

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : CONTROLE DES SYSTEMES

Par :

FERGANI Nadir

THEME

Contribution au Réglage de Correcteurs $PI^{\alpha}D^{\beta}$ d'Ordre Fractionnaire

Soutenue le 27 / 10 / 2016

Devant le Jury :

Président	A. Bennia	<i>Professeur, Université de Constantine</i>
Rapporteur	A. Charef	<i>Professeur, Université de Constantine</i>
Examineurs	A. Djouambi	<i>Professeur, Université d'Oum-El-Bouaghi</i>
	D. Boudjehem	<i>Maitre de Conférences A, Université de Guelma</i>
	B. Boukhezzar	<i>Maitre de Conférences A, Université de Constantine</i>

Année : 2016

Dédicaces

*A mes parents,
A tout ma famille,
A tous mes amis,*

Remerciements

Avant tout, mes remerciements à mon dieu **ALLAH** le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire de traitement du signal de l'Université de Constantine, sous la direction scientifique de Monsieur le professeur **Abdelfatah CHAREF**, que je tiens à remercier très vivement de son enthousiasme envers mon travail, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Je le remercie également, pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements et ses précieux conseils.

Je suis très honoré que Monsieur **Abdelhak BENNIA**, Professeur à l'université de Constantine, ait accepté de présider le jury de cette thèse. Je remercie également Messieurs **Abdelbaki DJOUAMBI**, Professeur à l'université d'Oum-El-Bouaghi, **Djalil BOUDJEHEM**, Maître de Conférences à l'université de Guelma et **Boubekeur BOUKHEZZAR**, Maître de conférences à l'université de Constantine, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire de traitement du signal, équipe système, pour leurs aides, serviabilités et leurs encouragements.

Je remercie également Monsieur Attoui qui m'a aidé à la préparation de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes amis et mes collègues de travail.

Table des Matières :

Dédicaces	ii
Remerciements	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xi
Résumé	xii
Introduction Générale	1
Chapitre 1 : Généralité sur le calcul fractionnaire	
1.1 Introduction	5
1.2 Aperçue Historique	5
1.3 Fonctions spéciales	6
1.3.1 La fonction Gamma.....	6
1.3.2 Fonction Mittag-Leffler.....	7
1.4 Opérateurs d'ordre fractionnaire	7
1.4.1 Définition de Riemann-Liouville	8
1.4.2 Définition de Grünwald-Leitnikov	8
1.4.3 Définition de Caputo	9
1.4.4 Quelque propriété de la dérivation non entière	9
1.4.5 Interprétation géométrique	10
1.4.6 Dérivées fractionnaire des quelques fonctions usuelles	11
1.4.7 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	12
1.4.8 Calcul numérique des dérivés et intégrales d'ordre fractionnaire	13
1.5 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	13

1.5.1	Méthode d'approximation de Charef.....	14
1.5.2	Exemples illustratives.....	16
1.6	Réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire	17
1.7	Domaine d'applications du calcul fractionnaire.....	19
1.8	Conclusion.....	20
 Chapitre 2 : Commande d'ordre fractionnaire		
2.1	Introduction	22
2.2	Système lineaire d'ordre fractionnaire	23
2.2.1	Equation différentielle d'ordre	23
2.2.2	Représentation d'un système fractionnaire	23
2.2.3	Stabilité des systèmes fractionnaire.....	24
2.2.4	Système élémentaire d'ordre fractionnaire.....	25
2.2.4.1	Fonction idéale de Bode.....	26
2.3	Commande d'ordre fractionnaire	29
2.3.2	Correcteur CRONE.....	30
2.3.3	Correcteur d'ordre fractionnaire TID	31
2.3.4	Correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire	32
2.3.5	Correcteur $PI^\lambda D^\mu$	32
2.3.5.1	Rappelle sur le PID classique.....	32
2.3.5.2	Le $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire	34
2.3.5.3	Implémentation du $PI^\lambda D^\mu$	41
2.4	Méthodes de réglage du $PI^\lambda D^\mu$	42
2.4.1	Méthodes numérique	42
2.4.2	Méthodes à base des règles.....	45
2.4.3	Méthodes analytique.....	50

2.5 Conclusion.....	54
Chapitre 3 : Réglage analytique du $PI^{\lambda}D^{\mu}$	
3.1 Introduction	55
3.2 Formulation du problème	56
3.3 Présentation de la méthode	58
3.3.1 Etape 1.....	58
3.3.2 Etape 2.....	59
3.3.3 Etape 3.....	60
3.3.4 Etape 4.....	61
3.3.5 Etape 5.....	62
3.3.6 Etape 6.....	63
3.4 Algorithme de réglage du $PI^{\lambda}D^{\mu}$	66
3.4.1 Les entrées	66
3.4.2 L'Algorithme de calcul	66
3.5 Résultats de simulation.....	68
2.5.1 Exemples illustratifs	68
2.5.2 Exemples de comparaison	71
2.5.2.1 Comparaison avec le PID classique	71
2.5.2.2 Comparaison avec le PD^{μ} et le $[PD]^{\mu}$	74
3.5.3 Système avec temps de retard.....	78
2.5 Conclusion.....	81
Chapitre 4 : $PI^{\lambda}D^{\mu}$ auto ajustable pour la commande d'une Turbine éolienne	
4.1 Introduction	82
4.2 Système De conversion d'énergie éolienne.....	83
4.2.1 Modèle dynamique de la turbine éolienne.....	84

4.2.2 Linéarisation du modèle de la turbine	85
4.2.3 Modèle généralisé de la génératrice auto excitée.....	86
4.2.4 Système d'orientation des pales	87
4.3 Conception de la commande.....	88
4.4 Implémentation du $PI^\lambda D^\mu$ ajustable	90
4.5 Résultats de simulation.....	93
2.5.1 Application au système linéaire.....	93
2.5.2 Application au système non-linéaire	95
4.6 Conclusion.....	99
Conclusion générale.....	101
Références.....	103
Abstract	108

Liste des figures

1.1	Tracé de la fonction $\Gamma(z)$	6
1.2	Facteur d'oubli pour différents valeurs de m	11
1.3	Diagramme de Bode de l'intégrateur d'ordre 0.8 et son approximé	16
1.4	Diagramme de Bode de dérivateur d'ordre 0.3	17
1.5	Réalisation analogique d'un intégrateur d'ordre fractionnaire	18
1.6	Réalisation analogique d'un dérivateur d'ordre fractionnaire	19
2.1	Différent zones de stabilité d'un système d'ordre fractionnaire	25
2.2	Diagramme de Bode de la fonction (2.11) pour m entre 0.6 et 1.8	26
2.3	Réponse indicelles du système (2.10) $\tau_0=1$	27
2.4	Boucle de commande idéale de Bode	27
2.5	Réponse indicelle du système (2.13) pour différentes valeurs du gain K	29
2.6	Diagramme de Bode du correcteur à avance-retard de phase fractionnaire	32
2.7	Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ et le PID classique	34
2.8	L'effet des cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sur la réponse fréquentielle, (A) l'effet de λ , (B) l'effet de μ , (C) l'effet de K_c , (D) l'effet de T_i , (E) l'effet de T_d	35
2.9	Effets des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sur la réponse temporelle	38
2.10	Système de réglage du $PI^\lambda D^\mu$ proposé par Barbosa	44
2.11	Réponse indicelle de la forme S	46
2.12	Diagramme asymptotique de la phase d'un système d'ordre n	50
3.1	Boucle de commande classique	56

3.2	Schéma synoptique de principe du réglage proposé.....	68
3.3	Diagramme de Bode de la boucle ouverte $C_1(s) G_{p1}(s)$ et du modèle désiré $(s/1000)^{-1.33}$.	70
3.4	Diagramme de Bode de la boucle ouverte $C_2(s) G_{p2}(s)$ et du modèle désiré $(s/1000)^{-1.33}$.	70
3.5	Réponses indicielle du système $C_1(s)G_{p1}(s)$ en boucle fermée et du modèle désiré $G_d(s)$.	72
3.6	Réponses indicielle du système $C_2(s) G_{p2}(s)$ en boucle fermée et du modèle désiré $G_d(s)$.	72
3.7	Diagrammes de Bode des fonctions en boucle ouverte $C_3(s) G_{p3}(s)$ et $C_{PID}(s) G_{p3}(s)$.	73
3.8	Réponse indicielles du système (3.47) commandé par C_{PID} et C_3 pour différentes valeurs du gain k.	74
3.9	Réponses indicielles du système commandé par C_4 , C_{FPD} et C_{PDF} .	76
3.10	Diagrammes de Bode des fonctions $C_{FPD}(s)G_{p4}(s)$, $C_{PDF}(s)G_{p4}(s)$ et $C_4(s)G_{p4}(s)$.	76
3.11	Diagrammes Bode des fonctions $C5(s)G_{p4}(s)$ et de la boucle ouverte désirée $(s/\omega_u)^{-m}$ pour les différents valeurs : (A): $\varphi_m=30$, $\omega_u=10$; (B): $\varphi_m=45$, $\omega_u=30$; (C): $\varphi_m=65$, $\omega_u=5$; (D): $\varphi_m=85$, $\omega_u=50$.	78
3.12	Réponse indicielle du système (3.58) en boucle fermée est du système désiré (3.59).	80
3.13	Diagramme de bode de la fonction $C_6(s) G_p(s)$.	81
4.1	Système de conversion d'énergie éolienne.....	83
4.2	Les entrées sorties de la turbine éolienne	85
4.3	Modèle linéaire de la turbine	86
4.4	Principe de la commande auto ajustable.....	88
4.5	Stratégie de commande proposée	90
4.6	Opérateur d'ordre fractionnaire variable	90
4.7	Implémentation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire variable	92
4.8	Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ ajustable.....	92

4.9	Diagramme de Bode de la fonction $C(s) G_p(s)$	94
4.10	Réponse temporelles du système en boucle fermée à la présence des variations paramétriques ; à $t=3s$ $K=K/10$; à $t=6s$ $T= T*10$	94
4.11	Schéma synoptique de la commande proposée	95
4.11	(A) Vitesse de la turbine ; (B) angle d'orientation β ; (C) Vitesse du vent; (D) paramètres du système; (E) et (F) paramètres du correcteur.	96

Liste de tableaux

1.1	Dérivées fractionnaire de quelques fonctions usuelles.....	11
2.1	Les Relations des paramètres selon une règle.	46
2.2	Les règles des paramètres λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$	49
2.3	Comparaison des techniques de réglages	54
3.1	$PI^\lambda D^\mu$ réglé pour différentes valeurs de m et ω_u	77

Résumé :

Dans cette thèse, une nouvelle technique de réglage analytique du $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire a été proposée. Cette technique, consiste à concevoir un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ dans une boucle de commande à retour unitaire afin que le système en boucle fermée soit équivalent à un modèle désiré, le système désiré utilisé dans ce travail qui est la fonction idéale de Bode est largement utilisé pour la conception des lois de commande d'ordre fractionnaire, l'importance de cet modèle se réside généralement dans sa caractéristique de robustesse très importante dite iso-amortissement. Un algorithme de six étapes permettant le réglage des paramètres du correcteur a été établi. Cette formulation analytique des paramètres rendre la méthode plus pratiques et plus simple. Des exemples illustratifs pour différents processus ont été présentés pour valider l'efficacité, la flexibilité et la précision de la méthode proposée.

La seconde partie de ce travail concerne la proposition d'une méthode de commande en se basant sur un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire auto-ajustable afin de satisfaire des spécifications désirées en boucle fermée. Cette technique est adaptée à la commande de la vitesse d'une turbine éolienne couplée à une génératrice asynchrone auto-excitée dans un système de production d'énergie électrique. En effet, un modèle linéaire à paramètres variant est utilisé afin d'implémenter l'algorithme de réglage proposé en ligne dont un correcteur auto-ajustable permettant de maintenir le système en boucle fermée équivalent à notre système désiré. Dans ce contexte, une implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire ajustable est utilisée pour rendre l'exploitation du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable plus simple et plus pratique.

Mots Clés :

Fonction de transfert idéale de Bode ; Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire ; Propriété d'iso-amortissement ; Réponse indicielle.

Introduction Générale :

Depuis les premiers travaux des dérivées d'ordre fractionnaire il y'a quelques siècles, la théorie du calcul fractionnaire a été développée généralement par des mathématiciens. Dans les dernières décennies, un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [1]. Récemment, les systèmes d'ordre fractionnaire ont reçu une grande attention, du point de vue à la fois académique et industriel à cause de leur grande flexibilité qui a permis une modélisation plus précise des systèmes complexes et l'accomplissement des exigences de la commande des systèmes de plus en plus croissantes et défiantes [2-9]. Un domaine qui a beaucoup bénéficié des avantages de la théorie du calcul fractionnaire est le domaine de la commande des systèmes dynamiques. Alors, la commande d'ordre fractionnaire signifie que les systèmes à commander et/ou les correcteurs utilisés sont décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cependant, dans la pratique, il est plus raisonnable de considérer le correcteur d'ordre fractionnaire parce que les systèmes à commander ont été en général déjà obtenus comme des systèmes classiques d'ordre entier.

Bien que la commande d'ordre fractionnaire soit un sujet très récent, son origine revient aux années 40 dans les travaux de Bode qui a proposé une solution élégante au problème de la conception des amplificateurs à rétroaction ayant un comportement, en boucle fermée, insensible au changement du gain de l'amplificateur [10]. La fonction de transfert en boucle ouverte réalisée par Bode a été un intégrateur d'ordre fractionnaire appelé Fonction Idéale de Bode. Mais, c'était Tustin, en 1958, qui a introduit la commande d'ordre fractionnaire pour la commande de position de deux masses [11]. Quelques travaux pionniers de la commande d'ordre fractionnaire ont aussi été faits dans les années 60 par Manabe qui a employé le calcul fractionnaire dans les boucles de la commande des systèmes [12]. Au début des années 1990, Oustaloup a développé la Commande Robuste d'Ordre non Entier (CRONE) et a appliqué cette technique de commande fractionnaire aux différents types des systèmes [13]. Cette technique de commande consiste à utiliser les opérateurs d'ordre fractionnaire dans la commande des systèmes dynamiques afin d'améliorer leurs performances en boucle fermée en satisfaisant une caractéristique de robustesse très importante dite iso-amortissement. Après la réussite du correcteur CRONE, plusieurs types de commande d'ordre fractionnaire ont été proposés en se basant sur des généralisations des correcteurs classiques [13].

En 1999, Podlubny a proposé une généralisation du correcteur PID, à savoir le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire, utilisant une action d'intégration d'ordre fractionnaire λ et une action de différentiation d'ordre fractionnaire μ [14]. L'intérêt de ce genre de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a deux paramètres supplémentaires qui sont les ordres d'intégration et de différentiation fractionnaire. Ces paramètres peuvent être employés pour remplir des caractéristiques additionnelles ou d'autres conditions intéressantes pour le système à commander. Néanmoins, la conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire reste un défi pour les chercheurs de ce domaine. Ce défi est dû d'une part au problème d'implémentation où théoriquement une mémoire infinie est nécessaire ; d'autre part à la difficulté de réglage des cinq paramètres au lieu des trois du correcteur classique parce que les deux paramètres supplémentaires λ et μ sont des puissances pas des gains. Cependant, plusieurs implémentations existent dans la littérature [5] permettant de bonnes approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire et par conséquent simplifier l'exploitation de ce correcteur. Depuis l'introduction du correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$, plusieurs chercheurs ont abordé le sujet de réglage de ce correcteur pour rendre son utilisation plus simple et plus pratique. En effet, plusieurs méthodes de réglage ont été proposées dont le but est de bénéficier au maximum possible de la flexibilité de ce correcteur d'ordre fractionnaire afin d'améliorer les performances des systèmes asservis. Au cours de la dernière décennie, ces méthodes de réglages peuvent être divisées en trois types, méthodes numériques, méthodes à base de règles et méthodes analytiques [15-21]. Parmi ces techniques de réglage existantes, nous nous intéressons aux méthodes analytiques, dont les paramètres du correcteur sont dérivés mathématiquement sans l'utilisation des algorithmes d'optimisation.

Malgré toutes les méthodes introduites pour le réglage des cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$, un travail de recherche continu et intensif pour le développement de nouvelles techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est toujours en cours pour le rehaussement et l'amélioration de la qualité des performances et de la robustesse des systèmes asservis.

Objectif de la thèse

Ce travail porte essentiellement sur le développement des techniques de réglage des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire afin d'améliorer la qualité de la commande des systèmes asservis. Alors, le travail réalisé dans cette thèse présente une nouvelle stratégie de

réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire. Dans cette technique de réglage, les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire sont obtenus analytiquement à partir de la réponse indicielle du procédé à commander et les paramètres du modèle de référence désiré dit modèle idéale de Bode. Des exemples illustratifs pour différents processus ont été présentés pour valider l'efficacité, la flexibilité et la précision de la méthode proposée. Puis la technique de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ proposée dans la première étape a été étendue pour le développement du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire auto-ajustable où les cinq paramètres du correcteur sont ajustés en ligne en fonction des paramètres variables du procédé. Cette technique est adaptée à la commande de la vitesse d'une turbine éolienne couplée à une génératrice asynchrone auto-excitée dans un système de production d'énergie électrique. Dans ce cas, le réglage des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable sont calculés analytiquement en ligne à partir des paramètres du modèle linéarisé de la turbine autour de son point de fonctionnement variable. Une implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire ajustable est aussi utilisée pour rendre l'exploitation du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable plus simple et plus pratique.

Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée de la manière suivante :

Le chapitre 1 présente un aperçu historique sur le calcul fractionnaire, les définitions fondamentales de la dérivée et de l'intégrale d'ordre fractionnaire ainsi que les outils essentiels pour la compréhension de notre travail sur la commande d'ordre fractionnaire. Puis, le problème d'implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire en se basant sur l'approximation des opérateurs fractionnaires par des fonctions rationnelles a été abordé. Enfin, quelques domaines d'application des opérateurs d'ordre fractionnaire ont été donnés.

Le chapitre 2 traite les notions de base de la commande d'ordre fractionnaire. En effet, ce chapitre est partagé en trois parties, la première est une introduction aux systèmes d'ordre fractionnaire, y compris leurs représentations mathématiques, leurs réponses temporelles et fréquentielles, ainsi que leur notion de stabilité. Un aperçu général sur le système fractionnaire élémentaire ou bien la boucle idéale de Bode a été aussi présentée. La deuxième partie donne un aperçu sur la commande d'ordre fractionnaire, notamment le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire en s'étalant sur sa représentation, sa structure et son implantation. La dernière partie du chapitre est consacrée aux méthodes de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ existantes dans

la littérature. Les techniques de réglage de quelques méthodes les plus connues sont présentées en donnant leurs avantages et leurs inconvénients.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation de la méthode de réglage analytique du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire développée dans le cadre des travaux de cette thèse. Cette méthode permet de régler les paramètres du correcteur en utilisant que la réponse indicielle des systèmes stables et ne nécessitant aucune approximation du processus à commander par un modèle. S'inspirant d'une technique récente de réglage du correcteur PID classique. La méthode proposée consiste à approximer la fonction de transfert en boucle fermée en séries de Taylor-Maclaurin, puis par analogie avec un modèle désiré, les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sont calculés pour que le système en boucle fermée soit équivalent à la boucle idéale de Bode. Des exemples illustratifs pour différents processus ont été présentés pour valider l'efficacité, la flexibilité et la précision de la méthode proposée.

Le chapitre 4 présente une stratégie de la commande de la vitesse d'une turbine éolienne couplée à une génératrice asynchrone auto-excitée dans un système de production d'énergie électrique. La stratégie de commande développée est un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire auto-ajustable où les cinq paramètres du correcteur sont ajustés en ligne en fonction des paramètres variables du procédé. En se basant sur la technique de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ proposée dans le chapitre 3, le réglage des cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable est fait analytiquement en ligne à partir des paramètres du modèle linéarisé de la turbine autour de son point de fonctionnement variable. Une implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire ajustable est aussi utilisée pour rendre l'exploitation du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable plus simple et plus pratique. Ce travail montre l'avantage majeur de la nouvelle technique de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire proposée qu'on puisse considérer comme un point de départ pour le développement de nouvelles stratégies de commande grâce à leur simplicité d'utilisation.

Chapitre *1*

Généralités sur le calcul fractionnaire

1.1 Introduction :

Le calcul fractionnaire est connu comme une généralisation des dérivées et d'intégrales d'ordre entier, des nombreux mathématiciens célèbres tels qu'Euler, Laplace, Fourier, Abel, et Laurent ont travaillé sur l'idée du calcul fractionnaire. Au 19^{ème} cycle et grâce aux contributions principales des Liouville, Grünwald, Letnikov et Riemann que toute une théorie complète adaptée aux développements mathématiques modernes a été formalisée. Aujourd'hui, le calcul fractionnaire est une théorie bien établie avec une forte base mathématique [2, 22-26]. La principale raison de l'utilisation du calcul fractionnaire dans beaucoup de domaines de recherche est qu'il fournit un outil plus précis pour décrire plusieurs phénomènes physiques.

Dans ce chapitre on va présenter un aperçu historique sur le calcul fractionnaire ainsi que les définitions fondamentales de la dérivée et de l'intégrale d'ordre fractionnaire. Puis, nous allons discuter le problème d'implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire en se basant sur l'approximation des opérateurs fractionnaires par des fonctions rationnelles. Finalement on va donner quelques domaines d'application des opérateurs d'ordre fractionnaire.

1.2 Aperçu historique [1] :

Le calcul fractionnaire est un sujet très ancien qui a commencé à la fin du 17^{ième} cycle par les travaux de Leibniz qui a introduit le symbole de dérivation d'ordre entier n , $d^n(.) / d(.)$. Cette représentation symbolique poussa l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n fractionnaire et il envoya une lettre à Leibniz en 1695 en se demandant si $n = 1/2$? ; Alors le calcul fractionnaire est né. La première tentative sérieuse de donner une définition logique de la dérivée d'ordre fractionnaire est due à Liouville en 1855 ; et depuis plusieurs contributions ont été développées au cours du 18^{ième} et 19^{ième} siècle tels que les travaux d'Euler Lacroix, Letnikov, Liouville et Riemann...etc. Ce n'est qu'au cours de la seconde moitié du 20^{ième} siècle que des avancées majeures concernant la théorie du calcul fractionnaire ont été réalisées [22-25]. Aujourd'hui, c'est grâce au développement technologique que le calcul fractionnaire est largement utilisé dans les domaines tels que la mécanique, l'électricité, la chimie, la modélisation des systèmes, la biologie, le traitement du signal, la commande et la robotique [4-5, 27-30].

1.3 Fonctions spéciales du calcul fractionnaire :

Dans cette section, on va donner quelques fonctions mathématiques utilisées en calcul fractionnaire telles que la fonction gamma qui est une généralisation du factorielle aux nombres réels et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle très important dans la solution des équations différentielle d'ordre fractionnaire [27].

1.3.1 La fonction gamma :

La fonction gamma d'Euler c'est une extension de la fonction factorielle aux nombres non entiers. La fonction gamma est définie par l'intégrale suivante [27] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

Dans le cas où z est complexe la fonction gamma converge si z est a partie réelle positive ; si z est entier la fonction gamma donne le même résultat que la fonction factorielle. La propriété la plus importante de cette fonction est l'égalité suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (1.2)$$

Figure (1.1) montre le tracé de la fonction $\Gamma(z)$ pour z réel et tel que $-6 < z < 4$. A partir de cette figure, la fonction gamma est toujours positive lorsque z est positif. On note aussi que la fonction gamma est indéterminée pour tous les nombres entiers négatifs.

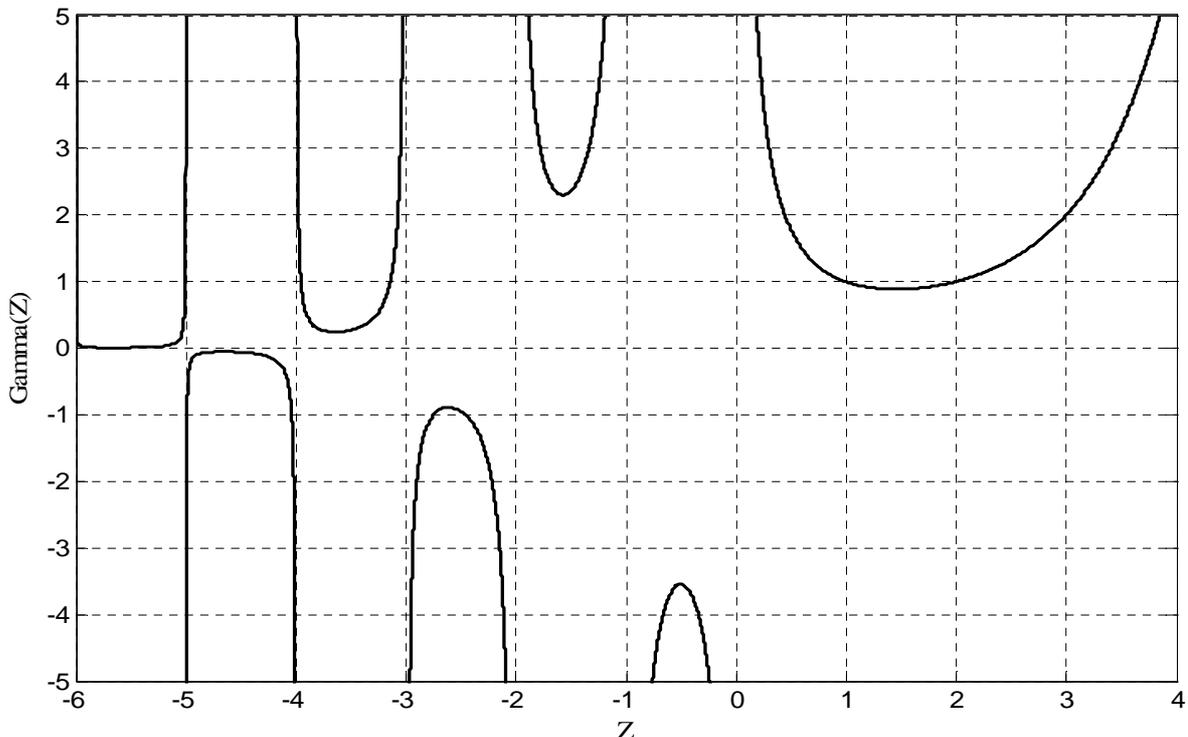


Figure (1.1) : Tracé de la fonction $\Gamma(z)$

1.3.2 Fonction Mittag-Leffler :

Il est bien connu dans la littérature que les fonctions exponentielles jouent un rôle très important dans la théorie des systèmes linéaires d'ordre entier. Dans la théorie des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire, on trouve aussi les fonctions de Mittag-leffler qui jouent le même rôle que les fonctions exponentielles dans la théorie des systèmes linéaires d'ordre entier [27]. La fonction de Mittag-leffler à un paramètre introduite par G.M. Mittag-Leffler en 1930 est donnée par l'expression suivante [27] :

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.3)$$

On note que pour $\alpha = 1$ on a $E_1(t) = e^t$. La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction est définie comme suit [27] :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.4)$$

On note aussi que pour $\beta = 1$, on obtient la fonction d'un seul paramètre de l'équation (1.3). Cette fonction standard a aussi les propriétés suivantes [27] :

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= e^z, & E_{1,2}(z) &= \frac{e^z - 1}{z} \\ E_{2,1}(z) &= \cosh(\sqrt{z}), & E_{2,1}(-z^2) &= \cos(z) \\ E_{1/2,1}(\sqrt{z}) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^z \operatorname{erfc}(-\sqrt{z}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Généralement, le calcul numérique de cette fonction est fait par troncation de la somme de l'équation (1.4). Récemment, une méthode numérique très efficace pour le calcul de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres a été proposée dans [31].

1.4 Opérateurs d'ordre fractionnaire :

L'opérateur de la dérivée généralisée ou bien l'opérateur intégro-différentielle continu est défini comme suit [22] :

$${}_c D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} & \Re(m) > 0 \\ 1 & \Re(m) = 0 \\ \int_c^t (d\tau)^{-m} & \Re(m) < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

où m est l'ordre de l'opération, généralement $m \in \mathbb{C}$, c et t sont des limites de l'opérateur.

Plusieurs définitions mathématiques ont été proposées pour l'intégration et la dérivée d'ordre fractionnaire. Notamment les définitions les plus connues ou les plus utilisées sont ceux de Caputo, de Grünwald-Leitnikov et de Riemann-Liouville [27].

1.4.1 Définition de Riemann-Liouville

L'intégrale d'ordre fractionnaire m d'une fonction $f(t)$ localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty]$ est donnée comme suit [27] :

$${}_{\text{RL}} I_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

avec Γ est la fonction gamma d'Euler.

La dérivée d'ordre fractionnaire $m > 0$ d'une fonction $f(t)$ localement dérivable définie sur $[t_0, +\infty]$ est donnée aussi comme suit [27] :

$${}_{\text{RL}} D_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - m)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-m-1} f(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

où le nombre entier n est tel que $(n - 1) < m < n$.

1.4.2 Définition de Grünwald-Leitnikov

La dérivée d'ordre fractionnaire $m > 0$ d'une fonction $f(t)$ est définie par la relation suivante [27] :

$${}_{\text{GL}} D^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-m} \sum_{j=0}^K (-1)^j \binom{m}{j} f(t - jh) \quad (1.9)$$

où h est la période d'échantillonnage. Les termes $\binom{m}{j}$ sont les coefficients du binôme

suivant :

$$(1 - z)^m = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \omega_j^{(m)} z^j \quad (1.10)$$

avec $\binom{m}{0} = \omega_0^{(m)} = 1$ et les termes $\binom{m}{j}$ sont donnés par l'expression suivante :

$$\binom{m}{j} = \omega_j^{(m)} = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(m - j + 1)} \quad (1.11)$$

L'intégrale d'ordre fractionnaire $m > 0$ d'une fonction $f(t)$ est définie par la relation :

$${}_{GL}I^m f(t) = {}_{GL}D^{-m} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^m \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-m}{j} f(t - jh) \quad (1.12)$$

où les termes $\binom{-m}{j} = \omega_j^{(-m)}$ sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1-z)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-m}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \omega_j^{(-m)} z^j \quad (1.13)$$

avec $\binom{-m}{0} = \omega_0^{(-m)} = 1$.

1.4.3 Définition de Caputo

La définition de la dérivée d'ordre fractionnaire introduite par Caputo est donnée par [27] :

$${}^C_{t_0} D_t^m f(t) = {}^{\Delta} I^{n-m} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{m-n+1}} d\tau \quad (1.14)$$

avec n est un entier positif tel que $(n-1) < m < n$. Cette définition peut être formulée en fonction de la définition de Riemann-Liouville comme suit :

$${}_{RL} D^{\mu} f(t) = {}^C D^{\mu} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\mu}}{\Gamma(k-\mu+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (1.15)$$

alors :

$${}^C D^{\mu} f(t) = {}_{RL} D^{\mu} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) \quad (1.16)$$

On remarque que la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction dans un point nécessite la connaissance de tout le passé de cette fonction contrairement à la dérivée classique où une connaissance locale autour du point est suffisante.

1.4.4 Quelques propriétés de la dérivée d'ordre fractionnaire

Les propriétés principales de la dérivée d'ordre fractionnaire sont les suivantes [28] :

1. Si $f(t)$ est une fonction analytique en t , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^m f(t)$ est une fonction analytique en t et m .
2. Pour $m = n$, où n est un entier, l'opération $D^m f(t)$ donne le même résultat que la dérivée classique d'ordre entier n .
3. Pour $m = 0$ l'opération $D^m f(t)$ est l'opérateur identité : $D^0 f(t) = f(t)$

4. La dérivée et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires $D^m[af(t) + bg(t)] = aD^m f(t) + bD^m g(t)$.
5. La loi additive (propriété du semi-groupe) $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$ est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(t)$.

1.4.5 Interprétation géométrique

Dans la littérature, la dérivée d'ordre entier a un sens physique et géométrique ce qui permet de simplifier son introduction dans la résolution des problèmes appliqués dans les domaines scientifiques ; mais pour la différentiation d'ordre fractionnaire de telles interprétations sont complètement absentes. Ce problème a été abordé lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire en 1974 où la question a été classée parmi les problèmes ouverts [23]. Récemment, beaucoup d'efforts ont été dédiés à cette question et différentes approches pour donner un sens physique et géométrique à la différentiation d'ordre fractionnaire ont été proposées [32-34]. Si on pose l'ordre $m = 1$ dans l'expression (1.7) on obtient une intégrale classique de la fonction $f(t)$ qui correspond à l'aire délimité par la fonction $f(t)$ et l'axe des abscisses ; dans le cas où m est fractionnaire on peut réécrire l'équation (1.7) comme suit [35] :

$${}_{RL} I_{t_0}^m f(t) = \frac{(t)^{m-1}}{\Gamma(m)} * f(t) \quad (1.17)$$

où $*$ représente le produit de convolution. La fonction $h(t) = (t)^{m-1}/\Gamma(m)$ a pondéré différemment chaque valeur de la fonction $f(t)$; donc l'intégrale de l'équation (1.7) peut être interpréter comme l'aire délimité par l'axe des abscisses et la fonction $f(t)$ pondéré par la fonction $h(t)$. Lorsque $m < 1$, la valeur de l'intégrale en un point t est plus influencée par les points de son voisinage que par des points plus éloignés. Oustaloup a appelé la fonction de pondération $h(t)$ le facteur d'oubli [35]. Figure (1.2) montre la variation de $h(-t)$ en fonction de l'ordre m . A travers cette interprétation, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l'ordre d'intégration m mettent en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion.

De la figure (1.2), et comme la fonction $h(20-t)$ représente une fonction de pondération des valeurs de la fonction $f(t)$ lors de l'intégration, on peut remarquer que les valeurs les plus récents ont plus d'importance par rapport à ceux les plus éloigné. En conclusion, la

convolution de l'équation (1.17) représente un nouveau concept mathématique qui définissant l'opérateur d'ordre fractionnaire.

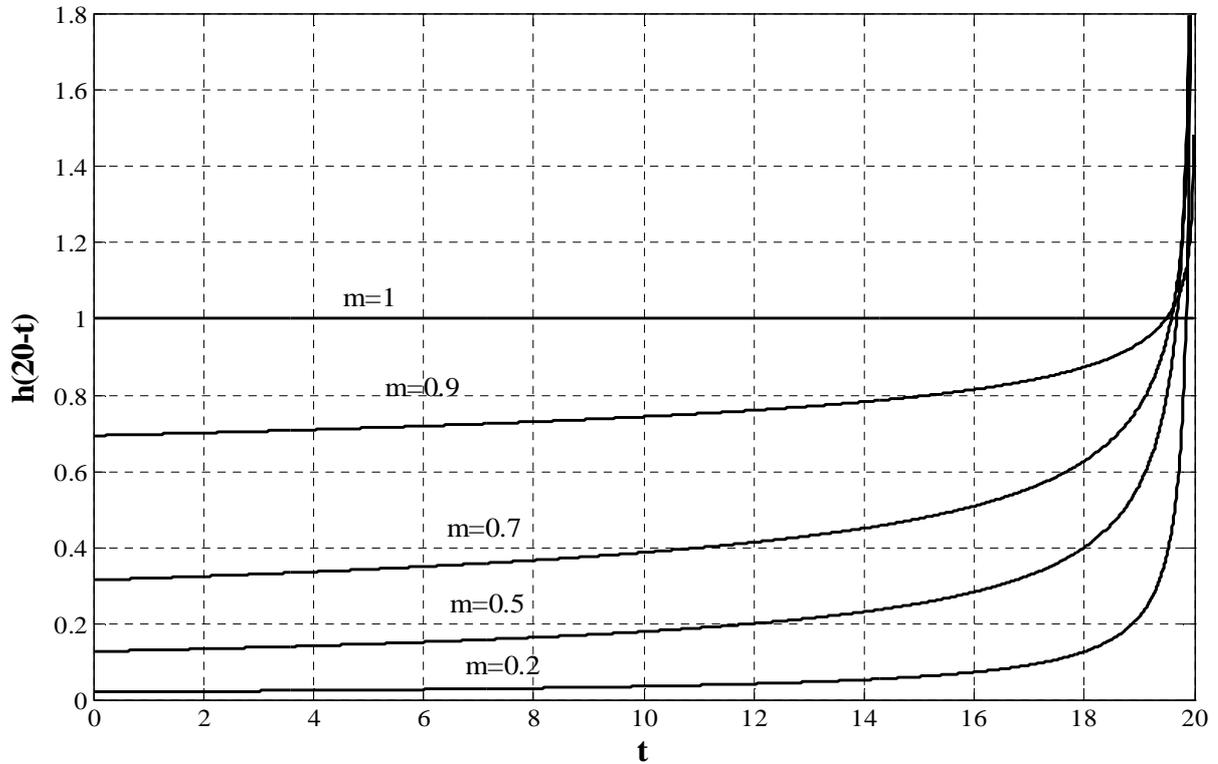


Figure (1.2) : Facteur d'oubli $h(-t)$ pour différents valeurs de m .

1.4.6 Dérivées fractionnaire des quelques fonction usuelles :

Les dérivées d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles obtenues par la définition du Riemann-Liouville avec limite inférieure égale à 0 sont montrées dans le tableau (1.1) [36].

Table 1.1 Dérivées fractionnaire de quelques fonctions usuelles

Fonction $f(t)$	Dérivé d'ordre m : ${}_0D_t^m f(t)$
$H(t)$ (échelon unité)	$\frac{t^m}{\Gamma(1-m)}$
$H(t-a)$	$\begin{cases} \frac{(t-a)^m}{\Gamma(1-m)} & (t > a) \\ 0 & (0 \leq t \leq a) \end{cases}$
$\delta(t)$	$\frac{t^{-m-1}}{\Gamma(-m)}$

$\delta^{(n)}(t) \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{t^{-n-m-1}}{\Gamma(-m-n)}$
$e^{\lambda t}$	$t^{-m} E_{1,1-m}(\lambda t)$
$(t-a)$	$\frac{(t-a)^{1-m}}{\Gamma(2-m)}$
$(t-a)^p \quad \text{pour } p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)(t-a)^{p-m}}{\Gamma(p-m+1)}$
$t^v \quad \text{pour } v > -1$	$\frac{\Gamma(v+1) t^{v+m}}{\Gamma(v+1-m)}$
$\cosh(\sqrt{\lambda}t)$	$t^{-m} E_{2,1-m}(\lambda t^2)$

1.4.7 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

La transformé de Laplace d'une fonction $f(t)$ est donné par l'expression suivante :

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.18)$$

La transformée de Laplace inverse d'une fonction $F(s)$ est donnée par :

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} dt \quad (1.19)$$

où σ est supérieur aux parties réelles de tous les pôles de $F(s)$.

La transformé de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire m pour les différentes définitions précédentes est donnée comme suit [27] :

$$L\{I^m f(t)\} = s^{-m} F(s) \quad (1.20)$$

Cependant la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire m dépend de la définition utilisée à cause des conditions initiales. Selon la définition de Riemann-Liouville de (1.8), la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire m est donnée par [27] :

$$L\{D^m f(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{m-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (1.21)$$

Dans ce cas, la transformé de Laplace dépend des valeurs initiales $[D^{m-k-1} f(t)]_{t=0}$ qui sont des dérivés d'ordre fractionnaire au point $t = 0$. Ces valeurs n'ont aucune interprétation physique pour $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ et l'extraction de ces valeurs pose toujours un grand problème d'application ; alors l'applicabilité de cette définition en pratique reste très limitée.

Selon la définition de Grünwald-Leitnikov de (1.9), la transformé de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire m est donnée par [27] :

$$\mathcal{L}\{D^m f(t)\} = s^m F(s) \quad (1.22)$$

Selon la définition de Caputo (1.14), la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire m est donnée par [27] :

$$\mathcal{L}\{D^m f(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \quad (1.23)$$

Cette transformée est très utilisée en pratique à cause des valeurs initiales conventionnelles $f^{(k)}(0)$, pour $k=0, 1, \dots, (n-1)$. Alors, pour l'étude et l'analyse des systèmes, la définition de Caputo semble être la plus appropriée que les deux autres.

1.4.8 Calcul numérique des dérivés et intégrales d'ordre fractionnaire

Dans la littérature, bien que les trois définitions de R-L, G-L et Caputo donnent le même résultat pour une large classe de fonctions, pour le calcul numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire on utilise en général la forme tronquée de la relation de la dérivée de la définition de G-L de l'équation (1.9). Alors, la dérivée d'ordre m d'une fonction $f(t)$ en un point t est donnée par [5] :

$${}_a D_t^m f(t) = h^{-m} \sum_{j=0}^{(t-a)/h} w_j^{(m)} f(t - jh) \quad (1.24)$$

où a est le temps initial, h est la période d'échantillonnage et les coefficients $w_j^{(m)}$ sont calculés par la relation suivante :

$$w_0^{(m)} = 1, \quad w_j^{(m)} = \left(1 - \frac{m+1}{j}\right) w_{j-1}^{(m)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

1.5 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Comme on a vu dans la section précédente, les transformés de Laplace de l'intégrateur et du dérivateur d'ordre fractionnaire sont données, respectivement, par les deux fonctions irrationnelles suivantes respectivement :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m}, \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (1.26)$$

$$G_D(s) = s^m, \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (1.27)$$

Ces deux fonctions de transferts irrationnelles sont physiquement irréalisables même leurs implémentations pour une analyse ou une simulation sont très difficiles. Donc, l'utilisation de ces opérateurs nécessite l'approximation de leurs fonctions de transfert irrationnelles par des

fonctions rationnelles dans une bande fréquentielle choisie. Plusieurs méthodes ont été développées dans ce contexte ou on peut distinguer deux types de méthodes d'approximations numérique et analogique. Un résumé de ces méthodes est présenté dans les références [37-38]. Les méthodes les plus utilisées dans la littérature sont ceux d'Oustaloup [35] et de Charef [39]. Dans la section suivante on va présenter en détail la méthode d'approximation de Charef qu'on a utilisée dans les travaux de cette thèse. L'objectif de la méthode de Charef est l'approximation des fonctions de transfert irrationnelles d'un intégrateur et d'un dérivateur par des fonctions rationnelles dans une bande fréquentielle choisie. L'idée est d'approximer l'intégrateur d'ordre fractionnaire par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) et le dérivateur d'ordre fractionnaire par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) [39].

1.5.1 Méthode d'approximation de Charef

Le PPF est donné par la fonction suivante :

$$G(s) = \frac{K_I}{(1 + (s/\omega_c))^m} \quad (1.28)$$

L'approximation du PPF par une fonction rationnelle est donnée par [39] :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.29)$$

Les pôles p_i et les zéros z_i de cette approximation sont obtenus par :

$$p_i = (ab)^i p_0 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, N) \quad (1.30)$$

$$z_i = (ab)^i a p_0 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1.31)$$

Pour une erreur d'approximation y en dB et une fréquence maximale ω_{\max} donnée, les paramètres d'approximation a , b , p_0 et N sont calculés par :

$$a = 10^{\lfloor y/10(1-m) \rfloor}, \quad b = 10^{\lfloor y/10m \rfloor}, \quad p_0 = \omega_c 10^{\lfloor y/20m \rfloor} \quad (1.32)$$

$$N = \text{Integer} \left[\frac{\log(\omega_{\max} / p_0)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (1.33)$$

Si on est dans la bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$ on a $\omega \gg \omega_c$, donc on peut écrire:

$$G(s) = \frac{K_I}{(s/\omega_c)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = G_I(s) \quad (1.34)$$

avec $K_I = (1/\omega_c^m)$ et ω_c la fréquence de coupure du PPF à $-3m$ dB est donnée par :
 $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(\varepsilon/10m)} - 1}$, où ε est l'erreur maximale entre les pentes de l'intégrateur et le PPF dans la bande $[\omega_L, \omega_H]$. Alors, dans la bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$, l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + s/[ap_0(ab)^i])}{\prod_{i=0}^N (1 + s/[p_0(ab)^i])} \quad (1.35)$$

Le ZPF est donné par la fonction suivante :

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \quad (1.36)$$

L'approximation du ZPF par une fonction rationnelle est donnée par [39] :

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.37)$$

Les zéros z_i et les pôles p_i sont obtenus comme suit :

$$z_i = (ab)^i z_0 \quad \text{et} \quad p_i = (ab)^i a z_0 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, N) \quad (1.38)$$

Pour une erreur d'approximation y en dB et une fréquence maximale ω_{\max} donnée, les paramètres d'approximation a , b , z_0 et N sont calculés par :

$$a = 10^{[y/10(1-m)]}, \quad b = 10^{[y/10m]}, \quad z_0 = \omega_c 10^{[y/20m]} \quad (1.39)$$

$$N = \text{Integer} \left[\frac{\log(\omega_{\max}/z_0)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (1.40)$$

Si on est dans la bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$ on a $\omega \gg \omega_c$, donc on peut écrire:

$$G(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} s^m = s^m = G_D(s) \quad (1.41)$$

avec $K_D = (\omega_c^m)$ et ω_c la fréquence de coupure du ZPF à $3m$ dB est donnée par $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(\varepsilon/10m)} - 1}$, où ε est l'erreur maximale entre les pentes du dérivateur et le ZPF dans la bande $[\omega_L, \omega_H]$. Alors, dans la bande de fréquence $[\omega_L, \omega_H]$, l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$G_D(s) = s^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N (1 + s/[z_0(ab)^i])}{\prod_{i=0}^N (1 + s/[az_0(ab)^i])} \quad (1.42)$$

1.5.2 Exemples illustratives :

A) Intégrateur :

On veut approximer un intégrateur d'ordre 0.8 dans une bande fréquentielle $[10 \ 10^3]$ pour $y = 1$ dB et $\varepsilon = 10^{-5}$. De la section précédente l'approximation est donnée par l'équation suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.8}} \cong 26.0825 \frac{\prod_{i=0}^{10} (1 + s/[0.062(4.217)^i])}{\prod_{i=0}^{11} (1 + s/[0.0196(4.217)^i])} \quad (1.43)$$

Figure (1.3) montre le tracé de Bode de l'intégrateur d'ordre 0.8, on remarque que les deux courbe sont superpose à l'intérieur de la bande d'approximation.

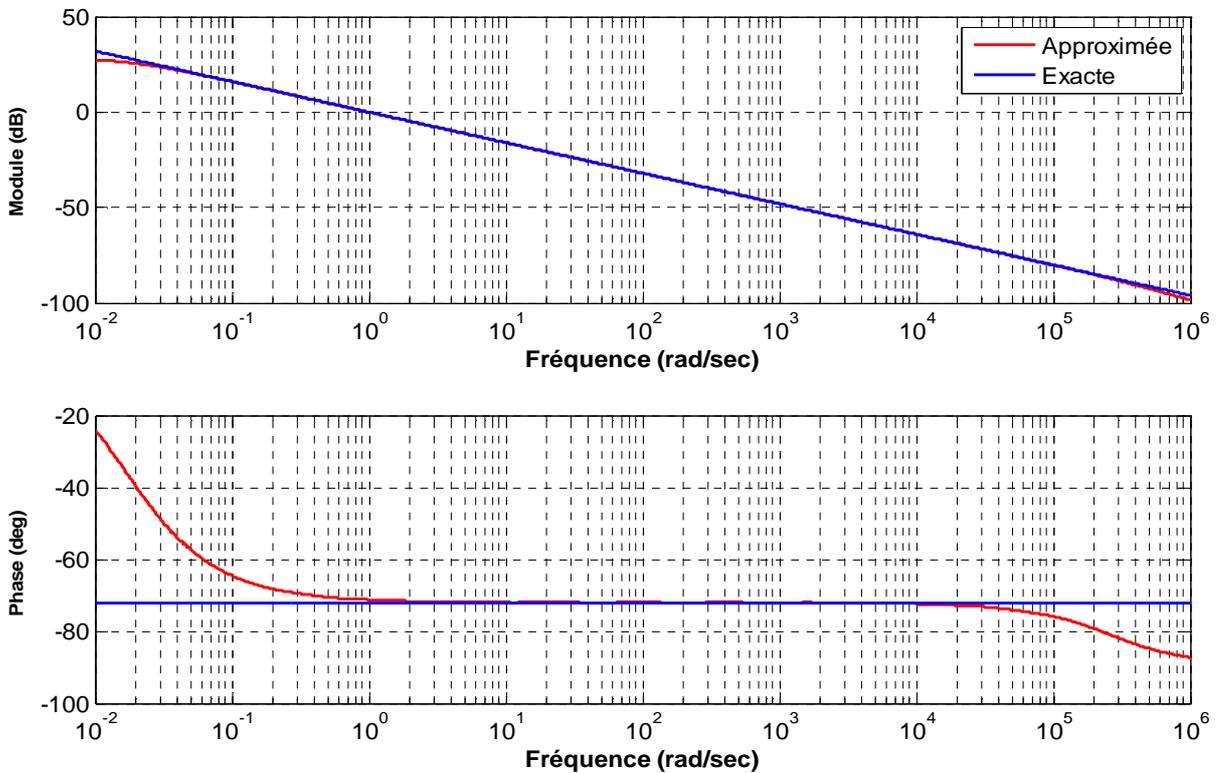


Figure (1.3) : Diagramme de Bode de l'intégrateur d'ordre 0.8 et son approximé de l'équation (1.43)

B) Dérivateur :

On veut approximer un dérivateur d'ordre 0.3 dans une bande fréquentielle $[10 \ 10^3]$ pour $y = 1$ dB et $\varepsilon = 10^{-5}$. L'approximation est donnée par l'équation suivante :

$$G_D(s) = s^{0.3} \cong 0.341 \frac{\prod_{i=0}^{14} (1 + s/[0.0407(2.9936)^i])}{\prod_{i=0}^{14} (1 + s/[0.0566_0(2.9936)^i])} \quad (1.44)$$

Figure (1.4) montre le tracé de Bode de dérivateur d'ordre 0.3, on remarque que les deux courbes sont superposées à l'intérieur de la bande d'approximation.

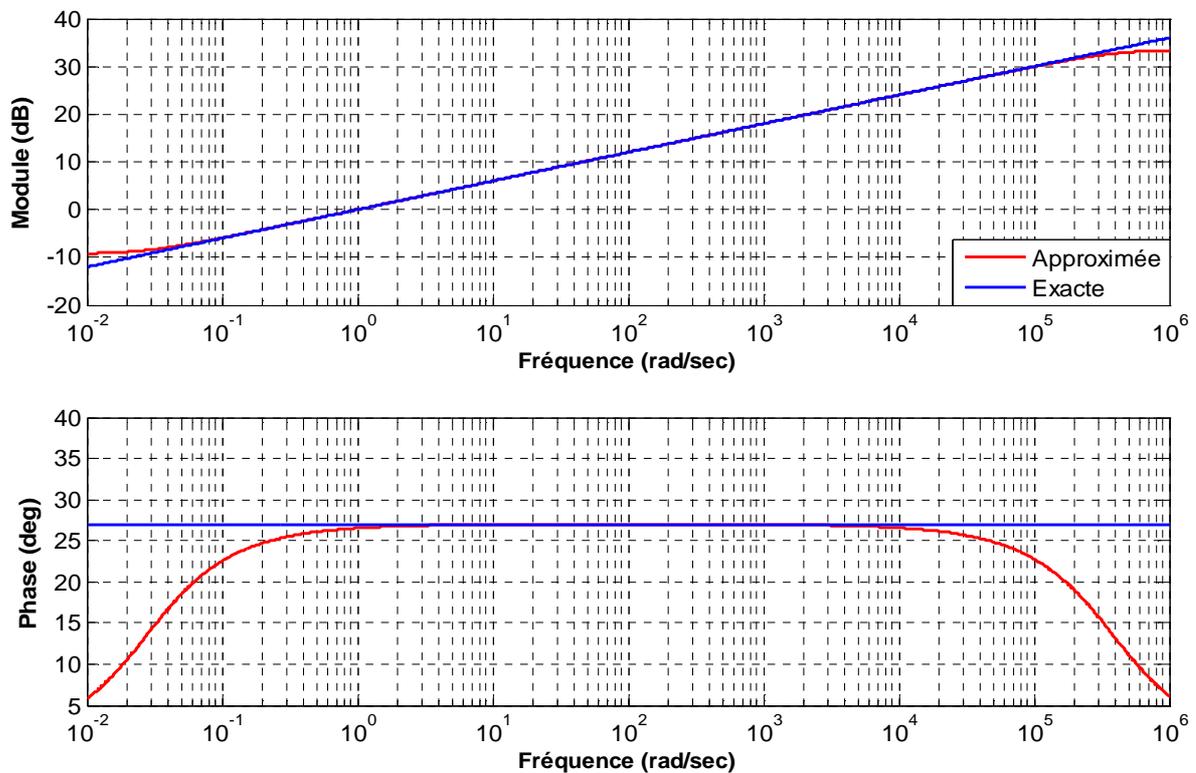


Figure (1.4) : Diagramme de Bode de dérivateur d'ordre 0.3

et son approximé de l'équation (1.44)

1.6 Réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire

Après le succès des travaux mathématique sur le calcul fractionnaire, le problème majeur qui se pose est la réalisation physique des opérateurs d'ordre fractionnaire. Dans cette section on va présenter une implémentation analogique basée sur l'approximation présentée précédemment. Par l'utilisation des fonctions rationnelle des équations (1.35) et (1.42) approximant l'intégrateur et le différentiateur d'ordre fractionnaire, la réalisation analogique

peut facilement être obtenue. La fonction rationnelle $G_I(s)$ de l'équation (1.35) de l'intégrateur peut être décomposée en éléments simples comme suivant :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong K_I \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a p_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (1.45)$$

où les résidus h_i , pour $i=0, 1, \dots, N$, sont donnés par :

$$h_i = K_I \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a p_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_I \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{(i-j)} \right)} \quad (1.46)$$

L'équation (1.45) correspond à l'impédance d'un circuit RC du type Foster première forme dont le schéma est représenté par la figure (1.5) [39].

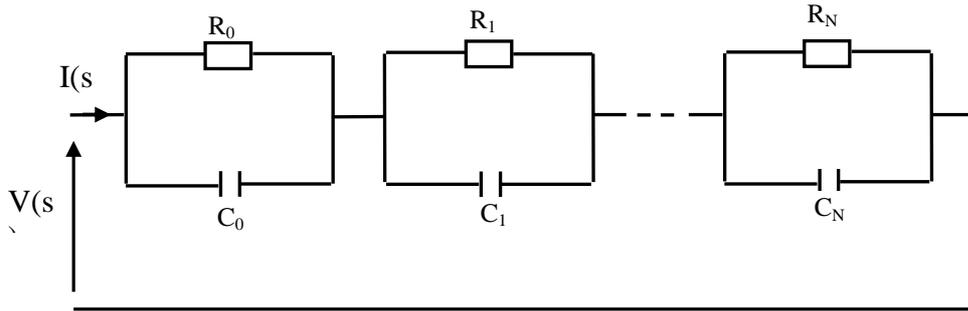


Figure (1.5) : Réalisation analogique d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.

L'impédance de ce circuit est :

$$Z_I(s) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{R_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (1.47)$$

alors, pour $i=0, 1, \dots, N$, on a :

$$\begin{cases} p_i = \frac{1}{R_i C_i} \\ h_i = R_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_i = h_i \\ C_i = \frac{1}{p_i h_i} \end{cases} \quad (1.48)$$

De la même façon, la fonction rationnelle de l'équation (1.42) de l'approximation du différentiateur d'ordre fractionnaire peut être décomposée en éléments simples comme suit :

$$G_D(s) = s^m \cong K_D \cdot \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0}\right)} = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.49)$$

ou $G_0 = K_D$ et les résidus g_i , pour $i=0, 1, \dots, N$, sont donnés par :

$$g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(- (ab)^i a z_0) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (1.50)$$

L'équation (1.49) correspond à l'admittance d'un circuit de type Foster seconde forme dont le schéma est représenté par la figure (1.6) [39].

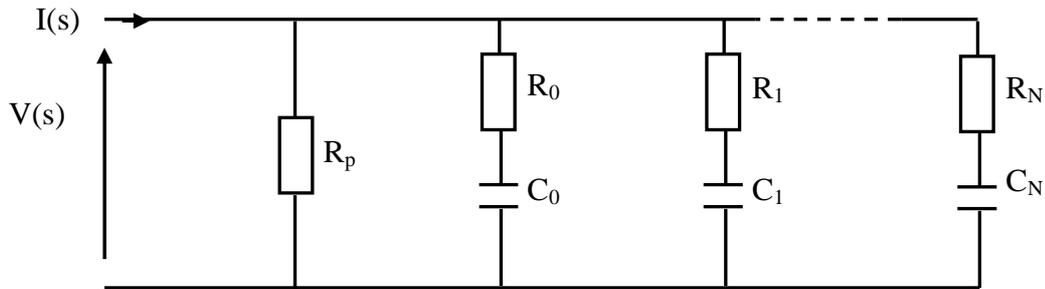


Figure (1.6) : Réalisation analogique d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

On peut écrire l'admittance $Y_D(s)$ du circuit précédent par :

$$Y_D(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \frac{sC_i}{1 + sR_i C_i} \quad (1.51)$$

alors, $G_0 = 1/R_p$ et pour $i=0, 1, \dots, N$, on a :

$$\begin{cases} g_i = C_i \\ p_i = \frac{1}{R_i C_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_i = g_i \\ R_i = \frac{1}{g_i p_i} \end{cases} \quad (1.52)$$

1.7 Domaines d'applications du calcul fractionnaire

Au début, le calcul fractionnaire était une extension du calcul entier et son étude était limitée au domaine mathématique. On peut dire que la première utilisation du calcul fractionnaire pour résoudre un problème physique a été faite en 1823 par Niels Henrik Abel pour la

résolution d'un problème qui consiste à chercher une équation de la trajectoire d'une masse glissante soumise à son propre inertie sur un fil de tel façon le temps de sa descente soit le même quelque soit la hauteur initial. Abel a utilisé une équation différentielle d'ordre $1/2$ pour décrire l'équation de cette trajectoire [40]. Ces dernières années, plusieurs applications du calcul fractionnaire dans différent domaine de la science et de l'ingénierie ont été effectuées.

Électricité

En 1971, Shmidt et Drumheller dans leur travail basé sur des données expérimentales ont montré que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension appliquée aux bornes de ce condensateur. Dans leur résultat une impédance sous forme de puissance $1/2$ de la variable de Laplace a été identifiée et appelée "Fractor" ou condensateur fractionnaire [41].

Thermique

L'identification d'un système de diffusion de chaleur a montré que l'équation de la chaleur est modelée en utilisant une dérivée d'ordre $1/2$ [36].

Mécanique des milieux continus

Certains matériaux comme les polymères (gommes, caoutchouc,...), présentent un comportement intermédiaire entre caractères visqueux et élastiques, qualifié de viscoélastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide des équations différentielle d'ordre fractionnaire [36].

Automatique

La première idée a été introduite par Bode qui a proposé un asservissement avec une fonction de transfert en boucle ouverte sous la forme d'un intégrateur d'ordre fractionnaire [10]. Oustaloup a aussi introduit le contrôleur CRONE (commande robuste d'ordre non entier) [42]. En 1999 Poudlubny a proposée le régulateur $PI^\lambda D^\mu$ qui est généralisation du PID classique pour la commande des systèmes d'ordre fractionnaire [14].

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une brève généralité sur le calcul fractionnaire en introduisant que les définitions et les outils essentiels pour la compréhension de notre travail. La première partie de ce chapitre, a été consacrée aux définitions fondamentales et les fonctions spéciales utilisées dans le calcul fractionnaire, ainsi qu'une technique numérique très utilisée pour le calcul des dérivées et d'intégral d'ordre fractionnaire à été présentée. Dans la seconde partie, on a abordé la transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

qui sont des fonctions irrationnelles. Une méthode d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles conduisant leurs implémentations et réalisations par des circuits analogiques a été aussi donnée. Finalement, on a cité les différents domaines d'application du calcul fractionnaire.

Chapitre 2

La Commande d'ordre fractionnaire

2.1 Introduction :

Les systèmes d'ordre fractionnaires ont récemment reçu une grande attention, du point de vue à la fois académique et industrielle. A cause de leur plus large flexibilité par rapport aux systèmes entiers, ces systèmes fractionnaires ont une très grande capacité pour modéliser plus correctement les systèmes complexes et accomplir des exigences de commande des systèmes de plus en plus croissantes et déifiantes.

La commande d'ordre fractionnaire signifie que les systèmes à commander et/ou les correcteurs utilisés sont décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cependant, dans la pratique, il est plus raisonnable de considérer le correcteur d'ordre fractionnaire parce que les systèmes à commander ont été en général déjà obtenus comme des systèmes classiques d'ordre entier. Les correcteurs d'ordre fractionnaire ont plus de flexibilité que les correcteurs d'ordre entier permettant de satisfaire des spécifications additionnelles, à répondre à des exigences et d'améliorer des performances des systèmes de commande. Du à l'augmentation de la complexité des systèmes industriels et aux exigences très élevées en termes de performances et robustesse, le correcteur classique PID ne peut être capable d'accomplir les performances ainsi que la robustesse désirées. Alors une des possibilités pour résoudre ces exigences est d'utiliser un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire [14] qui est une généralisation du PID classique et a plus de paramètres à régler. Récemment, plusieurs chercheurs ont abordé le sujet de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire pour rendre son utilisation plus simple et plus pratique. Néanmoins, ce sujet de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ reste toujours ouvert.

Dans la première partie de ce chapitre, quelques points essentiels sur les systèmes d'ordre fractionnaire, y compris leurs représentations mathématiques, leurs réponses temporelles et fréquentielles ainsi leur stabilité sont donnés. Un aperçu général sur le système fractionnaire élémentaire ou bien la boucle idéale de Bode a été aussi présentée. La deuxième partie donne un aperçu de la commande d'ordre fractionnaire, notamment le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ en s'étalant sur sa représentation, sa structure et son implantation. La dernière partie du chapitre est consacrée aux méthodes de réglage du $PI^\lambda D^\mu$ existant dans la littérature, les principes de la synthèse de la commande sont présentés en détail pour les méthodes les plus connues en donnant les avantages et les inconvénients de chaque méthode.

2.2 Système linéaire d'ordre fractionnaire :

Un système d'ordre fractionnaire est un système ou un phénomène physique ayant une dynamique décrite par une équation différentielle d'ordre fractionnaire. Afin de bien aborder le domaine de la commande d'ordre fractionnaire, une représentation générale des systèmes d'ordre fractionnaire est incontournable. A cet effet, dans cette section, une généralité sur les systèmes d'ordre fractionnaire y compris les représentations et la stabilité.

2.2.1 Équation différentielle d'ordre fractionnaire

En général, un système d'ordre fractionnaire linéaire invariant dans le temps est un système dont la dynamique est représentée par une équation différentielle de la forme [5] :

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{\beta_k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\alpha_k} u(t) \quad (2.1)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système, les coefficients a_k et b_k sont des nombres réels et les ordres fractionnaire β_k et α_k sont des nombres réels positifs. Dans le cas où les ordres fractionnaire β_k et α_k sont multiples d'un ordre fractionnaire q (ordre commensurable), ce système sera un système fractionnaire d'ordre commensurable dont l'équation différentielle est écrite comme suit [5] :

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{kq} y(t) = \sum_{l=0}^m b_l D^{lq} u(t) \quad (2.2)$$

où : $\beta_k = k q$ et $\alpha_k = k l$

2.2.2 Représentation d'un système fractionnaire

La représentation classique entrée-sortie des systèmes d'ordre entier peut être étendue aux systèmes d'ordre fractionnaire. En appliquant la transformée de Laplace sur le système défini par l'équation différentielle (2.1), on obtient la fonction de transfert suivante [5] :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\beta_0}} \quad (2.3)$$

Si le système est commensurable, la fonction de transfert devienne [5] :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\sum_{l=0}^m b_l (s^q)^l}{\sum_{k=0}^n a_k (s^q)^k} \quad (2.4)$$

Comme dans le cas des systèmes entier, les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent être aussi représentés par une représentation d'état sous la forme suivante [5] :

$$\begin{aligned} D^q x(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ est un vecteur des ordres de la dérivée (commensurable ou non), $x(t)$ est le vecteur d'état de dimension $(n \times 1)$, $y(t)$ est le vecteur de sortie de dimension $(p \times 1)$ et $u(t)$ est le vecteur d'entrée de dimension $(r \times 1)$.

Dans la représentation de l'équation (2.5), la première équation est l'équation d'état tandis que la seconde représente l'équation de sortie. De ce modèle d'état la fonction de transfert est obtenue comme suit [5]:

$$G(s) = (s^q I - A)^{-1} B + D \quad (2.6)$$

Si le système est commensurable, la fonction de transfert irrationnelle peut être décomposée en éléments simples sous la forme suivante [5] :

$$G(s) = \left[\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s^q + \lambda_i} \right] \quad (2.7)$$

où λ_i ($i = 1 : n$) sont les racines du polynôme caractéristique en s^q de la fonction de transfert dont les racines en s sont les $(-\lambda_i)^{1/q}$. Alors la solution analytique de l'équation (2.7) est donnée par [5] :

$$y(t) = L^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s^q + \lambda_i} \right] = \sum_{i=1}^n A_i t^q E_{q,q}(-\lambda_i t^q) \quad (2.8)$$

Avec : $E_{q,q}$ est la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres définie par l'équation (1.4).

2.2.3 La stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

Il est convenu que les systèmes linéaires d'ordre entier sont parfaitement stables si et seulement si tous les pôles du système sont à partie réelle négative. Donc, pour un système stable, les pôles se trouvent toujours dans la moitié gauche du plan complexe. Bien que cette notion reste valable pour les systèmes d'ordre fractionnaire, la stabilité de ces systèmes puisse être discutée en fonction des valeurs λ_i de l'équation (2.8). En effet, les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent être stables même pour des valeurs λ_i à partie réelle positive, et instables même pour des valeurs λ_i à partie réelle négative [43]. Seule la stabilité des systèmes fractionnaires d'ordre commensurable est bien établie. La condition de stabilité dans le sens entrée-bornée sortie-bornée pour les systèmes fractionnaire d'ordre commensurable est donnée dans le théorème suivant [5] :

Théorème : Un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable décrit par l'équation différentielle de l'équation (2.2) dont la fonction de transfert est donnée par l'équation (2.4) est stable si et seulement si $|\arg(\lambda_i)| > q \frac{\pi}{2}$ (pour $1 \leq i \leq n$) [44].

où les λ_i ($1 \leq i \leq n$) sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert en s^q

$Q(s^q) = \sum_{i=0}^n a_i (s^q)^i$. Figure (2.1) montre les zones de stabilité pour un système fractionnaire

d'ordre commensurable dans le plan complexe pour $0 < q < 2$ [5].

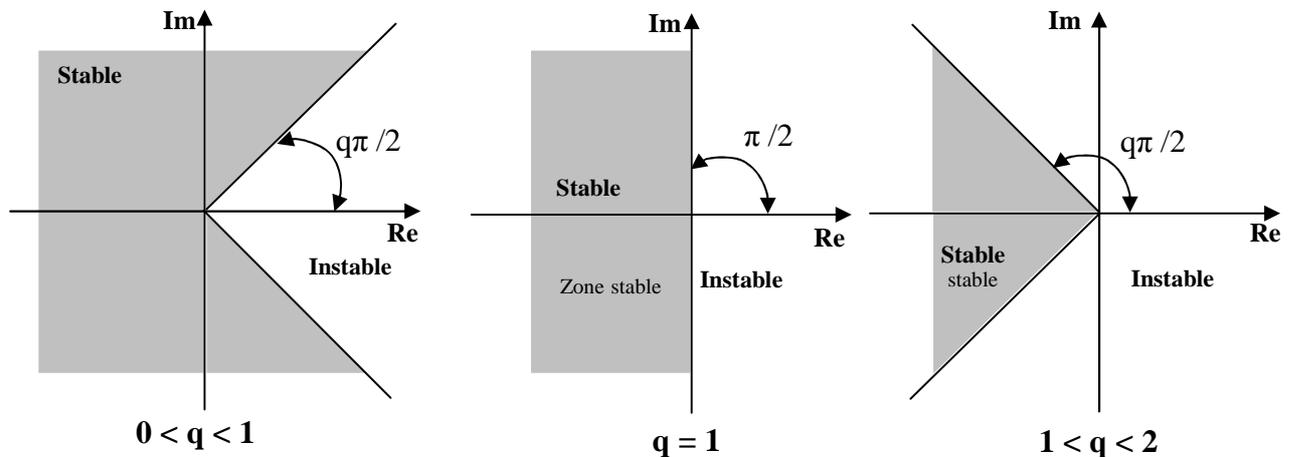


Figure (2.1) : Différentes zones de stabilité d'un système fractionnaire d'ordre commensurable

Dans le cas d'un système linéaire d'ordre fractionnaire décrit par l'équation différentielle de l'équation (2.1) dont la fonction de transfert $G(s)$ est donnée par l'équation (2.3), le système d'ordre fractionnaire est stable si et seulement si la condition suivante est satisfaite [5].

$$\exists M > 0, |G(s)| \leq M, \forall s \text{ telque } \Re(s) \geq 0 \quad (2.9)$$

2.2.4 Système d'ordre fractionnaire élémentaire

L'élément de base des systèmes fractionnaires d'ordre commensurable appelé parfois système fractionnaire de relaxation ou d'oscillation est représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante [45] :

$$(\tau_0)^m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = u(t), \text{ pour } 0 < m < 2 \quad (2.10)$$

dont la fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + (\tau_0 s)^m} \quad (2.11)$$

avec : $u(t)$ est l'entrée du système, $y(t)$ est la sortie du système et τ_0 est la constante du temps. Pour $0 < m < 1$ le système est dit système de relaxation et pour $1 < m < 2$ le système est dit système oscillatoire. Ce type de système a un comportement intermédiaire entre le comportement d'un système entier de premier ordre et un système entier de second ordre. Figure (2.2) montre le diagramme de Bode de la fonction de transfert (2.11) pour différentes valeurs de m ; $0.6 < m < 1.8$.

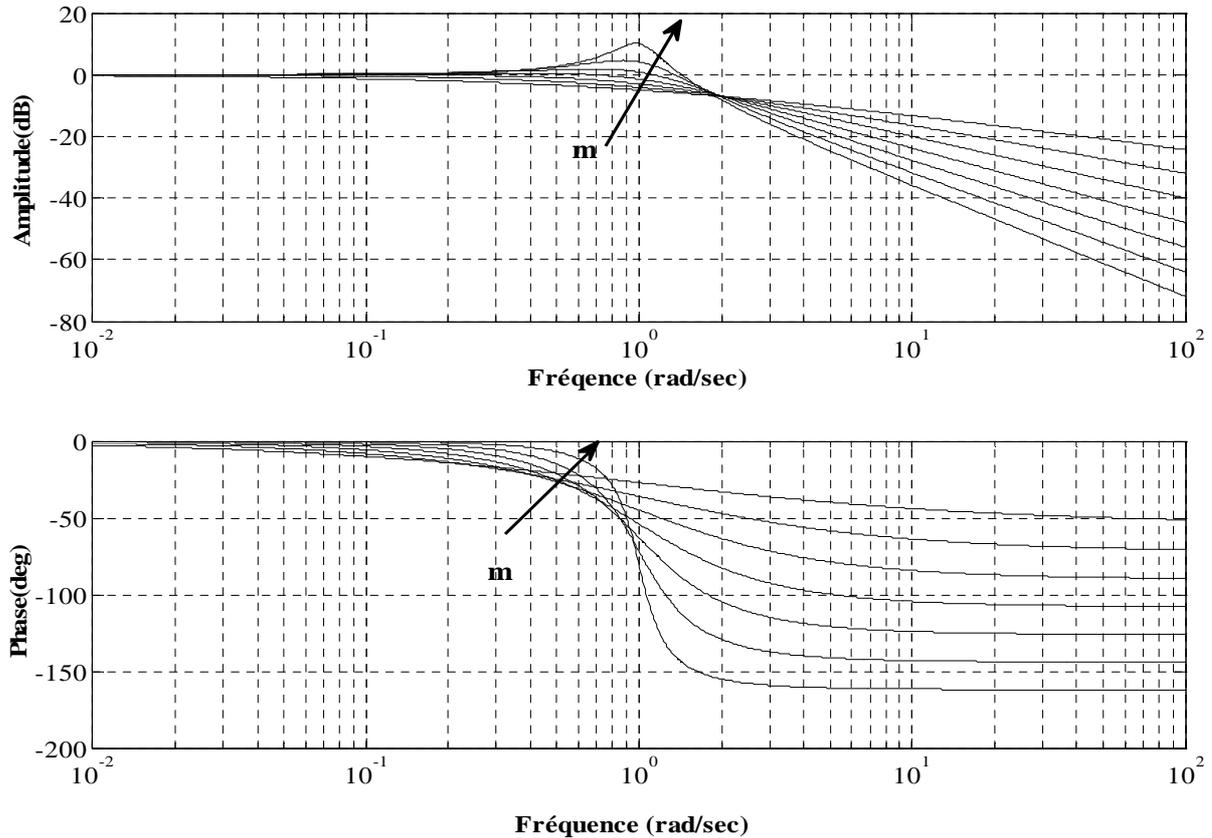


Figure (2.2) : Diagramme de Bode de la fonction (2.11) pour différentes valeurs de m .

La réponse indicielle du système décrit par l'équation (2.10) est donnée par [5]:

$$y(t) = 1 - E_m(-1/\tau_0^m)t^m \quad (2.12)$$

Figure (2.3) montre la réponse indicielle du système (2.10) pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire m ; $0.2 < m < 1.8$.

2.2.4.1 Fonction idéal de Bode

Dans la section précédente on a remarqué que le système fractionnaire représenté par la fonction de transfert suivante [5] :

$$G(s) = \frac{K}{K + s^m}, \quad 0 < m < 2 \quad (2.13)$$

peut englober le comportement d'un système de relaxation ou d'oscillation selon la valeur de l'ordre m ; alors il est très intéressant d'utiliser ce système comme un modèle de référence. Ce système a été proposé pour la première fois en [12] puis il a été utilisé par l'équipe CRONE dans la conception d'une commande robuste [42]. Cette fonction peut être considérée comme la fonction de transfert en boucle fermée d'un système à retour unitaire dont la fonction de transfert en boucle ouverte $F(s)$ est un intégrateur d'ordre fractionnaire m avec un gain K comme il est montré sur la figure (2.4).

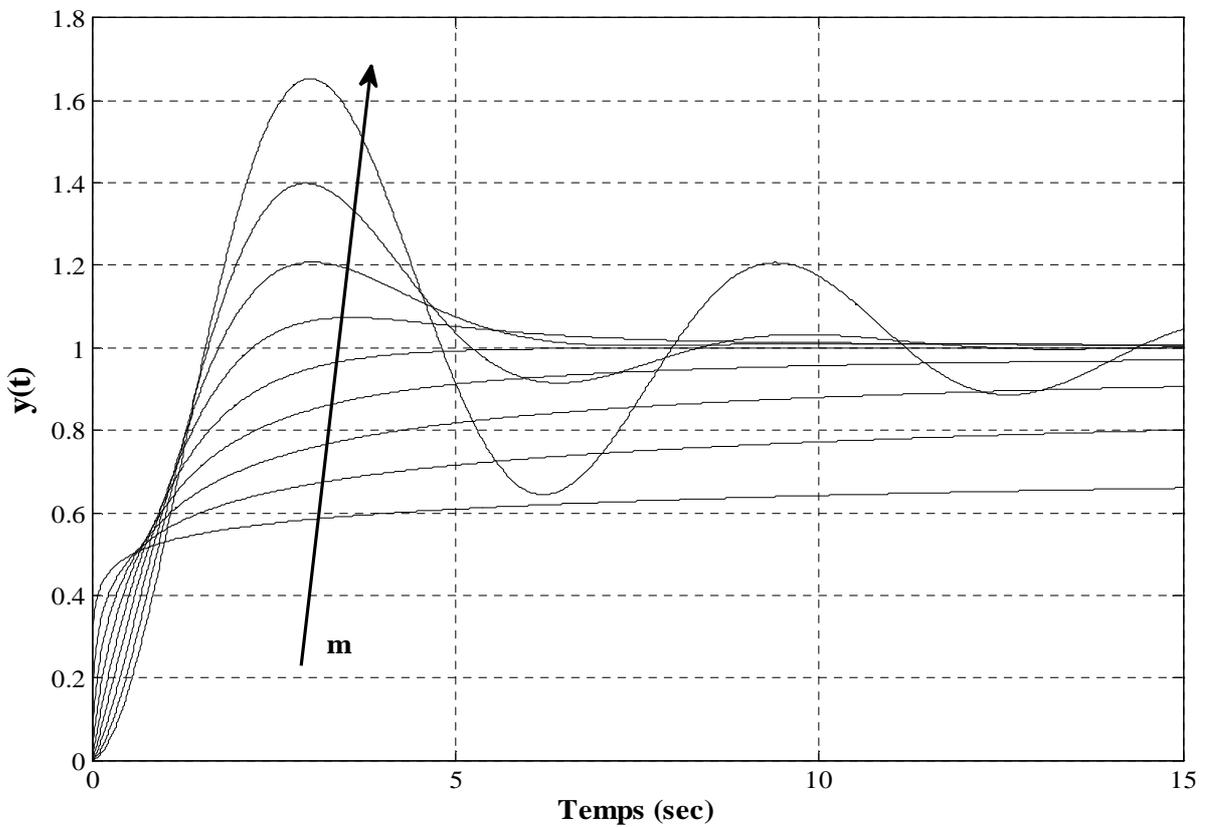


Figure (2.3) : Réponses indicielles du système (2.10) pour $\tau_0 = 1$ et pour différentes valeurs de m .

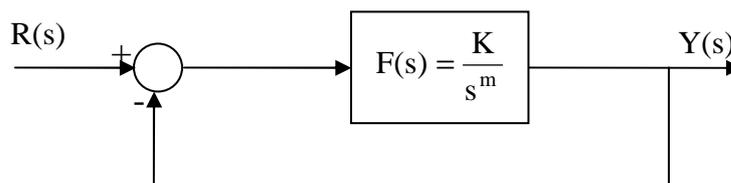


Figure (2.4) : Boucle de commande idéale de Bode.

En général, la fonction de transfert idéale $F(s)$ donnée par :

$$F(s) = \frac{K}{s^m} \quad (2.14)$$

a les caractéristiques suivantes [5]:

- en boucle ouverte :
 - le module a une pente de $-m20\text{dB/dec}$.
 - la fréquence de coupure dépend du gain K .
 - la phase est une ligne horizontale de $-\ m\pi/2$.
 - le diagramme de Nyquist est une ligne droite avec un argument de $-\ m\pi/2$.
- en boucle fermée avec retour unitaire :
 - la marge du gain est infinie.
 - la marge de phase φ_m est égale à $\varphi_m = \pi(1-m/2)$, elle dépend que de m .
 - la réponse indicielle est donnée par :

$$y(t) = Kt^m E_{m,m+1}(-Kt^m) \quad (2.15)$$

- l'équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$K + s^m = 0 \quad (2.16)$$

Dans la section précédente, on a remarqué que la fonction idéale de Bode possède un amortissement qui dépend seulement de l'ordre d'intégration m . Dans ce cas, on dit que le système est iso-amorti ce qui signifie que le système a un dépassement complètement invariant vis-à-vis de la variation du gain. Cette propriété rend ce système très utile comme modèle de référence pour la conception d'une commande robuste vis-à-vis de la variation du gain [15, 42, 46-47]. Figure (2.5) représente la réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire de l'équation (2.13) pour $m = 1.5$ avec différentes valeurs du gain K . Le facteur d'amortissement obtenu est $\xi = 0.5$ avec un dépassement de 25.28 % pour les trois valeurs du gain K . C'est évident que l'iso-amortissement est une propriété très importante pouvant être la raison principale pour l'introduction du calcul fractionnaire dans le domaine de la commande en représentant le lien entre la robustesse et le calcul fractionnaire et permettant de passer de la stabilité robuste au degré de stabilité robuste. La première application connue de cette notion est développée par l'équipe CRONE [42]. Récemment, plusieurs travaux ont utilisé cette notion pour améliorer les lois de la commande, soit par l'utilisation de la commande fractionnaire, soit par l'utilisation de la notion de calcul fractionnaire dans les commandes classiques [20, 46-48].

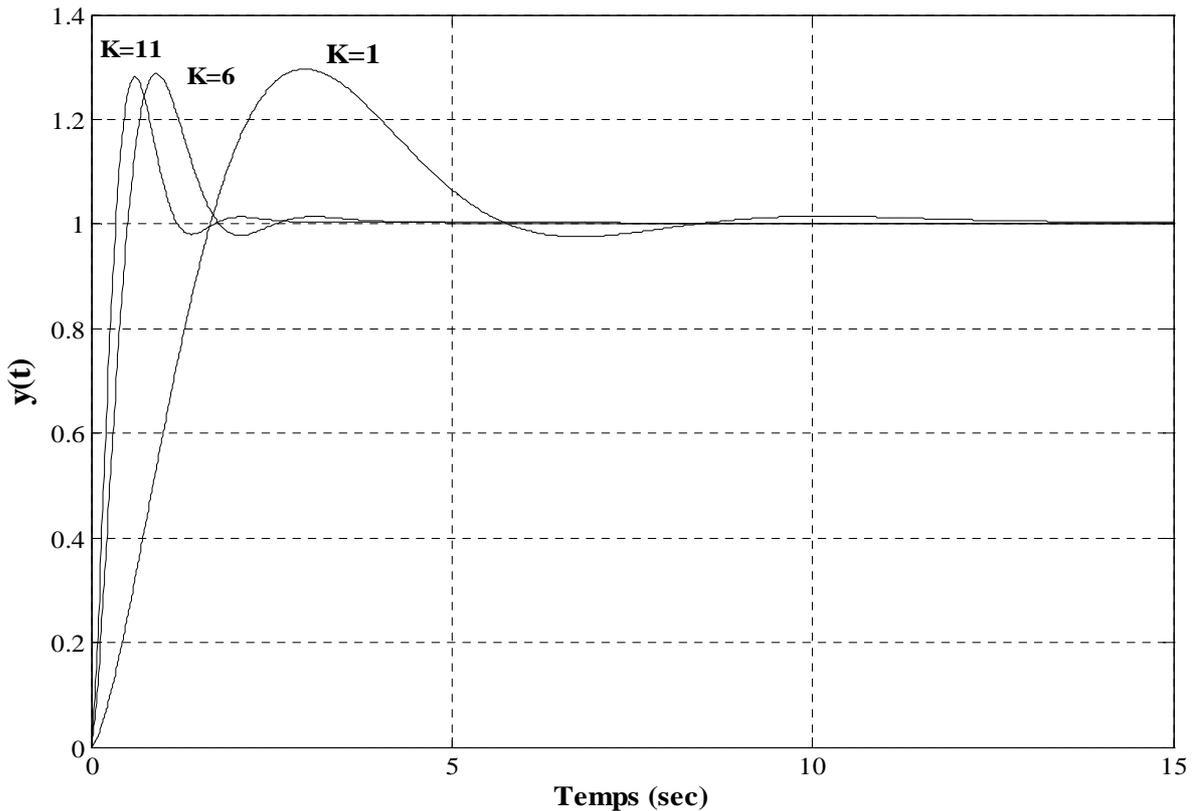


Figure (2.5) : Réponse indicielle du système (2.13) pour $m = 1.5$ et pour différentes valeurs du gain K .

2.3 Commande d'ordre fractionnaire

Le premier signe de l'existence de la notion de la commande d'ordre fractionnaire est introduit par Bode en 1945 [5]. Le problème clé a été la conception d'un amplificateur à rétroaction tel que le système en boucle fermée devienne invariant au changement du gain de l'amplificateur. Bode a donné une solution élégante pour ce problème avec une conception robuste vis-à-vis des variations paramétriques ou des incertitudes. Il a proposé l'intégrateur d'ordre fractionnaire comme fonction de transfert en boucle ouverte de l'amplificateur qui est appelé aujourd'hui la fonction de transfert idéale de Bode.

En 1961 Manabe a introduit pour la première fois la fonction de transfert idéale de Bode, l'intégrateur d'ordre fractionnaire, dans la commande classique. Il a présenté les réponses fréquentielle et temporelle du système de commande en boucle fermée dont la fonction de transfert est l'intégrateur d'ordre fractionnaire. En suivant les pas de Manabe, Oustaloup, dans les années 1990, a présenté la commande robuste d'ordre non entier (CRONE). Dans cette technique de commande fractionnaire Oustaloup suppose que la fonction de transfert en boucle ouverte qui formée du correcteur et le processus d'un système

de commande à retour unitaire est l'intégrateur d'ordre fractionnaire. Il a étudié l'efficacité de la commande CRONE par rapport aux contrôleurs classiques ; il a trouvé que la commande CRONE a des performances additionnelles par rapport à la commande classique. En 1999, Podlubny [14] a proposé une généralisation du correcteur PID classique en introduisant le correcteur fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ qui a une action intégrale d'ordre λ et une action dérivée d'ordre μ . Il a aussi démontré la supériorité du correcteur fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ par rapport au correcteur PID classique dans la commande des systèmes. Depuis, un nouvel axe de recherche concerné par le réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire a été lancé. Depuis 1999, plusieurs contributions ont été proposées dans le contexte du réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ dont l'objectif principal est l'amélioration de la qualité de la commande [15-21, 49-53].

2.3.1 Correcteur CRONE :

Dans ce contexte, trois générations de correcteurs CRONE ont été développées pour satisfaire une commande robuste et plus performante par rapport aux correcteurs classiques [42]. En effet, la première génération de la commande CRONE consiste à concevoir un correcteur à phase constante autour de la fréquence transitionnelle en boucle ouverte. Puisque la variation paramétrique de la phase dans une boucle de commande est la somme des variations paramétriques de la phase du procédé et du correcteur, donc, selon la stratégie CRONE de la première génération, un correcteur à phase constante ne contribue pas à la variation paramétrique de la boucle ouverte autour de la fréquence transitionnelle et rend la variation totale égale à la variation du procédé. La fonction de transfert idéale du correcteur CRONE de la première génération est représentée par la fonction d'ordre fractionnaire suivante :

$$C_\alpha(s) = C_0 \left(\frac{1 + s/\omega_b}{1 + s/\omega_h} \right)^\alpha \quad (2.17)$$

avec C_0 , ω_h , ω_b et $\alpha \in \mathfrak{R}^+$. Le correcteur CRONE de la première génération de l'équation (2.17) est implémenté par une fonction rationnelle obtenue à l'aide d'une approximation dite approximation d'Oustaloup dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique comme suit [42] :

$$C_N(s) = C_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/z_i}{1 + s/p_i} \quad (2.18)$$

avec z_i , p_i , pour $1 \leq i \leq N$, $\in \mathfrak{R}^+$ et $N \in \mathfrak{N}$. La robustesse aux variations du gain est obtenue dans le cas où la bande fréquentielle utilisée est située dans une bande où le procédé possède

une phase constante ; sinon l'utilisation de la seconde génération est indispensable pour satisfaire cette propriété. La seconde génération consiste à rendre le système en boucle ouverte équivalent à un intégrateur d'ordre fractionnaire comme suit :

$$T(s) = \left(\frac{\omega_u}{s} \right)^\alpha \quad (2.19)$$

avec $\alpha \in [1, 2]$ et $\omega_u \in \mathcal{R}^{*+}$. $T(s)$ est la fonction idéale de Bode présentée dans la section (2.2.4.1). Comme l'objectif de cette commande est la propriété d'iso-amortissement pour le système en boucle fermée ; alors la fonction de transfert du correcteur CRONE de la seconde génération est donnée par :

$$C_2(s) = \frac{T(s)}{G_p(s)} \quad (2.20)$$

La synthèse de ce correcteur consiste à approximer cette fonction dans une bande fréquentielle autour de la fréquence du gain unité ω_u par une fonction rationnelle. Lorsque la propriété de robustesse ne peut être vérifiée à l'aide du correcteur CRONE de la seconde génération, un intégrateur fractionnaire d'ordre complexe est considéré dans la troisième génération [42].

2.3.2 Correcteur d'ordre fractionnaire TID

Un correcteur TID est une structure semblable à un PID classique dont l'action proportionnelle est remplacée par un intégrateur fractionnaire. La fonction de transfert du correcteur TID est donnée par:

$$C(s) = \frac{T}{s^{1/n}} + \frac{I}{s} + Ds \quad (2.21)$$

où T est une constante positive et n est un nombre réel de préférence entre 2 et 3 [54]. Ce correcteur avec quatre paramètres possède plus de flexibilité qu'un PID classique et il s'approche plus étroitement de la fonction idéale de Bode qui assure un meilleur rejet des perturbations. D'autre part, un avantage majeur de ce type de correcteur est la minimisation de l'effet des variations des paramètres du processus sur la réponse en boucle fermée par rapport aux correcteurs PID. Cependant, le développement et l'utilisation de ce type de correcteur reste limitée peut être à cause de l'absence d'un équivalent classique.

2.3.3 Correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire

Le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire proposée dans [55] est la généralisation du correcteur avance-retard de phase classique dont la fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = K_c x^\alpha \left(\frac{\lambda s + 1}{x\lambda s + 1} \right)^\alpha \quad (2.22)$$

où λ et α sont deux réels positifs et $0 < x < 1$. Le comportement fréquentiel de ce correcteur est montré dans la figure (2.6).

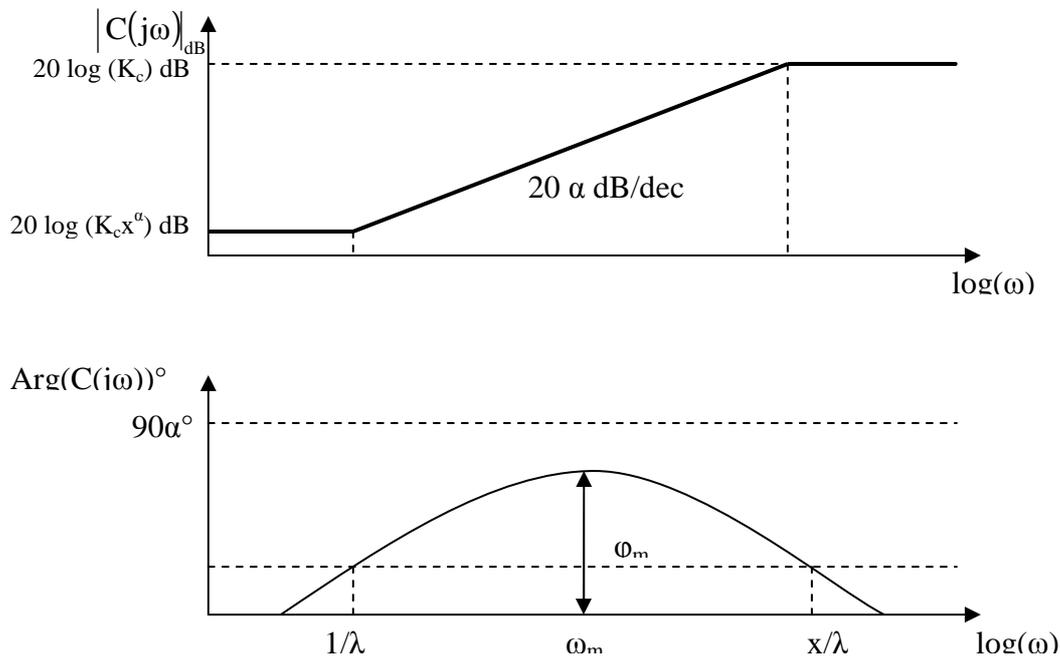


Figure (2.6) : Diagramme de Bode du correcteur à avance-retard de phase fractionnaire.

On note que pour $\alpha > 0$ le correcteur $C(s)$ est un correcteur à avance de phase ; d'autre part si $\alpha < 0$ le correcteur $C(s)$ est un correcteur à retard de phase. La phase du correcteur ϕ_m à la fréquence caractéristique ω_m dépende du paramètre α [5]; alors ce correcteur est plus flexible parce qu'il a un degré de liberté de plus que le correcteur classique correspondant. Cependant, des méthodes systématiques de conception plus intuitives sont nécessaires.

2.3.4 Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire

2.3.4.1 Correcteur PID classique

Le PID classique est le régulateur le plus utilisé en pratique. En effet, environ 90 % des installations industrielles utilisent des régulateurs PID grâce à leur simplicité, efficacité et

robustesse [56]. Dans la littérature, il est convenu que le régulateur PID classique est obtenu par l'association des trois actions élémentaires : proportionnelle, intégrale et dérivée.

Action proportionnelle

Le signal de commande est proportionnel à l'erreur $e(t)$ entre la consigne et la sortie du système comme suit:

$$u(t) = K_p e(t) \quad (2.23)$$

où K_c est le gain de l'action proportionnelle. La fonction de transfert de cette action est donnée par l'expression suivante :

$$C(s) = K_p \quad (2.24)$$

Action intégrale

Le signal de commande est proportionnel à l'intégrale de l'erreur comme suit :

$$u(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

où K_i est le gain de l'action intégrale. La fonction de transfert correspondante est donnée par:

$$C(s) = \frac{K_I}{s} \quad (2.26)$$

Généralement, l'action intégrale est associée à l'action proportionnelle sous la forme d'un correcteur PI dont la fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \quad (2.27)$$

où $T_I = \frac{K_p}{K_I}$ est la constante de l'action dérivée.

Action dérivée :

Le signal de commande est proportionnel à la dérivée de l'erreur comme suit:

$$u(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (2.28)$$

où K_d est le gain de l'action dérivée. La fonction de transfert correspondante est donnée par:

$$C(s) = K_D s \quad (2.29)$$

L'action dérivée est aussi associée à l'action proportionnelle sous la forme d'un correcteur PD dont la fonction de transfert est donnée par:

$$C(s) = K_p (1 + T_D s) \quad (2.30)$$

où $T_D = \frac{K_D}{K_P}$ est la constante de l'action dérivée.

Quand les trois actions sont associées on obtient le correcteur PID donc la fonction de transfert est donnée par l'expression suivante :

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (2.31)$$

2.3.4.2 Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire

Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est une généralisation du correcteur PID classique. Sa fonction de transfert est donnée par [14] :

$$C(s) = K_c + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad (2.32)$$

avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont respectivement les ordres d'intégration et de dérivation. Dans le plan (λ, μ) , le correcteur PID classique est représenté par un seul point correspondant à $\lambda=1$ et $\mu=1$; par contre le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est représenté par une infinité de point du premier cadran du plan (λ, μ) comme il est montré sur la figure (2.7).

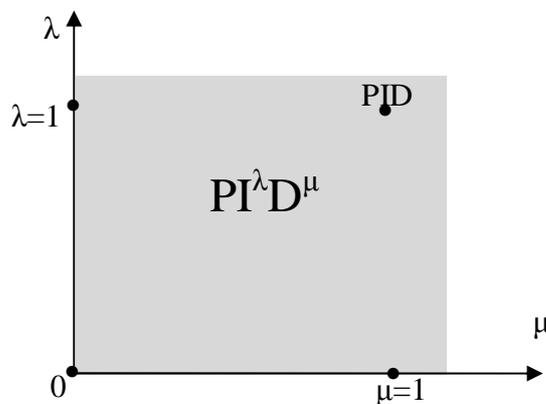


Figure (2.7) : Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ et PID classique dans le plan (λ, μ) .

Donc, les deux paramètres λ et μ permettent d'avoir une infinité de possibilité du correcteur pour l'amélioration du système en boucle fermée. Pour voir les effets des cinq paramètres (K_c , K_i , K_d , λ et μ) du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sur sa réponse fréquentielle, une analyse a été faite où les cinq paramètres du $PI^\lambda D^\mu$ sont fixés chacun à l'unité ; puis un seul paramètre est varié pour voir la variation de la réponse fréquentielle du correcteur par rapport au paramètre varié. Figure (2.8) montre le diagramme de Bode du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ avec l'effet de chaque paramètre sur sa réponse fréquentielle.

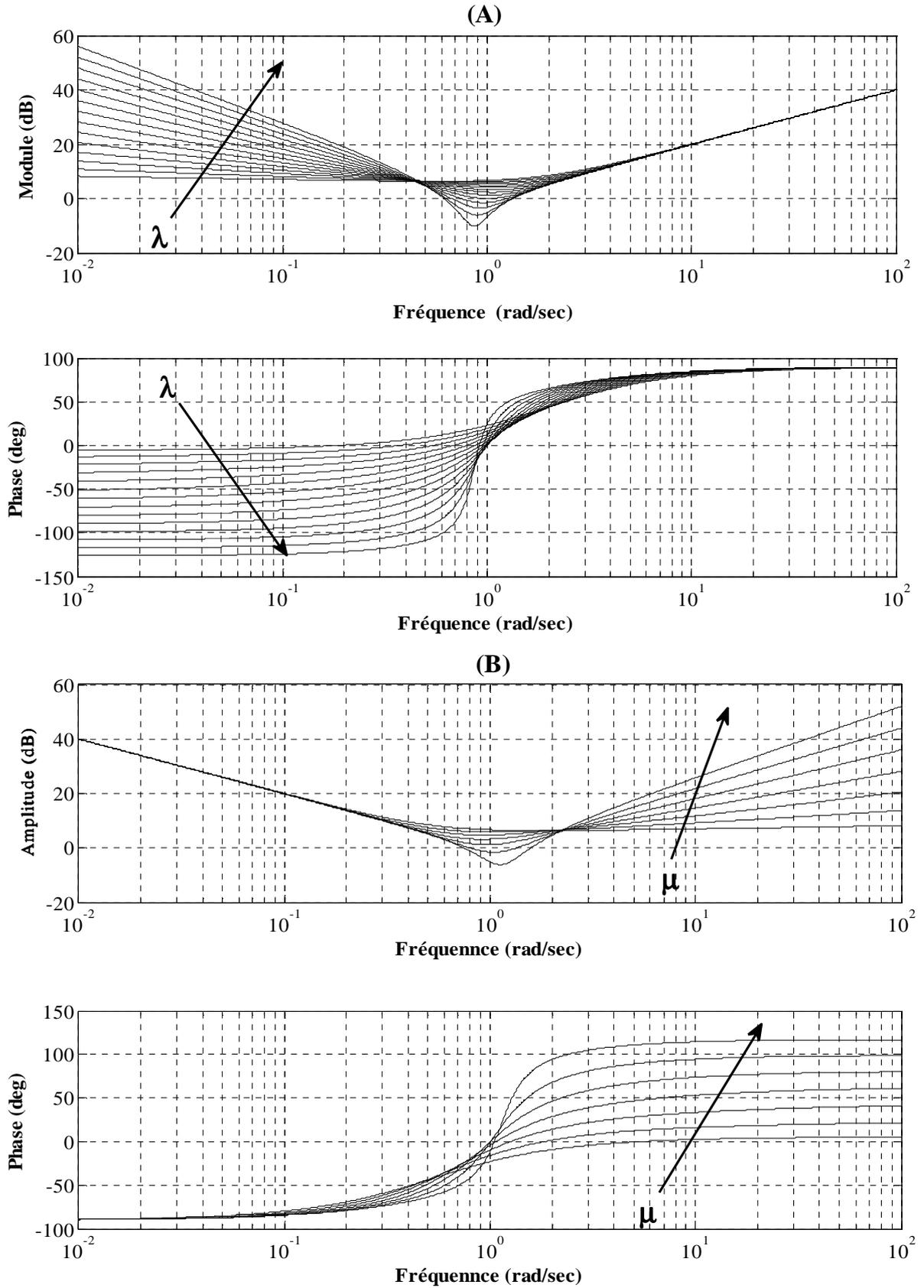


Figure (2.8-A,B) L'effet des deux paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sur sa réponse fréquentielle, (A) l'effet de λ , (B) l'effet de μ .

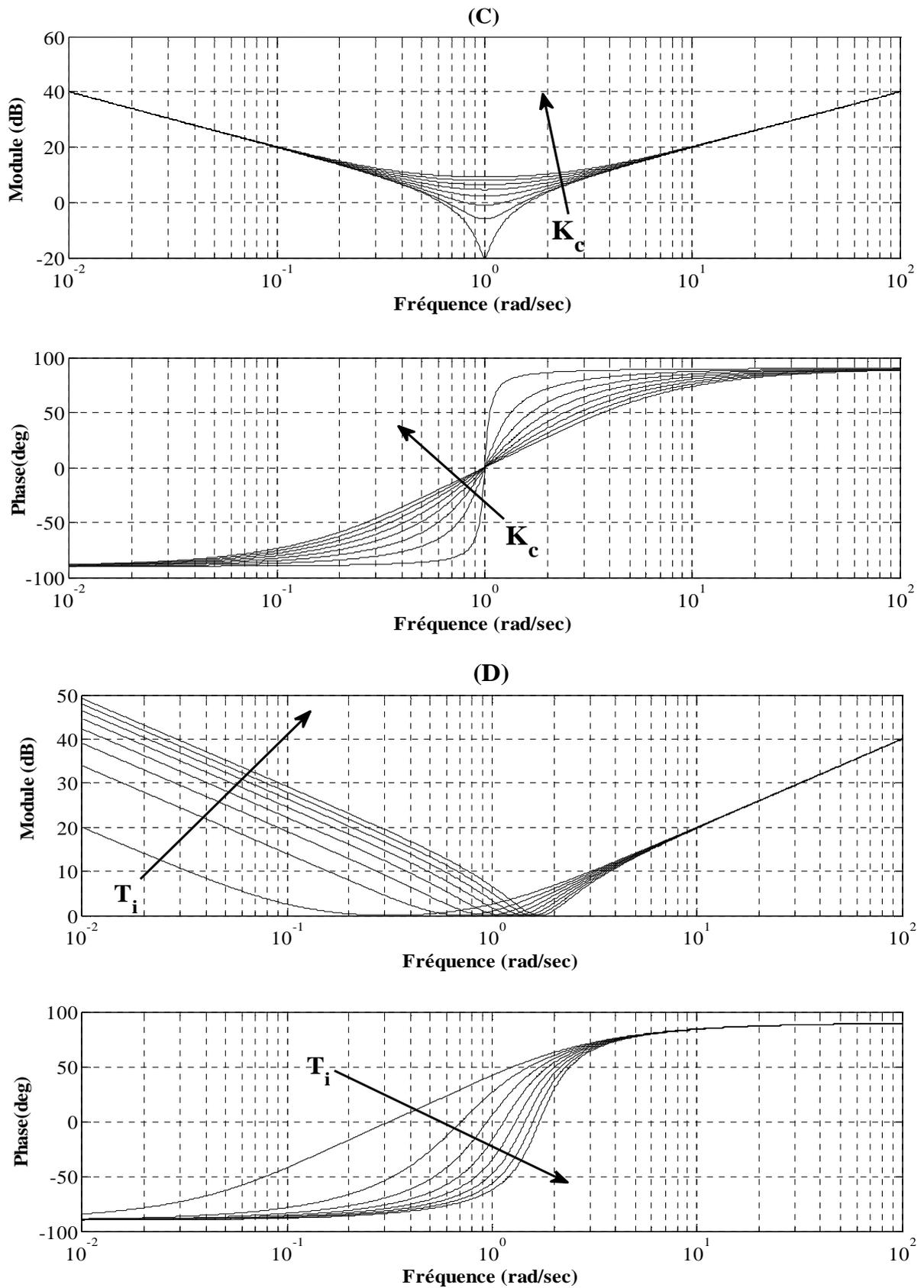


Figure (2.8-C,D) L'effet des deux paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sur sa réponse fréquentielle, (C) l'effet de K_c , (D) l'effet de T_i .

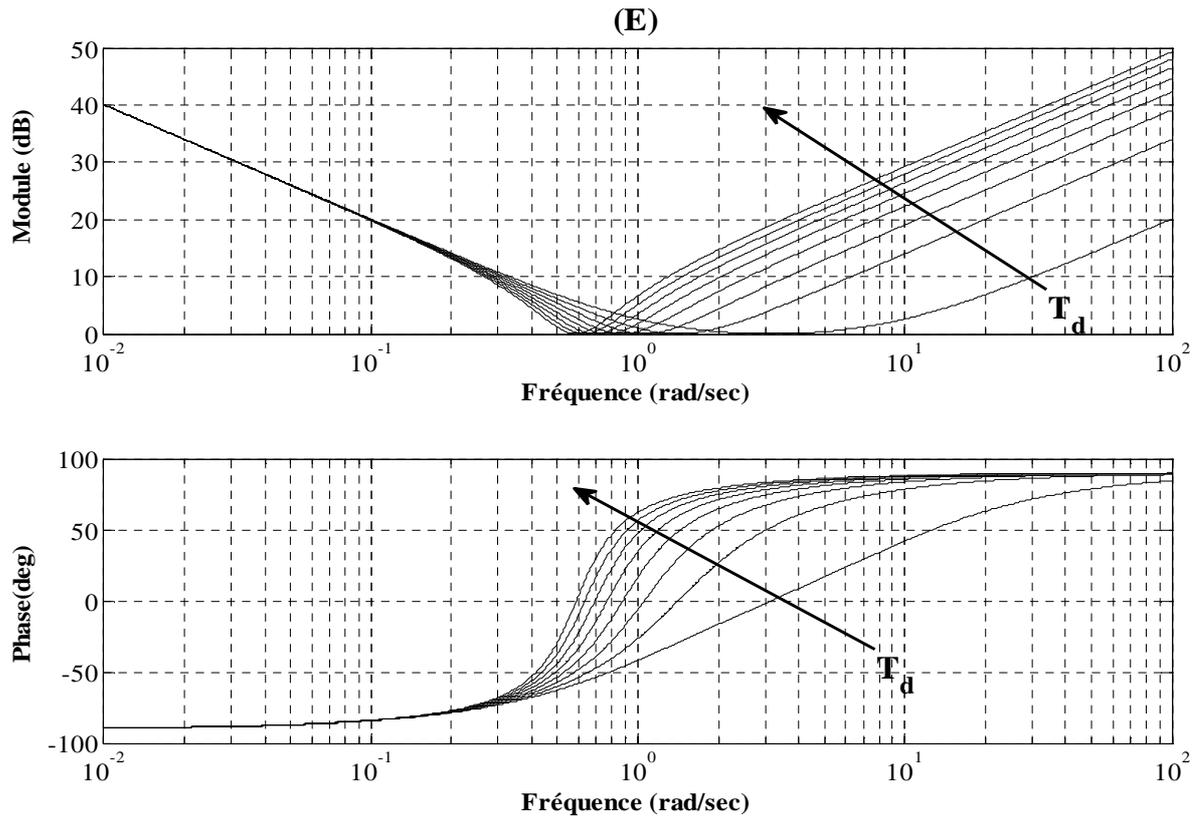


Figure (2.8-E) : L'effet du paramètre T_d sur la réponse fréquentielle correcteur $PI^\lambda D^\mu$.

A partir de la figure (2.8), les effets de la variation des cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ peuvent être commentés comme suit :

- de la figure (2.8-A), l'ordre d'intégration fractionnaire λ a un effet aux basses fréquences. On note que lorsque λ augmente le gain augmente et la phase diminue.
- de la figure (2.8-B), l'ordre de la dérivée fractionnaire μ a un effet aux hautes fréquences. On remarque que lorsque μ augmente le gain et la phase augmentent.
- de la figure (2.8-C), le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ a un comportement d'un filtre coupe bande. Le gain proportionnel K_C a un effet dans la bande fréquentielle coupée. Lorsque K_C augmente la bande coupée diminue.
- de la figure (2.8-D), la constante d'intégration T_I a un effet aux basses fréquences. On note que lorsque T_I augmente le gain augmente et la phase est presque constante mais son allure change.
- de la figure (2.8-E), la constante d'intégration T_D a un effet aux hautes fréquences. On note que lorsque T_D augmente le gain augmente et la phase est presque constante mais son allure change.

Pour montrer l'effet de la variation des paramètres du correcteur fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ sur la réponse temporelle d'un système asservi en boucle fermée à retour unitaire avec un processus du second ordre dont la fonction de transfert est donnée comme suit :

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (2.33)$$

Pour voir les effets des cinq paramètres (K_c , K_i , K_D , λ et μ) du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sur la réponse temporelle du système décrit par $G_p(s)$, une analyse a été faite où les cinq paramètres du $PI^\lambda D^\mu$ sont fixés chacun à l'unité ; puis un seul paramètre est varié pour voir la variation de la réponse temporelle par rapport au paramètre varié. Figure (2.9) montre les effets des cinq paramètres sur les réponses temporelles du système asservi. Les réponses temporelles de ce système asservi ont été obtenues en utilisant la fonction fode-sol pour la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire [5].

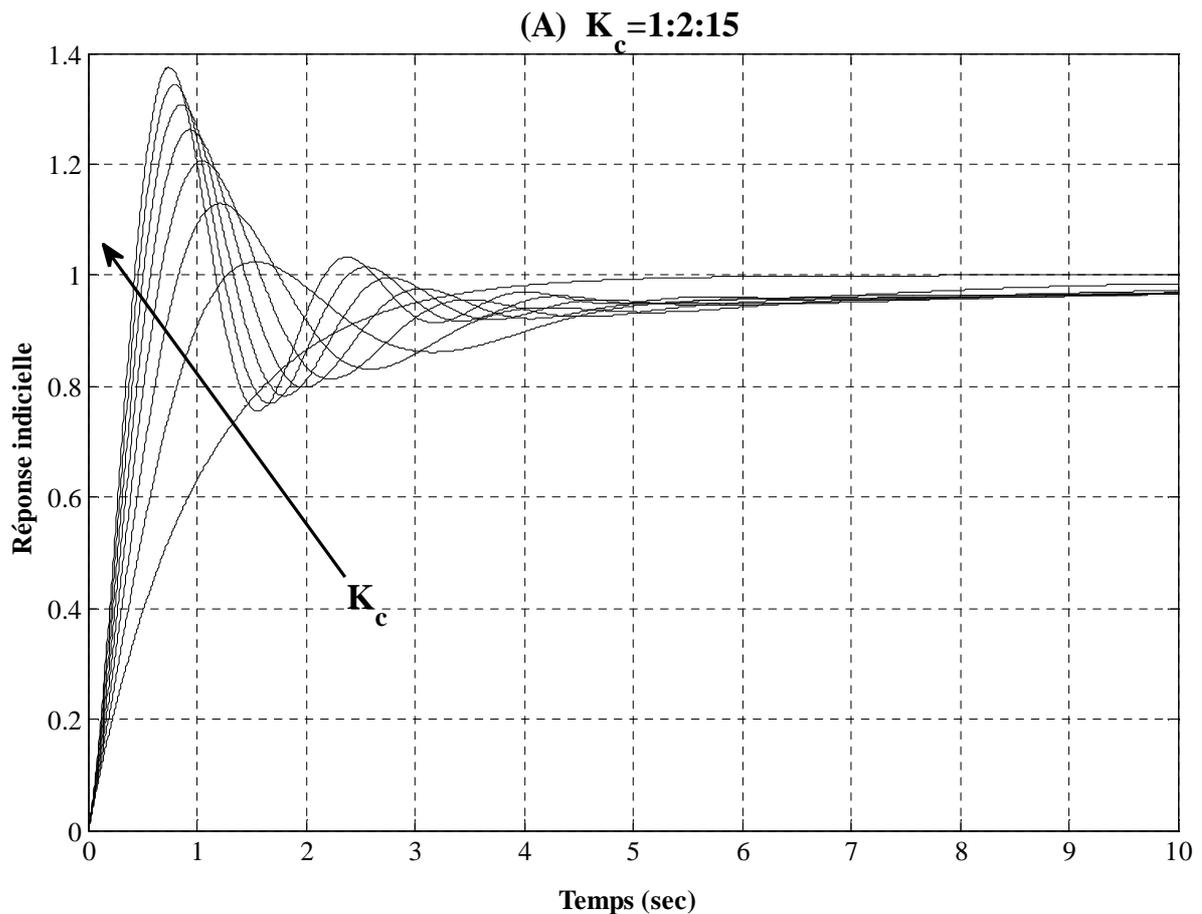


Figure (2.9-A) : Effets de la variation du paramètre K_c sur la réponse temporelle du système asservi considéré.

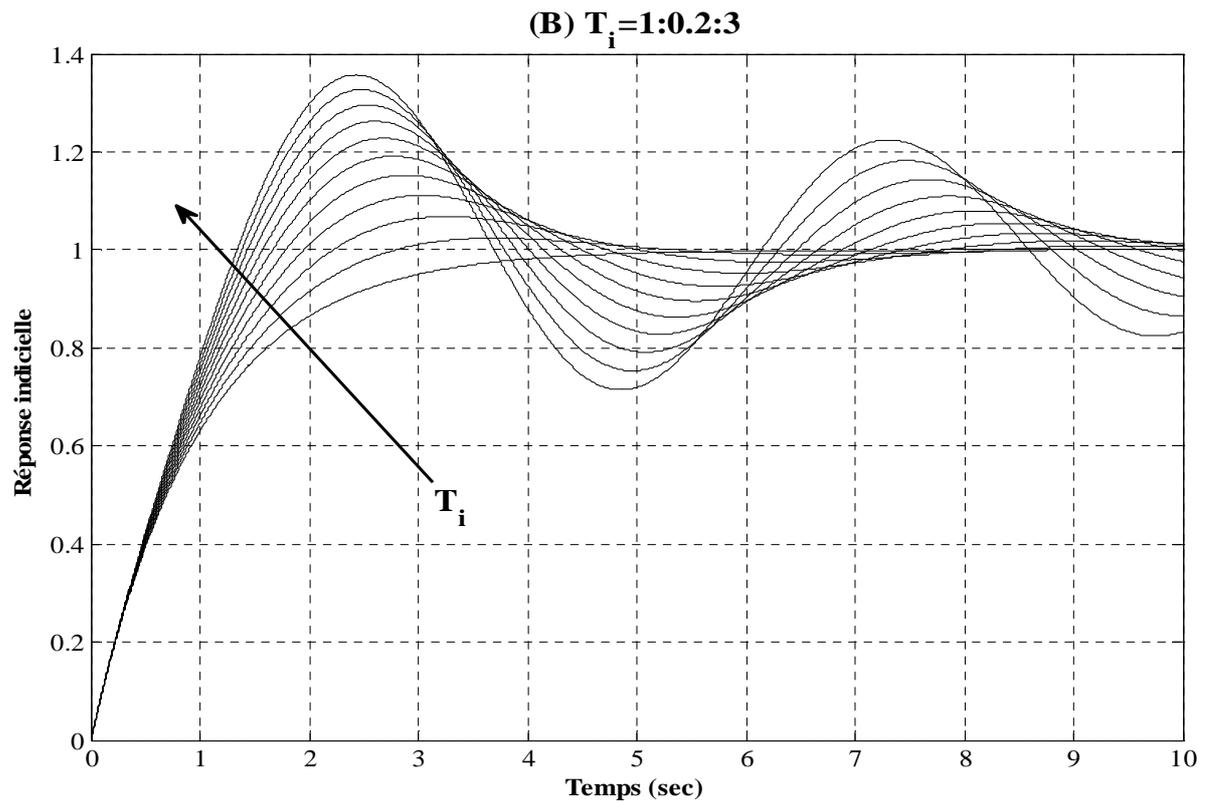


Figure (2.9-B) : Effets de la variation du paramètres T_i sur la réponse temporelle du système asservi considéré.

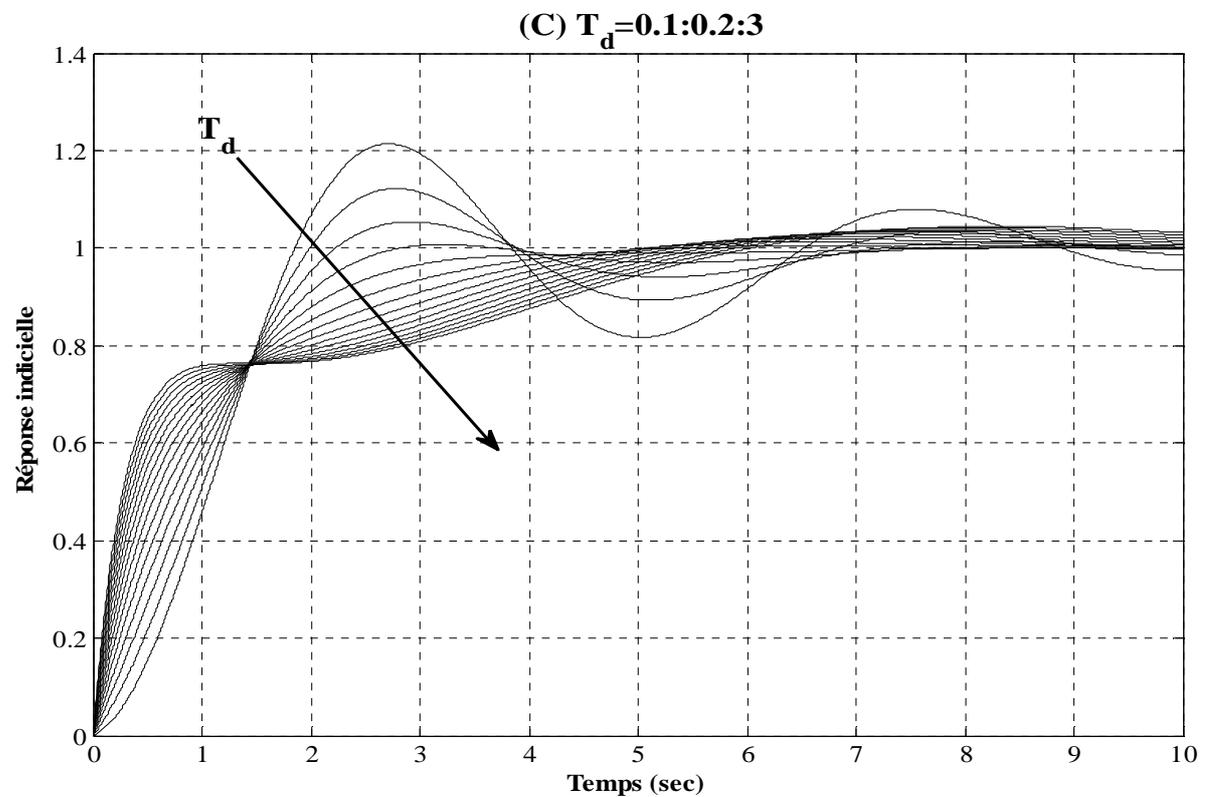


Figure (2.9-C) : Effets de la variation du paramètre T_d sur la réponse temporelle du système asservi considéré.

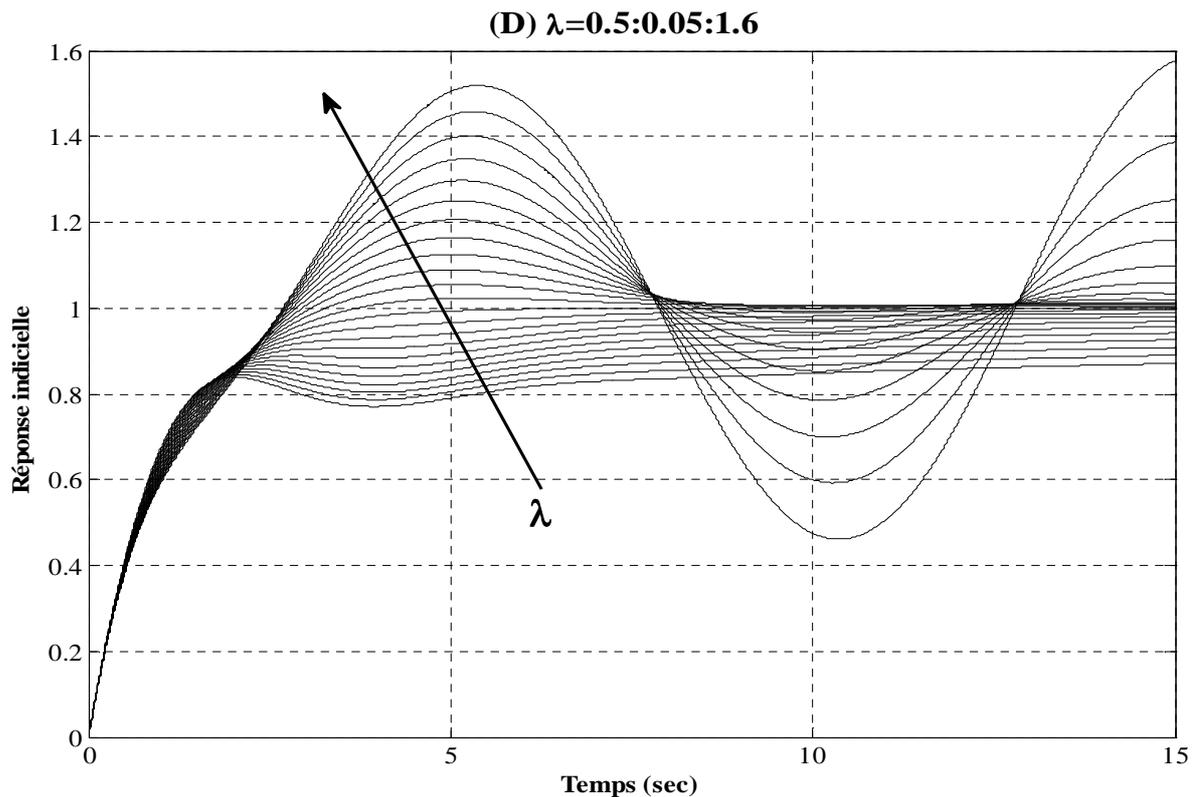


Figure (2.9-D) : Effets de la variation du paramètre λ sur la réponse temporelle du système asservi considéré.

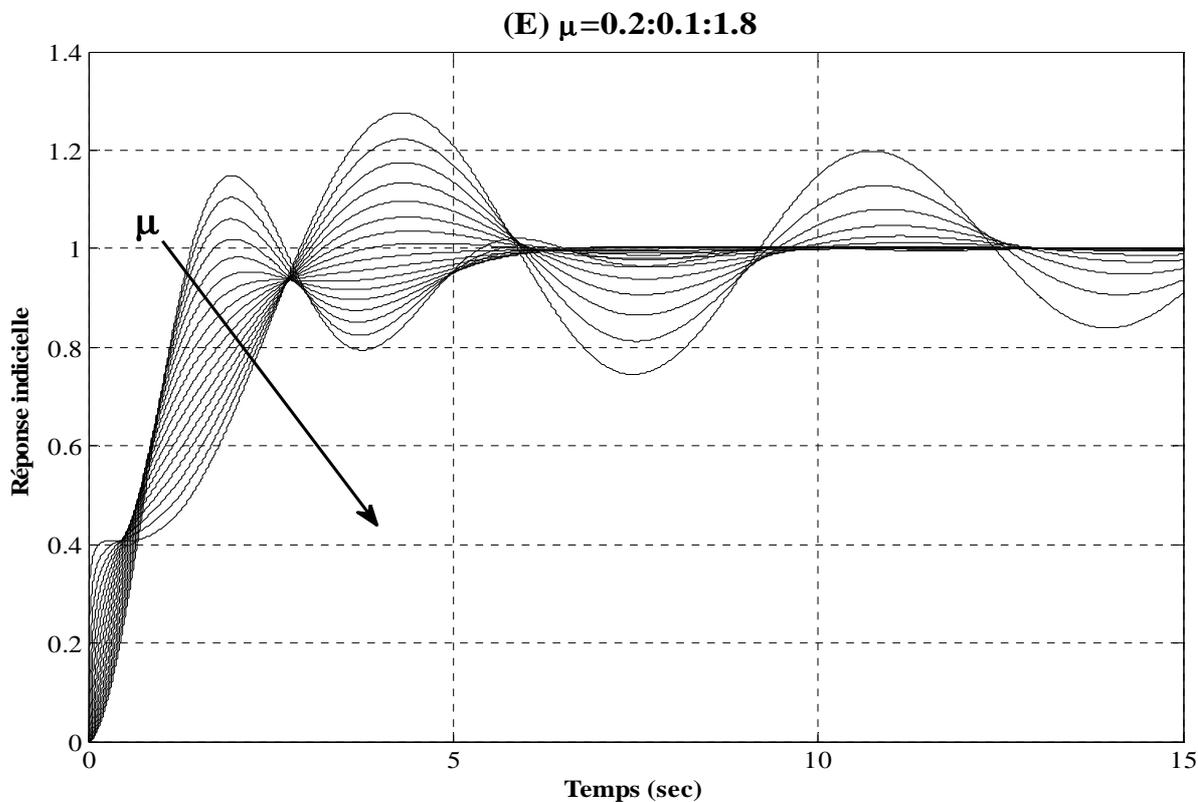


Figure (2.9-E) : Effets de la variation du paramètre μ sur la réponse temporelle du système asservi considéré.

A partir de la figure (2.9), les effets de la variation des cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ peuvent être commentés comme suit :

- de la figure (2.9-A), on note que l'augmentation du gain K_c augmente le dépassement et diminue le temps de montée et le temps de réponse.
- de la figure (2.9-B), on remarque que l'augmentation de la constante d'intégration T_i entraîne l'augmentation du dépassement et du temps de réponse, la diminution du temps de montée et engendre plus d'oscillation du système asservi.
- de la figure (2.9-D), on note que l'augmentation de l'ordre d'intégration fractionnaire λ augmente le dépassement et les oscillations du système asservi en laissant le temps de montée presque inchangé et il diminue l'erreur statique en l'annulant pour $\lambda > 1$.
- de la figure (2.9-E), on remarque que lorsque l'ordre de la dérivée fractionnaire μ augmente le dépassement et le temps de réponse diminuent le temps de montée et le temps de réponse.

On peut conclure que les effets des deux nouveaux paramètres λ et μ dans le régulateur fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ sur la réponse temporelle du système sont bien différents à celle-ci de T_i et T_d . D'autre part, on peut remarquer que les notions classiques de réglage restent conservées pour le cas de la commande fractionnaire. En effet, l'ordre d'intégration λ agit sur le fonctionnement en régime permanent tandis-que l'ordre de dérivée μ agit sur le fonctionnement en régime transitoire. Les paramètres λ et μ permettent d'augmenter la flexibilité du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ par rapport au PID classique étant un cas spécial du PID généralisé quand $\lambda = \mu = 1$.

2.3.4.3 Implémentation du $PI^\lambda D^\mu$

Comme le correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ a une fonction de transfert irrationnelle, la seule technique pour son implémentation est l'approximation de sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction de transfert rationnelle. Dans notre travail, la méthode de Charef a été utilisée pour cette approximation [39]. Comme il est montré dans la section (1.5), la méthode de Charef permet d'approximer les opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles dans une bande fréquentielle limitée. Alors, pour une bande fréquentielle $[\omega_L, \omega_H]$, le correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ de l'équation (2.32), pour $0 < \lambda < 1$ et $0 < \mu < 1$, est approximé par :

$$C(s) = K_p + T_I K_I \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} (1 + \frac{s}{Z_{Ii}})}{\prod_{i=0}^{N_I} (1 + \frac{s}{P_{Ii}}} + T_D K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} (1 + \frac{s}{Z_{Di}})}{\prod_{i=0}^{N_D} (1 + \frac{s}{P_{Di}}} \quad (2.34)$$

L'implémentation de ce type des fonctions est faite par des circuits RC comme il est montré dans la section (1.6).

Remarque : dans le cas où $\lambda > 1$ ou $\mu > 1$, l'opérateur classique $1/s$ est associé avec l'intégrateur d'ordre fractionnaire et s est associé avec la dérivée d'ordre fractionnaire dans la fonction rationnelle d'approximation.

2.4 Méthodes de réglage du $PI^\lambda D^\mu$

Au cours de la dernière décade, plusieurs méthodes de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ ont été proposées. Ces méthodes peuvent être divisées en trois types, méthodes numériques, méthodes à base de règles et méthodes analytiques [15-21], [46-52], [55], [57-60].

2.4.1 Méthodes numérique :

Les méthodes numériques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sont basées sur l'évolution de la fonction objective mesurant le rapprochement aux spécifications désirées. Alors, des méthodes d'optimisation numérique ont été employées pour chercher les paramètres du correcteur en optimisant la fonction objective. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode Monje et al. [49], [55] dont le problème de réglage des cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ et des trois paramètres du correcteur PI^λ ou PD^μ est formulé par un problème d'optimisation avec contrainte. Les spécifications utilisées sont :

- **Marge de phase φ_m :**

Comme il est convenu, la marge de phase est un signe très important de robustesse qui est reliée directement à l'amortissement du système. L'équation reliant la marge de phase et la fréquence transitionnelle est donnée par :

$$|C(j\omega_u)G(j\omega_u)|_{dB} = 0 \quad (2.35)$$

$$\arg(C(j\omega_u)G(j\omega_u)) = -\pi + \varphi_m \quad (2.36)$$

- **Robustesse vis-à-vis la variation du gain du système :**

Cette propriété est traduite par une phase plate autour de la fréquence de gain unité, alors l'équation de cette contrainte est donnée par :

$$\left. \frac{d(\arg(C(j\omega)G(j\omega)))}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_u} = 0 \quad (2.37)$$

Cette condition implique que la dérivé de la phase par-rapport à la fréquence est nulle à la fréquence du gain unité, c-à-d., la phase du système en boucle ouverte est plate autour de la fréquence du gain unité de telle sorte que la réponse indicielle du système en boucle fermée, pour différents gains, exhibe un dépassement constant dit propriété d'iso-amortissement.

- **Rejet de bruit de haute fréquence**

Une contrainte est imposée sur la fonction de la sensibilité complémentaire $T(j\omega)$ tel que :

$$\left| T(j\omega) = \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq A \text{ dB} \quad (2.38)$$

$\forall \omega \geq \omega_t$ avec $|T(j\omega_t)|_{dB} = A \text{ dB}$; A est la valeur de l'atténuation du bruit désirée aux hautes fréquences $\omega \geq \omega_t$.

- **Rejet de perturbation de sortie**

La contrainte imposée sur la fonction de sensibilité $S(j\omega)$ est définie par :

$$\left| S(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq B \text{ dB} \quad (2.39)$$

$\forall \omega \leq \omega_s$ avec $|S(j\omega_s)|_{dB} = B \text{ dB}$; B est la valeur désirée de la fonction de sensibilité aux fréquences $\omega \leq \omega_s$.

Donc, en utilisant le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire de l'équation (2.32), les cinq conditions des équations (2.35) à (2.39) donnent cinq équations non linéaires à cinq inconnus K_c , T_i , T_d , λ et μ . Pour déterminer les cinq paramètres du régulateur $PI^\lambda D^\mu$ en respectant ces cinq conditions, plusieurs méthodes ont été proposées.

Dans le travail de Monje et al. [55], l'équation (2.35) est considérée comme la fonction objective à optimiser tandis-que les autres équations (2.36) à (2.39) sont considérées comme des contraintes. Alors, dans ce cas, le problème de détermination de paramètres du régulateur $PI^\lambda D^\mu$ s'est converti à un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes dont la résolution est faite à l'aide de la fonction Matlab "FMINCON". Cette technique a donné de bons résultats.

Récemment deux autres méthodes numériques ont été proposées par Saidi et al. [21]. Ces méthodes sont une extension de la méthode de Monje et al. [55]. En effet, afin d'améliorer la robustesse du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ vis-à-vis des variations du gain, ces méthodes posent la

condition d'avoir une phase plate non seulement autour de la fréquence transitionnelle ω_u , mais aussi dans toute la bande fréquentielle sélectionnée.

Une autre méthode basée sur l'optimisation a aussi été proposée par Barbosa et al. [58] dont le principe de réglage est montré par sur la figure suivante :

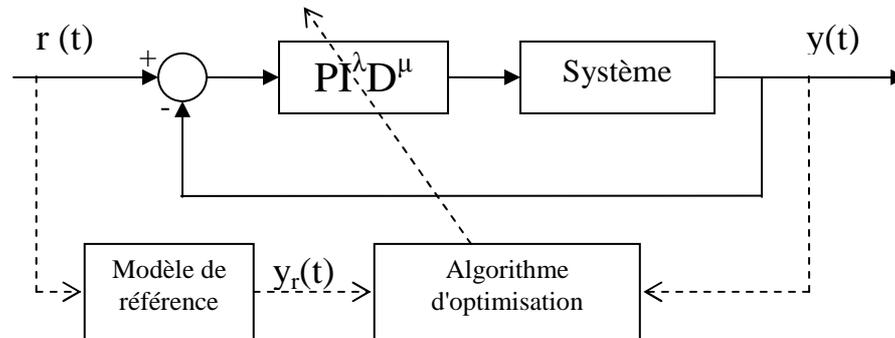


Figure (2.10) : Système de réglage proposé dans [58] du $PI^\lambda D^\mu$

Dans ce cas, le modèle de référence est le système représenté par de l'équation (2.13). L'idée de cette méthode est basée sur l'optimisation de l'indice de performance ISE (intégrale du carré de l'erreur en anglais **I**ntegral **S**quare **E**rror) qui est donné par la relation suivante :

$$J(K_c, T_I, T_D, \lambda, \mu) = \int_0^{\infty} [y_r(t) - y(t)]^2 dt \quad (2.40)$$

dont le modèle de référence utilisé est le système d'ordre fractionnaire élémentaire décrit par (2.11).

Le problème d'optimisation de cette technique est résolu à l'aide de la routine "FMINCON". De bons résultats ont été obtenus et le système en boucle fermée réalisé est robuste vis-à-vis de la variation du gain du processus.

Dans [18], Bettou et Charef ont proposé une méthode consistant à utiliser un régulateur PID classique dont ses trois paramètres K_c , T_I , T_D sont réglés par la méthode classique de Ziegler Nichols puis optimiser l'indice ISE suivant :

$$J(\lambda, \mu) = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [r(t) - y(t)]^2 dt \quad (2.41)$$

pour le calcul des paramètres λ et μ . L'indice d'optimisation $J(\lambda, \mu)$ est calculé par la méthode de Hall-Sartorius où la fonction irrationnelle $C(s)$ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est remplacée par son approximé utilisant la méthode de Charef [39]. Alors, en utilisant un balayage simple entre 0 et 1 des deux paramètres λ et μ , le couple (λ^*, μ^*) optimal minimisant

le critère $J(\lambda, \mu)$ est obtenu. Dans cette technique, les résultats sont très satisfaisants et significativement améliorés avec l'avantage majeur de la simplicité d'utilisation.

D'autres méthodes qui sont basées sur l'optimisation ont été proposées. On cite par exemple la méthode Jun-Yi et Bing-Gang qui avaient l'idée d'optimiser un critère combinant les erreurs ISE et IAE par l'utilisation de l'algorithme d'optimisation par essaim de particules (PSO) [57]. Dans la méthode de Biswas et al [17], une optimisation par l'amélioration de l'évolution différentielle est utilisée. Beaucoup d'autres méthodes numériques existent dans la littérature ont l'avantage commun d'avoir une bonne précision de la solution pour certaines gammes de problèmes et ainsi la possibilité d'améliorer les performances de la commande par l'ajout d'autres contraintes dans la phase d'optimisation. Cependant, ces méthodes nécessitent des connaissances parfois approfondies des méthodes d'optimisation, ainsi les solutions optimales ne sont pas toujours garanties et dépendent quelque fois des valeurs initiales choisies pour l'algorithme dans la phase d'optimisation.

2.4.2 Méthodes à base de règles

Ces méthodes sont intermédiaires entre les méthodes numériques et les méthodes analytiques. En effet, les paramètres du régulateur sont calculés par des relations analytiques qui sont généralement développées en se basant sur des méthodes numériques. Dans cette section, les principes des méthodes à base de règles les plus reconnues sont présentés.

Valério et Sa da Costa [16] ont proposé une méthode en se basant sur les cinq conditions de Monje et al [55] données dans les équations (2.35) à (2.39) avec un modèle du processus de type premier ordre avec temps de retard dont la fonction de transfert est donnée comme suit :

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT} e^{-Ls} \quad (2.42)$$

et dont la réponse indicielle est de la forme montrée par la figure (2.11).

En fixant le paramètre K à l'unité et en variant les paramètres L et T du modèle du processus, les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire sont obtenus pour chaque valeur du couple (L, T) . Par l'utilisation d'une méthode d'interpolation, moindres carrées par exemple, les relations directes entre les cinq paramètres du correcteur et les paramètres L et T du modèle du processus qui sont les mêmes paramètres utilisés dans la méthode de Ziegler Nichols dans le cas entier sont obtenus. Le développement des règles peut être fait selon les spécifications désirées du concepteur et selon les intervalles de la variation des paramètres L et T . Dans la suite, on va présenter une seule règle parmi les règles présentées dans les

résultats du [16] où les paramètres T et L du modèle sont $0.1 \leq T \leq 5$ et $L \leq 2$ et les spécifications désirées sont données par :

$$\begin{aligned}\omega_u &= 0.5 \text{ rad/s et } \varphi_m = 38^\circ \\ \omega_t &= 10 \text{ rad/s et } A = -10 \text{ dB} \\ \omega_s &= 0.01 \text{ rad/s et } B = -20 \text{ dB}\end{aligned}$$

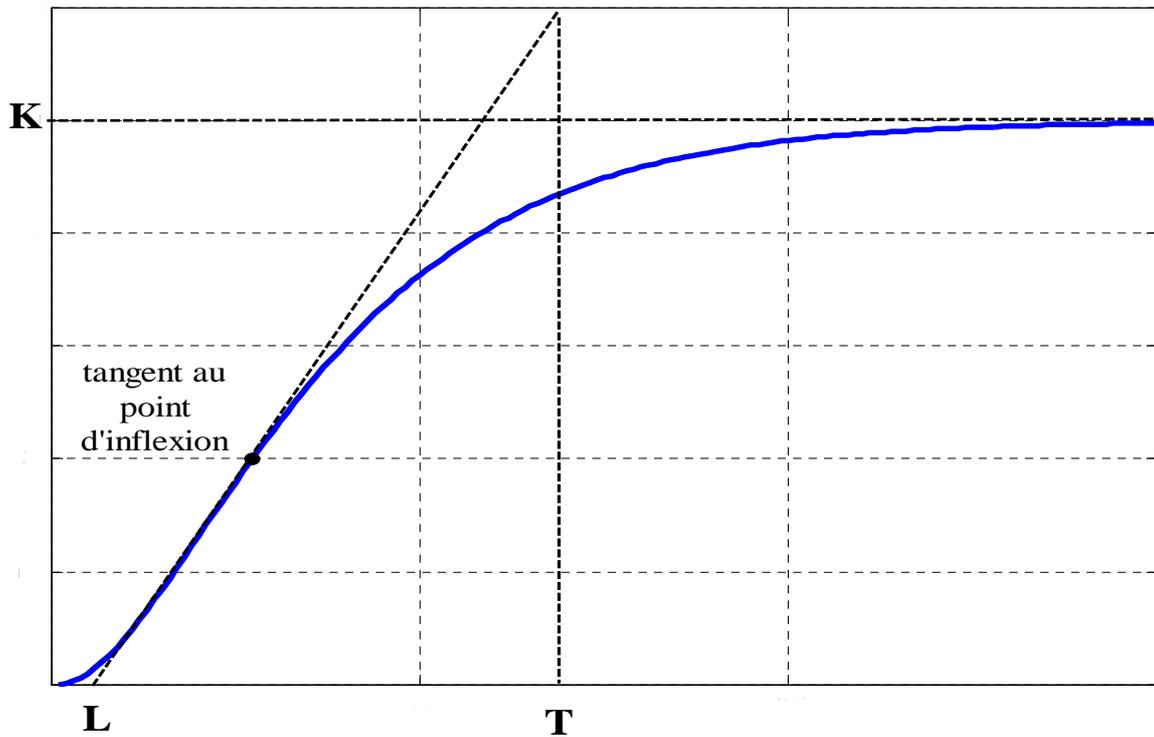


Figure (2.11) : Réponse indicielle de la forme S.

La règle donnant les relations des paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire aux paramètres L et T du modèle du processus selon la technique de Ziegler Nichols est donnée comme :

$$(K_c, T_I, T_D, \lambda, \mu) = a_1 + a_2 L + a_3 T + a_4 L^2 + a_5 T^2 + a_6 LT \quad (2.43)$$

où les valeurs des constantes a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 et a_6 sont données dans la table (2.1).

Table (2.1): Relations des paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur aux paramètres L et T du modèle du processus selon une règle

	K_c	T_I	T_D	λ	μ
a1	-0.0048	0.3254	1.5766	0.0662	0.8736
a2	0.2664	0.2478	-0.2098	-0.2528	0.2746
a3	0.4982	0.1429	-0.1313	0.1081	0.1489
a4	0.0232	-0.1330	0.0713	0.0702	-0.1557
a5	-0.0720	0.0258	0.0016	0.0328	-0.0250
a6	-0.0348	-0.0171	0.0114	0.2202	-0.0323

Par exemple, le paramètre K_c est donné en fonction de T et L par la relation suivante :

$$K_c = -0.0048 + 0.2664L + 0.4982T + 0.0232L^2 - 0.0720T^2 - 0.0348LT \quad (2.44)$$

L'avantage de cette technique est qu'elle ne nécessite pas le modèle du système, les paramètres sont dérivés analytiquement à partir de la réponse indicielle du système. Les relations trouvées par cette méthode sont un peu compliquées par rapport à celles de Ziegler Nichols telle qu'elle nécessite au moins une approximation quadratique, mais l'utilisation de cette méthode est simple et efficace. Le problème de cette technique est sa limitation au système avec réponse indicielle de forme S ou bien les systèmes ayant une réponse qui possède un point d'inflexion de la figure (2.11).

Dans [50] , Y. Q. Chen et al ont développé une méthode pour le réglage du correcteur PI^λ fractionnaire. Cette technique est destinée au système du type premier ordre avec un retard dont l'optimisation de réglage est basée sur le rejet de perturbation. L'idée de base est une extension de la technique MIGO (M_s constraint gain optimisation) utilisée pour le réglage du PID classique. Le principe de la méthode est basé sur la maximisation du paramètre T_I en assurant que le système en boucle fermée soit stable et le diagramme de Nyquist de la boucle se situe en dehors du cercle de centre $s = -C$ et de rayon R dans le plan complexe. Les paramètres C et de rayon R sont donnés comme suit [5] :

$$C = \frac{M_s - M_s M_p - 2M_s M_p^2 + M_p^2 - 1}{2M_s (M_p^2 - 1)} \quad (2.45)$$

$$R = \frac{M_s + M_p - 1}{2M_s (M_p^2 - 1)} \quad (2.46)$$

où M_s et M_p sont respectivement les maximums des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire données par :

$$M_s = \text{Max}_{0 < \omega < \infty} |S(j\omega)| \quad (2.47)$$

$$M_p = \text{Max}_{0 < \omega < \infty} |T(j\omega)| \quad (2.48)$$

où les deux fonction $S(j\omega)$ et $T(j\omega)$ sont données respectivement par (2.38) et (2.39).

Dans ce contexte, le réglage est conçu pour $M_s = 1.2$ et $M_p = 2$. Le cercle de centre C et de rayon R est choisi pour forcer la distance entre la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j\omega)$ et le point critique (-1,0) dans le diagramme Nyquist. La maximisation de T_I est faite pour minimiser le critère de performance ISE qui est donnée par l'équation (2.41). La contrainte sur la fonction de sensibilité et donnée par :

$$|1 + C(j\omega)G(j\omega)|^2 \geq R^2 \quad (2.49)$$

La résolution du problème est faite à l'aide de la méthode de Newton-Raphson qui est donnée en détail sous le nom algorithme F-MIGO dans [50]. Pour le développement des règles, le temps de retard relatif τ est donné par :

$$\tau = \frac{L}{L + T} \quad (2.50)$$

Le concepteur de la méthode a appliqué l'algorithme F-MIGO pour 13 systèmes différents pour des valeurs de τ entre 0 et 1 en utilisant différentes valeurs de L. Les paramètres du correcteur résultats sont tracés en fonction de τ . Alors, pour un système modélisé par un modèle du premier ordre avec un retard donné de l'équation (2.42), les paramètres λ , K_c et T_I du correcteur PI^λ correspondants minimisant le critère ISE, en prenant en considération les contraintes sur M_s et M_p des équations (2.47) et (2.48), sont donnés par [50] :

$$\lambda = \begin{cases} 1.1 & \text{si } \tau \geq 0.6 \\ 1.0 & \text{si } 0.4 \leq \tau < 0.6 \\ 0.9 & \text{si } 0.1 \leq \tau < 0.4 \\ 0.7 & \text{si } \tau < 0.1 \end{cases} \quad (2.51)$$

$$K_c = \frac{1}{K} \left(\frac{0.2978}{\tau + 0.000307} \right) \quad (2.52)$$

$$T_I = T \left(\frac{0.8578}{\tau^2 - 3.402\tau + 2.405} \right) \quad (2.53)$$

Dans la littérature, cette méthode peut être la plus simple à utiliser. En effet, deux étapes très simples sont nécessaires. La première étape consiste à identifier le système par un modèle tandis-que la deuxième étape consiste à calculer d'une façon directe les paramètres par les relations données dans les équations (2.51), (2.52) et (2.53).

Une autre méthode similaire à cette dernière est proposée par Padula et Visioli [20] avec les mêmes objectifs présentés en [50]. Cependant, la résolution du problème d'optimisation a été fait par un algorithme génétique. Après interpolation, les paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 K_c &= \frac{1}{K} (a\tau^b + c) \\
 T_I &= T^\lambda \left(a \left(\frac{L}{T} \right)^b + c \right) \\
 T_D &= T^\mu \left(a \left(\frac{L}{T} \right)^b + c \right)
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

avec a , b et c sont les paramètres à interpoler.

Les deux paramètres λ et μ ont été formulé pour les deux taches de la commande et pour les deux valeurs désirées du Ms 1.4 et 2.0 comme il est montré dans la table 2.2.

Table (2.2) : Les règles des paramètres λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ [20]

Rolle de correcteur	Ms= 1.4		Ms= 2.0	
	λ	μ	λ	μ
Asservissement	1	1.1 si $\tau < 0.1$	1	1.0 si $\tau < 0.1$
		1.2 si $\tau \leq 0.1$		1.1 si $0.1 \leq \tau \leq 0.4$
				1.2 si $0.4 \leq \tau$
Régulation	1	1.0 si $\tau < 0.1$	1	1.0 si $\tau < 0.2$
		1.1 si $0.1 \leq \tau < 0.4$		1.1 si $0.2 \leq \tau < 0.6$
		1.4 si $0.1 \leq \tau < 0.4$		1.2 si $0.6 \leq \tau$

Remarquons que la valeur optimale obtenue pour l'ordre d'intégration λ est égale à 1. Les résultats présentés dans le travail [20] montrent que l'utilisation d'une action dérivée d'ordre fractionnaire permet d'améliorer la performance du système en boucle fermée.

Ces résultats sont étudiés selon l'objectif de la conception du correcteur et ils sont formulés par neuf tableaux de réglage pour les différentes structures du correcteur PI, PI^λ , PID et $PI^\lambda D^\mu$ (pour plus de détail voir [20]).

Ces méthodes sont très pratiques, car les paramètres sont donnés sous forme d'expression à base de modèle. Malheureusement, l'inconvénient majeur de ces méthodes est la mauvaise précision des spécifications obtenues dont l'interpolation des paramètres pour une gamme de systèmes. A cet effet, la solution optimale n'est pas garantie, car cette solution est basée sur des méthodes numériques. Cependant, la recherche dans ces méthodes reste en cours dont l'objectif est de se rapprocher le plus possible aux spécifications désirées.

2.4.3 Méthodes analytiques :

Les méthodes de réglage dites analytiques sont des méthodes où la résolution du problème de commande n'utilise aucune technique d'optimisation. Elles se basent généralement sur des manipulations mathématiques permettant d'obtenir une solution exacte. Sachant que le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire a cinq paramètres au lieu de trois comme dans le cas d'un PID classique, l'extraction de ses paramètres est plus compliquée et nécessite l'utilisation des techniques mathématiques ou même des approximations pour résoudre le problème de réglage. Plusieurs techniques ont été proposées dans ce contexte [15, 51-52, 59-60]. Dans cette section, on va présenter les principes de quelques techniques analytiques.

Une technique de réglage proposée par Djouambi et al [15] utilise la fonction de transfert idéal de Bode. Cette méthode consiste à considérer l'intégrateur d'ordre fractionnaire décrit par l'équation (2.14) comme un modèle de référence du système en boucle ouverte. L'idée est basée sur le digramme de Bode asymptotique de la phase du processus à contrôler comme c'est montré sur la figure (2.12).

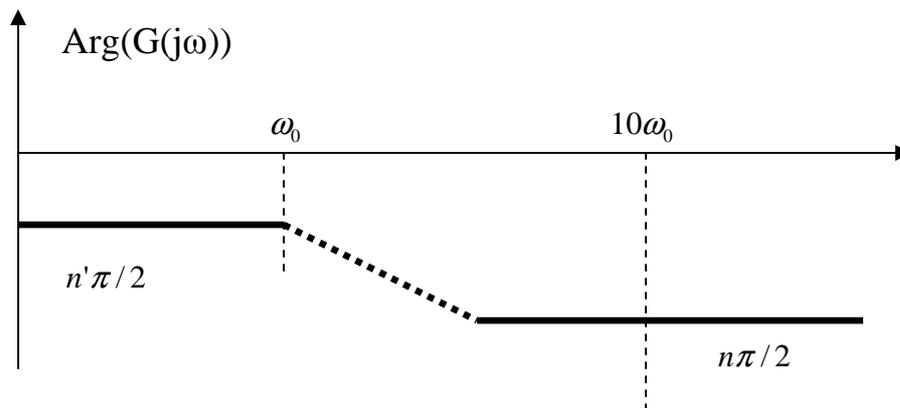


Figure (2.12) : Diagramme de Bode asymptotique de la phase d'un système d'ordre n .

$0 \leq n' \leq 2$, $2 \leq n \leq 4$ et ω_0 est la fréquence transitionnelle du système. Dans la conception, on considère que la fréquence transitionnelle du système à commander ω_u est supérieur à $10\omega_0$. Dans la bande de fréquence $\omega_{\min} \ll \omega_0 < \omega_u \ll \omega_{\max}$ et pour $K_u = \omega_u^m$, la fonction de transfert en boucle ouverte peut donc être approximée selon l'expression suivante :

$$L(s) = C(s)G(s) = K_c \left(1 + \frac{T_I}{s^\lambda} + T_D s^\mu\right) G(s) \approx \frac{K_u}{s^m} \quad (2.55)$$

Alors, Le réglage des cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire se fait comme suit :

- Une pente en amplitude de -20m dB/dec dans la bande fréquentielle $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ ce qui permet de calculer λ et μ comme suit :

$$\mu = n - m \text{ et } \lambda = m - n' \quad (2.56)$$

En fixant $K_c = 1$, les valeurs initiales T'_I et T'_D peuvent être calculés comme suit :

$$T'_D = \frac{K_u}{|G(j\omega_{\max})|\omega_{\max}^n} \quad (2.57)$$

$$T'_I = \frac{K_u}{|G(j\omega_{\min})|\omega_{\min}^{n'}} \quad (2.58)$$

- A la fréquence transitionnelle ω_u , le gain K_c est obtenu par l'expression suivante :

$$K_c = \frac{(|G(j\omega_u)|)^{-1}}{|1 + T'_I(j\omega_u)^{-\lambda} + T'_D(j\omega_u)^\mu|} \quad (2.59)$$

- Enfin l'ajustement des paramètres T_I et T_D se fait comme suit :

$$T_I = K_c T'_I \text{ et } T_D = K_c T'_D \quad (2.60)$$

La méthode de Vu & Lee [52] pour le réglage du PI^λ consiste à utiliser un model désiré en boucle fermée qui a la forme suivante :

$$G_d(s) = \frac{e^{-\theta s}}{1 + (s/\omega_u)^m} \quad (2.61)$$

Dans une boucle à retour unitaire le correcteur peut s'exprimer comme suite :

$$C(s) = \frac{1}{G(s)} \left[\frac{G_d(s)}{1 - G_d(s)} \right] = \frac{1}{G(s)} \left[\frac{e^{-\theta s}}{(s/\omega_u)^m + 1 - e^{-\theta s}} \right] \quad (2.62)$$

Puisque le système à commander est de type premier ordre avec retard comme dans l'équation (2.42), le retard pur dans le numérateur de (2.62) peut être éliminé avec le retard du système, donc, le correcteur est donné par l'expression suivante :

$$C(s) = \frac{1}{K} \left[\frac{1 + Ts}{(s/\omega_u)^m + 1 - e^{-\theta s}} \right] \Rightarrow C(j\omega) = \frac{1}{K} \left[\frac{1 + Tj\omega}{(j\omega/\omega_u)^m + 1 - e^{-j\theta\omega}} \right] \quad (2.63)$$

La réponse en fréquence du correcteur PI^λ est donnée par :

$$C(j\omega) = \left(K_c + \frac{T_I \cos(\lambda\pi/2)}{\omega^\lambda} \right) - j \left(\frac{T_I \sin(\lambda\pi/2)}{\omega^\lambda} \right) \quad (2.64)$$

Dans cette technique, l'ordre d'intégration λ est calculé par la méthode de Chen [50] selon les règles présentées dans la section précédente. Puis, par analogie entre les deux équations (2.63) et (2.64), les deux paramètres K_c et T_I sont obtenus comme suit :

$$T_I = \frac{\omega^\lambda ((\omega/\omega_u)^m \sin\varphi + \sin\varphi - (1 + (\omega\omega_u)^m \cos\varphi - \cos\varphi) \pi)}{K \sin(\lambda\pi/2) [1 + (\omega/\omega_u)^m \cos\varphi - \cos\varphi]^2 + [(\omega/\omega_u)^m \sin\varphi + \sin\varphi]^2} \quad (2.65)$$

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{(1 + (\omega/\omega_u)^m \cos\varphi - \cos\varphi) + ((\omega/\omega_u)^m \sin\varphi + \sin\varphi)\tau\omega}{[1 + (\omega/\omega_u)^m \cos\varphi - \cos\varphi]^2 - [(\omega/\omega_u)^m \sin\varphi + \sin\varphi]^2} - \frac{T_I \cos\lambda\pi/2}{\omega^\lambda} \quad (2.66)$$

où $\varphi = m\pi/2$ et $\Phi = \theta\omega$. Alors, les deux paramètres K_c et T_I sont fonction de m , ω_u et ω qui sont ajustés pour obtenir M_p le maximum désiré de la fonction de la sensibilité complémentaire $T(j\omega)$ de l'équation (2.38).

Une autre technique a été développée par Ying Luo et YangQuan Chen [59] qui a pour objectif le réglage des correcteurs PD^λ et $(PD)^\mu$ fractionnaires pour la commande d'un système d'ordre fractionnaire décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts^\alpha + 1)} \quad (2.67)$$

Notons que ce modèle joue un rôle très important pour la description de phénomène diélectrique des membranes ainsi qu'une grande variété de matériaux biologiques [60]. Les fonctions de transfert des deux types de correcteurs utilisés sont données par :

$$C_1(s) = K_{p1}(1 + K_{d1}s^\lambda) \quad (2.68)$$

$$C_2(s) = K_{p2}(1 + K_{d2}s)^\mu \quad (2.69)$$

Le réglage des trois paramètres K_{p1} , K_{d1} et λ du correcteur PD^λ et des trois paramètres K_{p2} , K_{d2} et μ du correcteur $(PD)^\mu$ est fait pour satisfaire les trois conditions suivantes :

- marge de phase désirée φ_m

$$\arg(C(j\omega_u)G(j\omega_u)) = -\pi + \varphi_m \quad (2.70)$$

- fréquence transitionnelle ω_u

$$|C(j\omega_u)G(j\omega_u)|_{dB} = 0 \quad (2.71)$$

- robustesse vis-à-vis de la variation du gain

$$\left. \frac{d\arg(C(j\omega)G(j\omega))}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_u} = 0 \quad (2.72)$$

Une technique graphique a été utilisée pour résoudre les trois équations précédentes.

En utilisant quelques manipulations mathématiques, le gain K_{d2} du correcteur $(PD)^\mu$ est obtenu comme fonction du paramètre μ à partir des équations (2.70) et (2.72) par les relations suivantes :

$$K_{p2} = f(\mu) = \frac{1}{\omega_u} \tan \left(\frac{1}{\mu} \left(\varphi_m - \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{T\omega_u^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + T\omega_u^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}} \right) \right) \right) \quad (2.73)$$

$$K_{d2} = g(\mu) = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4A_3^2 \omega_u^2}}{2A_3 \omega_u^2} \quad (2.74)$$

où :

$$A_3 = \left(\frac{\alpha T \omega_u^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{(T\omega_u^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2})^2 + (1 + T\omega_u^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2})^2} \right).$$

Le gain K_{p2} est aussi obtenu comme fonction des deux paramètres K_{d2} et μ à partir de l'équation (2.71) par l'expression suivante :

$$K_{p2} = h(K_{d2}, \mu) = \frac{\sqrt{(T\omega_u^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2})^2 + (\omega_u + T\omega_u^{1+\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2})^2}}{(1 + K_{d2}^2 \omega_u^2)^{\mu/2}} \quad (2.75)$$

Comme $0 < \mu < 2$, la résolution est faite selon la procédure suivante :

- 1) tracer la fonction $K_{d2} = f(\mu)$ de l'équation (2.73)
- 2) tracer la fonction $K_{d2} = g(\mu)$ de l'équation (2.74)
- 3) obtenir les deux paramètres K_{d2} et μ à partir de l'intersection des deux courbes f et g
- 4) calculer le paramètre $K_{p2} = h(K_{d2}, \mu)$ à partir de l'expression (2.75)

Ying Luo et al. ont aussi adapté cette même technique pour le réglage du PI^λ et le $[PI]^\lambda$ avec des résultats expérimentaux validant leurs avantages [60]. La même idée a été utilisée pour la commande d'un système d'ordre entier du second ordre avec un PD^μ [51]. Grâce à sa simplicité d'utilisation et son efficacité, du point de vue de satisfaction des spécifications, cette méthode a eu un grand succès dans le domaine de la commande fractionnaire.

En 2014, Bettayeb et Mansouri ont développé une technique de commande basée sur la commande à modèle interne en associant un filtre d'ordre fractionnaire à un correcteur PID classique pour des systèmes d'ordre fractionnaire.

L'avantage majeur des méthodes analytiques est que la solution soit généralement exacte et que le réglage est donné sous forme d'expressions simples à exploiter. Malheureusement, le développement de ce type de méthodes se met en face des manipulations mathématiques très compliqués ce qui exige parfois l'utilisation des techniques avancées (approximation, simplification, et même optimisation).

Après présentations de quelques techniques de réglage du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire des méthodes numériques, méthodes à base de règles et méthodes analytiques, les avantages et les inconvénients de chaque type de méthode sont présentés dans la table (2.3).

Table (2.3) : Comparaison entre les différentes techniques de réglages

Méthode	Avantages	Inconvénients
Numérique	<ul style="list-style-type: none"> - solution précise (dépend de la convergence de l'algorithme d'optimisation) - meilleure flexibilité de réglage avec des possibilités d'améliorer la commande par l'ajout d'autre contrainte 	<ul style="list-style-type: none"> - solution optimale non garantie - solution dépend du choix du point initial de l'algorithme. - difficile à utiliser par un ingénieur non spécialisé
A base de Règles	<ul style="list-style-type: none"> - réglage simple et très pratique - simple à utiliser par un ingénieur non spécialisé 	<ul style="list-style-type: none"> - manque de précision de la solution. - difficulté de développement des règles
Analytique	<ul style="list-style-type: none"> - réglage simple et très pratique avec une précision assuré de la solution - simple à utiliser par un ingénieur non spécialisé 	<ul style="list-style-type: none"> - limité de point de vue imposition des contraintes (il faut choisir les contraintes les plus simples à présenter mathématiquement) - difficulté du développement des expressions analytiques

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, des initiations aux systèmes d'ordre fractionnaire et à la commande d'ordre fractionnaire ont été présentées. Le correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire a reçu une grande attention des chercheurs grâce à leur flexibilité permettant d'améliorer la qualité de la commande. Alors, on a donné quelques techniques du réglage du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire. Cependant, le domaine de réglage du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire reste un sujet d'actualité dont le but est d'avoir des méthodes plus efficaces, plus pratiques et plus simples à utiliser ; ce qui permet d'avoir plus de motivation pour travailler encore dans cet axe de recherche. Donc, dans le cadre de cette thèse, une technique de réglage du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire est proposée et qui sera présentée et détaillée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Réglage analytique du
 $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire

3.1 Introduction :

En pratique, la modélisation des systèmes n'est pas toujours envisageable à cause de ses manipulations mathématiques parfois très compliquées. Cet inconvénient rend la conception d'un correcteur une opération complexe à plusieurs tâches y compris la modélisation, l'identification, linéarisation... etc. D'autre part, pour la majorité des systèmes stables, la réponse indicielle est généralement accessible ce qui rend la connaissance de ces derniers possible à partir d'une simple mesure. Cet avantage a encouragé les chercheurs dans le domaine de la commande à développer des méthodes de synthèses en se basant sur la réponse indicielle du système. En effet, une simple mesure sur le processus permet de paramétrer son correcteur. La première idée a été développée par Zigler et Nichols en 1942 [61] qui ont conçu un correcteur classique PID pour un système réel sans avoir besoin de connaître son modèle. Depuis, plusieurs travaux ont été effectués dont le but est d'améliorer la qualité de la commande et de simplifier le réglage des paramètres du correcteur PID [56].

Récemment, avec le développement considérable du $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire et la proposition de plusieurs techniques de réglage comme il a été montré dans le chapitre précédent, une méthode de réglage basée sur la réponse indicielle est proposée pour le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire dont le principe est de satisfaire les cinq conditions assurant la propriété d'iso-amortissement [16]. Cette méthode est très utile due à la possibilité de réglage du correcteur sans passer par la modélisation ou l'identification du processus. Cependant, elle est limitée aux systèmes à réponse indicielle spécifique. D'autre part, l'utilisation de cette méthode nécessite plusieurs règles, en effet, chaque gamme de systèmes a des expressions analytiques différentes aux autres gammes.

A partir des avantages y compris la simplicité et la précision des méthodes analytiques et l'intérêt d'utilisation de la boucle idéale de Bode comme un modèle de référence [15, 42, 46-47, 62], une nouvelle méthode de réglage analytique a été développée dans le cadre des travaux de cette thèse pour la conception du $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire. Alors, ce chapitre est consacré à la présentation de cette nouvelle technique de réglage des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire en utilisant que la réponse indicielle des systèmes stables et ne nécessite aucune approximation du processus à commander par un modèle. S'inspirant d'une technique récente de réglage du correcteur PID classique [63], la méthode proposée consiste à approximer la fonction de transfert en boucle fermée en séries de Taylor-Maclaurin, puis par analogie avec un modèle désiré, les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sont calculés pour que le système en boucle fermée soit équivalent à la boucle idéale de Bode. Cette technique a

un intérêt similaire à celui de la majorité des méthodes présentés dans la section (2.4) du chapitre précédent dont l'objectif est de rendre le système en boucle fermée robuste vis-à-vis la variation de gain. D'autre part, avec la méthode proposée, deux autres intérêts sont introduits. Le premier intérêt réside dans le réglage qui se base uniquement à la réponse indicielle du processus sans avoir besoin de connaître son modèle mathématique tandis-que le deuxième intérêt représentant l'avantage majeur de la méthode proposée est la solution analytique exacte obtenue pour les cinq paramètres, contrairement aux autres méthodes analytiques qui restent limitées au réglage du correcteur à trois paramètres comme le PI^λ et PD^μ [51-52, 59-60]. La limitation de ces méthodes est due essentiellement à la difficulté de la résolution des cinq équations non-linéaires avec cinq inconnus. Le principe de la méthode sera, par la suite, présenté dont les paramètres sont dérivés analytiquement à partir de la réponse indicielle du processus en prenant en considération les spécifications désirées. Des exemples illustratifs ont été présentés dont les bons résultats justifient l'utilité de la méthode proposée.

3.2 Formulation du problème

Considérons le schéma classique d'une boucle de commande à retour unitaire suivant :

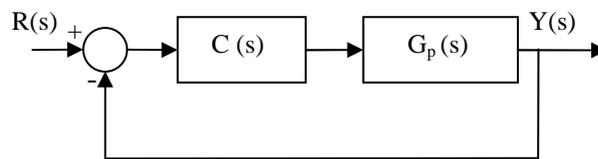


Figure (3.1) : boucle de commande classique

avec $G_p(s)$ est la fonction de transfert du processus et $C(s)$ est la fonction de transfert du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire donnée par l'expression suivante :

$$C(s) = K_c + \frac{T_I}{s^\lambda} + T_D s^\mu \quad (3.1)$$

où K_c , T_I , T_D , λ et μ sont les cinq paramètres à régler du correcteur. Dans ce travail, le processus est considéré stable dont la fonction de transfert $G_p(s)$ est inconnue, seulement sa réponse indicielle est disponible. La fonction de transfert du système en boucle fermée $G_A(s)$ est donnée alors par :

$$G_A(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)} \quad (3.2)$$

Le problème de conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est fondé sur le réglage de ses cinq paramètres de l'équation (3.1) afin que la fonction $G_A(s)$ de l'équation (3.2) se comporte comme un modèle de référence fractionnaire donnée par la fonction de transfert suivante :

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^m} \quad (3.3)$$

où m est un nombre réel tel que $0 < m < 2$, et ω_u est un nombre réel positif. Dans notre cas, on a utilisé un ordre m compris entre 1 et 2 pour que le système $G_d(s)$ a un comportement oscillatoire [45]. On a vu précédemment que la fonction donnée par l'équation (3.3) représente la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle idéale de Bode [46] qui est largement utilisée comme modèle de référence dans la conception des correcteurs d'ordre fractionnaire. Les deux paramètres m et ω_u sont imposés afin que le système désiré $G_d(s)$ satisfait les spécifications demandées dans le cahier de charges. Si les spécifications désirées sont données en terme de marge de phase φ_m et de fréquence transitionnelle ω_c , les deux paramètres m et ω_u peuvent être obtenus par :

- $\omega_u = \omega_c$ (la fréquence transitionnelle du système asservi projeté)
- $m = 2[1 - (\varphi_m/\pi)]$ (φ_m est la marge de phase du système asservi projeté)

Donc, le problème se résume au réglage des cinq paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire satisfaisant la condition $G_A(s) \approx G_d(s)$ dans une bande fréquentielle autour de la fréquence transitionnelle $\omega_c = \omega_u$.

Les deux fonctions $G_A(s)$ et $G_d(s)$ peuvent être représentées en série de Taylor-Maclaurin, en considérant que le variable s est réel, autour du point $s = \omega_u$ comme suit :

$$G_A(s) = G_A(\omega_u) + (s - \omega_u)G_A^{(1)}(\omega_u) + \frac{(s - \omega_u)^2}{2!}G_A^{(2)}(\omega_u) + \dots + \frac{(s - \omega_u)^i}{i!}G_A^{(i)}(\omega_u) + \dots \quad (3.4)$$

$$G_d(s) = G_d(\omega_u) + (s - \omega_u)G_d^{(1)}(\omega_u) + \frac{(s - \omega_u)^2}{2!}G_d^{(2)}(\omega_u) + \dots + \frac{(s - \omega_u)^i}{i!}G_d^{(i)}(\omega_u) + \dots \quad (3.5)$$

où $G_A^{(i)}(\omega_u)$ et $G_d^{(i)}(\omega_u)$ sont respectivement les dérivées d'ordre i des fonctions $G_A(s)$ et $G_d(s)$ par rapport à la variable s au point ω_u . Comme le but est la synthèse du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire satisfaisant la condition $G_A(s) \cong G_d(s)$; donc par troncation des expressions (3.4) et (3.5) aux cinq premiers termes et par analogie entre les deux polynômes en s , cinq équations avec cinq inconnues (K_c , T_I , T_D , λ et μ) sont obtenues. Des équations (3.4) et (3.5) on peut alors écrire :

$$\begin{cases} G_A(\omega_u) = G_d(\omega_u) \\ G_A^{(1)}(\omega_u) = G_d^{(1)}(\omega_u) \\ G_A^{(2)}(\omega_u) = G_d^{(2)}(\omega_u) \\ G_A^{(3)}(\omega_u) = G_d^{(3)}(\omega_u) \\ G_A^{(4)}(\omega_u) = G_d^{(4)}(\omega_u) \end{cases} \quad (3.6)$$

Alors, la solution proposée consiste à calculer les cinq paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire en utilisant les cinq égalités de l'équation (3.6). Pour éviter la résolution numérique à l'aide d'algorithmes d'optimisation, des manipulations mathématiques simples avec des changements de variables ont été utilisées pour que la résolution soit analytique.

3.3 Présentation de la méthode

Dans cette partie du chapitre, on va présenter la résolution du système d'équations non linéaire (3.6) sous forme d'une séquence d'étapes successives.

3.3.1 Etape 1 :

Considérons les paramètres $\theta_i = G_A^{(i)}(\omega_u) = G_d^{(i)}(\omega_u)$ pour $0 \leq i \leq 4$. Alors, des équations (3.6) et (3.3), on aura les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= G_A(\omega_u) = G_d(\omega_u) = \frac{1}{2} \\ \theta_1 &= G_A^{(1)}(\omega_u) = G_d^{(1)}(\omega_u) = -\frac{m}{4\omega_u} \\ \theta_2 &= G_A^{(2)}(\omega_u) = G_d^{(2)}(\omega_u) = \frac{m}{4\omega_u^2} \\ \theta_3 &= G_A^{(3)}(\omega_u) = G_d^{(3)}(\omega_u) = \frac{m(m^2 - 4)}{8\omega_u^3} \\ \theta_4 &= G_A^{(4)}(\omega_u) = G_d^{(4)}(\omega_u) = -\frac{4m(m^2 - 2)}{3\omega_u^4} \end{aligned} \quad (3.7)$$

On note que les valeurs des paramètres θ_i , $0 \leq i \leq 4$, sont calculées à partir des valeurs données des paramètres m et ω_u du modèle de référence fractionnaire de l'équation (3.3). Soient les paramètres $X_i = C^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, les $i^{\text{ème}}$ dérivées de la fonction de transfert $C(s)$ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ par rapport à la variable s au point $s = \omega_u$. Donc, de la fonction de transfert du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire $C(s)$ de l'équation (3.1), les paramètres $X_i = C^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned}
X_0 &= C(\omega_u) = K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^{\mu} \\
X_1 &= C^{(1)}(\omega_u) = \frac{-\lambda T_I}{\omega_u} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu T_D}{\omega_u} \omega_u^{\mu} \\
X_2 &= C^{(2)}(\omega_u) = \frac{\lambda(\lambda+1)T_I}{\omega_u^2} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu(\mu-1)T_D}{\omega_u^2} \omega_u^{\mu} \\
X_3 &= C^{(3)}(\omega_u) = \frac{-\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)T_I}{\omega_u^3} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)T_D}{\omega_u^3} \omega_u^{\mu} \\
X_4 &= C^{(4)}(\omega_u) = \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)T_I}{\omega_u^4} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)T_D}{\omega_u^4} \omega_u^{\mu}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

3.3.2 Etape 2

Considérons $G_{In}(s)$ la transformée de Laplace de la réponse indicielle du système $g_{In}(t)$, donc la fonction $G_{In}(s)$ est donnée par l'expression suivante :

$$G_{In}(s) = \int_0^{\infty} g_{In}(t) e^{-st} dt \tag{3.9}$$

Le développement en série de Taylor-Maclaurin au point $s = \omega_u$ de la fonction $G_{In}(s)$ est donné par l'expression suivante :

$$G_{In}(s) = G_{In}(\omega_u) + (s - \omega_u) G_{In}^{(1)}(\omega_u) + \frac{(s - \omega_u)^2}{2!} G_{In}^{(2)}(\omega_u) + \frac{(s - \omega_u)^3}{3!} G_{In}^{(3)}(\omega_u) + \dots \tag{3.10}$$

où les $G_{In}^{(i)}(\omega_u)$ sont les $i^{\text{ème}}$ dérivées de la fonction $G_{In}(s)$ au point $s = \omega_u$. De l'expression de $G_{In}(s)$ de l'équation (3.9), l'équation (3.10) s'écrira alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
G_{In}(s) &= \int_0^{+\infty} (g_{In}(t) e^{-\omega_u t}) dt + (s - \omega_u) \left\{ \int_0^{+\infty} (-t g_{In}(t) e^{-\omega_u t}) dt \right\} + \\
&\frac{(s - \omega_u)^2}{2!} \left\{ \int_0^{+\infty} (t^2 g_{In}(t) e^{-\omega_u t}) dt \right\} + \frac{(s - \omega_u)^3}{3!} \left\{ \int_0^{+\infty} (-t^3 g_{In}(t) e^{-\omega_u t}) dt \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Soient les paramètres $S_i = G_{In}^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, les $i^{\text{ème}}$ dérivées de la fonction $G_{In}(s)$ par rapport à la variable s au point $s = \omega_u$. Donc, à partir des équations (3.10) et (3.11) ces paramètres $S_i = G_{In}^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned}
S_0 &= G_{In}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} g_{in}(t) e^{-\omega_u t} dt \\
S_1 &= G_{In}^{(1)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} -t g_{in}(t) e^{-\omega_u t} dt \\
S_2 &= G_{In}^{(2)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} t^2 g_{in}(t) e^{-\omega_u t} dt \\
S_3 &= G_{In}^{(3)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} -t^3 g_{in}(t) e^{-\omega_u t} dt \\
S_4 &= G_{In}^{(4)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} t^4 g_{in}(t) e^{-\omega_u t} dt
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Comme $\omega_u > 0$ et pour $n \geq 0$, la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\omega_u t} = 0$; alors, les paramètres S_i , pour $0 \leq i \leq 4$, de l'équation (3.12) sont convergents et peuvent être calculées numériquement par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
S_0 &= G_{In}(\omega_u) = T \sum_{k=1}^N g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT} \\
S_1 &= G_{In}^{(1)}(\omega_u) = -T \sum_{k=1}^N (kT) g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT} \\
S_2 &= G_{In}^{(2)}(\omega_u) = T \sum_{k=1}^N (kT)^2 g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT} \\
S_3 &= G_{In}^{(3)}(\omega_u) = -T \sum_{k=1}^N (kT)^3 g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT} \\
S_4 &= G_{In}^{(4)}(\omega_u) = T \sum_{k=1}^N (kT)^4 g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où T est la période d'échantillonnage de la réponse indicielle $g_{in}(t)$ et $N =$ partie entière de (T_{ac}/T) est le nombre d'échantillons pour un temps d'acquisition du signal $g_{in}(t)$ T_{ac} qui est généralement choisi très supérieur au temps de réponse du système. On note que les valeurs numériques des paramètres S_i , pour $0 \leq i \leq 4$, sont calculées soit à partir de la réponse indicielle du système $g_{in}(t)$ soit à partir de la fonction de transfert de système si cette dernière est disponible.

3.3.3 Etape 3 :

La fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$ peut être obtenue à partir de la fonction de transfert en boucle fermée $G_A(s)$ de l'équation (3.2) comme suit :

$$G_o(s) = C(s)G_p(s) = \frac{G_A(s)}{1 - G_A(s)} \tag{3.14}$$

L'équation (3.14) peut être réécrite comme suit :

$$G_o(s) = sC(s) \frac{G_p(s)}{s} = sC(s) G_{In}(s) = \frac{G_A(s)}{1-G_A(s)} \quad (3.15)$$

où $G_p(s)/s = G_{In}(s)$ est la transformée de Laplace de la réponse indicielle $g_{In}(t)$ du système.

En prenant la $i^{\text{ième}}$ dérivée, pour $0 \leq i \leq 4$, des deux cotés de la relation (3.15) par rapport à la variable s au point $s = \omega_u$ on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} G_o(\omega_u) &= \omega_u X_0 S_0 = \frac{\theta_0}{1-\theta_0} \\ G_o^{(1)}(\omega_u) &= X_0 S_0 + \omega_u X_1 S_0 + \omega_u X_0 S_1 = \frac{\theta_1}{(1-\theta_0)^2} \\ G_o^{(2)}(\omega_u) &= 2X_1 S_0 + 2X_0 S_1 + \omega_u X_2 S_0 + 2\omega_u X_1 S_1 + \omega_u X_0 S_2 \\ &= \frac{\theta_2}{(1-\theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{(1-\theta_0)^3} \\ G_o^{(3)}(\omega_u) &= 3X_2 S_0 + 6X_1 S_1 + 3X_0 S_2 + \omega_u X_3 S_0 + \omega_u X_0 S_3 + 3\omega_u X_2 S_1 + 3\omega_u X_1 S_2 \quad (3.16) \\ &= \frac{\theta_3}{(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_1\theta_2}{(1-\theta_0)^3} + \frac{6\theta_1^3}{(1-\theta_0)^4} \\ G_o^{(4)}(\omega_u) &= 4X_3 S_0 + 12X_2 S_1 + 12X_1 S_2 + 4X_0 S_3 + \omega_u X_4 S_0 + \omega_u X_0 S_4 + 4\omega_u X_3 S_1 \\ &\quad + 4\omega_u X_1 S_3 + 6\omega_u X_2 S_2 \\ &= \frac{\theta_4}{(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_2^2 + 8\theta_1\theta_3}{(1-\theta_0)^3} + \frac{36\theta_1^2\theta_2}{(1-\theta_0)^4} + \frac{24\theta_1^4}{(1-\theta_0)^5} \end{aligned}$$

où, pour $0 \leq i \leq 4$, les paramètres $\theta_i = G_A^{(i)}(\omega_u)$, $X_i = C^{(i)}(\omega_u)$ et $S_i = G_{In}^{(i)}(\omega_u)$ sont définis dans les équations (3.7), (3.8) et (3.13), respectivement. Alors, les valeurs numériques des paramètres $G_o^{(i)}(\omega_u)$ de l'équation (3.16), pour $0 \leq i \leq 4$, sont calculées à partir des paramètres θ_i qui sont calculées en premier lieu dans la première étape selon l'équation (3.7) à partir des valeurs données des paramètres m et ω_u du modèle de référence fractionnaire de l'équation (3.3).

3.3.4 Étape 4 :

Comme les valeurs numériques des paramètres $G_o^{(i)}(\omega_u)$ et S_i , pour $0 \leq i \leq 4$, peuvent être facilement obtenues à partir des équations (3.16) et (3.12), alors les valeurs des paramètres X_i , pour $0 \leq i \leq 4$, sont successivement calculées à partir de l'équation (3.16) comme suit :

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{G_o(\omega_u)}{\omega_u S_0} \\
X_1 &= \frac{1}{\omega_u S_0} (G_o^{(1)}(\omega_u) - X_0 S_0 - \omega_u X_0 S_1) \\
X_2 &= \frac{1}{\omega_u S_0} [G_o^{(2)}(\omega_u) - 2X_1 S_0 - 2X_0 S_1 - 2\omega_u X_1 S_1 - \omega_u X_0 S_2] \\
X_3 &= \frac{1}{\omega_u S_0} \left[G_o^{(3)}(\omega_u) - 3X_2 S_0 - 6X_1 S_1 - 3X_0 S_2 - \omega_u X_0 S_3 \right. \\
&\quad \left. - 3\omega_u X_2 S_1 - 3\omega_u X_1 S_2 \right] \\
X_4 &= \frac{1}{\omega_u S_0} \left[G_o^{(4)}(\omega_u) - 4X_3 S_0 - 12X_2 S_1 - 12X_1 S_2 - 4X_0 S_3 \right. \\
&\quad \left. - \omega_u X_0 S_4 - 4\omega_u X_3 S_1 - 4\omega_u X_1 S_3 - 6\omega_u X_2 S_2 \right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Une fois que les valeurs des paramètres X_i , pour $0 \leq i \leq 4$, sont obtenues, les cinq paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire peuvent être obtenus en résolvant l'équation (3.8) en utilisant quelques manipulations mathématiques.

3.3.5 Etape 5

On dénote par Q_1 et Q_2 les deux quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{-\lambda}{\omega_u} T_I \omega_u^{-\lambda} \\
Q_2 &= \frac{\mu}{\omega_u} T_D \omega_u^\mu
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Alors, l'équation (3.8) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}
X_0 &= K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^\mu \\
X_1 &= Q_1 + Q_2 \\
X_2 &= -(\lambda + 1) \frac{Q_1}{\omega_u} + (\mu - 1) \frac{Q_2}{\omega_u} \\
X_3 &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \frac{Q_1}{\omega_u^2} + (\mu - 1)(\mu - 2) \frac{Q_2}{\omega_u^2} \\
X_4 &= -(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \frac{Q_1}{\omega_u^3} + (\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3) \frac{Q_2}{\omega_u^3}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Soient les variables Z_i (pour $1 \leq i \leq 3$) obtenues à partir des paramètres X_i (pour $1 \leq i \leq 4$) et ω_u par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
Z_1 &= X_1 + \omega_u X_2 \\
Z_2 &= X_1 + 3\omega_u X_2 + \omega_u^2 X_3 \\
Z_3 &= X_1 + 7\omega_u X_2 + 6\omega_u^2 X_3 + \omega_u^3 X_4
\end{aligned} \tag{3.20}$$

A partir des deux équations (3.19) et (3.20), les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned}
X_0 &= K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^{\mu} \\
X_1 &= Q_1 + Q_2 \\
Z_1 &= -\lambda Q_1 + \mu Q_2 \\
Z_2 &= \lambda^2 Q_1 + \mu^2 Q_2 \\
Z_3 &= -\lambda^3 Q_1 + \mu^3 Q_2
\end{aligned} \tag{3.21}$$

En combinant les différentes expressions de l'équation (3.21), on peut obtenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
X_0 &= K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^{\mu} \\
X_1 &= Q_1 + Q_2 \\
\lambda X_1 + Z_1 &= (\lambda + \mu) Q_2 \\
\lambda Z_1 + Z_2 &= \mu(\lambda + \mu) Q_2 \\
\lambda Z_2 + Z_3 &= \mu^2 (\lambda + \mu) Q_2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.3.6 Etape 6 :

A partir de l'équation (3.22), l'équation suivante peut être tirée :

$$\frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1} = \frac{\lambda Z_2 + Z_3}{\lambda Z_1 + Z_2} = \mu \tag{3.23}$$

Alors, de la première égalité de l'équation (3.23), l'équation suivante est obtenue:

$$(\lambda Z_1 + Z_2)(\lambda Z_1 + Z_2) = (\lambda X_1 + Z_1)(\lambda Z_2 + Z_3) \tag{3.24}$$

Dans l'équation (3.24) la seule inconnue est la variable λ , donc cette équation peut être réécrite sous la forme d'une équation du second ordre en λ comme suit :

$$(Z_1^2 - X_1 Z_2) \lambda^2 + (Z_1 Z_2 - X_1 Z_3) \lambda + (Z_2^2 - Z_1 Z_3) = 0 \tag{3.25}$$

Deux solutions λ_1 et λ_2 sont obtenues de la résolution de l'équation (3.25). On choisit une solution et on procède successivement au calcul des autres paramètres μ , T_D , T_I , K_c , T_I . On note que le choix de la solution λ_1 ou de la solution λ_2 conduit toujours au même correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire comme il sera expliqué dans la remarque au dessous. Le paramètre μ est calculé en utilisant la valeur choisie du paramètre λ par la relation de l'équation (3.23) :

$$\mu = \frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1} \tag{3.26}$$

Puis, les valeurs des deux quantités Q_2 et Q_1 sont calculées à partir des expressions de l'équation (3.22) comme suit :

$$Q_2 = \frac{\lambda X_1 + Z_1}{(\lambda + \mu)} \quad (3.27)$$

$$Q_1 = X_1 - Q_2 = \frac{\mu X_1 - Z_1}{(\lambda + \mu)}$$

Ensuite, à partir des équations (3.18), les deux paramètres T_D et T_I sont calculés par les relations suivantes :

$$T_D = \frac{Q_2 \omega_u^{(1-\mu)}}{\mu} \quad (3.28)$$

$$T_I = -\frac{Q_1 \omega_u^{(1+\lambda)}}{\lambda}$$

Finalement, le paramètre K_c est obtenu à partir de l'équation (3.22) par la relation suivante :

$$K_c = X_0 - T_I \omega_u^{-\lambda} - T_D \omega_u^\mu \quad (3.29)$$

Remarque :

La résolution de l'équation (3.25) conduit à deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 . Cela pose un problème du choix de la solution adéquate du paramètre λ pour avoir le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire convenable pour le système à commander. Cependant, on a remarqué que le choix de la solution λ_1 ou de la solution λ_2 conduit toujours au même correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire. Cette conclusion sera démontrée mathématiquement dans ce qui suit.

Les deux solutions de l'équation (3.25) λ_1 et λ_2 sont données par les expressions suivantes :

$$\lambda_1 = \frac{(Z_1 Z_2 - X_1 Z_3) + \sqrt{(X_1 Z_3 - Z_1 Z_2)^2 - (4X_1 Z_2 - 4Z_1^2)(Z_1 Z_3 - Z_2^2)}}{2X_1 Z_2 - 2Z_1^2} \quad (3.30)$$

$$\lambda_2 = \frac{(Z_1 Z_2 - X_1 Z_3) - \sqrt{(X_1 Z_3 - Z_1 Z_2)^2 - (4X_1 Z_2 - 4Z_1^2)(Z_1 Z_3 - Z_2^2)}}{2X_1 Z_2 - 2Z_1^2} \quad (3.31)$$

Donc, pour les deux solutions λ_1 et λ_2 , deux ensembles de paramètres ($\lambda_1, \mu_1, T_{D1}, T_{I1}, K_{C1}$) et ($\lambda_2, \mu_2, T_{D2}, T_{I2}, K_{C2}$) sont obtenus conduisant, respectivement, à deux correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire $C_1(s)$ et $C_2(s)$ dont les fonctions de transfert sont donnés par:

$$C_1(s) = K_{c1} + \frac{T_{I1}}{s^{\lambda_1}} + T_{D1} s^{\mu_1} \quad (3.32)$$

$$C_2(s) = K_{c2} + \frac{T_{I2}}{s^{\lambda_2}} + T_{D2} s^{\mu_2}$$

A partir de l'équation (3.26), les deux paramètres μ_1 et μ_2 correspondant respectivement aux paramètres λ_1 et λ_1 sont données par les expressions suivantes :

$$\mu_1 = \frac{Z_1}{X_1} + \frac{(X_1(Z_1Z_3 - 2Z_2^2) + Z_1^2Z_2 - (Z_1(Z_3X_1^2 - 3Z_2X_1Z_1 + 2Z_1^3)))/X_1}{(X_1^2Z_3 + 2Z_1^3 - X_1\sqrt{(X_1Z_3 - Z_1Z_2)^2 - (4X_1Z_2 - 4Z_1^2)(Z_1Z_3 - Z_2^2)} - 3Z_2X_1Z_1)} \quad (3.33)$$

$$\mu_2 = \frac{Z_1}{X_1} + \frac{(X_1(Z_1Z_3 - 2Z_2^2) + Z_1^2Z_2 - (Z_1(Z_3X_1^2 - 3Z_2X_1Z_1 + 2Z_1^3)))/X_1}{(X_1^2Z_3 + 2Z_1^3 + X_1\sqrt{(X_1Z_3 - Z_1Z_2)^2 - (4X_1Z_2 - 4Z_1^2)(Z_1Z_3 - Z_2^2)} - 3Z_2X_1Z_1)} \quad (3.34)$$

En remplaçant les valeurs des variables Z_1 , Z_2 et Z_3 de l'équation (3.20) dans les équations (3.30), (3.31), (3.33) et (3.34) on a trouvé que :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\lambda_2 \\ \mu_2 &= -\lambda_1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

A partir des équations (3.28) et (3.35), on a aussi trouvé que les deux ensembles de paramètres (T_{D1} et T_{I1}) et (T_{D2} et T_{I2}) correspondant, respectivement, aux paramètres (λ_1, μ_1) et (λ_2, μ_2) sont tels que :

$$T_{D1} = \frac{(\lambda_1 X_1 + Z_1) \omega_u^{(1-\mu_1)}}{[\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)]} = \frac{(Z_1 - \mu_2 X_1) \omega_u^{(1+\lambda_2)}}{[\lambda_2(\lambda_2 + \mu_2)]} = T_{I2} \quad (3.36)$$

$$T_{I1} = \frac{(Z_1 - \mu_1 X_1) \omega_u^{(1+\lambda_1)}}{[\lambda_1(\lambda_1 + \mu_1)]} = \frac{(\lambda_2 X_1 + Z_1) \omega_u^{(1-\mu_2)}}{[\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)]} = T_{D2}$$

Et à partir des équations (3.29), (3.35) et (3.36), on a encore trouvé que les paramètres K_{C1} et K_{C2} correspondant, respectivement, aux paramètres $(\lambda_1, \mu_1, T_{D1}, T_{I1})$ et $(\lambda_2, \mu_2, T_{D2}, T_{I2})$ sont tels que:

$$K_{c1} = X_0 - T_{I1} \omega_u^{-\lambda_1} - T_{D1} \omega_u^{\mu_1} = X_0 - T_{D2} \omega_u^{\mu_2} - T_{I2} \omega_u^{-\lambda_2} = K_{c2} \quad (3.37)$$

Des équations (3.35), (3.36) et (3.37), on a trouvé que les paramètres des deux correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire $C_1(s)$ et $C_2(s)$ sont tels que : $\mu_2 = -\lambda_1$ et $\lambda_1 = -\mu_2$, $T_{D1} = T_{I2}$ et $T_{I1} = T_{D2}$ et $K_{c1} = K_{c2}$, alors ces deux correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire $C_1(s)$ et $C_2(s)$ sont identiques et on peut écrire que :

$$C_1(s) = K_{c1} + \frac{T_{I1}}{s^{\lambda_1}} + T_{D1} s^{\mu_1} = C_2(s) = K_{c2} + \frac{T_{I2}}{s^{\lambda_2}} + T_{D2} s^{\mu_2} \quad (3.38)$$

Par conséquent, le choix de la solution λ_1 ou de la solution λ_2 conduit toujours au même correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire. Dans ce travail, on a choisi la valeur positive de λ ou bien la plus grande en valeur absolue. Cette technique de calcul des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire sera résumée sous forme d'un algorithme de réglage dans la section suivante.

3.4 Algorithme de réglage du $PI^\lambda D^\mu$

Pour régler les cinq paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire de la boucle de commande à retour unitaire de la figure (3.1) afin que le système en boucle fermée se comporte comme le modèle désiré de l'équation (3.3), il suffit de suivre l'algorithme suivant.

3.4.1 Les entrées :

Les entrées de l'algorithme sont les données ou les valeurs nécessaires pour l'application de la méthode proposée, ces données sont:

- La fréquence transitionnelle ω_u et l'ordre fractionnaire m du modèle désiré;
- Les valeurs de la réponse indicielle du système $g_{in}(kT)$ pour $0 \leq k \leq N$; où $N = \{T_{ac}/T\}$ est le nombre d'échantillons donné avec T_{ac} est le temps d'acquisition du signal $g_{in}(t)$ et T est la période d'échantillonnage.

3.4.2 L'algorithme de calcul :

- **Etape 1 :** calculer les valeurs θ_i (pour $0 \leq i \leq 4$) de l'équation (3.7) comme suit :

$$\theta_0 = \frac{1}{2}, \theta_1 = -\frac{m}{4\omega_u}, \theta_2 = \frac{m}{4\omega_u^2}, \theta_3 = \frac{m(m^2 - 4)}{8\omega_u^3}, \theta_4 = -\frac{4m(m^2 - 2)}{3\omega_u^4}$$

- **Etape 2 :** calculer les valeurs S_i (pour $0 \leq i \leq 4$) de l'équation (3.13) comme suit :

$$S_0 = T \sum_{k=1}^N g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT}, S_1 = -T \sum_{k=1}^N (kT) g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT}, S_2 = T \sum_{k=1}^N (kT)^2 g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT}$$

$$S_3 = -T \sum_{k=1}^N (kT)^3 g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT}, S_4 = T \sum_{k=1}^N (kT)^4 g_{in}(kT) e^{-\omega_u kT}$$

- **Etape 3 :** calculer les valeurs $G_o^{(i)}(\omega_u)$ ($0 \leq i \leq 4$) de l'équation (3.16) comme suit :

$$G_o(\omega_u) = \frac{\theta_0}{1-\theta_0}, G_o^{(1)}(\omega_u) = \frac{\theta_1}{(1-\theta_0)^2}, G_o^{(2)}(\omega_u) = \frac{\theta_2}{(1-\theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{(1-\theta_0)^3}$$

$$G_o^{(3)}(\omega_u) = \frac{\theta_3}{(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_1\theta_2}{(1-\theta_0)^3} + \frac{6\theta_1^3}{(1-\theta_0)^4}$$

$$G_o^{(4)}(\omega_u) = \frac{\theta_4}{(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_2^2 + 8\theta_1\theta_3}{(1-\theta_0)^3} + \frac{36\theta_1^2\theta_2}{(1-\theta_0)^4} + \frac{24\theta_1^4}{(1-\theta_0)^5}$$

- **Etape 4 :** calculer les X_i (pour $0 \leq i \leq 4$) de l'équation (3.17) comme suit :

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{G_o(\omega_u)}{\omega_u S_0} \\
X_1 &= \frac{1}{\omega_u S_0} (G_o^{(1)}(\omega_u) - X_0 S_0 - \omega_u X_0 S_1) \\
X_2 &= \frac{1}{\omega_u S_0} [G_o^{(2)}(\omega_u) - 2X_1 S_0 - 2X_0 S_1 - 2\omega_u X_1 S_1 - \omega_u X_0 S_2] \\
X_3 &= \frac{1}{\omega_u S_0} \left[G_o^{(3)}(\omega_u) - 3X_2 S_0 - 6X_1 S_1 - 3X_0 S_2 - \omega_u X_0 S_3 \right. \\
&\quad \left. - 3\omega_u X_2 S_1 - 3\omega_u X_1 S_2 \right] \\
X_4 &= \frac{1}{\omega_u S_0} \left[G_o^{(4)}(\omega_u) - 4X_3 S_0 - 12X_2 S_1 - 12X_1 S_2 - 4X_0 S_3 \right. \\
&\quad \left. - \omega_u X_0 S_4 - 4\omega_u X_3 S_1 - 4\omega_u X_1 S_3 - 6\omega_u X_2 S_2 \right]
\end{aligned}$$

- **Etape 5 :** calculer les Z_i (pour $1 \leq i \leq 3$) de l'équation (3.20) comme suit :

$$\begin{aligned}
Z_1 &= X_1 + \omega_u X_2 \\
Z_2 &= X_1 + 3\omega_u X_2 + \omega_u^2 X_3 \\
Z_3 &= X_1 + 7\omega_u X_2 + 6\omega_u^2 X_3 + \omega_u^3 X_4
\end{aligned}$$

- **Etape 6 :** calculer les paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ comme suit :

- λ est la solution de l'équation de second ordre (3.25) qui est donnée par :

$$\lambda = \frac{-(Z_1 Z_2 - X_1 Z_3) \pm \sqrt{(Z_1 Z_2 - X_1 Z_3)^2 - 4(Z_1^2 - X_1 Z_2)(Z_2^2 - Z_1 Z_3)}}{2(Z_1^2 - X_1 Z_2)}$$

- μ est calculée de l'équation (3.26) par ; $\mu = \frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1}$

- T_I et T_D sont calculés de l'équation (3.28) comme :
$$\begin{cases} T_D = \frac{Q_2 \omega_u^{(1-\mu)}}{\mu} \\ T_I = -\frac{Q_1 \omega_u^{(1+\lambda)}}{\lambda} \end{cases}$$

- K_c est calculé de l'équation (3.29) par : $K_c = X_0 - T_I \omega_u^{-\lambda} - T_D \omega_u^\mu$

L'innovation dans cette technique réside dans la simplicité de calcul des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire sans avoir besoin d'utiliser des algorithmes d'optimisation ou un modèle du processus. En effet, les cinq paramètres sont reformulés analytiquement à partir des valeurs des m , ω_u et les S_i . Le principe du réglage proposé du $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est présenté dans la figure (3.2).

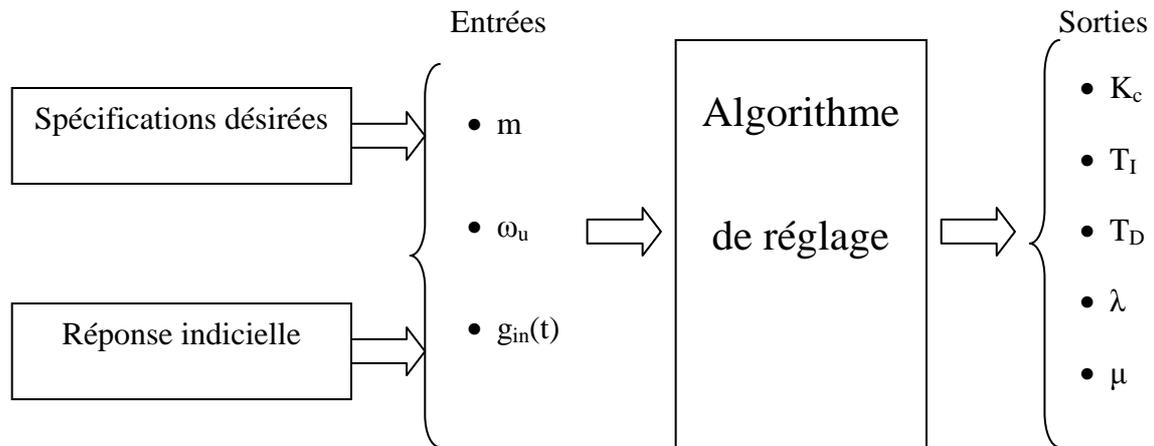


Figure (3.2) : Schéma synoptique de principe du réglage proposé.

3.5 Résultats de simulation

3.5.1 Exemples illustratifs

Dans cette section, on va présenter des exemples illustratifs pour valider l'efficacité et l'utilité de la méthode de réglage proposée, un correcteur fractionnaire est utilisé pour les deux systèmes qui sont décrits par les fonctions de transfert suivantes [15] :

$$G_{p1}(s) = \frac{10}{\left(\frac{s}{33.33}\right)^2 + 0.02\left(\frac{s}{33.33}\right) + 1} \quad (3.39)$$

$$G_{p2}(s) = \frac{1}{\frac{s}{17}\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2} \quad (3.40)$$

Les performances dynamiques demandées du système asservi projeté sont :

- La fréquence transitionnelle $\omega_u = 1000$ rad/sec.
- La marge de phase $\varphi_m = 60^\circ$.

Ces spécifications sont satisfaites par le modèle de référence d'ordre fractionnaire suivant :

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^m} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{1000}\right)^{1.33}} \quad (3.41)$$

Alors la fonction de transfert en boucle ouverte désirée est $(s/1000)^{-1.33}$. Donc le problème de commande pour les deux systèmes est le réglage des cinq paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire afin que chaque système en boucle fermée se comporte comme

le système désiré $G_d(s)$ de l'équation (3.41), autour de la fréquence transitionnelle $\omega_u = 1000$ rad/sec. Pour une période d'échantillonnage $T = 0.05$ ms et un temps d'acquisition du signal $g_{in}(t)$ $T_{ac} = 20$ s, les fonctions de transfert des deux correcteurs obtenus par l'algorithme proposé dans la section (3.4.2) sont données par :

$$C_1(s) = 0.077 + \frac{869.71}{s^{1.2991}} + 0.8994s^{0.6668} \quad (3.42)$$

$$C_2(s) = 188.0209 + \frac{5.88}{s^{-1.6667}} + 109.3975s^{0.6765} \quad (3.43)$$

Notons que le correcteur obtenu pour le premier système de l'équation (3.39) est un $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire ; cependant le correcteur obtenu pour le second système de l'équation (3.40) est un $PD^\lambda D^\mu$ qui n'a pas d'équivalent dans le cas des correcteurs classiques.

Pour l'implémentation des deux correcteurs $C_1(s)$ et $C_2(s)$, la méthode de Charef [39] à été utilisée pour une bande fréquentielle de $[10^{-2}\omega_u \ 10^2\omega_u] = [10 \ 100000]$ rad/s. Alors, les deux fonctions irrationnelles des équations (3.42) et (3.43) sont approximées, respectivement, par des fonctions rationnelles comme suit :

$$C_1(s) \cong 0.0077 + \frac{2540.8 \prod_{i=0}^{17} \left(1 + \frac{s}{0.0566 (2.8184)^i}\right)}{s \prod_{i=0}^{18} \left(1 + \frac{s}{0.0408 (2.8184)^i}\right)} + 0.063 \frac{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{s}{0.0221 (2.8188)^i}\right)}{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{s}{0.0441 (2.8188)^i}\right)} \quad (3.44)$$

$$C_2(s) \cong 188.021 + 19.774s^2 \frac{\prod_{i=0}^{18} \left(1 + \frac{s}{0.0524 (2.8185)^i}\right)}{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{s}{0.0371 (2.8185)^i}\right)} + 7.341 \frac{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{s}{0.0219 (2.8636)^i}\right)}{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{s}{0.0446 (2.8636)^i}\right)} \quad (3.45)$$

Les figure (3.3) et (3.4) montres les diagrammes de Bode pour les deux fonctions de transfert en boucle ouverte suivantes $C_1(s) G_{p1}(s)$ et $C_2(s) G_{p2}(s)$ qui sont comparées au diagramme de Bode du modèle désiré en boucle ouverte $(s/1000)^{-1.33}$.

A partir des deux figures (3.3) et (3.4), on peut constater que les deux fonctions de transfert en boucle ouverte et la fonction désirée fractionnaire $(s/1000)^{-1.33}$ sont superposées dans la bande fréquentielle d'intérêt $[10 \ 100000]$ rad/s. Ces résultats confirment que la fréquence transitionnelle ω_u et la marge de phase φ_m pour les deux systèmes commandés ont leur valeurs désirées $\omega_u = 1000$ rad/s et $\varphi_m = 60^\circ$ tout en conservant la phase plate autour de la fréquence transitionnelle désirée. Dans la figure (3.3), le pic obtenu à la fréquence $\omega = 33.33$ rad/s dans

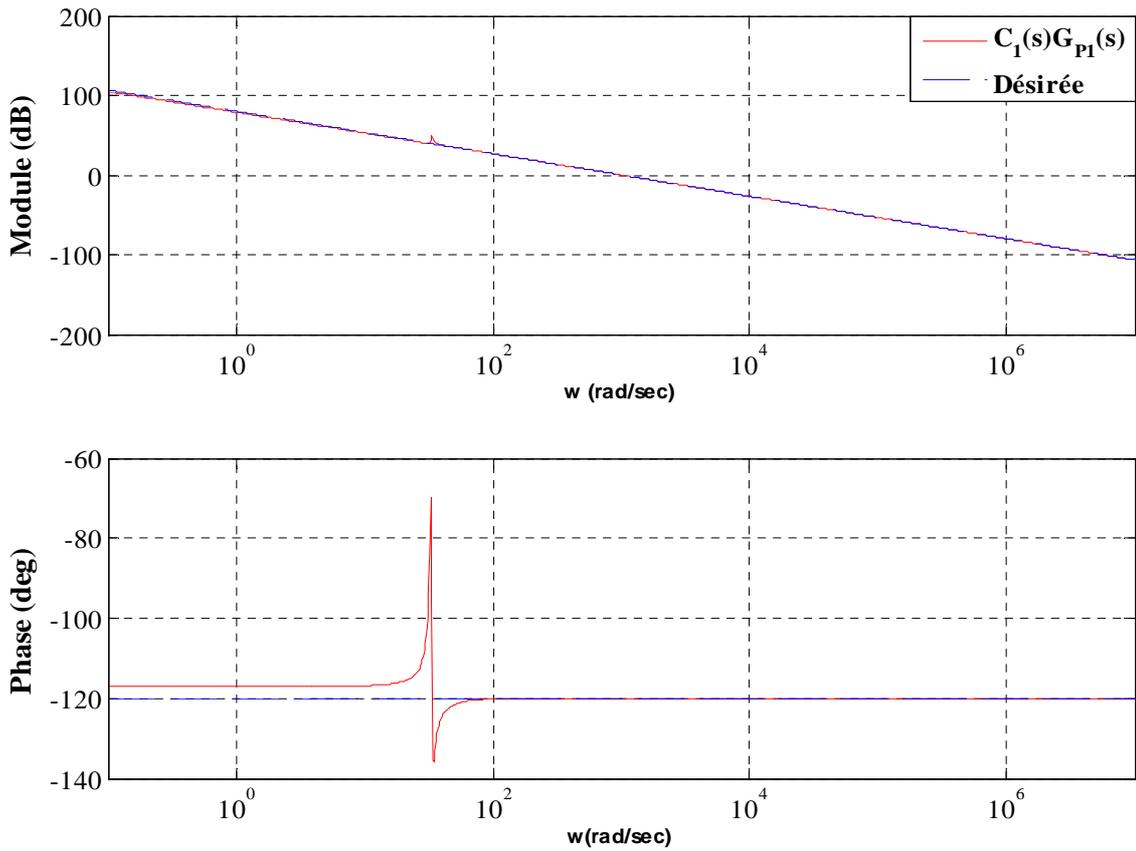


Figure 3.3 : Diagramme de Bode de la boucle ouverte $C_1(s) G_{p1}(s)$ et du modèle désiré $(s/1000)^{-1.33}$

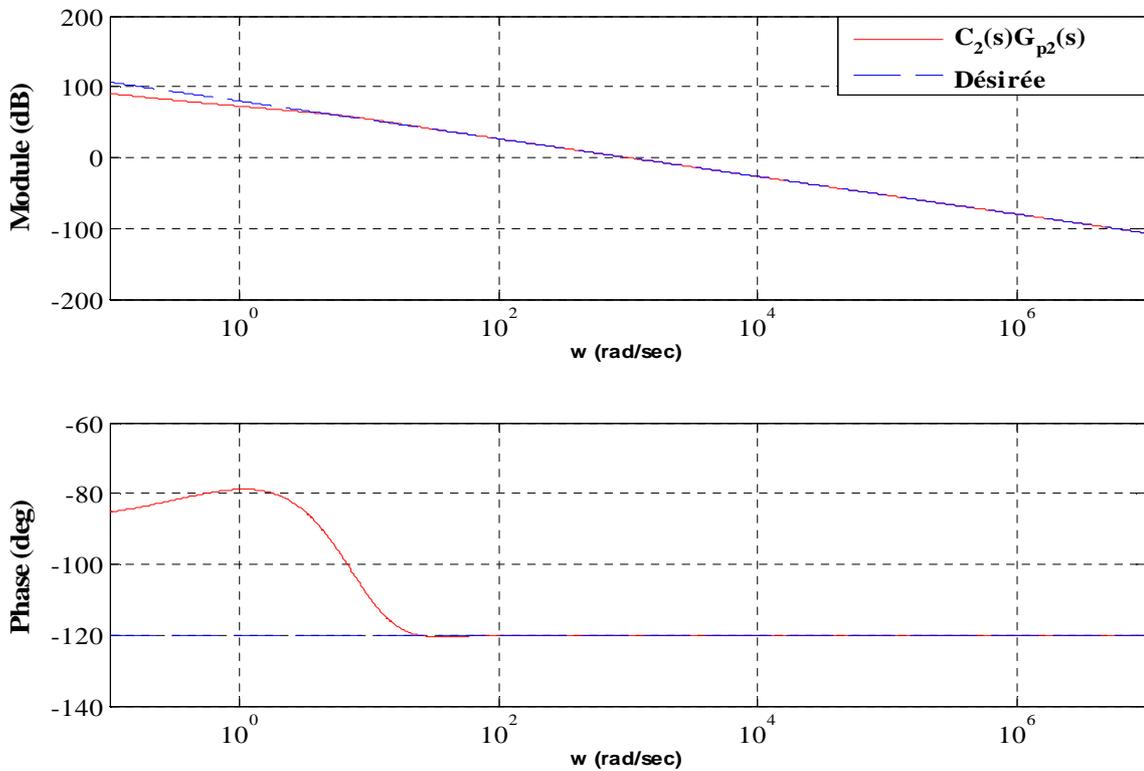


Figure (3.4) : Diagramme de Bode de la boucle ouverte $C_2(s) G_{p2}(s)$ et du modèle désiré $(s/1000)^{-1.33}$

le tracé de la phase de la fonction $C_1(s) G_{p1}(s)$ est due à la nature du processus $G_{p1}(s)$ de l'équation (3.39) qui est un système du deuxième ordre avec une fréquence naturelle $\omega_n = 33.33$ rad/s et un facteur d'amortissement $\xi = 0.01$. Ce phénomène est causé par le changement brusque de la phase entre 0 et -180° . Cependant, ce comportement n'a aucune influence sur le système en boucle fermée, car la fréquence transitionnelle désirée est plus supérieure à la fréquence $\omega_n = 33.33$ rad/s.

Les deux figures (3.5) et (3.6) montrent respectivement, les réponses indicielles des deux systèmes (3.39) et (3.40) qui sont commandés par $C_1(s)$ et $C_2(s)$. Ces réponses sont comparées avec la réponse du modèle désirée (3.41) qui est obtenue par la transformée de Laplace inverse comme suit [64] :

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{s}{1000}\right)^{1.33}} \right] \right\} = 1 - E_{1.33} [-(1000t)^{1.33}] \quad (3.46)$$

où $E_a[x]$ est la fonction de Mittag-Leffler d'un seul paramètre.

A partir des deux figures (3.5) et (3.6), il est clair que les réponses indicielles des deux systèmes en boucle fermée ont le même comportement que la réponse désirée de l'équation (3.46) ; donc l'objectif est parfaitement atteint.

3.5.2 Exemples de comparaison

3.5.2.1 Comparaisons avec le PID classique :

Considérant un système dont la fonction de transfert est donnée comme suit [35] :

$$G_{p3}(s) = \frac{k}{\frac{s}{16.89} \left(1 + \frac{s}{50}\right)} \quad (3.47)$$

Pour un gain nominal $k = 1$, les spécifications recherchées sont:

- La fréquence transitionnelle $\omega_u = 500$ rad/sec.
- La marge de phase $\phi_m = 45$.

Le correcteur PID classique conçu pour obtenir ces spécifications est donné par [35] :

$$C_{PID}(s) = 728.7 \frac{(1 + s/4.0824)(1 + s/204.12)}{(1 + s/0.6804)(1 + s/1224.72)} \quad (3.48)$$

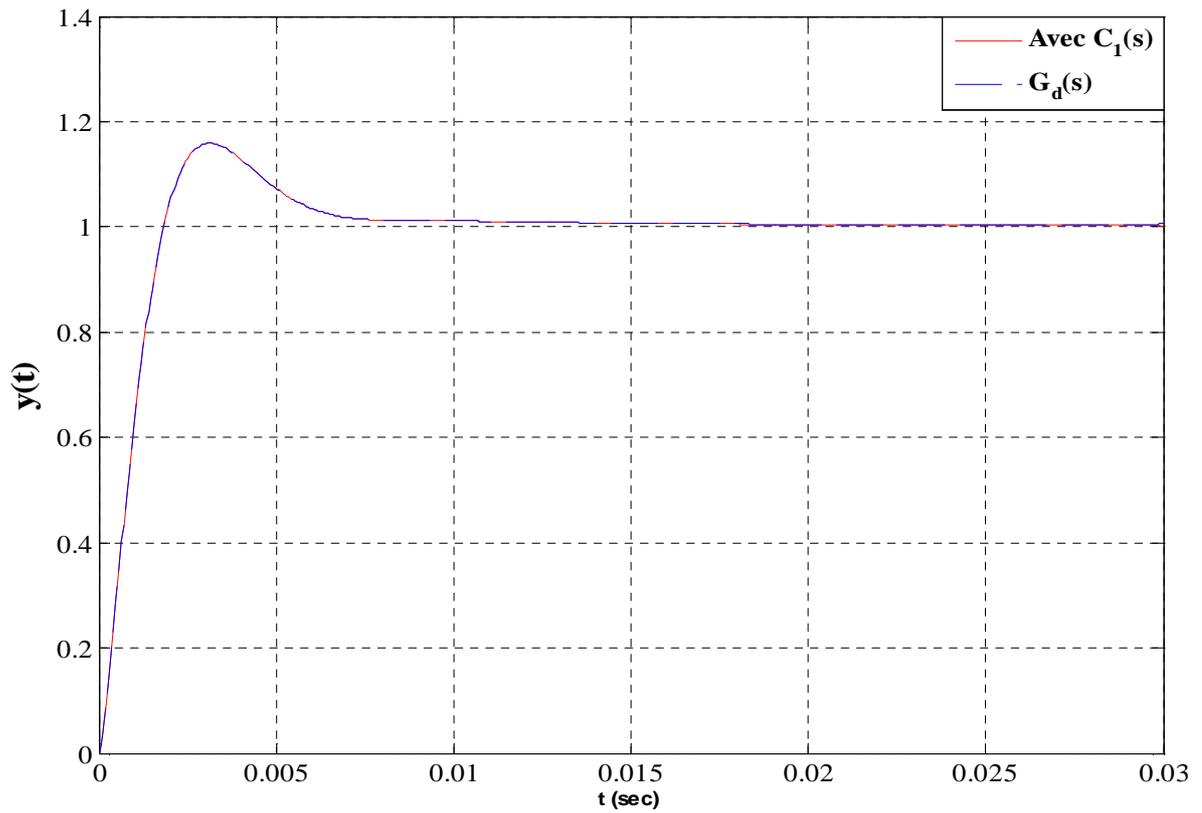


Figure (3.5) : Réponses indicielle du système $C_1(s)G_{p1}(s)$ en boucle fermée et du modèle désiré $G_d(s)$

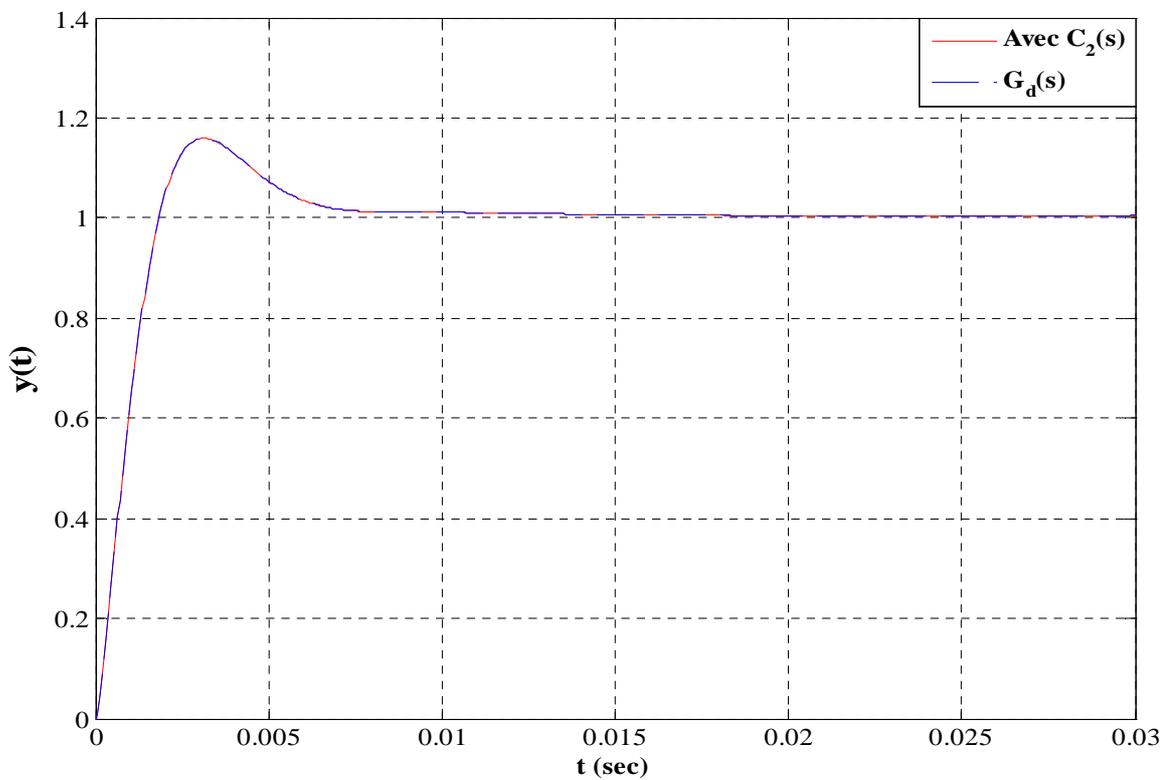


Figure (3.6) : Réponses indicielle du système $C_2(s)G_{p2}(s)$ en boucle fermée et du modèle désiré $G_d(s)$.

Pour la conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire par la méthode proposée, les spécifications désirées sont satisfaites par le modèle fractionnaire suivant :

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{500}\right)^{1.5}} \quad (3.49)$$

Alors, la fonction de transfert du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire obtenu est donnée par :

$$C_3(s) = 0.0535 + \frac{662.2204}{s^{0.50}} + 13.2356s^{0.50} \quad (3.50)$$

Les digrammes de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte $C_3(s) G_{p3}(s)$ et $C_{PID}(s) G_{p3}(s)$ sont montrés par la figure (3.7).

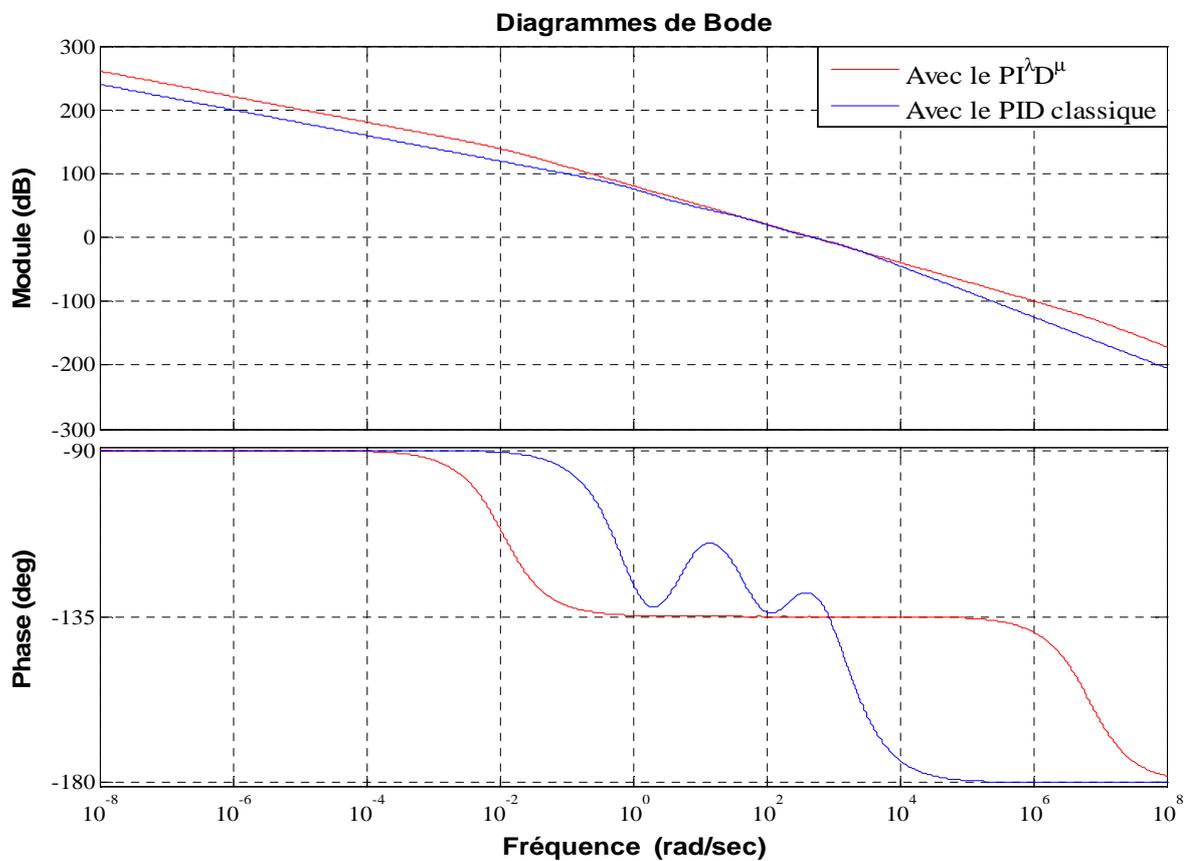


Figure (3.7) : Diagrammes de Bode des fonctions en boucle ouverte $C_3(s) G_{p3}(s)$ et $C_{PID}(s) G_{p3}(s)$

De la figure (3.7), on peut voir que les spécifications obtenues par l'utilisation du $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire ($\omega_u = 500$ rad/sec et $\phi_m = 45^\circ$), sont plus précises que celles obtenues par le PID classique ($\omega_u = 500$ rad/sec et $\phi_m = 50.9^\circ$). Un autre avantage d'utilisation du $PI^\lambda D^\mu$ est que la phase est bien constante autour de la fréquence transitionnelle $\omega_u = 500$ rad/sec ce qui implique que la marge de phase et le dépassement sont insensibles à la variation du gain du

système pour une large bande fréquentielle. Par conséquent la réponse indicielle du système possède une propriété de robustesse très importante étant l'iso-amortissement. La figure (3.8) montre les réponses indicielles du système avec les deux correcteurs $C_{PID}(s)$ et $C_3(s)$ pour différentes valeurs du gain du système k .

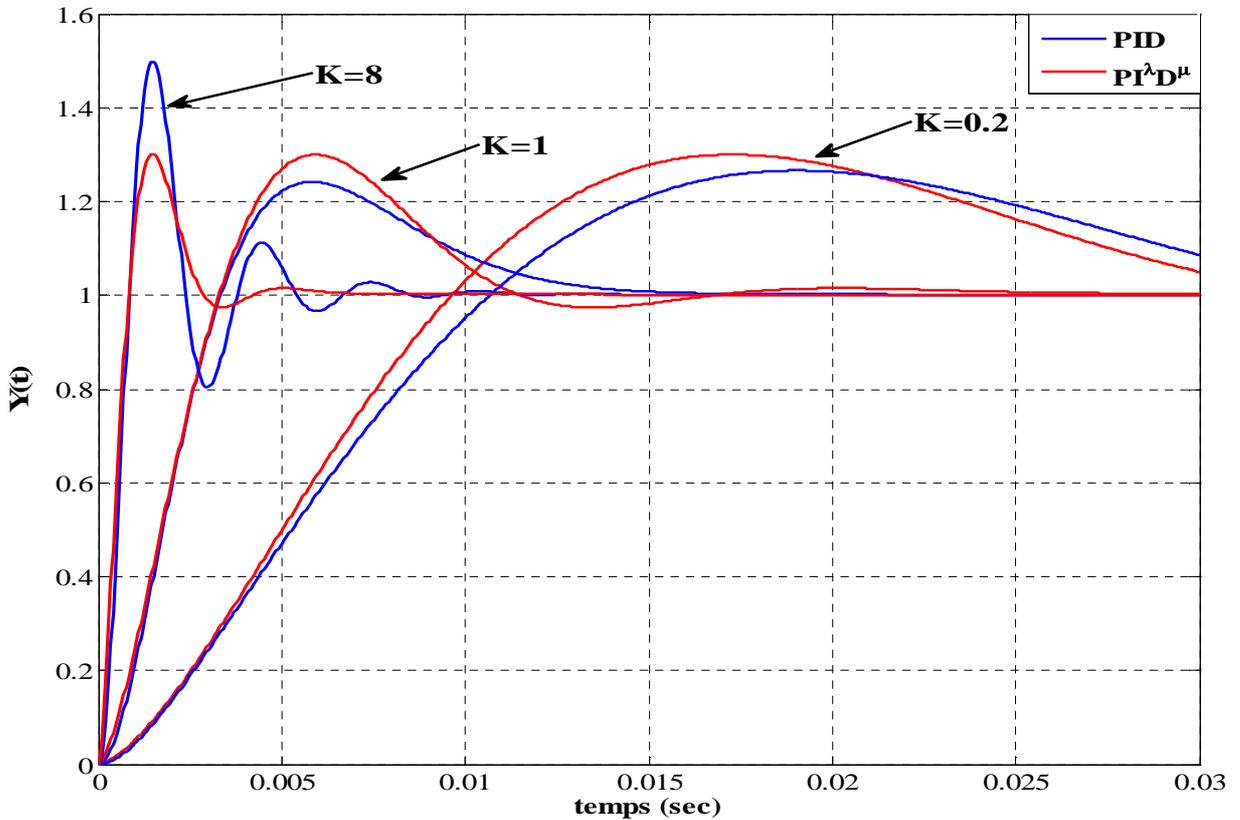


Figure (3.8) : Réponses indicielles du système (3.47) avec les correcteurs PID et $PI^{\lambda}D^{\mu}$ pour différentes valeurs du gain k .

De la figure (3.8), il est clair que la réponse du système en boucle fermée avec le correcteur $C_3(s)$ a le même dépassement pour les différentes valeurs du gain k utilisées. Contrairement au système boucle fermée avec le correcteur classique $C_{PID}(s)$, le dépassement augmente avec l'augmentation du gain k . Par l'utilisation du correcteur proposé $C_3(s)$, une amélioration de la qualité de la commande du point de vue précision et robustesse a été réalisée.

3.5.2.2 Comparaison avec un PD^{μ} et un $[PD]^{\mu}$ fractionnaires

Comme second exemple de comparaison, un système d'ordre fractionnaire est considéré dont la fonction de transfert est donnée comme suit [59] :

$$G_{p^4}(s) = \frac{1}{s(Ts^{\alpha} + 1)} = \frac{1}{s(0.4s^{1.4} + 1)} \quad (3.51)$$

Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ proposé est comparé avec les deux correcteurs PD^μ et le $[PD]^\mu$ proposés par Ying Luo et al. [59]. Les spécifications désirées sont données par [59] :

- La fréquence transitionnelle $\omega_u = 10$ rad/sec.
- La marge de phase $\varphi_m = 70^\circ$.
- Le système commandé soit robuste vis-à-vis de la variation du gain

Les fonctions de transfert des correcteur PD^μ et le $[PD]^\mu$ satisfaisant les spécifications demandées sont données par [59] :

$$C_{FPD}(s) = 10.916(1 + 0.6138s^{1.189}) \quad (3.52)$$

$$C_{PDF}(s) = 6.3092(1 + 0.9435s)^{1.205} \quad (3.53)$$

où $C_{FPD}(s)$ et $C_{PDF}(s)$ sont respectivement les correcteurs PD^μ et $[PD]^\mu$.

Dans la méthode proposée dans ce travail, les spécifications demandées sont satisfaites par le modèle de référence suivant :

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{10}\right)^{1.22}} \quad (3.54)$$

La fonction de transfert du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ proposé est donnée par :

$$C_4(s) = \frac{16.6810}{s^{0.22}} + 6.6724s^{1.18} \quad (3.55)$$

Notons que le correcteur obtenu par la méthode proposée est de type $I^\lambda D^\mu$. Figure (3.9) montre les réponses indicielles du système en boucle fermée avec les trois correcteurs.

La figure (3.10) montre les diagrammes de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte $C_{FPD}(s)G_{p4}(s)$, $C_{PDF}(s)G_{p4}(s)$ et $C_4(s)G_{p4}(s)$.

De la figure (3.10), on note que toutes les spécifications demandées sont satisfaites par les trois correcteurs ($\omega_u = 10$ rad/sec, $\varphi_m = 70^\circ$ et la phase est plate autour de ω_u). Cependant, le système en boucle fermée avec le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ proposé possède une phase plate dans une bande de fréquences plus large autour de ω_u . Ce résultat signifie le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ proposé est robuste pour une gamme de variation du gain plus large à celle obtenue par les deux autres correcteurs $C_{FPD}(s)$ et $C_{PDF}(s)$.

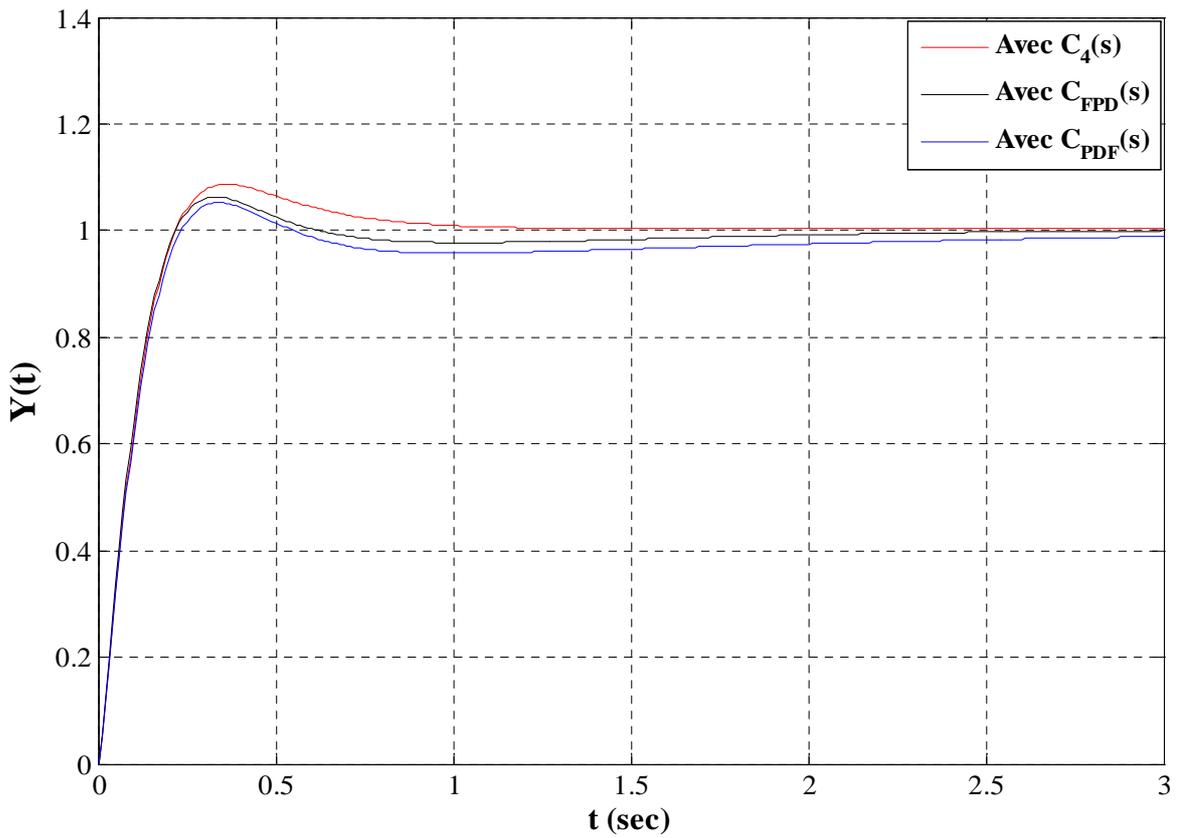


Figure (3.9) : Réponses indicielles du système en boucle fermée avec les trois correcteurs $C_4(s)$, $C_{FPD}(s)$ et $C_{PDF}(s)$

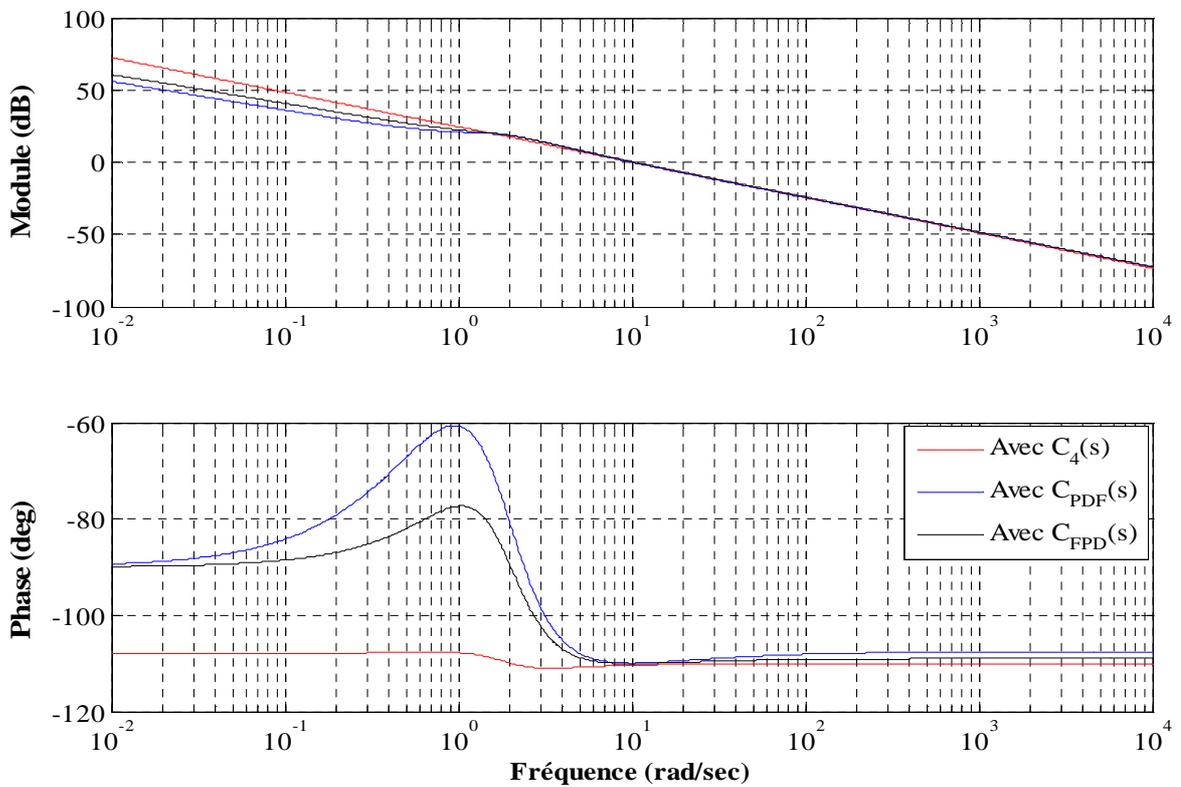


Figure (3.10) : Diagrammes de Bode des fonctions $C_{FPD}(s)G_{p4}(s)$, $C_{PDF}(s)G_{p4}(s)$ et $C_4(s)G_{p4}(s)$

La méthode de réglage proposée se caractérise par la flexibilité d'exploitation ou bien la possibilité de changement des spécifications. En effet, le correcteur peut être re-paramétré par le même algorithme présenté dans la section (3.4.2) en agissant sur les deux paramètres qui sont la fréquence transitionnelle ω_u et la marge de phase φ_m , en maintenant toujours la propriété de la phase plate. Par exemple si une amélioration dans le dépassement est souhaitée, il suffit d'augmenter la marge de phase désirée φ_m , et pour le temps de réponse, l'augmentation de ω_u permet d'accélérer le système tout en respectant les contraintes physiques. Il y'a aussi la possibilité de changement du modèle désiré de l'équation (3.3) par d'autres modèles soit fractionnaire ou non, tout dépend de l'objectif du concepteur, l'algorithme reste le même sauf que dans l'étape 1, un changement peut être fait dans les valeurs des θ_i .

Pour monter la flexibilité de la méthode proposée, le réglage du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ pour la commande du système d'ordre fractionnaire de l'équation (3.51) pour différentes spécifications désirées est réalisé. Tableau (3.1), montre les valeurs des paramètres des correcteurs obtenus pour différentes valeurs de la fréquence transitionnelle ω_u et de la marge de phase φ_m . On remarque que tous les correcteurs satisfaisant les différentes fréquences transitionnelles et les différentes marges de phase indiquée dans le tableau (3.1) sont de type $I^{\lambda}D^{\mu}$.

Table 3.1 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ réglé pour différentes valeurs de m et ω_u

Spécifications désirées			Paramètres du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu} : C_5(s)$					Spécifications obtenues	
ω_u	φ_m	$m=2[1-(\varphi_m/\pi)]$	K_c	T_i	T_D	λ	M	ω_u	φ_m
10	30	1.66	0	46.415	18.566	0.666	0.733	9.95	29.99
30	45	1.5	0	164.316	65.726	0.50	0.90	28.82	45.01
5	65	1.27	0	7.818	3.127	0.277	1.122	4.98	64.99
50	85	1.055	0	62.138	24.855	0.06	1.344	49.97	84.98

Du tableau (3.1), le diagramme de Bode des quatre fonctions de transfert en boucle ouverte $C_5(s)$ $Gp_4(s)$ et de la fonction $(s/\omega_u)^{-m}$ correspondantes aux quatre différentes cas des valeurs de ω_u et φ_m sont montrés dans la figure (3.11).

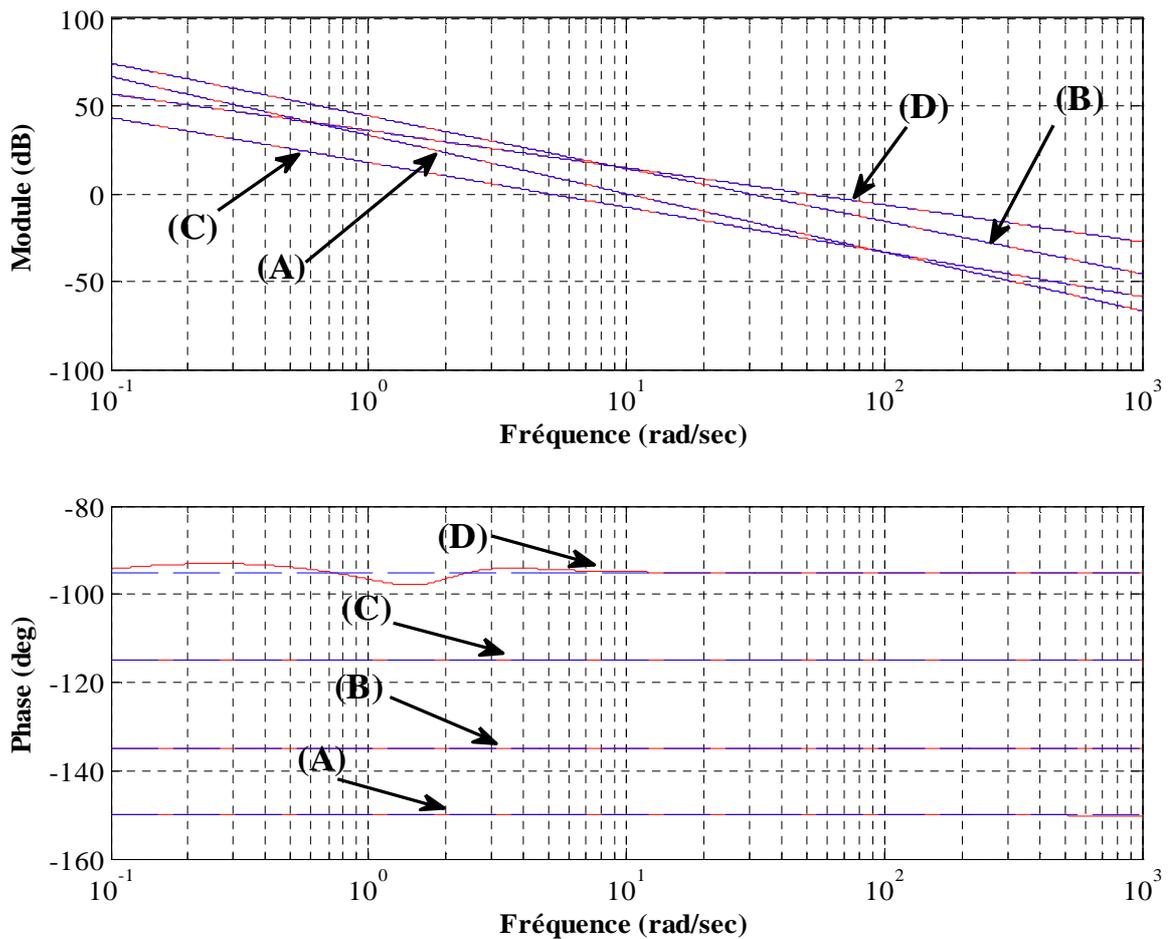


Figure (3.11) : Diagrammes Bode des fonctions $C_5(s)G_{p4}(s)$ et de la boucle ouverte

désirée $(s/\omega_u)^{-m}$ pour différents valeurs de φ_m et $\omega_u=10$: (A): $\varphi_m=30$, $\omega_u=10$; (B): $\varphi_m=45$, $\omega_u=30$; (C): $\varphi_m=65$, $\omega_u=5$; (D): $\varphi_m=85$, $\omega_u=50$

De la figure (3.11), on peut voir que toutes les spécifications désirées sont satisfaites pour les quatre cas présentés dans le tableau précédent.

On note que malgré que les deux paramètres λ et μ peuvent prendre toutes les valeurs réelles, toutes les valeurs de ces deux paramètres obtenues dans les exemples illustratifs réalisés sont comprises entre -2 et 2. Dans le cas où λ est négatif, comme dans l'exemple (3.43), le correcteur est de type $PD^{-\lambda}D^\mu$, alors les deux actions dérivées avec deux ordres différents ont été implémentées. Ceci, nous donne plus de flexibilité de réglage et nous permet de résoudre des problèmes où les correcteurs classiques ont montré leur limite.

3.5.3 Système avec temps de retard :

Beaucoup de systèmes pratiques peuvent être représentés par un modèle avec retard qui est généralement dû au temps mort de la réaction des systèmes ; ainsi certains systèmes lents

présentent un temps mort considérable dans leur réponse temporelle comme pour le cas des systèmes hydrauliques, des systèmes de changement de température...etc.

Dans la méthode proposée, l'objectif de réglage est d'atteindre une réponse désirée, alors pour un système avec retard, le modèle désiré possède le même temps de retard du procédé à commandé est considéré. Généralement, la fonction de transfert d'un système avec retard est donnée par :

$$G_p(s) = G(s) e^{-\theta s} \quad (3.56)$$

où $G(s)$ est une fonction de transfert rationnelle θ est le temps de retard du processus $G_p(s)$. Alors la réponse temporelle du système $G_p(s)$ est la même que celle du $G(s)$ translatée dans le temps d'une valeur θ . Pour adapter notre méthode à ce type de systèmes, le modèle suivant est utilisé comme un modèle désiré dans l'algorithme de conception proposé :

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^m} e^{-\theta s} \quad (3.57)$$

Donc, le même algorithme de la section (3.4) est utilisé avec un changement dans l'étape (1) où les variables θ_i sont calculés à partir du système de l'équation (3.57).

Pour montrer l'efficacité de l'algorithme de conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire proposé, un exemple illustratif est présenté. Considérant le système défini par la fonction de transfert suivante [5] :

$$G_p(s) = \frac{3.13}{1 + 433.33s} e^{-50s} \quad (3.58)$$

Les spécifications désirées sont données par :

- la fréquence du gain unité $\omega_u = 0.008$ rad/sec
- la marge de phase $\varphi_m = 60^\circ$

Notant que la phase de ce système est différente aux autres cas étudiés précédemment dont le retard pure représenté par de l'exponentiel ($e^{-\theta s}$) provoque une phase est égale à $(-\theta\omega)$. Cette forme décroissante de la phase ne peut pas être compensée par un simple correcteur. Ce problème rend la commande de ce type des systèmes plus compliqué par rapport aux autres types des systèmes. Alors, par l'utilisation du système désiré décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{0.008}\right)^{1.33}} e^{-50s} \quad (3.59)$$

Le correcteur obtenu, par la méthode proposée, est donné par la fonction de transfert suivante :

$$C_6(s) = -4.04 + \frac{0.013}{s^{1.1215}} + 4.2463s^{-0.03} \quad (3.60)$$

La figure (3.12) montre la réponse indicielle du système en boucle fermée comparée avec celle du modèle désiré de l'équation (3.59).

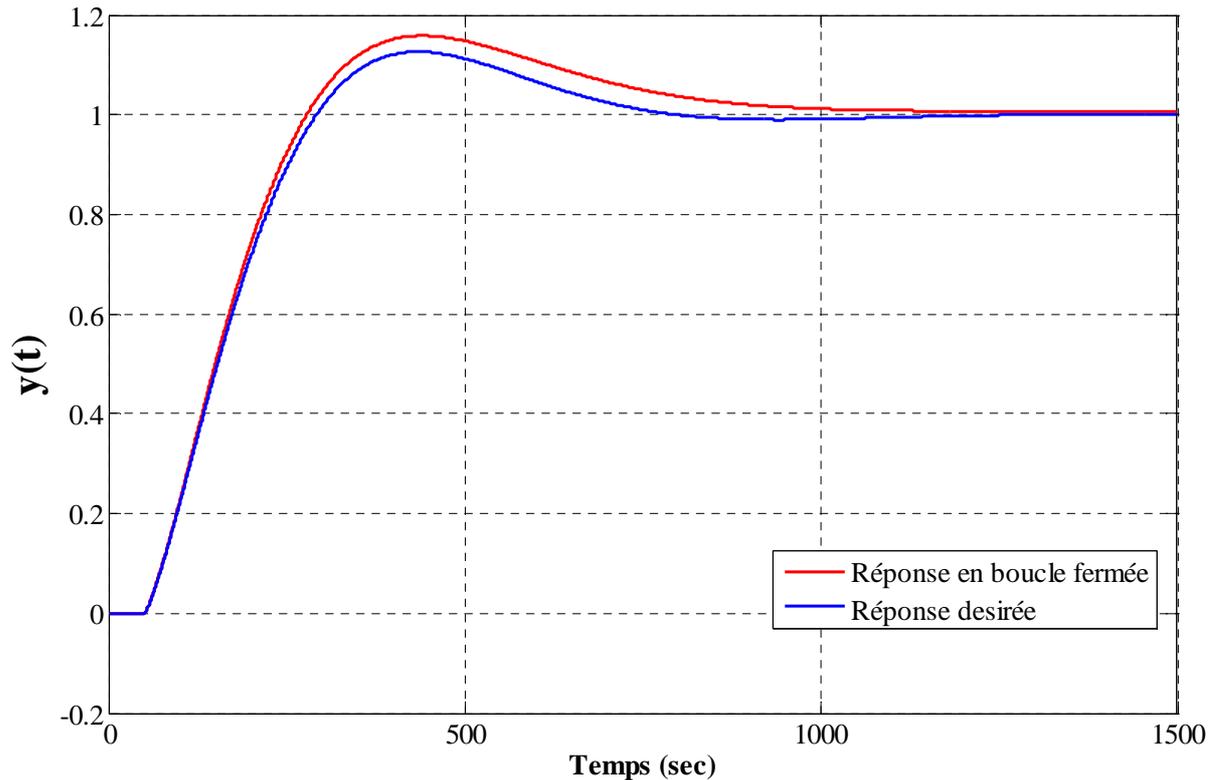


Figure (3.12) : Réponse indicielle du système (3.58) en boucle fermée est du système désiré (3.59).

D'après cette figure on peut voir que les deux réponses sont similaires ; donc le système en boucle fermée a le même comportement que le modèle désiré de l'équation (3.59). Alors l'objectif de réglage est atteint.

La figure (3.13) montre le digramme de Bode de la fonction en boucle ouverte $C_6(s) G_p(s)$.

Les résultats présentés dans les deux figures (3.12) et (3.11) montrent l'utilité du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ et sa possibilité d'exploitation dans la pratique où la majorité des processus industrielle peuvent être identifiés par des modèles avec temps de retard de la forme (3.56).

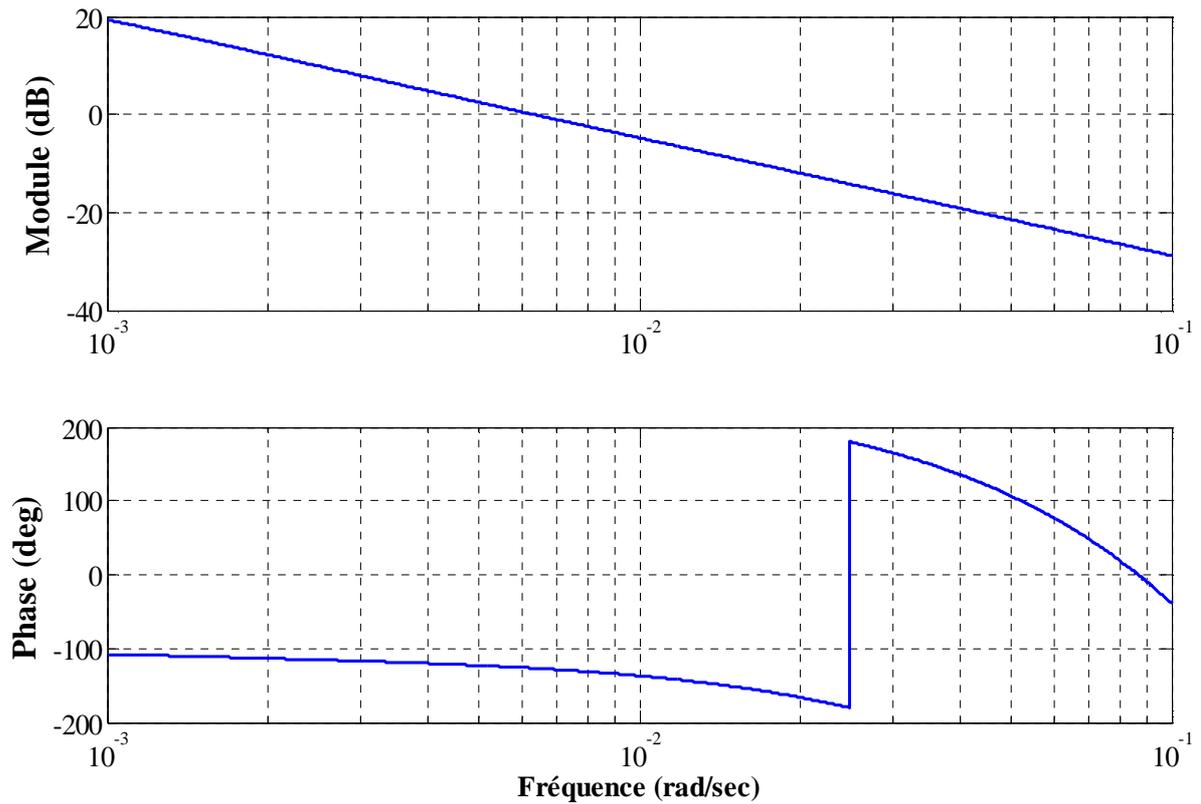


Figure (3.13) : Diagramme de bode de la fonction $C_6(s) G_p(s)$.

3.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, une nouvelle technique de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire a été proposée. Cette méthode utilise seulement la réponse indicielle du système et ne nécessite aucune approximation du système par un modèle. Les paramètres du correcteur sont choisis de telle sorte que le système en boucle fermée ait le comportement de la boucle idéale de Bode qui est très utilisée dans le domaine de la commande comme modèle de référence à cause de sa propriété de robustesse très importante dite iso amortissement. L'avantage majeur de cette technique est que les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire qui garantissent les spécifications souhaitées sont obtenus analytiquement en six simples étapes. Des exemples illustratifs, pour différents processus, ont été présentés pour valider l'efficacité, la flexibilité et la précision de la méthode proposée.

Comme un nouveau résultat obtenu à partir de l'utilisation de la méthode proposée, on peut noter que la commande d'ordre fractionnaire n'est plus limitée à l'utilisation du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire qui est une généralisation du PID classique. En effet, des nouvelles structures qui ne sont pas des généralisations d'un correcteur classique peuvent être trouvées comme les correcteurs fractionnaires $PI^\lambda I^\mu$ et $PD^\lambda D^\mu$.

Chapitre **4**

$PI^\lambda D^\mu$ Auto-ajustable
pour la commande
d'une turbine éolienne

4.1 Introduction

Les systèmes énergétiques, y compris les installations des énergies renouvelables, offrent un champ d'application très intéressant dans le domaine de la commande. Cependant, la maîtrise de ces installations reste un peu relative et cela est dû d'une part à leur dépendance aux forces naturelles qui sont difficiles et parfois impossibles à modéliser comme le cas des énergies éoliennes qui dépendent d'une part de la vitesse du vent et d'une autre part à leur complexité. Ces limitations ont motivé les chercheurs à trouver des méthodes de commande de ces systèmes plus performantes et plus robustes. Récemment, des nouvelles stratégies de commande utilisant des correcteurs fractionnaires ont été proposées pour les systèmes éoliens. En effet, de bon résultats ont été obtenus assurant une commande robuste vis-à-vis des variations paramétriques du système en utilisant, pour la conception du correcteur, un modèle linéarisé du système éolien autour d'un point de fonctionnement [65] et [66].

Le réglage automatique, appelé aussi l'auto réglage, est généralement toute structure de commande implémentée où les paramètres du correcteur soient ajustés en ligne pour maintenir la performance du système commandé invariable malgré tous changements éventuels de ses paramètres. Deux types des commandes adaptatives existent dans la littérature, la commande adaptative directe et la commande adaptative indirecte qui est appelée aussi commande auto-ajustable. Les paramètres du correcteur dans la commande adaptative directe sont calculés selon une loi d'adaptation minimisant un critère choisi tandis que les paramètres du correcteur, dans la commande adaptative indirecte, sont calculés à partir du modèle de système [56].

Dans ce chapitre, on a proposé une méthode de commande en se basant sur un correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ auto-ajustable afin de satisfaire des spécifications désirées en boucle fermée pour le cas où le point de fonctionnement est variable. Une linéarisation en ligne est utilisée pour obtenir un modèle linéaire du système éolien mais à paramètres variables qui permet l'ajustement en ligne des paramètres du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ utilisé pour la commande de sa vitesse. Une extension de la technique de conception du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ proposée dans le chapitre précédent est réalisée où les cinq paramètres du $PI^{\lambda}D^{\mu}$ sont ajustés en ligne en fonction des paramètres du procédé selon le même algorithme de réglage proposé auparavant. Cette technique est adaptée à la commande de la vitesse d'une turbine éolienne couplée à une génératrice synchrone auto-excitée. L'idée de réglage des paramètres du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ auto-ajustable se base sur l'utilisation de l'algorithme de réglage proposé précédemment mais cette fois, au lieu de calculer les valeurs des paramètres du correcteur à partir de la réponse

indicielle du système, ces derniers sont calculés analytiquement à partir des paramètres du modèle linéarisé de la turbine autour de son point de fonctionnement variable [65].

L'utilisation d'un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable nécessite une approximation ajustable de l'intégrateur et du différentiateur d'ordre fractionnaire en fonction du modèle linéarisé de la turbine autour de son point de fonctionnement variable. Alors dans ce travail, une implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire ajustable [67] est utilisée pour rendre l'exploitation du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable plus simple et plus pratique.

4.2 Système de conversion d'énergie éolienne

Un système d'énergie éolien utilisé dans ce travail comprend une chaîne des équipements associés en cascade comme il est montré par la figure (4.1). Le rôle principal de ce système est de capter l'énergie cinétique du vent en transformant celle-ci en énergie mécanique sous la forme d'une rotation sur un arbre de transmission et par la suite en énergie électrique par l'utilisation d'une génératrice asynchrone auto-excitée par un bloc capacitif. Cette énergie est consommée par une charge de type RL. La complexité du système d'énergie éolienne réside d'une part dans l'instabilité de la vitesse du vent et d'autre part dans le changement non prévu de la charge pouvant provoquer des changements non souhaités de la vitesse de la turbine pendant son fonctionnement. En tenant compte de ces conditions et de la non-linéarité du modèle de la turbine, la commande de la vitesse de cette dernière sera alors très compliquée. Donc, une commande auto-ajustable et robuste est indispensable pour assurer le bon fonctionnement de ce système [68].

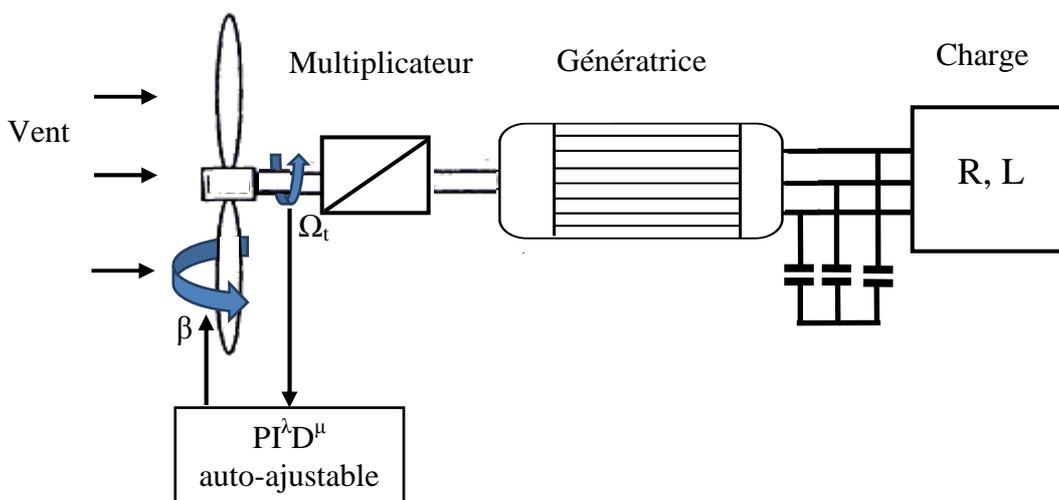


Figure (4.1) : Système de conversion d'énergie éolienne

4.2.1 Modèle dynamique de la turbine éolienne :

Le modèle non linéaire de la turbine est donné par les expressions suivantes [65], [68] :

$$T_{aer} = GT_g = P_w / \Omega_t = GP_w / \Omega_{mec} = \frac{1}{2} C_p(\lambda, \beta) \rho A_R v_w^3 / \Omega_t$$

$$C_p(\lambda, \beta) = 0.5176 \left(\frac{116}{\lambda_i} - 0.4\beta - 5 \right) e^{-\frac{21}{\lambda_i}} + 0.0068\lambda$$

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda + 0.08\beta} - \frac{0.035}{\beta^3 + 1}$$

$$\lambda = \frac{\Omega_t R}{v_w}$$
(4.1)

avec :

P_w : puissance aérodynamique captée par la turbine éolienne.

ρ : densité de l'air.

R : rayon des pales.

A_R : surface de l'aire balayée par les pales $\pi.R^2$.

C_p : coefficient de puissance.

v_w : vitesse de vent.

λ : vitesse spécifique de l'éolienne ou coefficient de vitesse.

β : angle d'orientation des pales.

Ω_t : vitesse mécanique de la turbine.

Ω_{mec} : vitesse de rotation de la génératrice.

T_g : couple mécanique de la génératrice ;

T_{aer} : couple produit de la turbine éolienne.

G : gain du multiplicateur de vitesses.

Le coefficient de puissance C_p est lié au coefficient de couple C_q par la relation suivante :

$$C_p(\lambda, \beta) = \lambda C_q(\lambda, \beta) \quad (4.2)$$

Notons que la puissance délivrée par la turbine éolienne dépende des deux coefficients λ et β dont la dynamique fondamentale est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$T_g - T_{SEIG} = J_t \frac{d\Omega_t}{dt} \quad (4.3)$$

J_t est l'inertie totale ramenée à l'arbre machine et T_{SEIG} est le couple électromagnétique de la génératrice auto excitée qui est considéré comme une perturbation dans la boucle de commande de la turbine.

Le système est commandé en vitesse Ω_t à travers l'angle d'orientation des pales β en présence des perturbations extérieures telles que la variation de la charge, de la vitesse du vent et du couple électromagnétique de la génératrice. La figure (4.2) montre le procédé et leurs entrées-sorties considérées dans notre application.

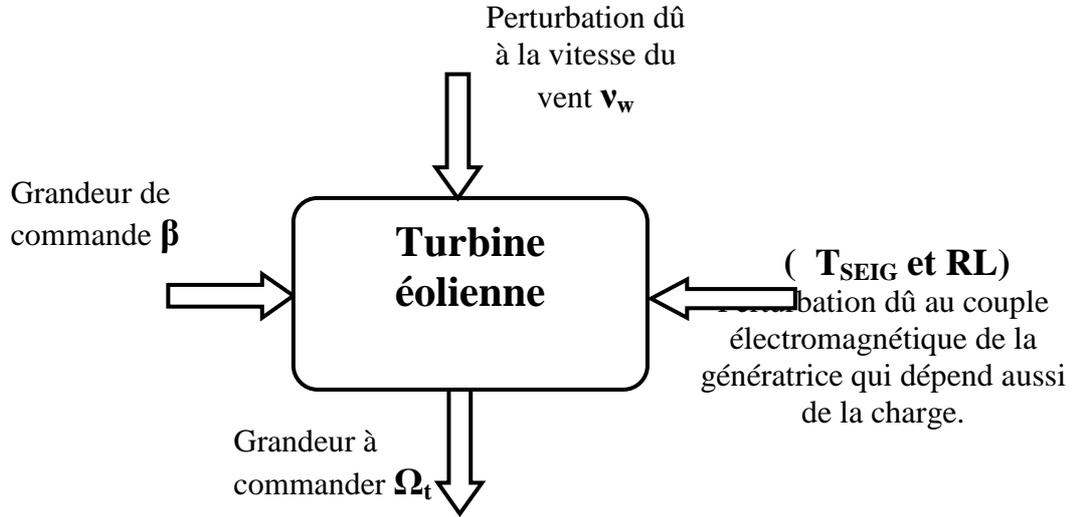


Figure (4.2) : Les entres-sorties de la turbine éolienne.

4.2.2 Linéarisation du modèle de la turbine éolienne :

Afin d'utiliser un correcteur linéaire pour commander la turbine éolienne, le modèle non linéaire donné par les équations (4.1), (4.2) et (4.3) doivent être linéarisé autour d'un point de fonctionnement. La linéarisation de l'équation (4.3) est donnée par [68] :

$$J_t \Delta \dot{\Omega}_t = \gamma \Delta \Omega_t + \xi \Delta v_w + \delta \Delta \beta \quad (4.4)$$

où les coefficients de linéarisation γ , ξ et δ sont données par :

$$\begin{cases} \gamma = \left. \frac{\partial T_{aer}}{\partial \Omega_t} \right|_{op} = \left. \frac{\partial}{\partial \Omega_t} \left(J_t \dot{\Omega}_t \right) \right|_{op} = 0.5 \rho A_R v_{wop}^3 \left. \frac{\partial}{\partial \Omega_t} \left[\frac{C_p(\lambda, \beta)}{\Omega_t} \right] \right|_{op} \\ \xi = \left. \frac{\partial T_{aer}}{\partial v_w} \right|_{op} = \left. \frac{\partial}{\partial v_w} \left(J_t \dot{\Omega}_t \right) \right|_{op} = 0.5 \rho A_R \frac{1}{\Omega_{top}} \left. \frac{\partial}{\partial v_w} \left[C_p(\lambda, \beta) * v_w^3 \right] \right|_{op} \\ \delta = \left. \frac{\partial T_{aer}}{\partial \beta} \right|_{op} = \left. \frac{\partial}{\partial \beta} \left(J_t \dot{\Omega}_t \right) \right|_{op} = 0.5 \rho A_R \frac{v_{wop}^3}{\Omega_{top}} \left. \frac{\partial}{\partial \beta} \left[C_p(\lambda, \beta) \right] \right|_{op} \end{cases} \quad (4.5)$$

avec $\lambda_{op} = R \Omega_{top} / v_{wop}$, $\Delta \Omega$, Δv_w , et $\Delta \beta$ sont les déviations autour du point de fonctionnement défini par les trois valeurs Ω_{top} , v_{wop} , et β_{op} .

Par l'application de la transformée de Laplace à l'équation (4.4), on obtient :

$$J_t s \Delta \Omega_t = \gamma \Delta \Omega_t + \xi \Delta v_{\omega} + \delta \Delta \beta(s) \quad (4.6)$$

Soit $D = \frac{\gamma}{J_t}$, alors la vitesse de la turbine est donnée par :

$$\Delta \Omega_t = \left[\frac{\xi}{J_t} \Delta v_{\omega}(s) + \frac{\delta}{J_t} \Delta \beta(s) \right] \frac{1}{s - D} \quad (4.7)$$

Par conséquent, le modèle linéaire de la turbine est montré sur la figure (4.3) comme suit :

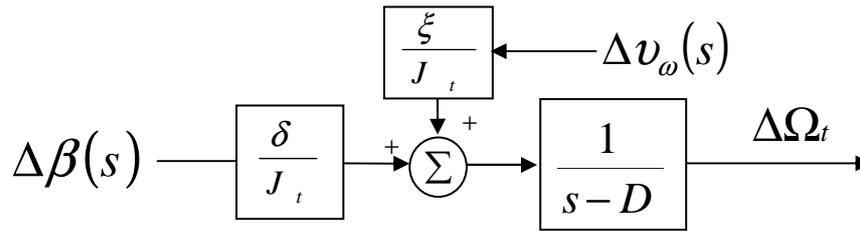


Figure (4.3) : Modèle linéaire de la turbine.

Le facteur $\Delta v_{\omega}(p)^*$ (ξ/J_t) est considéré comme une perturbation représentant l'effet du vent ; donc la fonction de transfert en asservissement est donnée par l'expression suivante :

$$G_p(s) = \frac{K}{(1 + Ts)} \quad (4.8)$$

Les deux paramètres $T = (-1/D)$ et $K = (-\delta/J_t D)$ (vérifié la valeur négative) sont respectivement la constante du temps et le gain statique du système. Ces paramètres sont liés au point de fonctionnement de la turbine tel que tous changements de ce point provoquent des changements significatifs dans les valeurs de T et K . Donc le modèle obtenu est à paramètres variables. Alors, il faut utiliser une commande auto-ajustable pour contrer les variations paramétriques du modèle linéaire obtenu.

4.2.3 Modèle généralisé de la génératrice auto excitée :

La génératrice utilisée dans cette application est une machine électrique asynchrone à cage. Le modèle généralisé de cette machine dans le repère de Park est donné sous la forme matricielle par l'équation différentielle suivante [65] :

$$v(t) = R_T i(t) + L_T \frac{di(t)}{dt} + G_T i(t) \quad (4.9)$$

avec :

- le vecteur $v = [-V_{ds} -V_{qs} V_{dr} V_{qr}]^T$ avec (V_{ds}, V_{qs}) et (V_{dr}, V_{qr}) sont, respectivement, les tensions statoriques et rotoriques
- le vecteur $i = [i_{ds} i_{qs} i_{dr} i_{qr}]^T$ avec (i_{ds}, i_{qs}) et (i_{dr}, i_{qr}) sont, respectivement, les courants statoriques et rotoriques
- la matrice $R_T = \begin{bmatrix} R_{ds} & 0 & R_{dr} & 0 \\ 0 & R_{qs} & 0 & R_{qr} \end{bmatrix}^T$ avec $(R_{sd/q}, R_{rd/q})$ sont, respectivement, les résistances statoriques et rotoriques dans le repère de Park (d/q).

- la matrice L_T est donnée par l'expression suivante :

$$L_T = \begin{bmatrix} 1_s + M_{dNEW} & M_{dqNEW} & M_{dNEW} & M_{dqNEW} \\ M_{dqNEW} & 1_s + M_{qNEW} & M_{dqNEW} & M_{qNEW} \\ M_{dNEW} & M_{dqNEW} & 1_r + M_{dNEW} & M_{dqNEW} \\ M_{dqNEW} & M_{qNEW} & M_{dqNEW} & 1_r + M_{qNEW} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

- la matrice G_T est donnée par l'expressions suivante :

$$G_T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_s(1_s + L_{mNEW}) & 0 & -\omega_s L_{mNEW} \\ \omega_s(1_s + L_{mNEW}) & 0 & \omega_s L_{mNEW} & 0 \\ 0 & -(\omega_s - \omega_r)L_{mNEW} & 0 & -(\omega_s - \omega_r)(1_s + L_{mNEW}) \\ (\omega_s - \omega_r)L_{mNEW} & 0 & (\omega_s - \omega_r)(1_s + L_{mNEW}) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

où les termes $M_{dqNEW} = M_{dq} \frac{R_m}{R_m + L_m p}$, $M_{dNEW} = M_d \frac{R_m}{R_m + L_m p}$, $M_{qNEW} = M_q \frac{R_m}{R_m + L_m p}$

et $L_{mNEW} = L_m \frac{R_m}{R_m + L_m p}$ sont les paramètres inductifs de la machine avec R_m et L_m sont

respectivement la résistance équivalente et l'inductance magnétisante.

Le couple électromagnétique est décrit par la relation suivante :

$$T_{SEIG}(t) = \frac{3}{2} P_p R_m \int (i_{qs}(t) i_{dr}(t) - i_{ds}(t) i_{qr}(t)) dt - \int \left(\frac{R_m}{L_m} T_{SEIG}(t) \right) dt \quad (4.12)$$

$$T_{SEIG}(s) = \frac{3}{2} P_p \frac{R_m L_m}{R_m + L_m s} (I_{qs}(s) I_{dr}(s) - I_{ds}(s) I_{qr}(s)) \quad (4.13)$$

où P_p est le nombre de paire de pôles.

4.2.4 Système d'orientation des pales

Le mécanisme d'orientation des pales du système éolien est réalisé par un actionneur agissant sur des vérins hydrauliques pour ajuster l'angle de calage des pales β . En effet, pour une vitesse variable du vent ou une charge variable RL, la vitesse du rotor et l'énergie électrique

produite du système éolien sont maintenues aux niveaux désirés. Cet actionnaire est généralement modélisé par un système du premier ordre sous la forme suivante [65] :

$$G_{act}(s) = \frac{1}{(1 + t_m s)} \quad (4.14)$$

Dans notre application, la constante du temps utilisée est $t_m = 0.25$ s. Dans ce contexte, la commande utilisée est dite commande à angle de calage variable.

4.3 Conception de la commande

La figure (4.4) montre le schéma de principe de la commande auto-ajustable dont les paramètres du correcteur $C(s)$ sont calculés à partir des paramètres estimés du procédé $G_p(s)$ en temps réel [56].

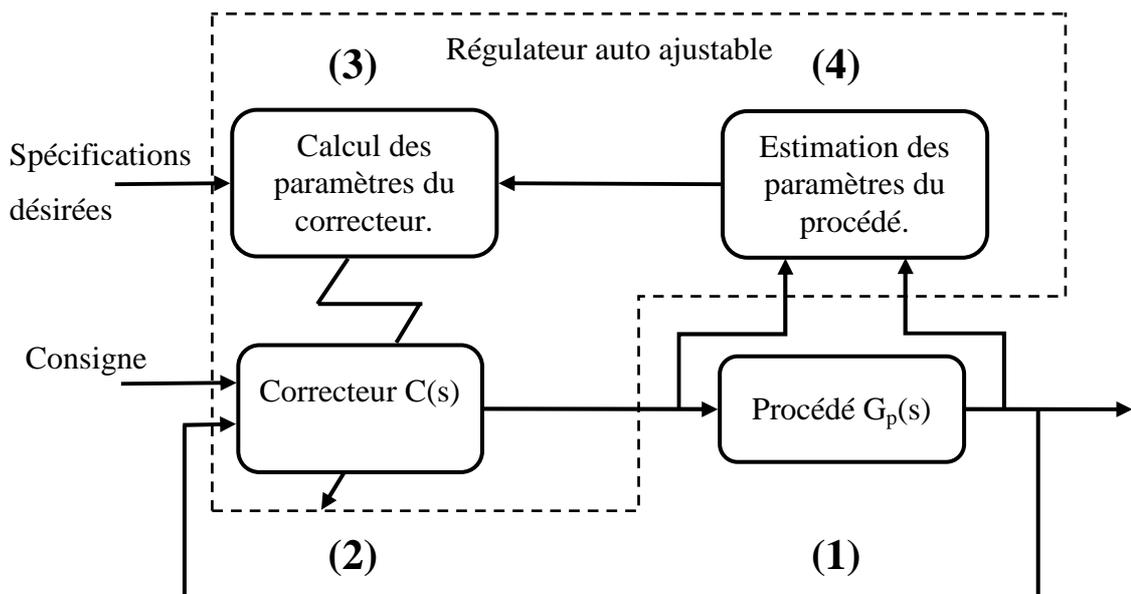


Figure (4.4) : Principe de la commande auto-ajustable.

Les quatre parties de (1) à (4) de la figure (4.4) de la stratégie de la commande en vitesse du système éolien précédent sont données comme suit :

- 1- Le procédé à commander est la turbine éolienne décrite par le modèle des équations (4.1), (4.2) et (4.3).
- 2- Le correcteur utilisé $C(s)$ est le correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire auto-ajustable.

- 3- Le calcul des paramètres du correcteur utilise l'algorithme de réglage présenté dans la section (3.4.2). Les valeurs des paramètres S_i , pour $0 \leq i \leq 4$, de l'étape (2) de cet algorithme sont calculées en temps réel en utilisant le modèle linéaire de l'équation (4.7) en utilisant les expressions de l'équation (3.13) comme suit :

$$S_0 = G_{In}(\omega_u) = \frac{G_p(\omega_u)}{\omega_u}, S_1 = G_{In}^{(1)}(\omega_u) = \left(\frac{G_p(s)}{s} \right)_{s=\omega_u}^{(1)}, S_2 = G_{In}^{(2)}(\omega_u) = \left(\frac{G_p(s)}{s} \right)_{s=\omega_u}^{(2)} \quad (4.15)$$

$$S_3 = G_{In}^{(3)}(\omega_u) = \left(\frac{G_p(s)}{s} \right)_{s=\omega_u}^{(3)}, S_4 = G_{In}^{(4)}(\omega_u) = \left(\frac{G_p(s)}{s} \right)_{s=\omega_u}^{(4)}$$

où $G_p(s)$ est la fonction de transfert de la turbine éolienne de l'équation (4.8) qui dépende que des deux paramètres K et T .

- 4- Des équations (4.7) et (4.8), les deux paramètres K et T sont fonctions des deux paramètres δ et γ comme suit :

$$K = \frac{-\delta}{\gamma} \quad (4.16)$$

$$T = \frac{-J_t}{\gamma}$$

Les deux paramètres δ et γ sont fonctions des trois paramètres mesurables β , v_w et Ω_t de la turbine éolienne comme montré dans l'équation (4.5). Alors, les valeurs des deux paramètres K et T de l'équation (4.16) peuvent être calculés en temps réel comme suit :

$$K = f(\beta, v_w, \Omega_t), \quad T = g(\beta, v_w, \Omega_t) \quad (4.17)$$

Figure (4.5) montre la stratégie de commande proposée pour la commande en vitesse de la turbine éolienne.

On note que l'utilisation d'un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable nécessite une implémentation spéciale des opérateurs d'ordre fractionnaire λ et μ qui sont devront être aussi ajustable. Dans la partie suivante, une technique d'implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaires ajustable sera présentée.

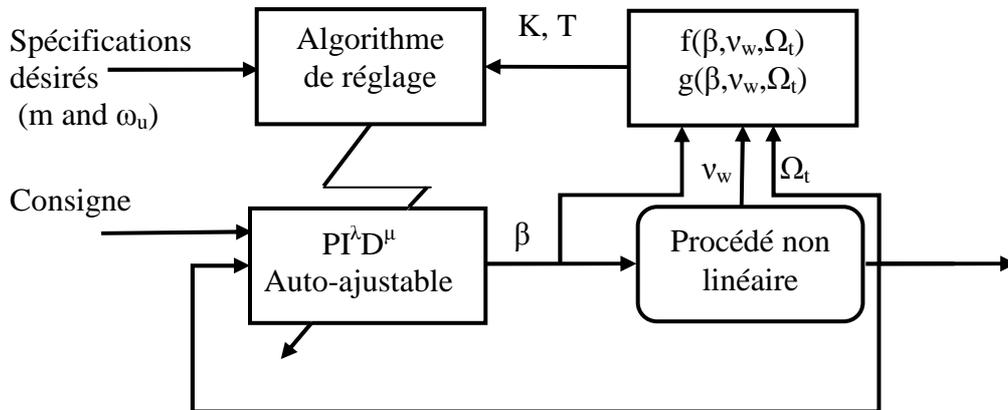


Figure (4.5) : Stratégie de la commande de la turbine éolienne proposée.

4.4 Implémentation du $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ajustable

Comme il est mentionné dans le chapitre (1), plusieurs approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire existent dans la littérature permettant leurs implémentations. Ces méthodes consistent à réaliser une approximation d'un opérateur fractionnaire pour un ordre fixe et connu ; cependant pour certains domaines d'application comme l'identification, la commande adaptative et le traitement de signal où l'ordre fractionnaire est inconnu ces implémentations ne sont plus utiles. Ce problème a poussé les chercheurs à développer des nouvelles techniques d'implémentation des opérateurs fractionnaires dont la fonction d'approximation ne dépend plus de l'ordre fractionnaire. Récemment, une nouvelle méthode d'implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire ajustable a été proposée dans [67]. L'avantage majeur de l'intégrateur ou dérivateur d'ordre fractionnaire ajustable obtenu par cette approximation est que cette implémentation est valable pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire comme il est montré sur la figure (4.6).

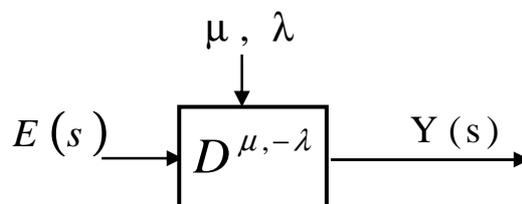


Figure (4.6) : Opérateur d'ordre fractionnaire ajustable.

Cette approximation est basée sur la méthode de Charef [39] présenté dans le chapitre (1). L'idée de base est de rendre les pôles et les zéros de la fonction rationnelle d'approximation indépendants de l'ordre fractionnaire d'intégration λ ou de dérivation μ .

Considérons l'intégrateur d'ordre fractionnaire λ dont sa fonction de transfert est donné par :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{\lambda}} \quad (4.18)$$

L'approximation de cette fonction dans une bande fréquentielle limitée en utilisant la méthode de Charef [39] est donnée par :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{\lambda}} \cong \sum_{i=0}^{N_I} \frac{K_{fi}}{(1 + s/p_{fi})} \quad (4.19)$$

Les résidus K_{fi} et les pôles p_{fi} sont en fonction de l'ordre d'intégration λ comme il a été montré dans la section (1.6) du chapitre (1). Dans la méthode proposée dans [67], les pôles p_{fi} sont fixés pour toutes les valeurs de l'ordre d'intégration λ par une technique adéquate et les résidus K_{fi} sont mis en forme d'un polynôme en l'ordre d'intégration λ comme suit (voir référence [67]) :

$$K_{fi}(\lambda) = \sum_{n=0}^M a_{in} \lambda^n \quad (4.20)$$

Par conséquent, l'approximation de l'équation (4.19) sera donnée par l'expression suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{\lambda}} \cong \sum_{n=0}^M \lambda^n \left[\sum_{i=0}^{N_I} \frac{a_{in}}{(1 + s/p_{fi})} \right] = \sum_{n=0}^M \lambda^n G_{In}(s) \quad (4.21)$$

Notons que les fonctions $G_{In}(s)$ sont complètement indépendantes de l'ordre d'intégration λ . La figure (4.7), montre l'implémentation analogique de l'intégrateur d'ordre λ selon la relation (4.21) à l'aide d'une structure semblable à la structure de Farrow.

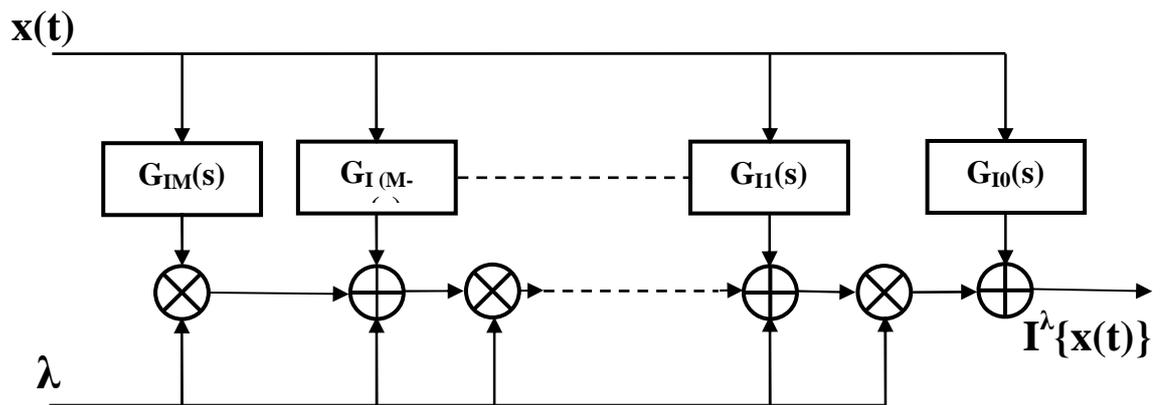


Figure (4.7) : Implémentation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire ajustable.

A partir de cette structure, l'implémentation du $PI^\lambda D^\mu$ ajustable est réalisée par la composition des deux opérateurs d'ordre fractionnaire ajustable comme il est montré sur la figure (4.8).

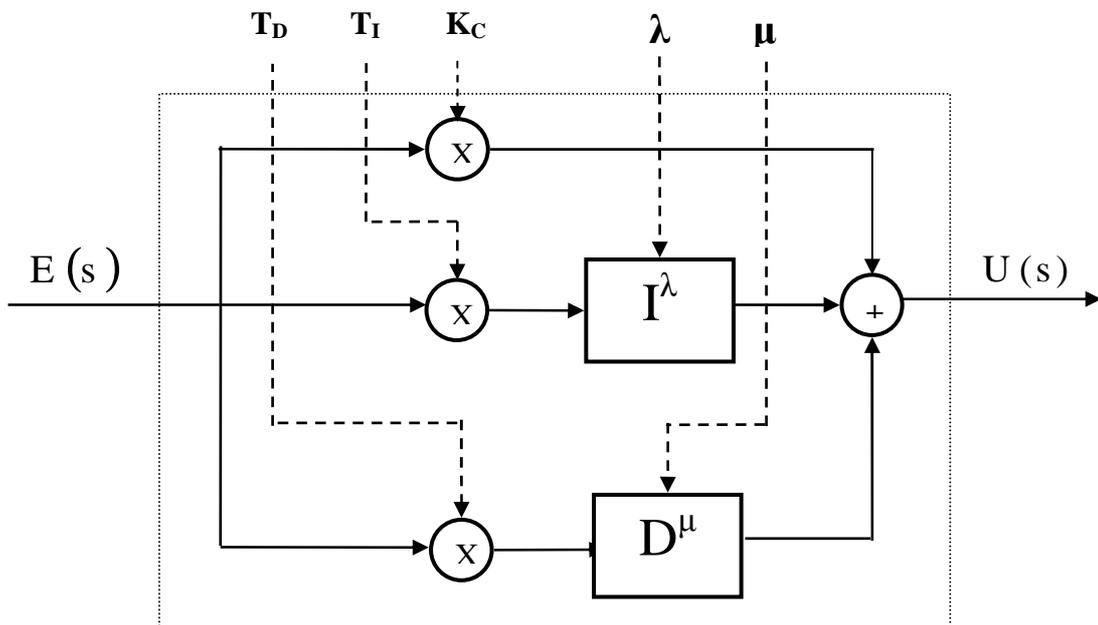


Figure (4.8) : Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable.

4.5 Résultats de simulation :

4.5.1 Application au système linéaire :

Considérons le système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = G_{act}(s)G_p(s) = \frac{K}{(1 + 0.25s)(1 + Ts)} = \frac{-2.5453}{(1 + 0.25s)(1 + 1.33s)} \quad (4.22)$$

Cette fonction de transfert représente le modèle linéarisé turbine (4.8) associé en cascade avec le système d'orientation des pales (4.14). La stratégie de commande montrée par la figure (4.4) est appliquée à ce système dont les paramètres K et T sont fixés à ces valeurs nominales (-2.5453 et 1.33) [65] avec des changements brusques à des instants précis ($t=3\text{sec}$ et $t=6\text{sec}$). Alors, l'objectif de cette commande est de maintenir, à l'aide d'un $PI^{\lambda}D^{\mu}$ auto-ajustable, le performance du système en boucle fermée en présence des variations paramétriques dans le procédé (4.22).

Les spécifications désirées pour le système asservi projeté sont données comme suit :

- La fréquence transitionnelle : $\omega_u = 30 \text{ rad/sec}$.
- La marge de phase : $\varphi_m = 70^\circ$.

Le modèle désiré satisfaisant les spécifications ci-dessus est décrit par la fonction de transfert irrationnelle suivante :

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{30}\right)^{1.22}} \quad (4.23)$$

Le correcteur obtenu par la procédure de réglage proposée pour les paramètres nominaux du procédé est donné par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = -14.7997 - \frac{8.0590}{s^{-0.7832}} - 40.6346s^{-0.5381} \quad (4.24)$$

La figure (4.9) montre le digramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

Remarquant que la phase est plate autour de la fréquence transitionnelle ω_u , on peut dire que le système commandé est robuste vis-à-vis la variation du gain.

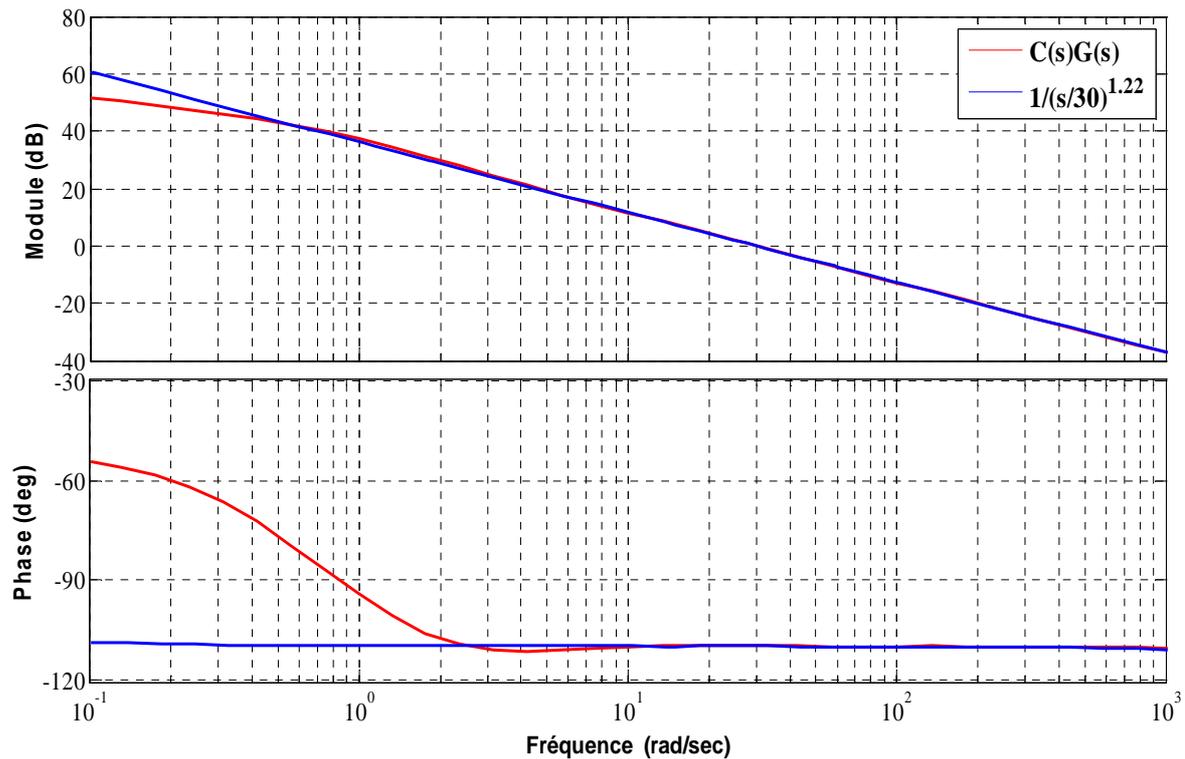


Figure (4.9) Diagramme de Bode de la fonction $C(s)G(s)$.

La figure (4.10) montre la réponse temporelle du système en boucle fermée à une consigne créneau en présence des variations paramétrique dans le procédé telles que le gain K est varié à l'instant $t=3$ sec et la constante de temps T variée à l'instant $t=6$ sec.

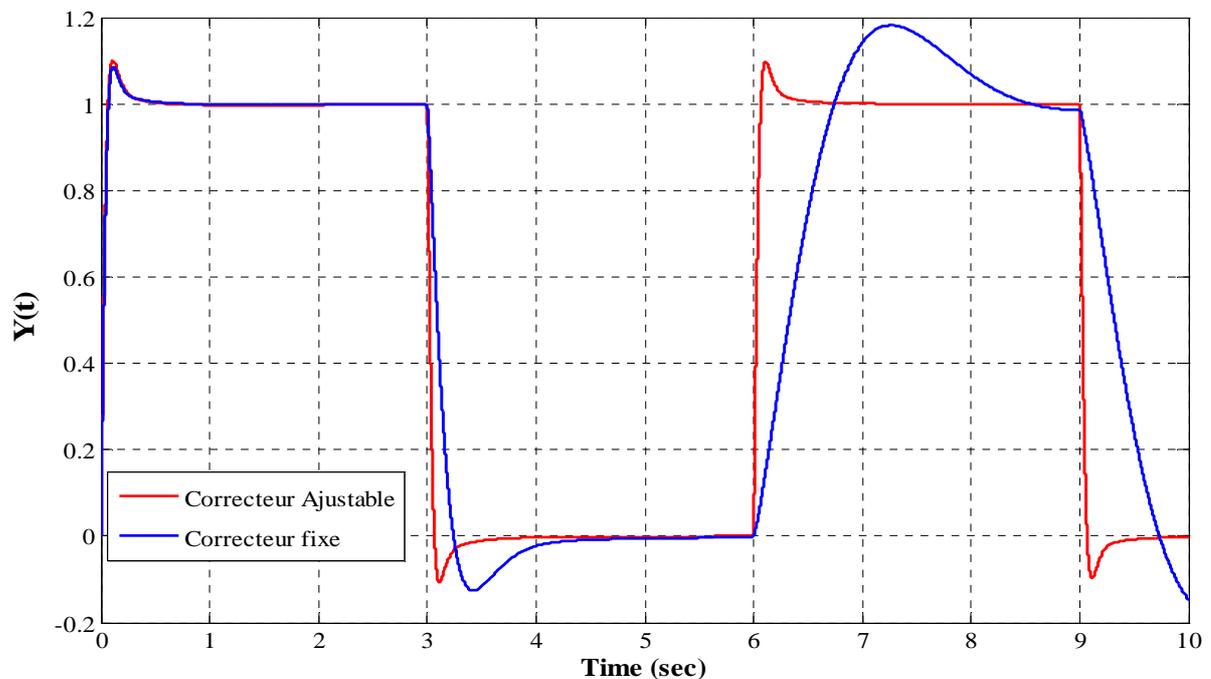


Figure (4.10) Réponse temporelles du système en boucle fermée à la présence des variations paramétriques ; à $t=3s$ $K=K/10$; à $t=6s$ $T= T*10$.

Ces résultats montrent l'utilité du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ajustable dont le comportement de système en boucle boucle fermée reste invariable malgré les variations paramétriques dans le procédé.

4.5.2 Application au système non-linéaire :

Le système global de la chaîne de conversion d'énergie (Turbine + Actionneur+ Génératrice+ charge RL) est simulé comme il est montré sur la figure (4.11). En effet, la vitesse de la turbine Ω_t est commandée par le $PI^{\lambda}D^{\mu}$ auto-ajustable qui est réglé en ligne en utilisant les paramètres K et T qui sont calculés à partir des trois grandeurs mesurable β , v_w et Ω_t .

La vitesse du vent utilisé dans cette application est décrite par la relation suivante [65] :

$$v_w = 11 + 0.2 \sin(0.1047 t) + 2 \sin(0.2665 t) + \sin(1.2930 t) + 0.2 \sin(3.6645 t) \quad (4.25)$$

Les figure (4.12 :A-G) montre les résultats obtenus après la simulation du schéma synoptique (4.11) à l'aide du Simulink Matlab pendant 30 sec.

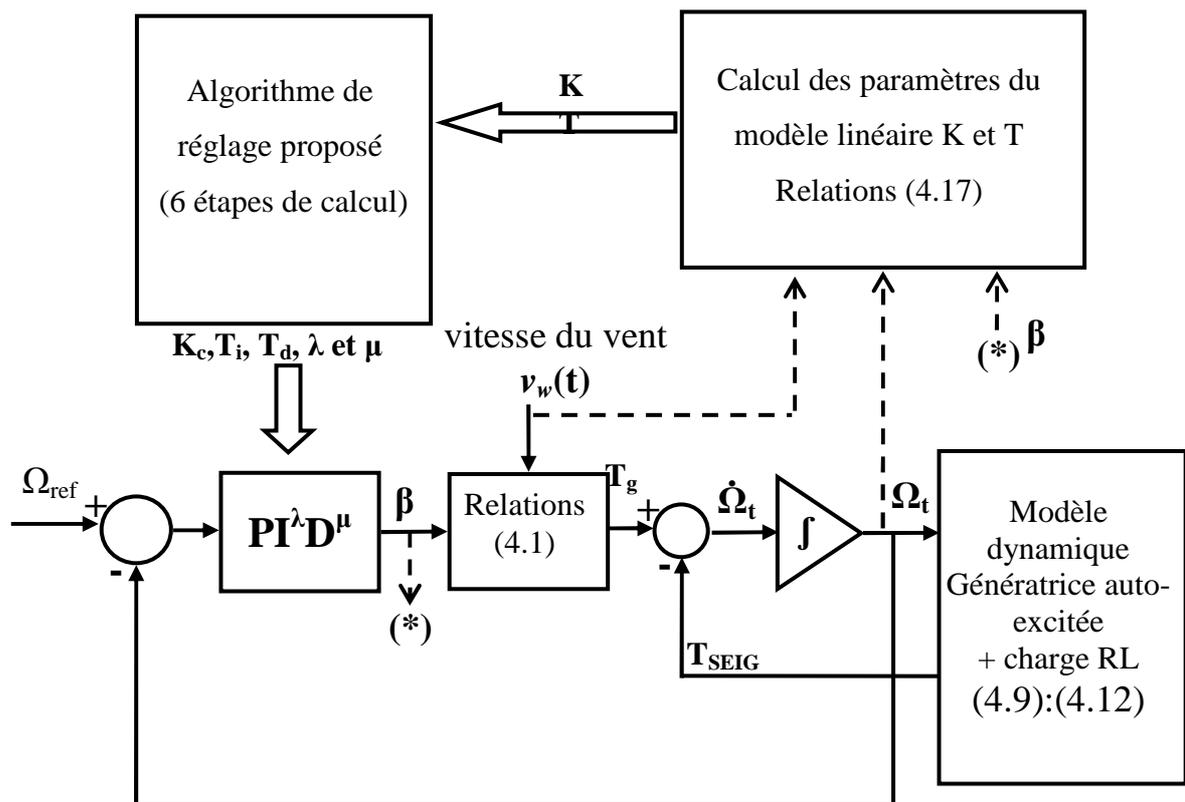


Figure (4.11) : Schéma synoptique de la commande proposée.

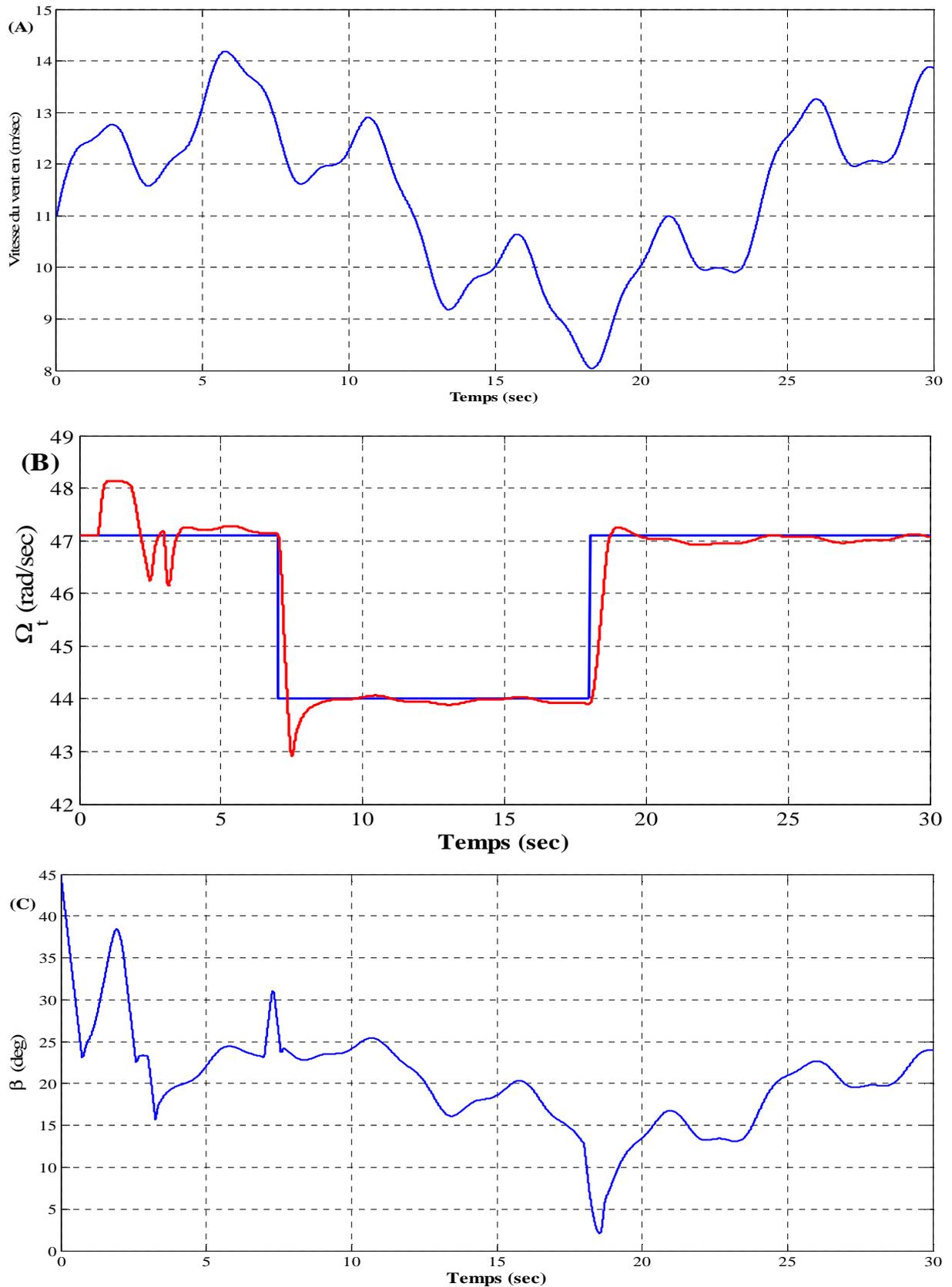


Figure (4.12) : (A) Vitesse de vent $v(t)$ décrite par l'équation (4.25) ; (B) Vitesse de la turbine; (C) angle d'orientation β .

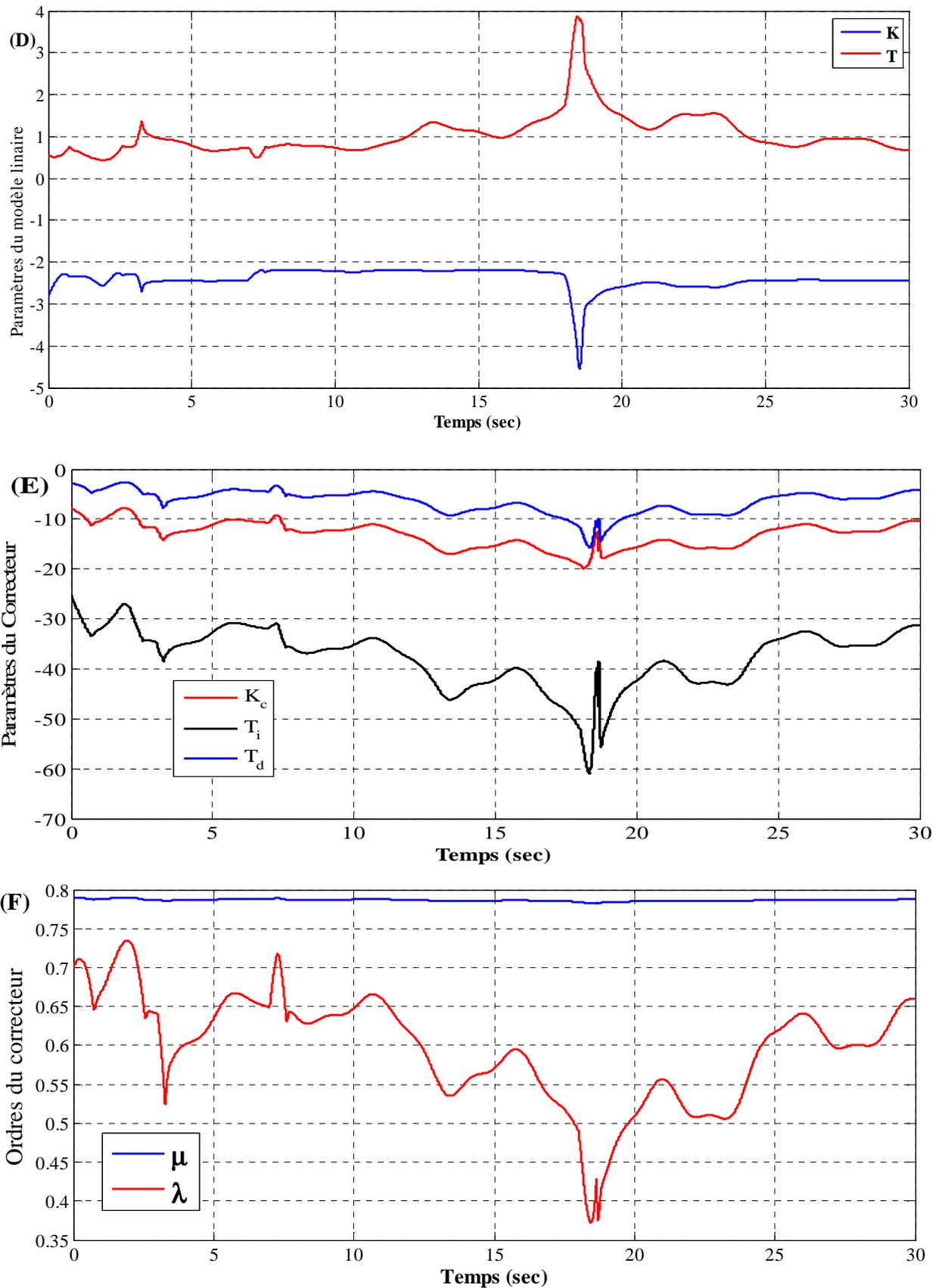


Figure (4.12) (D) paramètres du modèle linéaire ; (E) paramètres du correcteur ; (F) Ordres du correcteur.

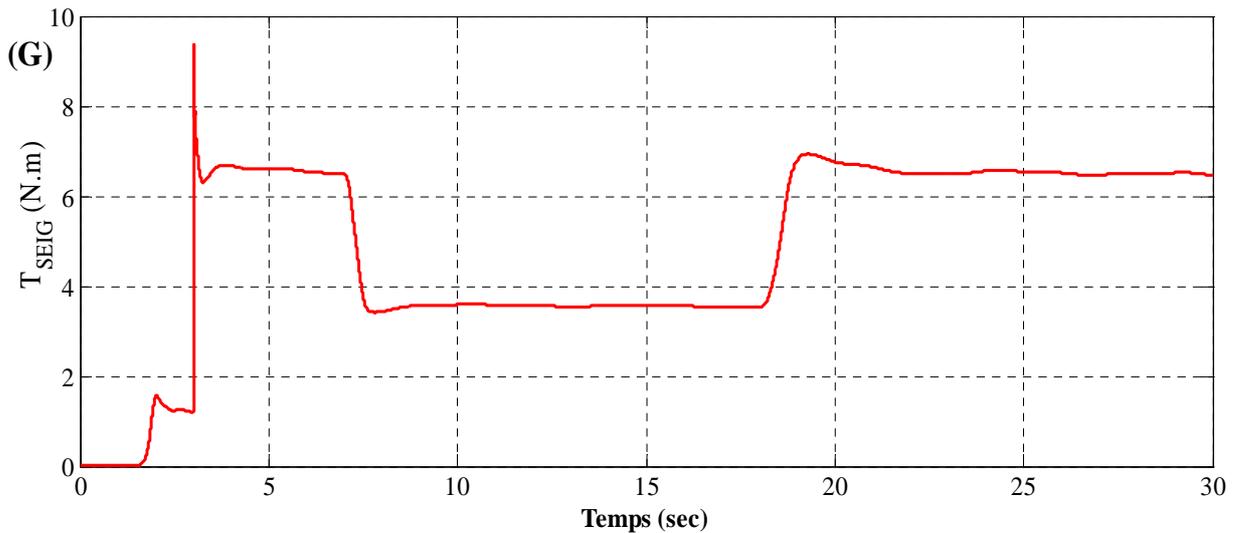


Figure (4.12-G) couple de la génératrice T_{SEIG} .

Discussion :

A partir des figures montrées précédemment, les résultats suivants ont été constatés :

La figure (4.12-A) :

Cette figure montre l'évolution de la vitesse du vent, cette force représente l'énergie naturelle qui alimente le système. Dans la pratique, différents modes de fonctionnement sont possibles, la turbine doit fonctionner à vitesse fixe ou bien variable et parfois s'arrêter tout dépend de la gamme de variation de la vitesse du vent.

La figure (4.12-B) :

Cette figure montre la vitesse de turbine qui est la grandeur à commandée telle que :

- à l'instant $t=1$ sec, une augmentation de la vitesse due à l'effet de magnétisation de la génératrice (augmentation du couple T_{SEIG}) qu'elle représente une perturbation au système figure (4.12-G).
- A l'instant $t=3$ sec, une charge de type RL ($R = 250 \Omega$, $L = 200e^{-3}$ H) est connectée à la génératrice ce qui a justifié la diminution de la vitesse, ce phénomène représente aussi une perturbation au système.
- Aux instants $t=7$ sec et $t=18$ sec, des changements de la consigne permettant de montrer les caractéristiques en asservissement du système en boucle fermée.

Remarquant la réussite du rejet de perturbation par cette commande, on peut aussi conclure que la performance du système est un peu sensible au changement des paramètres dont le dépassement obtenu à l'instant $t=7$ sec est différent à celui obtenu à $t=18$ sec. Ce

comportement peut être justifié par la grande différence remarquée en vitesse du vent au deux instants 7 et 18 sec dont l'une est à l'ordre de 12 m/s et l'autre est à l'ordre de 8 m/sec.

La figure (4.12-C) :

Cette figure montre le signal de commande généré par le correcteur ajustable, ce signal obtenu est raisonnable puisqu'il est à l'intérieur de l'intervalle de la limite physique de l'actionneur (entre 0 et 90°), ainsi que le signal est lisse et n'a pas des changements brusques.

La figure (4.12-D) :

Cette figure montre les paramètres estimés du procédé.

On constate qu'au régime permanent, les deux paramètres K et T se stabilisent à ces valeurs nominales, est tous changement de consigne ou apparition d'une perturbation affectant les valeurs de ces paramètres.

La figure (4.12-E) et (4.12-F) :

Ces figures montrent l'évolution des paramètres du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ajustable pendant le fonctionnement de la turbine à vitesse variable.

Remarquons que l'évolution des trois paramètres classique (K_C , T_I et T_D) ont été obtenus homogène où les trois courbes varient de mêmes rapports, ce n'est pas le cas pour les ordres fractionnaire où la variation de λ est très importante par rapport à celle de μ , ainsi que les courbes représentant l'évolution de ces deux paramètres ont des forme complètement différents aux autres paramètres (K_C , T_I et T_D).

La figure (4.12-G) :

Cette courbe montre l'évolution du couple de la génératrice décrit par l'équation (4.12).

Notons que, d'après l'équation dynamique (4.3), ce couple est proportionnel au dérivé de la vitesse Ω_t .

Ces résultats justifient l'utilité du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ajustable et sa flexibilité réside dans son nombre des paramètres important permettant d'améliorer la performance du système en boucle fermée.

4.6 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre est l'extension de la méthode présentée dans le chapitre précédent, ainsi que l'adaptation de stratégie de commande proposée à un système complexe

nous montrent encore l'intérêt de développement des méthodes de réglage analytiques où leur extension à une commande auto ajustable est presque toujours permisible.

Les systèmes complexes comprenant des non-linéarités dans leurs modèles mathématiques sont généralement difficiles à commandé, et les techniques courantes pour la commande de ce type des systèmes comme la linéarisation autour du point de fonctionnement, ne permettent pas d'avoir des résultats précis à cause des déviations éventuelles du système en dehors de leur point de fonctionnement. Ces déviations peuvent rendre le modèle et par conséquent le correcteur utilisé invalide pour des régimes de fonctionnement variable. La méthode proposée pour la turbine éolienne qu'elle consiste à modéliser le système par un modèle linéaire à paramètres variants, a l'avantage majeur d'obtenir un modèle linéaire estimé à chaque instant, ce modèle permet à travers une méthode analytique de paramétrer un correcteur linéaire afin d'obtenir des spécifications désirées du système en boucle fermée.

En conclusion, ce travail qui est une application basée principalement sur la méthode proposée dans le chapitre 3, montre l'avantage majeur de la nouvelle technique de réglage proposée qu'elle puisse considérée comme un point de départ pour le développement des nouvelles stratégies de commande grâce à leur simplicité d'utilisation et leur précision.

Conclusion Générale :

Récemment, la commande d'ordre fractionnaire est devenue un domaine de recherche très important dans la théorie de la commande. Depuis son introduction en 1999, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est devenu un des outils de la conception des systèmes asservis. L'intérêt de ce genre de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a deux paramètres en plus que le correcteur PID classique, l'ordre fractionnaire λ de l'action d'intégration et l'ordre fractionnaire μ de l'action de différentiation qui peuvent être employés pour remplir des caractéristiques additionnelles ou d'autres conditions intéressantes pour le système à commander. Par conséquent, le réglage de ces cinq paramètres est devenu un axe de recherche très important. Un travail de recherche continu et intensif pour le développement de nouvelles techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est toujours en cours pour le rehaussement et l'amélioration de la qualité des performances des systèmes asservis. Alors, dans cette thèse, nous avons abordé le problème de développement de techniques de réglage des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire ainsi que leurs applications aux différents types de systèmes asservis.

Nous avons présenté deux contributions relatives au réglage des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire. Notre contribution comporte une partie théorique où les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire sont calculés analytiquement et une partie application où un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire auto-ajustable est obtenu pour la commande de la vitesse d'une turbine éolienne couplée à une génératrice asynchrone auto-excitée dans un système de production d'énergie électrique.

Notre première contribution consiste à régler les paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'un système asservi à retour unitaire afin que le système en boucle fermée soit équivalent au modèle idéale de Bode largement utilisé dans la commande d'ordre fractionnaire à cause de sa propriété d'iso-amortissement. Cette méthode utilise la réponse indicielle du processus à asservir supposé stable et elle ne nécessite pas son approximation par un modèle. Un algorithme de six étapes permettant le réglage des paramètres du correcteur a été établi. Cette formulation analytique des paramètres rend la méthode plus simple et plus pratique. Des exemples illustratifs pour différents types de processus ont été présentés pour valider l'efficacité et la flexibilité de la méthode de réglage proposée. Les résultats de simulation obtenus ont été satisfaisants.

La deuxième contribution concerne la conception d'un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire pour la commande de la vitesse d'une turbine éolienne couplée à une génératrice asynchrone auto-excitée dans un système de production d'énergie électrique. Vu la complexité du système d'énergie éolienne qui réside d'une part dans l'instabilité de la vitesse et de la direction du vent et d'autre part dans le changement non prévu de la charge pouvant provoquer des changements non souhaités dans la vitesse de la turbine pendant son fonctionnement, le point de fonctionnement de la turbine éolienne devient variable. Alors, on a proposé un $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire auto-ajustable pour la commande de la vitesse de la turbine. La technique de réglage des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ auto-ajustable proposée se base sur l'algorithme de réglage de la première contribution ; mais dans ce cas, au lieu de calculer les valeurs des paramètres du correcteur à partir de la réponse indicielle du système, ces derniers sont calculés analytiquement en ligne à partir des paramètres variables du modèle linéarisé de la turbine autour de son point de fonctionnement variable. On a utilisé une implémentation de l'intégrateur I^λ et du différentiateur D^μ d'ordre fractionnaire ajustable pour rendre l'exploitation du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire auto-ajustable plus simple et plus pratique.

Perspectives et suggestions :

- Extension de la technique de réglage proposée aux systèmes à retard et à phase non-minimale.
- Validation expérimentale de la technique de réglage proposée.
- Extraction d'autres règles plus simplifiées à partir de l'algorithme de réglage proposé.
- Extension de la technique de réglage proposée pour le développement d'une méthode d'autoréglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire pour les systèmes à paramètres variables.

Références

- [1] J. Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi, “Recent history of fractional calculus”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 3, pp. 1140-1153, 2011.
- [2] J. Sabatier et al., *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Development and Applications in Physics and Engineering*. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2007.
- [3] M. Dalir and M. Bashour, “Applications of fractional calculus”, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 21, pp. 1021-1032, 2010.
- [4] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petras, *Fractional Order Systems*. Singapore: World Scientific, 2010.
- [5] C.A. Monje, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D.Xue, V.Feliu, *Fractional-Order Systems and Controls Fundamentals and Applications*. London, UK: Springer-Verlag, 2010.
- [6] Petras, *Fractional-order nonlinear systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2011.
- [7] M. Ortigueira, *Fractional calculus for scientists and engineers*. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2011.
- [8] B. Boudjehem, D. Boudjehem, “Parameter tuning of a fractional-order PI controller using the ITAE criteria”, Chapter in *Fractional Dynamics and Control*, Berlin, Germany: Springer, pp. 49–57, 2012.
- [9] F. Padula, A. Visioli, *Advances in Robust Fractional Control*, New York, USA: Springer, 2015.
- [10] H. Bode, *Network analysis and feedback amplifier design*. New York, USA: D. Van Nostrand Co., 1945.
- [11] A. Tustin, J. Allanson, J. Layton and R. Jakeways, “The design of systems for automatic control of the position of massive objects”, *Proceedings of the IEE Part C: Monographs*, vol. 105, no. 1, pp. 1-57, 1958.
- [12] S. Manabe: “The Non-integer Integral and its Application to Control Systems”, *J. IEE Japan*, vol. 80, no. 860, pp. 589-597, 1960.
- [13] Y.Q. Chen, I. Petras and D. Xue, “Fractional Order Control - A Tutorial”, *American Control Conference*, St. Louis, MO, USA, June 10-12, pp. 1397-1411, 2009.
- [14] I. Podlubny, “Fractional order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 208-214, 1999.
- [15] A. Djouambi, A. Charef and T. Bouktir, “Fractional Order Robust Control and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers”, *WSEAS trans. on circuits and systems*, vol. 4, no. 8, pp. 850-857, 2005.

- [16] D. Valério and J. Sa da Costa, “Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols type rules”, *Signal Processing*, vol. 86, no. 10, pp. 2771–2784, 2006.
- [17] A. Biswas, S. Das, A. Abraham and S. Dasgupta, “Design of fractional-order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers with an improved differential evolution”, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 22, no. 2, pp. 343-350, 2009.
- [18] K. Bettou and A. Charef, “Control quality enhancement using fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller”, *International Journal of System Sciences*, vol. 40, no. 8, pp. 875-888, 2009.
- [19] S. Das, S. Saha, S. Das and A. Gupta, “On the selection of tuning methodology of FOPID controllers for the control of higher order processes”, *ISA Transactions*, vol. 50, no. 3, pp. 376-388, 2011.
- [20] F. Padula and A. Visioli, “Tuning rules for optimal PID and fractional-order PID controllers”, *Journal of Process Control*, vol. 21, no. 1, pp. 69-81, 2011.
- [21] B. Saidi, M. Amairi, S. Najjar and M. Aoun, “Bode shaping-based design methods of a fractional order PID controller for uncertain systems”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 80, no. 4, pp. 1817-1838, 2014.
- [22] K. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus*. New York, USA: Academic Press, 1974.
- [23] B. Ross, *Fractional calculus and its applications*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1975.
- [24] S. Samko, A. Kilbas and O. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*. Yverdon, Switzerland : Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [25] K. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New York, USA: Wiley, 1993.
- [26] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*. Singapore: World Scientific, 2000.
- [27] I. Podlubny, *Fractional differential equations*. San Diego, USA: Academic Press, 1999.
- [28] A. Oustaloup, O. Cois and L. Le Lay, *Représentation et identification par modèle non entier*. Paris, France: Edition Hermès, 2005.
- [29] R. Magin, *Fractional calculus in bioengineering*. Redding, USA: Begell House Publishers, 2006.
- [30] S. Das and I. Pan, *Fractional order signal processing*. Heidelberg, Germany: Springer, 2012.

- [31] D. Valério and J. Tenreiro Machado, "On the numerical computation of the Mittag-Leffler function", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 10, pp. 3419-3424, 2014.
- [32] X. Moreau, O. Altet and A. Oustaloup, "Fractional differentiation: an example of phenomenological interpretation", Chapter in *Fractional differentiation and its applications*, Neusab, Germany: U-Books Edition, pp. 275-287, 2005.
- [33] I. Podlubny, "Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation", Chapter in *Fractional differentiation and its applications*, Neusab, Germany: U-Books Edition, pp. 3-18, 2005.
- [34] M.H. Tavassoli, A. Tavassoli, M.R. Ostad Rahimi, "The geometric and physical interpretation of fractional order derivatives of polynomial functions", *Differential geometry-Dynamical systems*, vol. 15, pp. 93-104, 2013.
- [35] A., Oustaloup, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*. Paris, France: Edition Hermès, 1995.
- [36] Das, Shantanu, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Berlin, Germany: Springer-Verlag 2011.
- [37] B. M. Vinagre et al., "Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 3, no 3, 231-248, 2000.
- [38] I. Petras, I. Podlubny, B. M. Vinagre, P. O'Leary and L. Dorcak, "Analogue Realization of Fractional Order Controllers", *Nonlinear dynamics*, vol. 29, no 4, pp. 281-296., 2002.
- [39] A. Charef, "Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller", *IEE Proceedings of Control Theory and Applications*, vol. 153, no. 6, pp. 714-720, 2006.
- [40] L. Debnath, "A brief historical introduction to fractional calculus", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 35, no. 4, pp. 487-501, 2004.
- [41] T. Kaczorek and K. Rogowski, *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*. Białystok, Poland: Springer, 2014.
- [42] A. Oustaloup, *La commande CRONE: commande robuste d'ordre non entier*. Paris, France: Edition Hermès, 1991.
- [43] I. Petras and L. Dorcák, "The frequency method for stability investigation of fractional control systems". *SACTA journal*, vol. 2, no. 1-2, pp. 75-85, 1999.
- [44] D. Matignon, "Stability properties for generalized fractional differential systems", In *ESAIM proceedings*, vol. 5, pp. 145-158, 1998.

- [45] A. Charef, “Modeling and analog realization of the fundamental linear fractional order differential equation”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 46, no. 1-2, pp. 195-210, 2006.
- [46] R. Barbosa, J. Machado and I. Ferreira, “Tuning of PID Controllers Based on Bode’s Ideal Transfer Function”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, no. 1-4, pp. 305-321, 2004.
- [47] A. Djouambi, A. Charef and A. Voda, “Fractional Order Controller Based on Bode’s Ideal Transfer Function”, *Control and Intelligent Systems*, vol. 38, no. 2, pp. 67–73, 2010.
- [48] M. Bettayeb and R. Mansouri, “Fractional IMC-PID-filter controllers design for non integer order systems”, *Journal of Process Control*, vol. 24, no. 4, pp. 261-271, 2014.
- [49] C. A. Monje et al., “On fractional PI^λ controllers: Some tuning rules for robustness to plant uncertainties”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, no. 1-4, pp. 369–381, 2004.
- [50] Y. Chen, T. Bhaskaran and D. Xue, “Practical Tuning Rule Development for Fractional Order Proportional and Integral Controllers”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 3, no. 2, pp. 021403:1-8, 2008.
- [51] H. Li, Y. Luo and Y. Chen, “A Fractional Order Proportional and Derivative (FOPD) Motion Controller: Tuning Rule and Experiments”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 18, no. 2, pp. 516-520, 2010.
- [52] T. Vu and M. Lee, “Analytical design of fractional-order proportional-integral controllers for time-delay processes”, *ISA Trans.*, vol. 52, no. 5, pp. 583-591, 2013.
- [53] L. Liu, F. Pan and D. Xue, “Variable-order fuzzy fractional PID controller”, *ISA Transactions*, vol. 55, pp. 227-233, 2015.
- [54] B.J. Lurie. “Three-parameter tunable Tilt-Integral-Derivative (TID) controller”, patent, US 5371670, 1994.
- [55] C. Monje, B. Vinagre, V. Feliu and Y. Chen, “Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications”, *Control Engineering Practice*, vol. 16, no. 7, pp. 798-812, 2008.
- [56] K. Åström and T. Hägglund, *Advanced PID control*. Research Triangle Park, NC, USA: ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
- [57] J.Y. Cao and B. G. Cao, “Design of Fractional Order Controller Based on Particle Swarm Optimization”, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 4, no. 6, pp. 775-781, 2006.
- [58] R. S. Barbosa, M. F. Silva & J. A. Tenreiro Machado “Tuning and application of integer and fractional order PID controllers”, in *intelligent engineering systems and computational cybernetics*, vol. 5, pp. 245–255, 2009.

- [59] Y. Luo, Y.Q. Chen, “Fractional Order [proportional derivative] Controller for class of fractional order systems”, *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2446-2450, 2009.
- [60] Y. Luo, Y.Q. Chen, C.Y. Wang and Y.G. Pi, “Tuning fractional order proportional integral controllers for fractional order systems”, *Journal of Process Control*, vol 20, no. 7, pp. 823-831, 2010.
- [61] J. Ziegler and N. Nichols, “Optimum Settings for Automatic Controllers”, *trans. ASME*, vol. 64, no. 11, 1942.
- [62] A. Calderón, B. Vinagre and V. Feliu, “Fractional order control strategies for power electronic buck converters”, *Signal Processing*, vol. 86, no. 10, pp. 2803-2819, 2006.
- [63] M. Ramasamy and S. Sundaramoorthy, “PID controller tuning for desired closed-loop responses for SISO systems using impulse response”, *Computers & Chemical Engineering*, vol. 32, no. 8, pp. 1773-1788, 2008.
- [64] T. T., Hartley, C. F., Lorenzo, “A solution of the fundamental linear fractional order differential equation”, *NASA TP-208693*, December 1998.
- [65] I. Attoui and A. Omeiri, “Modeling, control and fault diagnosis of an isolated wind energy conversion system with a self-excited induction generator subject to electrical faults”, *Energy Conversion and Management*, vol. 82, no. 1, pp. 11-26, 2014.
- [66] S. Ghasemi, A. Tabesh and J. Askari-Marnani, “Application of Fractional Calculus Theory to Robust Controller Design for Wind Turbine Generators”, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 29, no. 3, pp. 780-787, 2014.
- [67] A. Charef and D. Idiou, “Design of analog variable fractional order differentiator and integrator”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 69, no. 4, pp. 1577-1588, 2012.
- [68] B. Boukhezzar and H. Siguerdidjane, “Comparison between linear and nonlinear control strategies for variable speed wind turbines”, *Control Engineering Practice*, vol. 18, no. 12, pp. 1357-1368, 2010.

Abstract :

In this work, a new tuning method for fractional order $PI^\lambda D^\mu$ controller was proposed. This method consists of designing a fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller, in unit feedback control loop, such that the closed loop system will be equivalent to the desired model. The reference model used in this work, which is Bode's ideal transfer function, is a widely used function in the fractional order control domain because of its iso-damping property, which is an important robustness feature. Indeed, the five parameters of $PI^\lambda D^\mu$ are derived analytically from step response of the process to be controlled and the parameters of the desired system that was selected from design specifications, and therefore, six steps of calculation allows to calculate the five parameters of fractional $PI^\lambda D^\mu$. This analytical formulation make the method more practice and very simple. Illustrative examples were presented to validate this new approach.

In the second part of this work is an extension of the proposed tuning method. The proposed strategy consists to apply a self-tuned $PI^\lambda D^\mu$ for controlling a speed of a wind turbine in an electric power production plant. Indeed, by using a linearized model about a specified operating point, the controller's parameters were adjusted, with online implementation of the proposed tuning method, to get robust behavior of closed loop system in term of parameters variation.

Key Words:

Bode's ideal function; fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller; iso-damping property; robustness; step response.

ملخص:

إقترحت في هذه الأطروحة تقنية جديدة لضبط المراقب ذو الأس الكسري من نوع $PI^{\lambda}D^{\mu}$. تعتمد التقنية المقترحة على تصميم مراقب $PI^{\lambda}D^{\mu}$ في حلقة تحكم ذات استعادة أحادية لجعل النظام الكلي معادلاً لنظام مرجعي ذو أس كسري، حيث النظام المرجعي المستعمل في هذا البحث الذي هو الدالة المثالية لبود هو نظام شائع الاستعمال في مجال تصميم المراقبات الكسرية و أهمية هذا النظام تكمن عموماً في توفره على خصوصية المتانة المتعلقة بالتضخيم المباشر و هي خصوصية (Iso-damping). استخلصت في هذه التقنية المعاملات الخمسة للمراقب $PI^{\lambda}D^{\mu}$ بدلالة استجابة الخطوة للنظام و معاملات النظام المرجعي و الذي حدّد لتحقيق الشروط المطلوبة للتحكم. كنتيجة لهذا العمل رتّب عملية الضبط في ستة خطوات حسابية سهلة التطبيق حيث تساعد هذه الصيغة على جعل الطريقة أكثر عملية ثمّ قدمت عدة أمثلة تطبيقية لتوضيح و مصادقة التقنية المقترحة. كخطوة ثانية إقترح تمديد لتقنية الضبط المقترحة للتحكم في سرعة توربينه هوائية في نظام لإنتاج الطاقة الكهربائية، حيث تعتمد هذه الإستراتيجية على استعمال النظام الخطّي المكافئ اللّحظي للنظام المتحكم فيه لاستخلاص المعاملات اللّحظية للمراقب $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ذو النّمودج المتغير ذاتياً وهذا بهدف الحصول على سلوك ثابت وأقل حساسية ممكنة اتجاه التغيرات الهيكلية للنظام.

كلمات المفاتيح:

الدالة المثالية لبود، الحاكم ذو الأس الكسري $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ، متانة التحكم، استجابة الخطوة.

CURRICULUM VITAE

Nadir Fergani est né le 09 janvier 1984 à Annaba. Il a obtenu le diplôme d'ingénieur d'état en électronique option contrôle industrielle en 2007 de l'université d'Annaba et le diplôme de Magister en électronique option contrôle des systèmes en 2010 de l'université de Constantine. Depuis octobre 2010, il est doctorant au département d'électronique de l'université des frères Mentouri de Constantine. Depuis juillet 2014, il est attaché de recherche avec le Centre de Recherche en Technologies Industrielles (CRTI), unité de recherche d'Annaba. Son domaine de recherche actuel est la commande d'ordre fractionnaire et la conception des correcteurs d'ordre fractionnaire.