libre avec les paramètres suivants (taille de l'éléments maximale : facteur d'échelle=1, Taux de croissance des éléments=1.3, Facteur de courbature du maillage=0.3, Limite de courbature du maillage=0.001, Résolution des régions étroites=1). Les propriétés spectrales des sources utilisées sont les mêmes que les précédentes. Les variations du temps moyen des TPSFs détecteur en fonction de l'angle de détection, sont présentées dans la figure 13 où on observe que les formes des courbes sont presque identiques à celles obtenues à l'aide de notre programme à quelques petites erreurs près dues au calcul numérique.

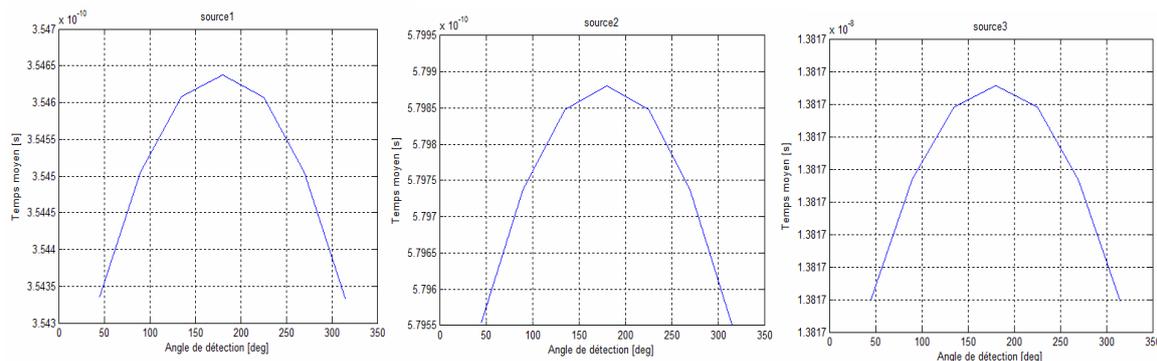


Figure 13 : Variations du temps moyen des TPSFs détecteurs en fonction de l'angle de détection simulées à l'aide de Comsol Multiphysics.

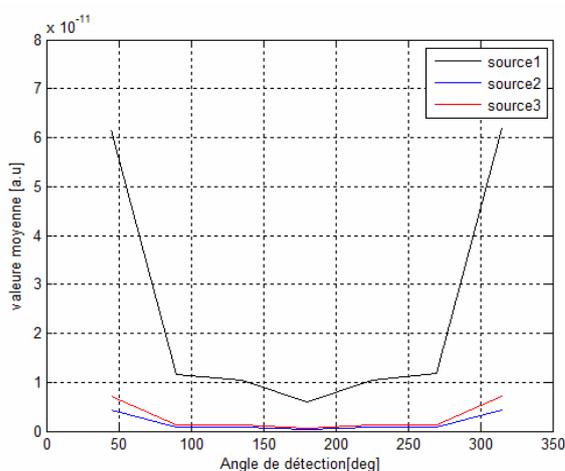


Figure 14 : Variations de la valeur moyenne des TPSFs détecteurs en fonction de l'angle de détection simulées à l'aide de Comsol Multiphysics.

On peut aussi voir les profils de la variation de la valeur moyenne des TPSFs détectés (Figure 14) et la variance des TPSFs détectées (Figure 15) en fonction de l'angle de la détection, les mêmes remarques peuvent être faites pour le temps moyen.

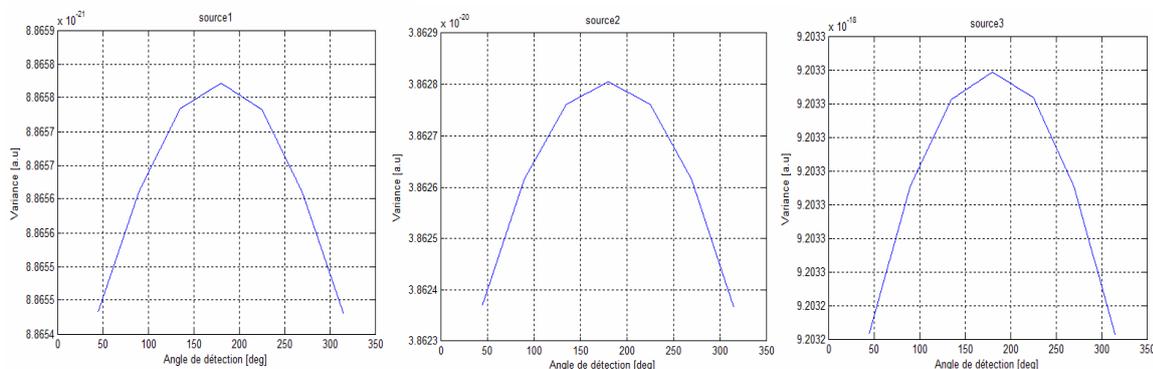


Figure 15 : Variations de la variance des TPSFs détecteurs en fonction de l'angle de détection simulées en Comsol Multiphysics.

II. Résolution du problème inverse

Ce paragraphe s'articule autour du principe de la reconstruction de l'image tomographique. Il porte également sur la relation qui existe entre l'activité cérébrale et les propriétés optiques des tissus. Nous y abordons aussi l'apport de l'imagerie par résonance magnétique dans la tomographie optique.

Dans un premier temps, il faut utiliser un modèle qui permet de créer un système de matrices reliant les changements (ou les perturbations) des μ_a et μ_s' internes, aux perturbations observées dans les mesures.

La méthode de variation utilisée, implique qu'un changement d'état à l'intérieur de l'objet, entraîne un changement dans les mesures (figure 16). D'après ces courbes, on peut clairement remarquer la différence créée au niveau des TPSFs détectées à cause de l'existence de l'hétérogénéité intégrée dans l'objet test homogène, on peut considérer cette dernière comme une tumeur. La diminution du pic des TPSFs détectées de l'objet hétérogène par rapport à celles de l'objet homogène est due à la propriété de l'absorbance de l'hétérogénéité qui a un coefficient d'absorption plus grand que celui de l'objet homogène. Les positions des détecteurs et de la source sont les mêmes que ceux présentées dans la Figure 3.b, aussi la source utilisé est la source 1 présentée dont le profil est décrit dans la figure 4.

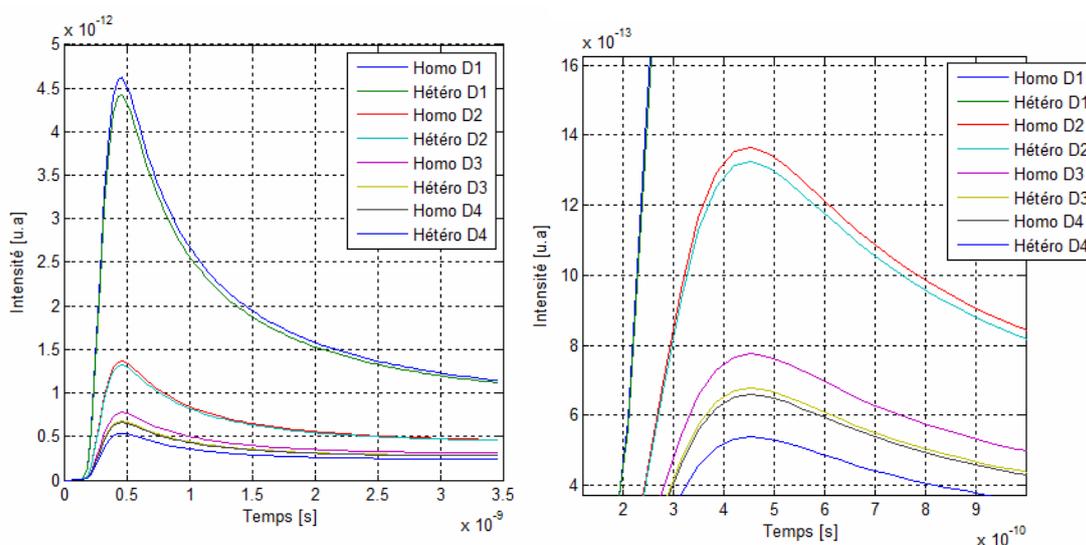


Figure 16. TPSFs de l'objet test homogène sans aucune hétérogénéité ($\mu_a = 0.00044 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_s' = 0.055 \text{ mm}^{-1}$), et de l'objet test hétérogène contenant une hétérogénéité au centre, de rayon de 4 mm ($\mu_a = 0.022 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_s' = 2.75 \text{ mm}^{-1}$)

Considérons S positions de sources, $q_j \in \partial\Omega (j=1, \dots, S)$ et M_j points de mesures $m_{j,i} \in \partial\Omega$ pour la $j^{\text{ème}}$ source ($i=1, \dots, M_j$), ce qui donne un nombre total de mesures $M_{TOT} = \sum_{j=1}^S M_j$. Le problème inverse est non linéaire et peut être représenté par l'équation (4) chapitre (I): $\{p\} = F^{-1}\{\Gamma_{n,m}\}$. Il consiste à déterminer en fonction des mesures $y_{i,j}$, l'ensemble des paramètres optiques

$$p = \left\{ \begin{array}{cc} \mu_{a1} & \mu'_{s1} \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{aD} & \mu'_{sD} \end{array} \right\}.$$

Il peut alors être défini comme étant l'optimisation de la fonction d'erreur :

$$I = \sum_{j=1}^S I_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \sum_{i=1}^{M_j} \left(\frac{y_{j,i} - F_{j,i}[p]}{\sigma_{j,i}} \right)^2 \quad (6)$$

qui s'écrit sous la forme vectorielle suivante [4]:

$$I = \frac{1}{2} \left(y - \hat{y} \right)^T R^{-2} \left(y - \hat{y} \right) = \frac{1}{2} b^T b \quad (7)$$

Avec $y_{i,j}$ la donnée extraite de la $i^{\text{ème}}$ mesure, pour la source j , ayant un écart type $\sigma_{j,i}$, \hat{y} est la donnée modélisée pour cette paire de source- détecteur :

$$F_{j,i}[p] = F(m_{j,i})[p] \quad (8)$$

$F_{j,i}[p]$ est l'opérateur scalaire calculant $\hat{y}_{j,i}$ à la position $m_{j,i}$, $b_{j,i} = \sigma_{j,i}^{-1} \left(y_{j,i} - \hat{y}_{j,i} \right)$ est le résidu pour cette mesure et R est la matrice de covariance du résidu:

$$\begin{aligned} R &= \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_S) \\ &= \text{diag}(\sigma_{1,2}, \sigma_{1,2}, \dots, \sigma_{j,i}, \dots, \sigma_{S, M_S}) \end{aligned} \quad (9)$$

Pour résoudre le problème d'optimisation (6), il est nécessaire de considérer le gradient de la fonction d'erreur :

$$I' = \frac{\partial I}{\partial x} = \sum_{j=1}^S \sum_{i=1}^{M_j} \left(\frac{y_{j,i} - F_{j,i}[p]}{\sigma_{j,i}} \right) \left(- \frac{\delta F_{j,i}[x]}{\partial x} \right) \quad (10)$$

Où x représente μ_a ou μ'_s .

Il existe plusieurs méthodes d'optimisation:

- Les méthodes de Newton qui recherchent, de manière itérative, le point qui annule la dérivée en utilisant l'expansion en séries de Taylor au point $x^{(n)}$

$$I'(x^{(n+1)}) = I'(x^{(n)}) + I''(x^{(n)})\Delta x^{(n)} = 0 \quad (11)$$

$$\Rightarrow \Delta x^{(n)} = -\left(I''(x^{(n)})\right)^{-1} I'(x^{(n)}) \quad (12)$$

Elles nécessitent la linéarisation explicite du problème inverse et deviennent très coûteuses en temps de calcul lorsque le nombre de paramètres à reconstruire est important.

- Les méthodes de gradient, qui ne nécessitent en réalité que le calcul du gradient de la fonction d'erreur et qui sont généralement préférable dans le cas d'un grand nombre de variables.

II. 1. Les méthodes de Newton.

Posons $\Gamma_{n,m}(x,t)$, une mesure obtenue pour une source n et un détecteur m , sur un objet de propriétés optiques :

$$x = \begin{Bmatrix} \mu_{a1} & \mu'_{s1} \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{aD} & \mu'_{sD} \end{Bmatrix}.$$

En la développant, par la série de Taylor, elle s'écrit :

$$\Gamma_{n,m}(x_1,t) = \Gamma_{n,m}(x_0,t) + \frac{\partial \Gamma_{n,m}(x_0,t)}{\partial x} [x_1 - x_0] + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Gamma_{n,m}(x_0,t)}{\partial x^2} [x_1 - x_0]^2 + \dots \quad (13)$$

Où x , représente la distribution interne des propriétés optiques dans l'objet. x_0 correspond à un état initial et x_1 correspond à un état perturbé. Si l'on ignore les termes d'ordre supérieur à 1, on obtient :

$$J_{n,m}(x_0,t) = \frac{\partial \Gamma_{n,m}(x_0,t)}{\partial x} = \frac{\Gamma_{n,m}(x_1,t) - \Gamma_{n,m}(x_0,t)}{[x_1 - x_0]} \quad (14)$$

Les valeurs de la fonction $J_{n,m}(x_0,t)$, appelées PMDF pour "Photon Measurement Density Function", représentent l'amplitude du changement dans les mesures lorsqu'un des paramètres optiques varie par rapport au couple source-détecteur. Il est possible de calculer directement la matrice jacobienne grâce à la

méthode des éléments finis. Comme la source est indépendante des coefficients, en dérivant l'équation $K\phi = b$, découlant de l'équation (103) du chapitre III, on obtient :

$$\frac{\partial K}{\partial x} \phi + K \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

$$J = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x} \phi = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x} (K^{-1}b) \quad (16)$$

Les matrices jacobiennes du temps moyen et de la variance sont déterminées à partir de la matrice jacobienne de l'intensité. La figure 17 présente la cartographie de temps moyen (a) et de la variance (b) des TPSFs détectées de l'objet test homogène ($\mu_a = 0.00044 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_s = 0.055 \text{ mm}^{-1}$). On utilise la matrice jacobienne pour voir l'effet des perturbations des propriétés optiques sur le temps moyen et sur la variance. En effet, la Figure 18 présente la cartographie du temps moyen (a) et de la variance (b) des TPSFs détectées de l'objet test homogène ($\mu_a = 0.00044 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_s = 0.055 \text{ mm}^{-1}$) avec une perturbation $\Delta\mu'_s = 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$. En comparant les cartographies avant et après la perturbation, on trouve qu'elle a un effet plus clair sur la variance où la gamme maximale est diminuée de 2.05×10^{-16} à 4.25×10^{-12} . Cette diminution est un indice de changement sur le coefficient de diffusion réduit μ'_s . Aussi, la distribution cartographique de la variance est changée. La Figure 19 présente la cartographie du temps moyen (a) et de la variance (b) des TPSFs détectées de l'objet test homogène ($\mu_a = 0.00044 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_s = 0.055 \text{ mm}^{-1}$) avec une perturbation $\Delta\mu_a = 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$. On utilise la source 1 présentée dans la figure 4 avec la même position que celle présentée dans la Figure 3b.

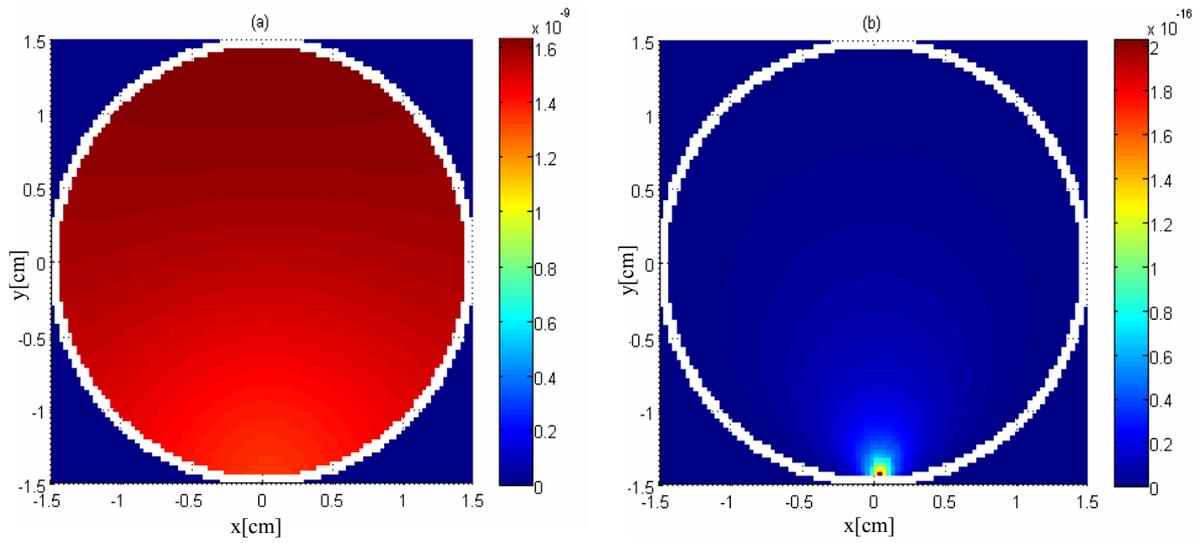


Figure 17. Cartographie de (a) temps moyen, (b) variance des TPSFs détectées de l'objet test homogène ($\mu_a = 0.00044 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_s' = 0.055 \text{ mm}^{-1}$).

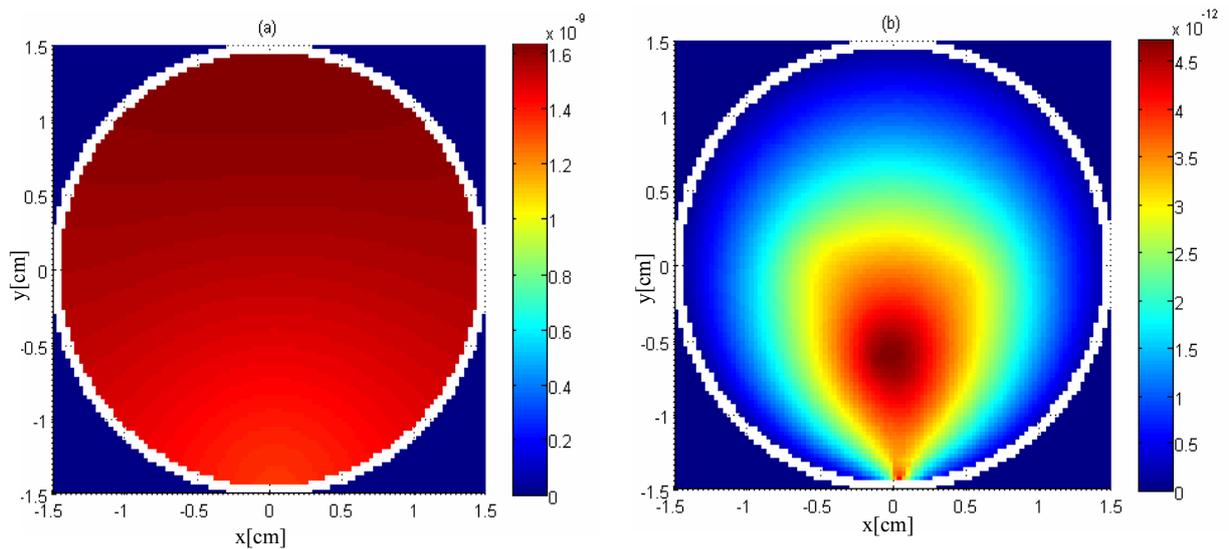


Figure 18 Cartographie de (a) temps moyen, (b) variance des TPSFs détectées de l'objet test homogène ($\mu_a = 0.00044 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_s' = 0.055 \text{ mm}^{-1}$) avec une variation de $\Delta\mu_s' = 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$.

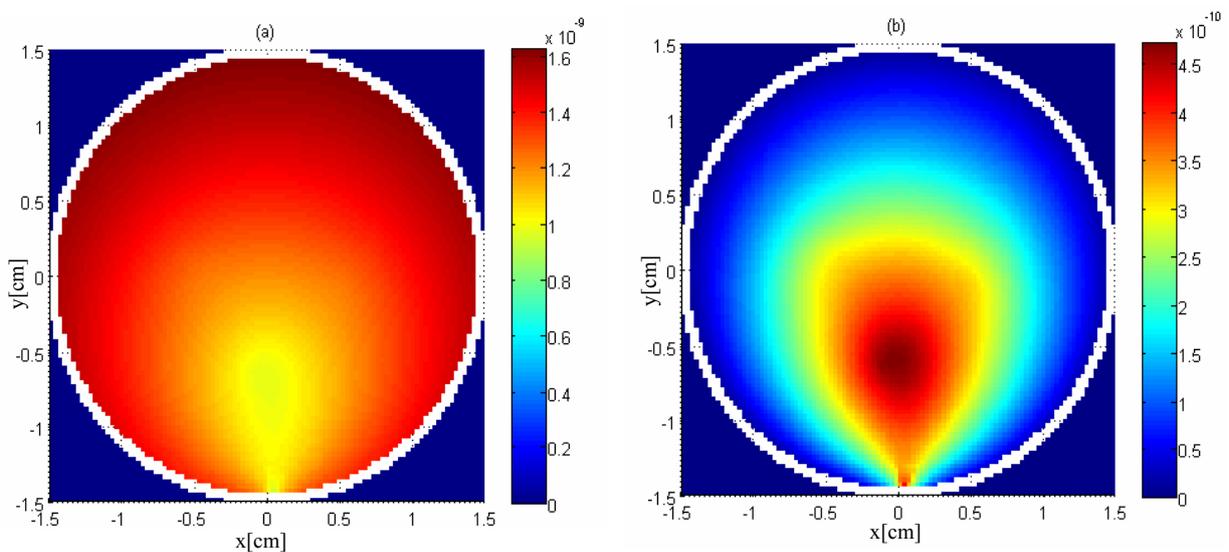


Figure 19. Cartographie de (a) temps moyen, (b) variance des TPSFs détectées de l'objet test homogène ($\mu_a = 0.00044 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_s' = 0.055 \text{ mm}^{-1}$) avec une variation de $\Delta\mu_a = 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$.

II. 2. Algorithme de reconstruction d'image.

La méthode la plus simple pour reconstruire une image à partir de mesures de tomographie optique est connue sous le nom de rétroprojection. Cette méthode combine l'approche classique de reconstruction des images en tomographie au rayon X et la matrice jacobienne décrite plus haut, qui tient compte de la non-linéarité du phénomène de propagation.

De l'équation (16), il est possible de conclure que le changement dans une donnée, peut être exprimé comme le produit de la matrice jacobienne par la variation des propriétés optiques :

$$\Delta\Gamma_{n,m}(x_0, t) = J_{n,m}(x_0, t)\Delta x \quad (17)$$

dans le cas où Δx correspond à de petites variations des propriétés optiques internes.

On souhaite obtenir la variation Δx à partir des données $\Gamma_{n,m}(x_0, t)$, ou plus généralement, des données, $M_{n,m}$, dérivées de $\Gamma_{n,m}(x_0, t)$. Pour cela, il faut inverser le système (Les données $M_{n,m}$ présentent la valeur moyenne, le temps moyen ou la variance de $\Gamma_{n,m}(x_0, t)$). Cependant, comme le problème est mal posé, il n'est pas possible d'inverser directement la matrice jacobienne, puisqu'elle est presque singulière.

Pour contourner le problème, plusieurs méthodes existent parmi lesquels [5], la régularisation de Tikhonov :

$$\Delta x = \left[J^T + \tilde{\lambda} I \right]^{-1} J^T \Delta M_{n,m} \quad (18)$$

où $\tilde{\lambda} = \max(\text{diag}(J^T J))$.

Cependant, cette reconstruction linéaire nécessite une inversion de matrice, très coûteuse en temps de calcul, lorsque le nombre de variables à ajuster est important. En partant d'une distribution initiale (par exemple homogène), un modèle est utilisé pour simuler les données correspondantes. La différence entre ces estimations et les données expérimentales permet de déterminer une meilleure distribution des propriétés optiques, grâce à une méthode de type descente de gradient ou méthode de Newton. Le processus est répété tant que la nouvelle distribution minimise une erreur définie par :

$$\sum_{n,m} \left(\frac{\Gamma_{n,m}^{mesurée} - \Gamma_{n,m}^{estimée}}{\sigma_{n,m}} \right)^2 \quad (19)$$

où, $\sigma_{n,m}$ correspond à la déviation standard de la mesure $\Gamma_{n,m}^{mesurée}$.

La méthode de mise à jour de la distribution, ainsi que la méthode d'inversion du système matriciel utilisée influencent le processus de reconstruction ainsi que la convergence [4,6,7]. La reconstruction peut être contrainte par l'utilisation d'informations *a priori*, comme par exemple la géométrie interne de l'objet [8].

L'information totale mesurée par le système de tomographie optique, résolu en temps, est nommée TPSF, qui est la réponse impulsionnelle du tissu. Cette mesure est le flux de sortie donné par l'équation (37) du chapitre II.

En utilisant la méthode des éléments finis, décrite dans le chapitre III, il est possible, en théorie, de calculer la TPSF entière, en évaluant le flux de sortie. Il faut ensuite minimiser l'erreur entre les données mesurées et les données prédites, donnée par :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^S \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{t=0}^{T_{n,m}} \left(\frac{\Gamma_{n,m}^{mesurée} - \Gamma_{n,m}^{estimée}}{\sigma_{n,m}} \right)^2 \quad (20)$$

Cependant, le calcul de toutes les TPSFs (ou même d'une partie) est extrêmement coûteux en temps. Si l'on travaille, non pas avec toute la réponse impulsionnelle, mais seulement avec les principales caractéristiques [9], telles que la valeur moyenne, le temps moyen ou la variance, l'erreur est alors calculée de la manière suivante :

$$\varepsilon = \sum_{n,m} \left(\frac{E_{n,m}^{mesurée} - E_{n,m}^{estimée}}{\sigma_{n,m}(E)} \right)^2 + \sum_{n,m} \left(\frac{TM_{n,m}^{mesurée} - TM_{n,m}^{estimée}}{\sigma_{n,m}(TM)} \right)^2 + \sum_{n,m} \left(\frac{C_{2n,m}^{mesurée} - C_{2n,m}^{estimée}}{\sigma_{n,m}(C_2)} \right)^2 \quad (21)$$

où $\sigma_{n,m}(E)$ correspond à la déviation standard de la mesure de la valeur moyenne,

$E_{n,m}^{mesurée}$, $\sigma_{n,m}(TM)$ correspond à la déviation standard de la mesure du temps

moyen $TM_{n,m}^{mesurée}$ et $\sigma_{n,m}(C_2)$ correspond à la déviation standard de la mesure de la

variance $C_{2n,m}^{mesurée}$.

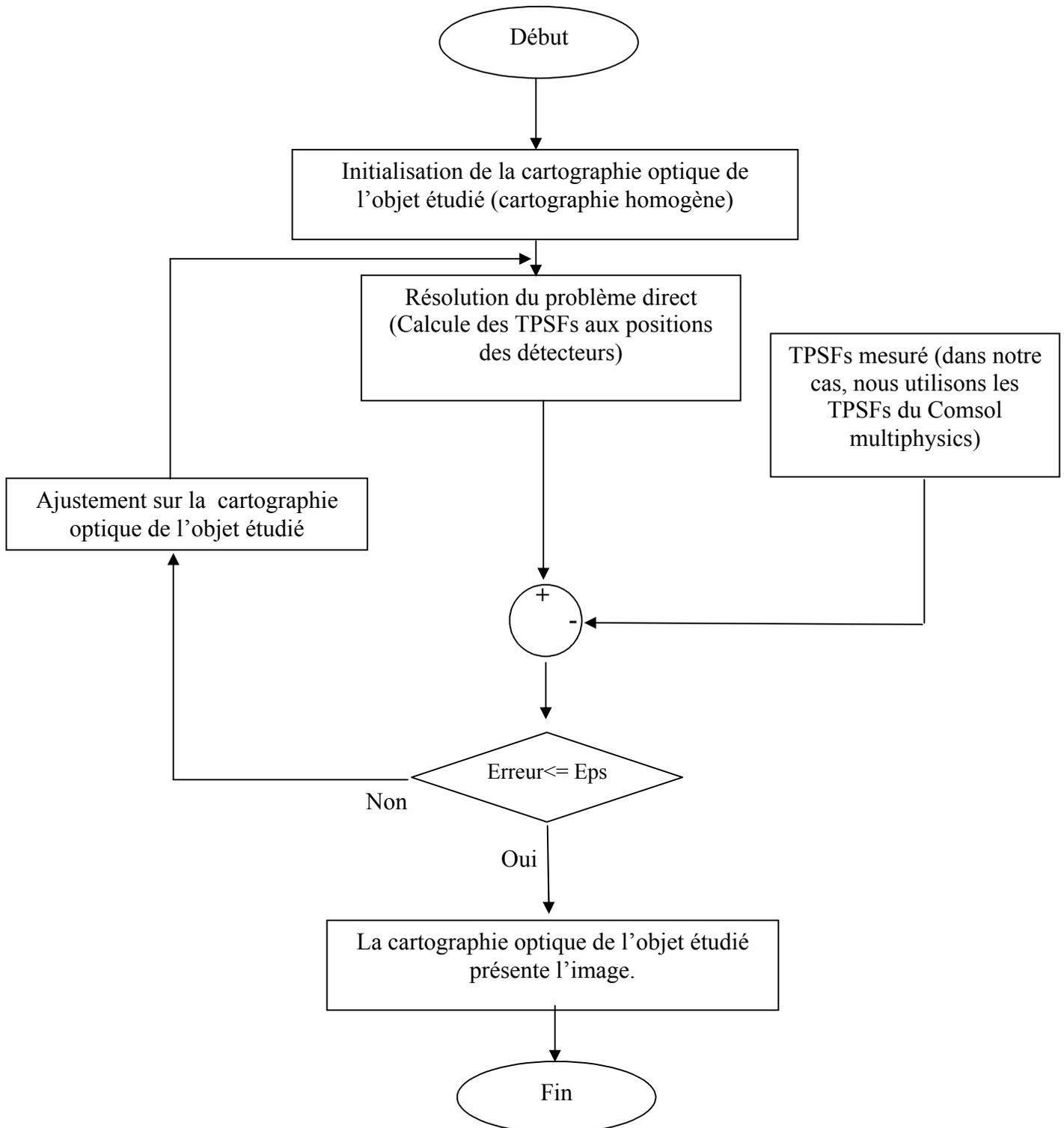
Les variations des coefficients :

$$\Delta x = \left\{ \begin{array}{cc} \Delta \mu_{a1} & \Delta \mu'_{s1} \\ \vdots & \vdots \\ \Delta \mu_{aD} & \Delta \mu'_{sD} \end{array} \right\}$$

sont calculées de manière indépendante, pour chaque donnée, par l'algorithme de reconstruction ci-dessous. Ensuite la variation globale est déterminée par :

$$dx = dx_E + dx_{TM} + dx_{C_2} \quad (22)$$

Organigramme



III. Application et perspectives.

III. 1. Rappels.

Le lieu des processus de l'activation cérébrale est localisé au niveau des tissus situés entre le cerveau et la surface : les méninges, la boîte crânienne et le cuir chevelu. La figure 20 illustre la complexité anatomique de cette zone. Définissons ces catégories en évoluant de l'extérieur vers l'intérieur de la tête.

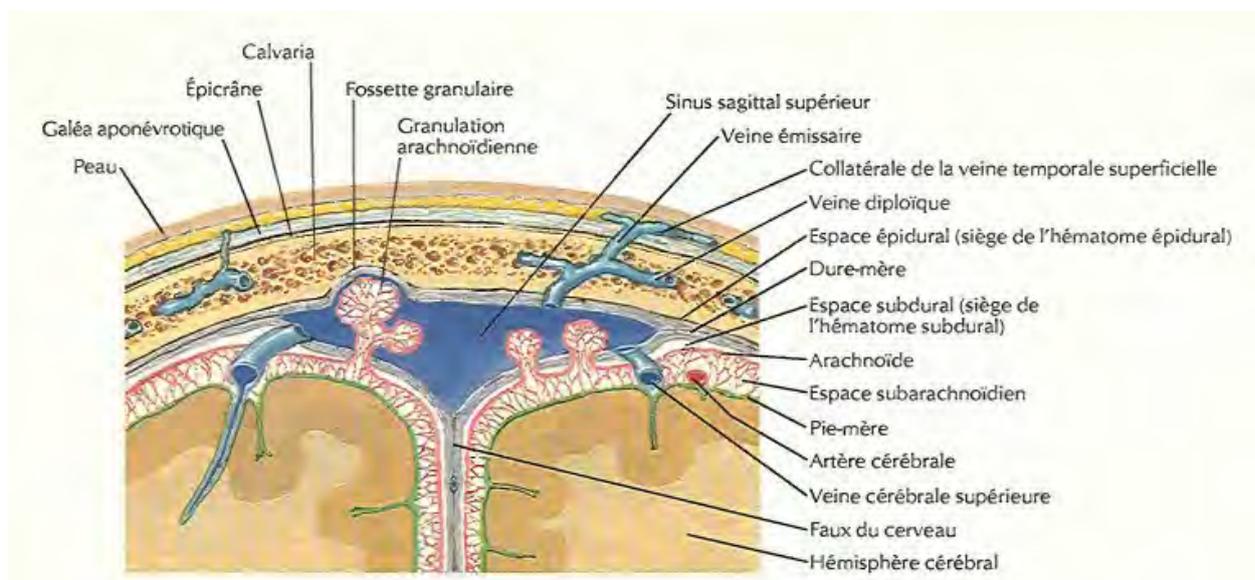


Figure 20. Coupe anatomique superficielle de la tête [10].

Toutes les couches situées au-dessus du crâne se regroupent dans la catégorie de la peau. L'absorption de cette dernière est due aux chromophores habituels et à la présence de mélanine dans l'épiderme en quantité fortement variable suivant le type de peau et suivant la protection apportée par les cheveux. Nous avons vu que la mélanine absorbe fortement dans l'UV et le visible (figure 3 de chapitre II). Au niveau macroscopique, leur structure fibrée se traduit par un régime de diffusion de Mie, fortement anisotropique. Toutefois, des stries microscopiques ajoutent un régime de diffusion de Rayleigh de nature isotropique. Le crâne est constitué par un ensemble d'os unis par des sutures fibreuses. Les méninges regroupent des éléments de structures très différentes. La dure mère est une membrane fibreuse, dense et épaisse, qui adhère à la face interne de la boîte crânienne. Elle forme par endroits des replis qui séparent les différentes parties de l'encéphale. L'arachnoïde est une délicate membrane non vascularisée qui est maintenue contre la dure mère par la pression du liquide céphalo-rachidien (LCR). La pie mère est une membrane mince et richement vascularisée qui épouse tous les

contours de la surface de l'encéphale. Ces deux dernières membranes ont une origine commune, ce qui explique qu'elles soient reliées par de nombreuses trabécules arachnoïdiennes. L'espace subarachnoïdien (ESA), situé entre ces deux membranes, contient un liquide nutritif transparent dont la composition est proche de celle du sang : le LCR. Le cerveau est suspendu à l'intérieur de cet espace par l'intermédiaire des trabécules. Ceci lui assure un amortissement mécanique en cas de choc, et réduit la compression des nerfs et des vaisseaux contre la face interne du crâne. L'épaisseur des trois membranes est en générale relativement faible par rapport à celle de l'ESA. La matière grise (MG) est la couche superficielle du cerveau. Elle abrite notamment les neurones, unités structurales et fonctionnelles du système nerveux. Très vascularisée, elle est par conséquent fortement absorbante. La matière blanche (MB) est la couche intérieure du cerveau, Elle est notamment constituée de faisceaux de fibres nerveuses (axones), qui assurent l'interconnexion des neurones. Elle est moins absorbante que la MG, mais beaucoup plus diffusante notamment car les axones sont recouverts de gaines de myéline. Cette couche permet d'assurer une conduction optimale de l'influx nerveux et représente une proportion importante de la MB. Ces gaines sont des empilements de membranes cellulaires, ce qui explique la forte diffusion de la MB.

Les sinus veineux de la dure mère sont des espaces récoltant le sang de l'encéphale via de grosses veines originaires de la surface du cerveau. Leur forte concentration en oxy- et deoxy-hémoglobine les rend très absorbants.

L'activité cérébrale est un ensemble de processus physiologiques accompagnant l'activation des neurones présents dans le cortex cérébral. Ces processus sont généralement subdivisés en deux catégories selon leur localisation. Les premiers se produisent intra cellulièrement ou au niveau des membranes cellulaires. Les autres sont localisés dans le compartiment vasculaire et sont liés aux premiers par le biais d'un couplage dit neuro-vasculaire qui reste encore mal connu [11].

Il existe différentes techniques d'imagerie fonctionnelle sensibles à chacune des deux catégories physiologiques de l'activité cérébrale décrites ci-dessus. L'électroencéphalographie (EEG) et la magnétoencéphalographie (MEG) fournissent

des informations directes sur l'activité neuronale à travers la mesure des modifications induites sur les champs électrique et magnétique.

Ces méthodes possèdent une très bonne résolution temporelle mais une faible localisation spatiale. L'IRM fonctionnelle (IRMf) est sensible aux variations de la réponse hémodynamique par le biais du signal BOLD (Blood Oxygenation Level dependent). Elle est une des méthodes d'imagerie cérébrale fonctionnelle de référence grâce à sa bonne résolution spatiale et malgré une résolution temporelle limitée mais adaptée à la faible dynamique du signal BOLD. Les variations induites par l'activation cérébrale sur la diffusion moléculaire de l'eau peuvent aussi être suivies grâce à l'IRM [12]. La PET et la TEMP nécessitent l'introduction de traceurs radioactifs et ont des résolutions temporelle et spatiale limitées.

Aussi, le potentiel de l'imagerie optique pour l'activation cérébrale est prometteur car cette modalité est sensible aux deux catégories physiologiques définies et possède une bonne résolution temporelle. La forte diffusion de la matière blanche exclut la possibilité d'atteindre les couches profondes du cerveau. La figure 5 illustre bien ce phénomène. En effet, la diminution de l'intensité entre deux TPSFs symétriques (détecteur 1 avec détecteur 7, détecteur 2 avec détecteur 6, détecteur 3 avec détecteur 5) est due à la haute diffusion de l'hétérogénéité de gauche par rapport à celle de l'hétérogénéité de droite de l'objet test étudié. Toutefois, les phénomènes liés à l'activité cérébrale sont majoritairement localisés dans les couches superficielles. L'obstacle principal à la diffusion clinique de l'imagerie optique est lié à la localisation spatiale des variations optiques. De ce fait, si cet obstacle est franchi, cela permettrait de fournir un outil fiable pour la compréhension du couplage neuro-vasculaire.

L'activité neuronale est consommatrice d'oxygène, elle induit donc une diminution locale de l'oxygénation sanguine. Ainsi, l'approvisionnement en HbO_2 devient rapidement supérieur à sa consommation et sa concentration augmente pour atteindre un maximum environ 5 s après le début de l'activité cérébrale. Cette augmentation de l'oxygénation est moins spatialement localisée que la consommation d'oxygène lié à l'activité neuronale [13]. Le suivi de l'activation cérébrale par le biais de la concentration locale en Hb et HbO_2 est donc limité en termes de résolution spatiale.

Le cytochrome c oxydase est l'enzyme terminale dans le cycle respiratoire mitochondrial. Il est responsable de la grande majorité de la consommation d'oxygène dans l'organisme et est essentiel à la production d'adénosine triphosphate (ATP), le plus important pourvoyeur d'énergie dans les cellules. Il absorbe fortement dans le PIR mais sa concentration dans l'organisme est dix fois plus faible que celle de l'hémoglobine, ce qui rend sa détection problématique. Néanmoins, les processus physiologiques intracellulaires qu'il permet de suivre sont plus pertinents que ceux qui sous-tendent la réponse hémodynamique pour l'étude de l'activité cérébrale. La même problématique de quantification et de localisation spatiale décrite pour Hb et HbO₂ s'applique à ce chromophore.

Contrairement à celles de Hb et HbO₂ sa concentration varie très lentement (sur plusieurs jours) ce qui est totalement inadapté au suivi de l'activation cérébrale. Par contre son état d'oxydoréduction varie rapidement et les spectres d'absorption de ses états oxydé et réduit sont différents. De nombreux facteurs influent sur cet état d'oxydoréduction [14]. Le plus significatif semble être la concentration en oxygène. Différentes méthodes ont été proposées dans le but de s'assurer que le suivi du Cyt.O n'est pas un artéfact. Il a ainsi été tenté de comparer différents algorithmes pour la détection du Cyt.O [15], ou de contrôler la variation de concentration d'hémoglobine à l'aide de substitut sanguin [16,17], ou encore de bloquer l'état d'oxydoréduction du Cyt.O avant de faire varier les concentrations de Hb et HbO₂ ainsi que la diffusion [18]. Cependant, le suivi du Cyt.O reste très discutable, mais devrait profiter de mesures avec plusieurs longueurs d'onde et une bonne résolution spectrale.

Par ailleurs, les interfaces entre deux milieux optiquement différents sont des foyers de forte diffusion lumineuse. Les membranes cellulaires sont un excellent exemple. En effet, tout évènement affectant ces membranes, ou le volume intracellulaire, est donc susceptible de modifier leurs indices de réfraction et par conséquent leur faculté à diffuser la lumière. La figure 16 illustre ce phénomène, par comparaison entre les TPSFs détectées pour l'objet test homogène et hétérogène on remarque que l'intensité est diminuée à cause de changement des propriétés optiques par l'existence de l'hétérogénéité. La corrélation entre les modifications de la diffusion lumineuse et l'activité neuronale a été observée *in vitro* dans des cellules neuronales isolées ou en culture [19,20], dans des tranches cérébrales [21] et *in vivo*

sur des animaux [22]. Deux types de variations de la diffusion lumineuse ont été rapportés :

- ✓ Un signal rapide possédant un temps de réponse de plusieurs dizaines de millisecondes. Il peut être corrélé aux variations de potentiel des membranes neuronales qui ont pour conséquence des variations de l'indice de réfraction de celles-ci.
- ✓ Un signal plus lent possédant un temps de réponse de quelques secondes a été décrit dans des tranches cérébrales et *in vivo* chez l'animal [13,23]. Des arguments ont été avancés en faveur d'une origine liée à l'augmentation du volume des cellules gliales [23].

III.2. Apport de l'imagerie par résonance magnétique dans la tomographie optique.

Une des difficultés majeures des problèmes inverses réside dans l'initialisation du processus d'optimisation. Plus les paramètres de départ sont différents de ceux escomptés, plus les erreurs dues à la reconstruction risquent de corrompre la cartographie.

Une solution à ce problème peut être de coupler la tomographie optique à l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). En effet, la méthode de résolution de l'équation de diffusion nécessite le maillage de notre objet. Celui ci peut alors recevoir des informations, *a priori*, sur la géométrie interne du tissu, grâce à l'IRM. Une fois la géométrie interne connue, il est possible de contraindre le système, en supposant chaque région homogène.

Le processus de modélisation comporte deux étapes principales depuis l'IRM jusqu'au modèle MEF : la segmentation et le maillage.

La segmentation est l'opération qui consiste à allouer une catégorie à chaque pixel d'une image, suivant les caractéristiques de cette image et avec l'aide éventuelle d'informations *a priori*. La figure 21a présente un exemple d'une coupe coronale cérébrale d'IRM anatomique, après segmentation de cette image, on peut facilement d'obtenir cinq zones distinctes et imbriquées les unes dans les autres (figure 21b), correspondant aux cinq catégories de tissu.



Figure 21. (a) Coupe coronale cérébrale par IRM anatomique. (b) Image IRM segmentée [24].

Sur la base de l'image segmenter on peut facilement distinguer les différentes zones construites sur notre objet et où on peut faire le maillage de telle sorte qu'une zone de très faible épaisseur sera maillée par des triangles de très faibles dimensions.

Enfin, l'apport de l'IRM en tomographie optique devrait permettre à cette modalité de se développer et de connaître un essor certain. Elle constitue une technique d'avenir de l'imagerie fonctionnelle.

Références bibliographiques.

- [1] S.R. Arridge, M. Schweiger, (1992), "A finite element approach for modelling photon in tissue", *Medical Physics*, Vol 20, N° 2, p. 299-309.
- [2] Saouli, A., Mansour, K., (2011) 'Application of the finite elements method in optical medical imaging', *IEEE conference proceeding (MMS) 11th*, pp. 117– 121.
- [3] A. Saouli, K. Mansour,(2012) " resolution of direct problem by the finite element method: application in near infra-red optical medical imaging", *Digest Journal of Nanomaterials and Biostructures*, Vol. 7, No. 3, p. 1271 – 1277.
- [4] Arridge S. R., Schweiger M. (1998), "A gradient based optimisation scheme for optical tomography", *Optics Express* Vol 2 N°6, p. 213-226.
- [5] Anand T. N. Kumar, et al, (2008), "A Time Domain Fluorescence Tomography System for Small Animal Imaging", *IEEE TRANSACTIONS ON MEDICAL IMAGING*, VOL. 27, NO. 8, pp. 1152-1163.
- [6] Hielscher A. H., Klose A. D., Hanson K. M. (1999), "Gradient-based iterative image reconstruction scheme for time-resolved optical tomography", *IEEE Trans. Med. Imag.* 18, p. 262-271.
- [7] Hielscher A. H., Klose A., Beuthan J. (2000), "Evolution strategies for optical tomographic characterization of homogeneous media", *Optics Express* Vol 9, p. 507-518.
- [8] Torregrossa M., Zint C.V., Poulet P. (2003), "The use of MRI information to initialise the first stage of the image reconstruction algorithm in optical tomography", *Proc SPIE*, Vol. 4255, p.264-272.
- [9] Martin Schweiger and Simon R Arridge, (1999), "Application of temporal filters to time resolved data in optical tomography", *Phys. Med. Biol.*, vol. 44, pp. 1699–1717.
- [10] Netter F. H, (2009), "Atlas d'anatomie humaine", Livre, Masson, pp. 546.
- [11] Villringer A., Dirnagl U.,(1995), "Coupling of brain activity and cerebral blood flow: basis of functional neuroimaging", *Cerebrovasc. Brain Metab. Rev.*, vol.7, p. 240-276.
- [12] Le Bihan D.,(2003), " Looking into the functional architecture of the brain with diffusion MRI", *Nat. Rev. Neuro.*, vol. 4, p. 469-480.
- [13] Malonek D., Grinvald A., (1996), "Interactions between electrical activity and cortical microcirculation revealed by imaging spectroscopy: Implications for functional brain mapping", *Science*, vol. 272, p. 551-554.
- [14] Cooper C.E., Matcher S.J., Wyatt J.S., (1994), "Nearinfrared spectroscopy of the brain: relevance to cytochrome oxidase bioenergetics", *Biochem. Soc. Trans.*, vol. 22, p. 974-980.
- [15] Matcher S.J., Elwell C.E., Cooper C.E., Cope M., Delpy, D.T., (1995), "Performance comparison of several published tissue near-infrared spectroscopy algorithms", *Anal. Biochem.*, vol. 227, p. 54-68.
- [16] Tamura M., (1993), "Non-invasive monitoring of the redox state of cytochrome oxidase in living tissue using nearinfrared laser lights", *Jpn. Circ. J.*, vol. 57, p. 817-824.
- [17] Cooper C.E., Cope M., Springett R., Amess P.N., Penrice J., Tyszczyk L., Punwani S., Ordidge R., Wyatt J., Delpy D.T., (1999), "Use of mitochondrial inhibitors to demonstrate that cytochrome oxidase near-infrared spectroscopy can measure mitochondrial dysfunction noninvasively in the brain", *J Cereb Blood Flow Metab.*, vol. 19, p. 27-38.

- [18] Cooper C.E., Springett R., (1997), "Measurement of cytochrome oxidase and mitochondrial energetics by near infrared spectroscopy", *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 352, p. 669-676.
- [19] Hill D.K., Keynes R.D., (1949), "Opacity changes in stimulated nerve", *J. Physiol.*, vol. 108, p. 278-281.
- [20] Cohen L.B., Keynes R.D., Hille B., (1968), "light scattering and birefringence changes during nerve activity", *Nature*, vol. 218, p. 438-441.
- [21] Lipton P, (1973), "Effects of membrane depolarization on light scattering by cerebral cortical slices", *J Physiol*, vol. 231, p. 365-383.
- [22] Chance B., Mayevsky A., Guan B., Zhang Y. , (1997), "Hypoxia/ischemia triggers a light scattering event in rat brain", *Adv. Exp. Med. Biol.*, vol. 428, p. 457-67.
- [23] MacVicar B.A., Hochman D, (1991), "Imaging of synaptically evoked intrinsic optical signals in hippocampal slices", *J. Neurosci.*, vol. 11, p. 1458-1469.
- [24] Bruno Montcel, (2005), "Tomographie optique diffuse résolue en temps : Applications fonctionnelles en neurosciences", Thèse Électronique, Electrotechnique, Automatique, Spécialité : Optique, n° 1485. Institut de Physique Biologique, Université Louis Pasteur Strasbourg I, France.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse porte sur la tomographie optique et notamment sur la détection des rayonnements et sur le principe de la reconstruction des images de tomographie optique.

Nous avons modélisé dans un premier temps, le phénomène de détection du détecteur de rayonnements en technologie TFA (Thin Film en ASIC). Nous avons ainsi, développé un modèle basé sur l'hypothèse de la linéarité du champ électrique et sur une mobilité constante des électrons.

Les résultats de simulation que nous avons obtenus ainsi que l'approche théorique qui a permis d'y aboutir, montrent que les détecteurs épais peuvent offrir une détection optimisée. En effet, le signal induit par les électrons est maximum pour une déplétion complète du détecteur et celui induit par les trous pour un temps de formation de l'électronique de lecture très court, est maximum pour une tension de polarisation inverse maximale. La basse mobilité des trous est étroitement liée à l'intensité du champ. De ce fait, l'utilisation des détecteurs épais améliore l'efficacité de détection par augmentation du volume utile et permet également d'appliquer une tension inverse élevée, ce qui augmente le signal induit par les trous.

La détection de radiations électromagnétiques par un détecteur TFA a été caractérisée et les mécanismes nécessaires à la création du signal ont été étudiés dans le but de comprendre les performances et les limites de détecteur TFA. Le signal créé par l'interaction des radiations dans le détecteur de Si-aH dépend en premier, du profil de perte d'énergie dans le détecteur et de l'énergie moyenne de création des paires. Il dépend donc de la distribution des paires électron-trou dans le détecteur. La charge totale collectée est égale à la somme des charges créées par le mouvement des électrons et de celui des trous. Pour un temps de formation de pré amplification de quelques nanosecondes, la charge induite par les électrons est entièrement collectée. Cependant, seule une partie de la charge créée par les trous

est intégrée, et ce, à cause du transport lent de ces derniers, ce qui constitue une importante limite pour ce type de détecteur.

La compréhension de la propagation lumineuse dans un milieu diffusant est complexe. Elle l'est plus encore dans les tissus biologiques. Cependant, pour comprendre le phénomène de propagation d'une impulsion lumineuse dans le proche de l'infrarouge dans un tissu biologique, nous avons programmé un simulateur de données. Les programmes ont été réalisés pour des objets aux géométries cylindriques. La mise au point de la méthode des éléments finis a été réalisée dans le but de faire une reconstruction en deux dimensions.

L'introduction du détecteur dans le modèle a ensuite permis de simuler le signal temporel détecté, la TPSF, et également les cartes de sensibilité, les PMDF. Ces dernières sont des cartes, dans le cas de notre objet test, de la probabilité de l'origine spatiale d'une variation du signal optique détectée à la surface.

La simulation a été basée sur trois sources optiques dans le proche de l'infrarouge. La réponse du tissu à l'excitation lumineuse provoquée par la source a été étudiée afin de pouvoir choisir la source la plus adaptée à l'étape de reconstruction des images.

Sur la base des données de la littérature et en mettant à profit nos résultats, nous avons pu mettre en évidence les raisons qui font que la forte diffusion de la matière blanche exclut la possibilité d'atteindre les couches profondes du cerveau. En effet, nous avons montré que la diminution de l'intensité entre deux TPSFs symétriques est due à la grande différence de diffusion entre les hétérogénéités incluses dans notre objet test. Ce phénomène ne constitue pas en soi, une contrainte, car les phénomènes liés à l'activité cérébrale sont majoritairement localisés dans les couches superficielles du cerveau. Cependant, l'obstacle principal à la diffusion clinique de l'imagerie optique est lié à la localisation spatiale des variations optiques. De ce fait, l'enjeu principal est de franchir cet obstacle, ce qui permettrait de mieux comprendre le couplage neuro-vasculaire.

Par ailleurs, nous avons montré brièvement l'apport de l'IRM dans la reconstruction de l'image optique, en prenant comme exemple une image cérébrale. En effet, cette technique d'imagerie anatomique permet, moyennant une segmentation adéquate des images considérées, de faire un meilleur maillage des zones d'intérêt. La tomographie optique pourrait devenir ainsi, une modalité d'avenir pour l'imagerie fonctionnelle.

En conclusion, il est peu probable que la tomographie optique se substitue aux modalités classiques d'imagerie anatomique (IRM, Scanner X ...). Néanmoins, nos résultats corrélés à ceux de la littérature, montrent qu'elle possède un fort potentiel en tant que modalité d'imagerie médicale fonctionnelle, particulièrement pour le suivi de l'activité cérébrale. Ainsi, l'essor que connaîtra la tomographie optique en neurosciences sera étroitement lié au couplage avec une modalité d'imagerie anatomique conventionnelle. Elle contribuera ainsi, au développement des avancées dans ce domaine.