

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Université Mentouri, Constantine**  
**Faculté des Sciences de l'Ingénieur - Département d'Electronique**

N° d'ordre :  
Série :

## **THESE**

**Présentée pour l'obtention du grade de**

**Docteur en Sciences**

**En Electronique, option : Contrôle des systèmes**

## **THEME**

**Elaboration de méthodes de robustification  
de lois de commande prédictive**

**Présenté Par**

**Mr : FAS Mohamed Lamine**

**Soutenu le: 11 / 06 / 2012**

**Devant le jury :**

<b>Président</b>	<b>Mr Chaabi Abdelhafid</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. CONSTANTINE</b>
<b>Directeur de thèse</b>	<b>Mr Filali Salim</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. CONSTANTINE</b>
<b>Examineur</b>	<b>Mr Boutamina Brahim</b>	<b>M.C.A</b>	<b>Univ. CONSTANTINE</b>
<b>Examineur</b>	<b>Mr Slimane Noureddine</b>	<b>M.C.A</b>	<b>Univ. BATNA</b>
<b>Examineur</b>	<b>Mr Ladaci Samir</b>	<b>M.C.A</b>	<b>Univ. SKIKDA</b>

## ***Remerciements***

*Avant tous je voudrais remercier Allah qui m'a permis d'arriver là où je suis, et de conclure ce modeste travail, et remercier mes parents pour leur sacrifice, durant toute ma scolarité et soucieux de mon avenir.*

*Je voudrais témoigner de ma grande gratitude envers le Professeur S.Filali, qui m'a apporté toute l'aide dont j'avais besoin, je voudrais tout spécialement le remercier pour sa patience.*

*Mes vifs remerciements vont aussi aux membres du jury qui ont accepté de juger ce modeste travail.*

*Enfin je ne pourrais terminer ces remerciements sans penser à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.*

*Merci*

*Je dédie ce travail*

*A toute ma famille*

# Sommaire

## Introduction générale

Contexte	03
But du projet	04
Organisation de la thèse	05

## Chapitre 1 La commande prédictive sous contraintes

1.1. Introduction	08
1.2. Algorithme GPC	08
1.3. Régulateur polynomial équivalent	11
1.4. Choix des paramètres du GPC	11
1.4.1. Choix de l'Horizon minimal $N_1$	12
1.4.2. Choix de l'Horizon maximal $N_2$	12
1.4.3. Choix de l'Horizon de commande $N_u$	12
1.4.4. Choix du coefficient de pondération $\lambda$	12
1.5. Rôle du polynôme $C$	12
1.5.1. Rôle de filtrage	13
1.5.2. Rôle de robustification de la loi de commande	14
1.6. La commande prédictive sous contraintes	15
1.6.1. Formulation unifiée des contraintes	16
1.6.2. Minimisation du critère prédictif sous contraintes	18
1.6.3. Minimisation du critère prédictif sous contraintes de type inégalité	19
1.6.4. Application du formalisme LMI	19
1.7. Exemple d'Application sur un moteur asynchrone	23
1.8. Conclusion	26

## Chapitre 2 La double Paramétrisation de Youla

2.1. Introduction	28
2.2. La paramétrisation de Youla	28
2.2.1. Définition	28
2.2.2. Propriétés	30
2.2.3. Problème d'optimisation avec le paramètre de Youla	35
2.3. La double paramétrisation de Youla et structure de correcteur	35
2.3.1. La structure du correcteur	35
2.3.2. Algorithme	38
2.4. Conclusions	39

## Chapitre 3 Formulation convexe des spécifications

3.1. Introduction	41
3.2. Généralités sur la robustesse	41
3.3. Commande prédictive robuste	42
3.4. Rappel sur les incertitudes non-structurées	42

3.4.1. Incertitudes non-structurées additives	43
3.4.2. Incertitudes non-structurées multiplicatives	44
3.4.3. Outil de robustesse	44
3.5. Paramétrisation de Youla d'un correcteur à deux degrés de liberté	46
3.6. Spécifications de robustesse et performance nominale	51
3.6.1. Robustesse en stabilité - Spécifications fréquentielles	52
3.6.2. Performance nominale - Spécifications temporelles	54
3.7. Problème d'optimisation convexe	54
3.8 Choix de la forme du paramètre de Youla	56
3.8.1. Utilisation de la norme $H_\infty$ pour les spécifications fréquentielles	57
3.8.2. Respect d'un gabarit temporel	59
3.9. Conclusion	62
<b>Chapitre 4 Application de la stratégie de robustification sur processus</b>	
4.1. Application de la commande prédictive sous contraintes à un problème de positionnement	63
4.2. Introduction	64
4.3. Modélisation	65
4.3.1. Modèle du système électrique	65
4.3.2. Modèle du système mécanique	66
4.3.3. Facteur de transformation des unités	66
4.3.4. Intégration de la vitesse	66
4.3.5. Structure de la machine asynchrone commandée par le correcteur <i>RST</i>	67
4.3.6. Structure de commande PID	67
4.4. Résultats	69
4.5. Conclusion	78
<b>Conclusion Générale</b>	79
<b>Annexe A</b>	81
<b>Annexe B</b>	85
<b>Table des figures</b>	88
<b>Bibliographie</b>	90

## Liste de notations et abréviations

**Symboles**

$A$	Notation générale pour une matrice
$A^T$	Notation générale pour la transposée d'une matrice
$i = 1, n$	Notation pour $i \in \mathbb{N}$ , $1 \leq i \leq n$
$T_e$	Période d'échantillonnage
$k$	Incrément en temps discret (pour un signal $x$ , $x(k) = x(t)  _{t=kT_e}$ )
$q^{-1}$	Opérateur retard (pour un signal $x$ , $q^{-1}x(k) = x(k-1)$ )
$A, B, C$	Polynômes dans l'opérateur retard $q^{-1}$
$m$	Nombre de contraintes terminales
$N_1$	Horizon de prédiction minimal
$N_2$	Horizon de prédiction maximal
$N_u$	Horizon de prédiction sur la commande
$\lambda$	Coefficient de pondération
$K_0$	Contrôleur initial
$G$	Fonction de transfert de Système
$\min(f(x))$	Minimiser une fonction de coût
$n_q$	Dimension du paramètre de Youla
<b>Q</b>	Paramètre de Youla
$P$	Fonction de transfert
$W$	Fonction de pondération
$RH_\infty$	Ensemble des transferts propres stables à coefficients réels
$s$	Variable de Laplace
$\hat{x}$	Prédiction de la variable $x$
$\hat{x}(k+1/k)$	Prédiction de la variable $x$ à l'instant $k+1$ à partir des valeurs connues jusqu'à l'instant $k$

$\  \cdot \ _{\infty}$	Norme $H_{\infty}$
$\hat{y}(t + j)$	La prédiction du signal $y(t)$ à l'instant $t + j$ connaissant l'information jusqu'à l'instant $t$ .
$I_{m,n}$	Matrice identité de dimension $m \times n$
$B_r$	Marge de robustesse
$\tau_{\text{rom}}$	Couple nominal (Nm)
$J$	Inertie totale du moteur ( $\text{kgm}^2$ )
$f$	Coefficient de frottement ( $\text{Nm rad}^{-1}\text{s}$ )

### Acronymes

GPC	Commande Prédicative Généralisée (« Generalized Predictive Control »)
CARIMA	« Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average »
LMI	Inégalité matricielle linéaire (« Linear Matrix Inequality »)
RST	Régulateur polynomial équivalent de la loi GPC
CRHPC	« Constrained Receding Horizon Predictive Control »
E/S	Entrée/Sortie
PID	Proportionnel Intégral Dérivé (« Proportional Integral Derivative »)
QP	Programmation quadratique (« Quadratic Programming »)
SISO	Une entrée/une sortie (« Single Input/Single Output »)
CDFO	Commande Directe de Flux Orientée
MLI	Modulation de Largeur d'Impulsion
LFT	« Linear Fractional Transformation »

# Introduction Générale

## 1.1. Contexte

Ces travaux de thèse se situent à l'intersection de deux axes importants parmi l'ensemble des structures de commande : la commande prédictive et la commande robuste. Ces deux domaines ont démontré leur potentiel et ont au fil des années suscité un intérêt croissant de la part du milieu industriel et de la recherche. L'efficacité de la commande prédictive s'est illustrée lors de nombreuses applications industrielles, pour les quelles cette loi de commande a été appliquée à plusieurs classes de systèmes : mono-variables et multi-variables, linéaires et non-linéaires, hybrides, instables, à non-minimum de phase ou à retard. Toutes ces applications s'avèrent performantes grâce aux particularités de la commande prédictive :

- l'utilisation des informations issues d'un modèle (simple et approprié) du système à régler.
- la minimisation d'un critère de performance sur un horizon fini de prédiction, afin de maintenir la sortie du système la plus proche possible de la référence souhaitée, en tenant compte de contraintes éventuelles sur le système.

Grâce à sa simplicité d'implantation et aux performances obtenues, la commande prédictive figure parmi les techniques de commande les plus utilisées dans le milieu industriel, en particulier lorsqu'elle s'applique à des systèmes avec une trajectoire de référence connue à l'avance, induisant alors un caractère anticipatif. Cet ensemble (anticipation, critère de performance, prise en compte de contraintes) fait que la commande prédictive induit globalement de meilleures performances que celles issues de stratégies de commande plus classiques (régulateur PID, placement de pôles ...).

Même si l'un des points forts de la commande prédictive réside dans sa facilité à prendre en compte les contraintes, les travaux de thèse se sont focalisés sur les perspectives en termes de robustification des lois de commande prédictive face à plusieurs type d'incertitudes en respectant certaines spécifications de performance nominale, sans faire intervenir de contraintes.

La littérature fournit de nombreuses méthodes qui développent les structures de commande prédictive généralisée permettant la prise en compte de contraintes, de type égalité ou inégalité.

Elle répondait ainsi au besoin d'améliorer les performances en tenant compte explicitement de contraintes sur le système, soit en contraignant la sortie sur un horizon donné, soit en définissant des domaines de variations pour la sortie ou la commande. Dans notre thèse pour notre problème de commande prédictive sous contraintes on a utilisé les inégalités matricielles linéaires (LMI), Cet outil est l'étude d'un problème d'optimisation convexe de la formulation des inégalités ainsi que la solution du problème de commande.

Le succès de LMI vient du développement des méthodes dites des points intérieurs (interior point methods) qui permettent de résoudre des problèmes de manière efficace. En général, les inégalités Matricielles Affines ou LMI prennent une place de plus en plus importante dans les méthodes modernes de l'automatique. De nombreux résultats antérieurs trouvent une formulation LMI et ce formalisme permet aussi de résoudre de nouveaux problèmes qui n'avaient pas trouvé jusqu' alors de solutions.

Quant à la robustification des commandes prédictives, la plupart des méthodes que l'on trouve actuellement dans la littérature concernent la robustification d'une commande prédictive sous contraintes. Dans ce type de commande, on effectue une optimisation à chaque période d'échantillonnage, afin de minimiser un critère, tout en respectant certaines contraintes au niveau de l'entrée, la sortie et l'état du système. Cela donne comme résultat un régulateur non linéaire et variant dans le temps. Pour robustifier ce type de régulateur, plusieurs solutions existent parmi ces méthodes la robustification de la commande prédictive par la paramétrisation de Youla. Le principe de cette méthode est résumé ci-dessous.

La présentation détaille une méthode de robustification de la commande prédictive sous contraintes par la double paramétrisation de Youla, s'appuyant sur une approche d'optimisation convexe. La paramétrisation de Youla, qui paramétrise tous les correcteurs stabilisants d'une structure asservie, permet d'exprimer les critères et contraintes de type fréquentiel ou temporel par des fonctions convexes en le paramètre de Youla. L'approche présentée consiste à trouver le paramètre maximisant la robustesse dans une gamme de fréquences donnée, tout en respectant un gabarit temporel pour la réponse à une perturbation. Elle permet dès lors de prendre en compte de nouvelles contraintes ou nouveaux objectifs en modifiant les polynômes d'un correcteur GPC initialement calculé.

## **1.2. But du projet**

Le but de notre travail est axé sur l'utilisation de la double paramétrisation de Youla pour la robustification de la commande prédictive généralisée GPC sous contraintes mises sous forme

LMI. La robustification d'une loi prédictive présentée dans ce travail a pour objectif la synthèse d'un correcteur invariant, permettant d'assurer la stabilité et la performance de la loi de commande face à des perturbations extérieures agissant sur le système.

Dans la première partie, après l'étude de la Commande Prédictive Généralisée GPC, un correcteur polynomial *RST* initial et invariant est synthétisé par les paramètres de réglage ( $N_1, N_2, N_u$  et  $\lambda$ ) de la commande prédictive avec des contraintes sur la sortie, la commande et l'incrément de commande mises sous forme LMI. Ce correcteur est robustifié par le premier paramètre de Youla face aux bruits de mesures et des incertitudes additives non structurées.

Dans la seconde partie, pour augmenter la marge de robustesse du second correcteur dans une gamme de fréquence donnée, en utilisant pour la deuxième fois la paramétrisation de Youla pour avoir un correcteur robustifié plus performant, cette méthode consiste à trouver les nouveaux paramètres maximisant la robustesse dans une gamme de fréquences, tout en respectant les contraintes fréquentielles et temporelles.

### **1.3. Organisation de la thèse**

Cette thèse est divisée en quatre chapitres. Le premier chapitre comporte quelques définitions et notions de base de la commande prédictive généralisée, et le correcteur *RST* polynomial résultant, s'intéresse ensuite à la prise en compte de contraintes, terminales ou de type inégalité, au sein de l'algorithme GPC. Le deuxième chapitre présente le cœur de notre travail, à savoir la méthode proposée pour la robustification des lois de commande GPC basée sur la double paramétrisation de Youla. Les deux chapitres précédents ont pour but de préciser les bases théoriques nécessaires pour la suite de ce mémoire. Le troisième chapitre est consacré sur la méthodologie de robustification développée, en utilisant la double paramétrisation de Youla. Le quatrième chapitre présente une application de la méthode de robustification sur un processus. Voici, plus en détail, un résumé des aspects examinés dans chaque chapitre.

#### **Chapitre 1. La commande prédictive sous contraintes**

Ce chapitre présente la commande GPC. On introduit la structure du correcteur *RST* polynomial obtenu et les méthodes utilisées dans la littérature pour améliorer la robustesse de ce type de correcteur. Des lois de commande prédictive sont progressivement élaborées et testées, en commençant par la stratégie sans contraintes, puis avec contraintes égalité et en analysant ensuite les conséquences de la présence de contraintes générales sur la commande ou sur la sortie prédite.

## **Chapitre 2. La double paramétrisation de Youla**

Ce chapitre constitue le cœur du travail, détaillant la mise en œuvre de la double paramétrisation de Youla, ses principes et propriétés. Les contributions de ce chapitre sont surtout de nature algorithmique, développant la méthodologie de robustification de correcteur prédictive sous contraintes.

## **Chapitre 3. Formulation convexe des spécifications**

Ce chapitre se penche sur la commande prédictive sous contraintes en présence de perturbations, examinant alors la problématique des lois prédictives robustes. Les formulations permettant l'implémentation en tant que problèmes d'optimisation convexe. Ensuite, on définit les spécifications formulées pour robustifier un correcteur initial puis la transformation du problème en un problème d'optimisation convexe. L'étape suivante consiste à élaborer la méthode de résolution par programmation linéaire.

## **Chapitre 4. Application de la stratégie de robustification sur processus**

La méthode de robustification de correcteur prédictive par la double paramétrisation de Youla appliquée et développée à la Commande Directe de Flux Orientée (CDFO) du moteur à induction (asynchrone) à double alimentation (MADA) avec un Contrôleur prédictive. Notre but est de rendre la commande de vitesse robuste aux variations des paramètres. La variation des paramètres du moteur lors du fonctionnement dégrade les performances des contrôleurs. L'utilisation de la méthode de robustification par la double paramétrisation de Youla fournit une très bonne performance pour l'opération de moteur et la robustesse de la loi de commande en dépit de perturbations.

## Chapitre 1

### La Commande prédictive sous contraintes

I.1. Introduction .....	08
I.2. Algorithme GPC .....	08
I.3. Régulateur polynomial équivalent.....	11
I.4. Choix des paramètres du GPC.....	11
I.5. Rôle du polynôme $C$ .....	12
I.6. La Commande Prédictive sous Contraintes .....	15
I.7. Exemple : Application sur un moteur asynchrone .....	23
I.8. Conclusion .....	26

## I.1. Introduction

Ce chapitre a pour but dans un premier temps de rappeler rapidement les grandes idées de la commande prédictive généralisée (GPC), les étapes aboutissant à la structure du régulateur équivalent polynomial et les notations utilisées par la suite.

La commande prédictive généralisée (GPC) a été développée par David Clarke et al dans les années 80. C'est en 1985 que D.Clarke et al présentent la première version de la Commande Prédictive Généralisée (GPC). Il faut attendre 1987, pour voir publier les premiers résultats obtenus par J.Richalet et al. Sur des systèmes électro-mécaniques rapides, tels que des commandes d'axes d'un robot.

Ce premier chapitre permettra également de développer des structures de commande prédictive généralisée permettant la prise en compte de contraintes, de type égalité ou inégalité, Mise sous forme LMI.

## I.2. Algorithme GPC

La philosophie de la commande prédictive généralisée se base sur quatre grandes idées : création d'un effet anticipatif par exploitation de la trajectoire à suivre dans le futur, définition d'un modèle numérique de prédiction, minimisation d'un critère quadratique à horizon fini, principe de l'horizon fuyant [2],[3]. Le modèle numérique de prédiction est classiquement défini par fonction de transfert entrée/sortie. Le modèle est représenté sous forme CARIMA (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average) :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta(q^{-1})}\xi(t) \quad (1.1)$$

$u(t)$ ,  $y(t)$  et  $\xi(t)$  sont respectivement l'entrée, la sortie et le signal de perturbation du système. Le polynôme  $C$  modélise l'influence du bruit sur le système. L'introduction de  $\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$  dans le modèle de bruit assure une action intégrale dans le correcteur et permet, donc, d'annuler toute erreur statique vis-à-vis d'une entrée ou d'une perturbation en échelon. L'utilisation de ce modèle de perturbation est en fait une conséquence de la présence de perturbations de charge en échelon dans de nombreux processus industriels, celui-ci garantissant donc un comportement avec une erreur statique nulle face aux perturbations considérées. Ceci est une conséquence directe du principe du modèle interne. Ce principe dit que pour contrôler un système avec des perturbations instables, la dynamique de la perturbation doit apparaître dans la dynamique du régulateur. Ce modèle CARIMA est représenté Figure 1.1.

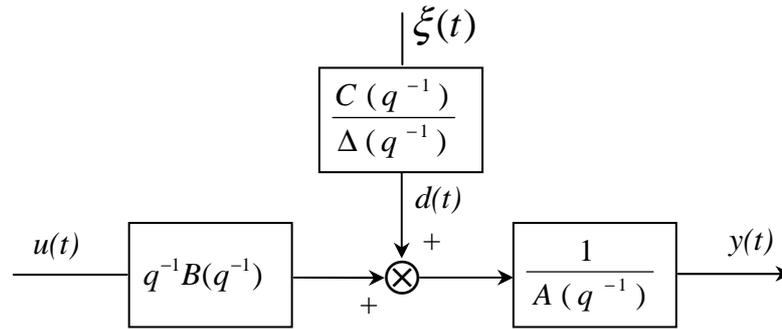


Figure 1.1 : Modèle CARIMA

$A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  et  $C(q^{-1})$  sont des polynômes dans l'opérateur retard  $q^{-1}$ , définis par :

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \\ C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \end{cases} \quad (1.2)$$

La sortie prédite  $y(t + j/t)$  est décomposée de façon classique en réponse libre et réponse forcée, incluant une forme polynomiale pour mener à bien la synthèse polynomiale finale, solution unique d'équations de Diophante :

$$y(t + j/t) = \underbrace{\frac{F_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{H_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} \Delta u(t-1)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{G_j(q^{-1}) \Delta u(t + j - 1) + J_j(q^{-1}) \xi(t + j)}_{\text{réponse forcée}} \quad (1.3)$$

avec  $F_j, G_j, H_j, J_j$  polynômes solutions uniques des équations diophantiennes suivantes [27]:

$$\Delta(q^{-1})A(q^{-1})J_j(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) = 1 \quad (1.4)$$

$$G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) = B(q^{-1})J_j(q^{-1})$$

Le prédicteur optimal est enfin défini en considérant que la meilleure prédiction du bruit dans le futur est sa moyenne (supposée nulle ici), soit :

$$\hat{y}(t + j/t) = \frac{F_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + G_j(q^{-1}) \Delta u(t + j - 1) + \frac{H_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} \Delta u(t - 1) \quad (1.5)$$

Si  $C(q^{-1}) = 1$ . On a :

$$\hat{y}(t + j/t) = F_j(q^{-1})y(t) + G_j(q^{-1})\Delta u(t + j - 1) + H_j(q^{-1})\Delta u(t - 1) \quad (1.6)$$

La loi de commande est obtenue par minimisation d'un critère quadratique portant sur les erreurs futures avec un terme de pondération sur la commande :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} \Delta u^2(t+j-1) \quad (1.7)$$

avec  $\Delta u(t+j) = 0$  pour  $j \geq N_u$

Le critère nécessite la définition de quatre paramètres de réglage :

- $N_1$  : horizon de prédiction minimal ;
- $N_2$  : horizon de prédiction maximal ;
- $N_u$  : horizon de prédiction sur la commande ;
- $\lambda$  : coefficient de pondération sur la commande ;

La minimisation du critère mise sous forme matricielle de l'équation de prédiction (1.5) et de la fonction de coût (1.7) :

$$\hat{y} = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(t-1)$$

$$J = [\mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(t-1) - \mathbf{w}]^T [\mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(t-1) - \mathbf{w}] + \lambda \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}}$$

Ce qui conduit à la séquence optimale de commandes futures [37]:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{opt} = -\mathbf{N} \left[ \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(t-1) - \mathbf{w} \right] \quad (1.8)$$

Avec :

$$\mathbf{if} = [F_{N_1}(q^{-1}) \quad \cdots \quad F_{N_2}(q^{-1})]^T \quad \mathbf{w} = [w(t+N_1) \quad \cdots \quad w(t+N_2)]^T$$

$$\mathbf{ih} = [H_{N_1}(q^{-1}) \quad \cdots \quad H_{N_2}(q^{-1})]^T \quad \hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(t+N_1) \quad \cdots \quad \hat{y}(t+N_2)]^T$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\Delta u(t) \quad \cdots \quad \Delta u(t+N_u-1)]^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{N_1}^{N_1} & \mathcal{G}_{N_1-1}^{N_1} & \cdots & \cdots \\ \mathcal{G}_{N_1+1}^{N_1+1} & \mathcal{G}_{N_1}^{N_1+1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{G}_{N_2}^{N_2} & \mathcal{G}_{N_2-1}^{N_2} & \cdots & \mathcal{G}_{N_2-N_u+1}^{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{g}_{N_1} & \mathcal{g}_{N_1-1} & \cdots & \cdots \\ \mathcal{g}_{N_1+1} & \mathcal{g}_{N_1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{g}_{N_2} & \mathcal{g}_{N_2-1} & \cdots & \mathcal{g}_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

Les valeurs  $\{g_i\}$  correspondent aux coefficients de la réponse indicielle du modèle.

Dans la commande prédictive, seule la première valeur de la séquence (1.8) est appliquée au système [21] :

$$u_{opt}(t) = u_{opt}(t-1) - \mathbf{n}_1^T \left[ \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(t-1) - \mathbf{w} \right] \quad (1.9)$$

### I.3. Régulateur polynomial équivalent

Il est enfin possible, à partir de la relation ci-dessus, de déduire la représentation polynomiale du régulateur équivalent, comme indiqué Figure 1.2. Cette structure permet l'implantation de la loi de commande par une simple équation aux différences [1],[3]:

$$S(q^{-1}) \Delta u(t) = -R(q^{-1}) y(t) + T(q^{-1}) w(t + N_2) \quad (1.10)$$

Les trois polynômes prennent la forme suivante :

$$S(q^{-1}) = C(q^{-1}) + \mathbf{n}_1^T \mathbf{ih} q^{-1}$$

$$\text{degré de } S(q^{-1}) = \max(n_c, n_b)$$

$$R(q^{-1}) = \mathbf{n}_1^T \mathbf{if}$$

$$\text{degré de } R(q^{-1}) = \max(n_a, n_c - N_1)$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) \mathbf{n}_1^T [q^{-N_2+N_1} \quad q^{-N_2+N_1+1} \quad \dots \quad 1]^T$$

$$\text{degré de } T(q^{-1}) = n_c + N_2 - N_1$$

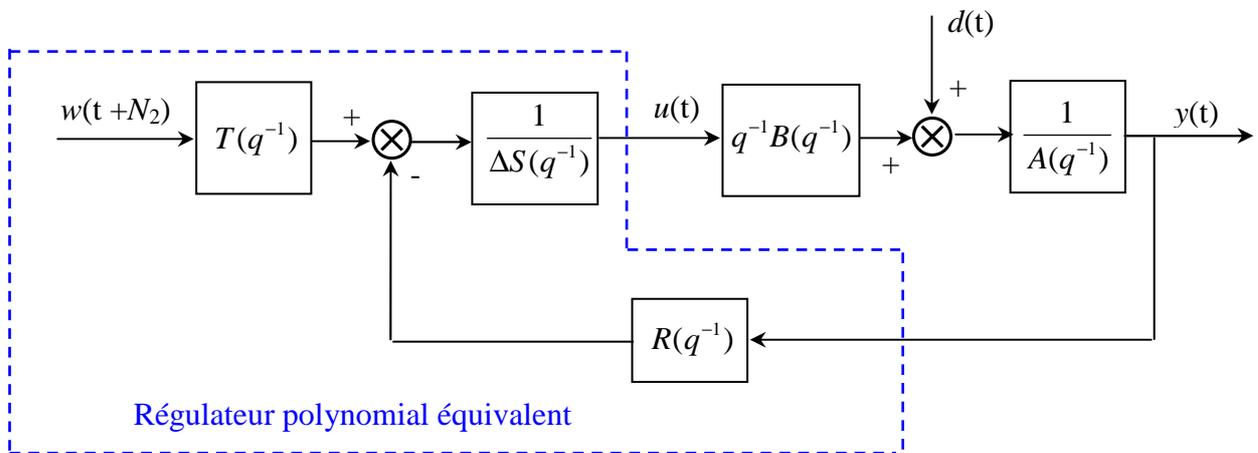


Figure 1.2 : Régulateur polynomial équivalent de la loi GPC

$T$  est volontairement choisi ici causal (puissance de  $q^{-1}$ ), en considérant que le signal de consigne est  $w(t + N_2)$  et non  $w(t)$ .

### I.4. Choix des paramètres du GPC

Ce paragraphe donne maintenant quelques règles pratiques pour guider le choix des quatre paramètres de l'algorithme GPC [3].

#### I.4.1. Choix de l'Horizon minimal $N_1$

Généralement  $N_1 = 1$ , cependant si le retard  $K$  est connu avec exactitude, alors il sera mieux que  $N_1 \geq K$  car sinon il y aura des calculs supplémentaires ou les sorties correspondantes ne peuvent être affectées par la première commande  $\mathbf{u}(t)$ .

#### I.4.2. Choix de l'Horizon maximal $N_2$

En général  $N_2$  doit être plus grand que le degré du polynôme  $B(q^{-1})$  pour inclure toute réponse affectée par la commande courante, cependant on suggère une valeur de  $N_2$  égale au temps de montée du système.

#### I.4.3. Choix de l'Horizon de commande $N_u$

Pour des systèmes simples (stables en boucle ouverte même avec retard et phase non minimale)  $N_u = 1$  donne généralement une commande acceptable. Pour des systèmes complexes une valeur plus élevée de  $N_u$  est mieux appropriée,  $N_u$  dans ce cas est au moins égale au nombre de pôles instables ou mal amortis.

#### I.4.4. Choix du coefficient de pondération $\lambda$

En général, le coefficient de pondération doit être augmenté si plus d'amortissement est jugé nécessaire et vice versa.

Donc, globalement, les paramètres peuvent être pris par défaut comme suit :

$$N_1 = 1$$

$$N_2 = \text{temps de montée du système.}$$

$N_u = 1$ , ce qui pourrait donner des performances acceptables. Pour des applications aux performances élevées, il est recommandable d'augmenter  $N_u$ .

### I.5. Rôle du polynôme $C$

On peut analyser le rôle du polynôme  $C$  de deux façons. Dans le cas où l'on connaît le polynôme  $C$  du système ou une estimation du bruit agissant sur le système, le polynôme  $C$  sert à réaliser une prédiction optimale de la sortie dans le sens de la minimisation de la variance. Dans ce cas, on peut voir  $C$  comme un filtrage, permettant d'atténuer l'erreur de prédiction. D'autre part, on peut se servir de  $C$  comme un paramètre du système servant à robustifier la commande.  $C$  peut être vu, alors, comme un observateur ou un préfiltrage du système. Dans ce cas, on perd l'optimalité dans la prédiction, mais on augmente la robustesse [1],[42].

### I.5.1. Rôle de filtrage

L'expression de la prédiction à  $j$  pas (1.5) peut s'écrire :

$$\hat{y}(t+j/t) = F_j(q^{-1}) \frac{y(t)}{C(q^{-1})} + G_j \Delta u(t+j-1) + H_j(q^{-1}) \frac{\Delta u(t-1)}{C(q^{-1})} \quad (1.11)$$

$C$  a un effet de filtrage sur " $y$ " et " $u$ ". On peut dire que la prédiction effectuée avec la méthode de GPC est réalisée à partir des données filtrées de " $y$ " et " $u$ ". De cette façon, on donne plus ou moins d'importance à une certaine bande du spectre des données. Si, par exemple, on sait que l'on a un bruit en haute fréquence ou que le modèle ne représente pas bien les dynamiques à haute fréquence, on accordera moins de confiance aux données mesurées à haute fréquence et, dans ce cas, on les fera intervenir dans la structure avec un poids moindre.

Considérons à titre d'exemple un système avec un bruit de mesure à haute fréquence  $v(t)$ . On peut le représenter par le schéma de la Figure 1.3 :

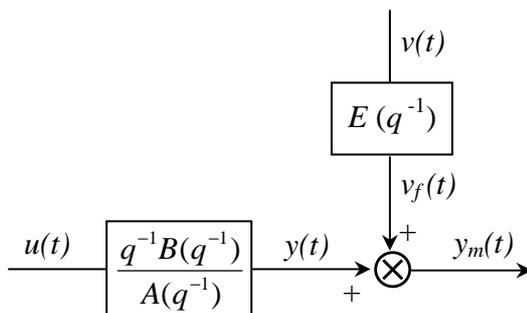


Figure 1.3 : Système avec bruit à haute fréquence en sortie

Ce système se traduit par le modèle CARIMA de la Figure 1.4.

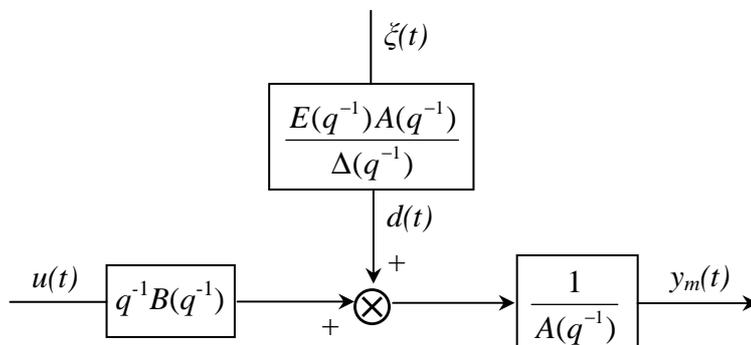


Figure 1.4 : Modèle CARIMA du Système avec bruit de mesure

## I.5.2. Rôle de robustification de la loi de commande

### a. Robustesse en stabilité

Considérons le système de la Figure 1.5.

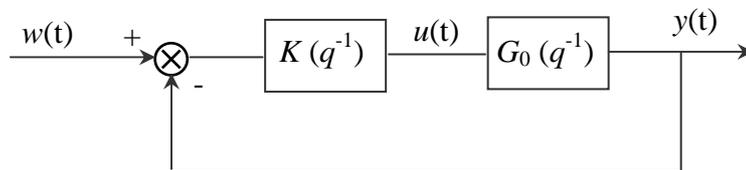


Figure 1.5 : Système bouclé pour analyse de la robustesse

On notera  $G(q^{-1})$  la transmittance modélisant le système et  $G_0(q^{-1})$  le système réel. Le théorème 1.1 basé sur le critère de stabilité de Nyquist, donne les conditions de stabilité du système bouclé.

### **Théorème 1.1**

Le système de la Figure 1.5 est stable si :

- Le système bouclé avec  $G(q^{-1})$  est stable.
- $G(q^{-1})$  et  $G_0(q^{-1})$  ont le même nombre de pôles à l'extérieur du cercle unité.
- Si  $G_0(q^{-1})$  a des pôles sur le cercle unité, ceux-ci sont aussi pôles de  $G(q^{-1})$ .
- La condition suivante est satisfaite pour  $\forall \omega \in [0, \pi]$ .

$$| G(e^{-j\omega}) K(e^{j\omega}) - G_0(e^{-j\omega}) K(e^{j\omega}) | < | 1 + G(e^{-j\omega}) K(e^{j\omega}) | \quad (1.12)$$

Cette condition peut s'interpréter graphiquement sur le diagramme de Nyquist, comme montré Figure 1.6.

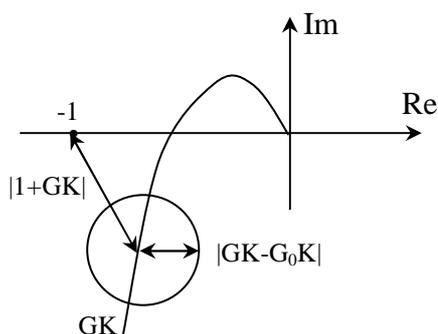


Figure 1.6 : Interprétation de la condition de robustesse en stabilité

La stabilité est garantie si, pour tout point du lieu de Nyquist nominal  $G(e^{-j\omega}) K(e^{j\omega})$ , le cercle de centre  $GK$  et de rayon  $|GK - G_0K|$  ne contient pas le point (-1) [42].

### b. Condition de stabilité dans le cas du correcteur GPC

Appliquons la condition précédente relation (1.12) au système de la Figure 1.2. On a :

$$\left| \frac{q^{-1}B(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})S(q^{-1})} - \frac{q^{-1}B_0(q^{-1})R(q^{-1})}{A_0(q^{-1})\Delta(q^{-1})S(q^{-1})} \right| < \left| 1 + \frac{q^{-1}B(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})S(q^{-1})} \right|$$

En considérant (1.12), il vient :

$$\left| \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} - \frac{B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} \right| < \left| \frac{P_c(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})} \right| = B_r \quad (1.13)$$

plus la partie droite de l'inégalité sera grande, plus notre système sera robuste face aux incertitudes de modèle. Ce transfert est donc une marge de robustesse du système, que l'on va nommer  $B_r$ .

En considérant la relation (1.13),  $P_c(q^{-1}) = C(q^{-1})A_c(q^{-1})$  on obtient :

$$B_r = \left| \frac{P_c(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})} \right| = \left| \frac{A_c(q^{-1})C(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})} \right| \quad (1.14)$$

$A$  et  $A_c$  sont fixés respectivement par le modèle et les paramètres de réglage de GPC ( $N_1, N_2, N_u, \lambda$ ). Il nous reste  $C$  pour augmenter la robustesse.

#### Remarque :

En basses fréquences, cette quantité  $B_r$  est égale au gain du modèle. En effet :

$$\left| \frac{P_c(1)}{A(1)R(1)} \right| = \left| \frac{B(1)T_1(1)C(1)}{A(1)R(1)} \right| = \left| \frac{B(1)T(1)}{A(1)R(1)} \right| = \left| \frac{B(1)}{A(1)} \right|$$

## I.6. La Commande Prédictive sous Contraintes

La présence de contraintes est un problème classique au sein des systèmes asservis. Elles peuvent être imposées par des saturations, des limitations induites par les actionneurs ou encore des spécifications sur la grandeur de sortie ou d'état du système. Le but est alors de pallier les dégradations que pourrait entraîner la présence de ces contraintes, en les prenant directement en compte lors de la synthèse du régulateur prédictif, la commande prédictive permet de les formaliser explicitement dans la fonction de coût.

Pour cela, un axe privilégié de recherche consiste dans un premier temps à identifier tous les types de contraintes susceptibles d'intervenir, à les regrouper en une formulation unifiée permettant un traitement algorithmique adapté. Dans une seconde phase, il devient nécessaire de modifier les critères de minimisation classiques de façon à inclure ces contraintes.

### I.6.1. Formulation unifiée des contraintes

Une première possibilité consiste à envisager le cas de contraintes terminales (ou encore contraintes de type égalité). Dans cette configuration, le critère de coût de l'algorithme GPC (1.7) doit être minimisé sachant que l'on impose à la sortie de coïncider avec la consigne pendant un intervalle supplémentaire de «  $m$  » périodes d'échantillonnage après l'horizon  $N_2$ . Cette stratégie, connue dans la littérature sous le nom de Constrained Receding Horizon Predictive Control, se traduit par la condition suivante [26] :

$$\hat{y}(t + N_2 + j) = w(t + N_2) \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, m \quad (1.15)$$

Avec  $\hat{y}$  sortie prédite et  $m$  nombre de contraintes terminales. Les prédicteurs sous forme matricielle s'expriment de façon similaire aux relations précédentes :

$$\hat{y}_c = G_c \tilde{u} + i f_c(q^{-1}) y(t) + i h_c(q^{-1}) \Delta u(t-1) \quad (1.16)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \hat{y}_c &= [\hat{y}(t + N_2 + 1) \dots \hat{y}(t + N_2 + m)]^T \\ i f_c(q^{-1}) &= [F_{N_2+1}(q^{-1}) \dots F_{N_2+m}(q^{-1})]^T \\ i h_c(q^{-1}) &= [H_{N_2+1}(q^{-1}) \dots H_{N_2+m}(q^{-1})]^T \\ G &= \begin{bmatrix} g_{N_2+1}^{N_2+1} & g_{N_2}^{N_2+1} & \dots & \dots \\ g_{N_2+2}^{N_2+2} & g_{N_2}^{N_2+2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N_2+m}^{N_2+m} & g_{N_2+m-1}^{N_2+m} & \dots & g_{N_2-Nu+m+1}^{N_2+m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tenir compte des contraintes nécessite donc l'ajout de la relation:

$$G_c \tilde{u} = w_c - \underbrace{i f_c(q^{-1}) y(t) + i h_c(q^{-1}) \Delta u(t-1)}_{f_c} \quad (1.17)$$

Avec :

$$\begin{aligned} w_c &= [w(t+N_2) \dots w(t+N_2+m)]^T \\ f_c &= [f_c(t+N_2+1) \dots f_c(t+N_2+m)]^T \end{aligned}$$

D'autres contraintes peuvent également s'envisager, de type inégalité (ou encore appelées contraintes dures), permettant de modéliser des saturations au niveau du signal de commande, ou de l'incrément de ce signal, ou encore de la sortie.

**i. Limitation du signal de commande**

$$u_{\min} < u(t+j-1) < u_{\max} \quad \text{pour } j = 1, \dots, N_u \quad (1.18a)$$

Sachant que  $u(t+j-1) = u(t-1) + \sum_{j=1}^j \Delta u(t+j-1)$ , ces contraintes se regroupent sous la forme matricielle suivante [28]:

$$\mathbf{u}_{\min} < \mathbf{L}_{N_u} \tilde{\mathbf{u}} < \mathbf{u}_{\max} \quad (1.18b)$$

Avec :

$$\left( \begin{array}{l} \mathbf{L}_{N_u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrice triangulaire inf erieure de dimension } N_u \\ \mathbf{u}_{\min} = [u_{\min} - u(t-1), \dots, u_{\min} - u(t-1)]^T \\ \mathbf{u}_{\max} = [u_{\max} - u(t-1), \dots, u_{\max} - u(t-1)]^T \end{array} \right.$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_{N_u} \tilde{\mathbf{u}} < \mathbf{u}_{\max} \\ -\mathbf{L}_{N_u} \tilde{\mathbf{u}} < -\mathbf{u}_{\min} \end{array} \right. \quad (1.18c)$$

**ii. Limitation de l'incrément de commande :**

$$\Delta u_{\min} < \Delta u(t+j-1) < \Delta u_{\max} \quad \text{pour } j = 1, \dots, N_u \quad (1.19a)$$

Ce qui fournit sous forme matricielle :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\min} < \mathbf{I}_{N_u} \tilde{\mathbf{u}} < \tilde{\mathbf{u}}_{\max} \quad (1.19b)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}_{\min} = [\Delta u_{\min}, \dots, \Delta u_{\min}]^T \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\max} = [\Delta u_{\max}, \dots, \Delta u_{\max}]^T \end{array} \right.$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I}_{N_u} \tilde{\mathbf{u}} < \tilde{\mathbf{u}}_{\max} \\ -\mathbf{I}_{N_u} \tilde{\mathbf{u}} < -\tilde{\mathbf{u}}_{\min} \end{array} \right. \quad (1.19c)$$

$\mathbf{I}_{N_u}$  matrice identité de dimension  $N_u$

**iii. Saturation du signal de sortie**

$$\hat{y}_{\min} < \hat{y}(t+j) < \hat{y}_{\max} \quad \text{pour } j = N_1, \dots, N_2 \quad (1.20a)$$

Ce qui fournit sous forme matricielle :

$$\hat{y}_{\min} < \mathbf{G}_{uc} \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{uc} < \hat{y}_{\max} \quad (1.20b)$$

Avec :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{y}}_{\min} = [\hat{y}_{\min}, \dots, \hat{y}_{\min}]^T \\ \tilde{\mathbf{y}}_{\max} = [\hat{y}_{\max}, \dots, \hat{y}_{\max}]^T \end{cases}$$

$$\mathbf{f}_{uc} = \mathbf{i}f_{uc}(q^{-1}) \mathbf{y}(t) + \mathbf{i}h_{uc}(q^{-1}) \Delta \mathbf{u}(t-1)$$

soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{uc} \tilde{\mathbf{u}} &< \hat{\mathbf{y}}_{\max} - \mathbf{f}_{uc} \\ -\mathbf{G}_{uc} \tilde{\mathbf{u}} &< -\hat{\mathbf{y}}_{\min} + \mathbf{f}_{uc} \end{aligned} \quad (1.20c)$$

On constate dès lors que l'ensemble des contraintes représentées par les équations (1.17), (1.18c), (1.19c), et (1.20c) peut se structurer sous un formalisme unique facilement exploitable par la suite par les algorithmes de minimisation :

$$\mathbf{A} \tilde{\mathbf{u}} \begin{cases} = \\ \leq \end{cases} \mathbf{b} \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{A}$  est une combinaison des matrices  $\mathbf{I}_{N_u}$ ,  $\mathbf{L}_{N_u}$ ,  $\mathbf{G}_{uc}$ ,  $\mathbf{G}_c$ , et  $\mathbf{b}$  un vecteur constitué des différentes contraintes présentes dans le système.

### I.6.2 Minimisation du critère prédictif sous contraintes terminales

Lorsque le système n'est soumis qu'à des contraintes terminales (et plus généralement de type égalité), la minimisation du critère ne nécessite pas le recours à des algorithmes lourds de programmation quadratique. Dans ce cas, des techniques de multiplicateurs de Lagrange sont tout à fait applicables. Ainsi, la solution de l'algorithme CRHPC (GPC sous contraintes terminales), issue de la minimisation des relations (1.8) et (1.17), est donnée par la séquence de commandes futures [27]:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{M}_{uc} (\mathbf{w}_{uc} - \mathbf{i}f_{uc}(q^{-1}) \mathbf{y}(t) - \mathbf{i}h_{uc}(q^{-1}) \Delta \mathbf{u}(t-1)) + \mathbf{M}_c (\mathbf{w}_c - \mathbf{i}f_c(q^{-1}) \mathbf{y}(t) - \mathbf{i}h_c(q^{-1}) \Delta \mathbf{u}(t-1)) \quad (1.22)$$

Avec :

$$\mathbf{H} = \left| \mathbf{G}_{uc}^T + \lambda \mathbf{I}_{N_u} \right|$$

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T (\mathbf{G}_c \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T)^{-1}$$

$$\mathbf{Q} = \left| \mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T (\mathbf{G}_c \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T)^{-1} \mathbf{G}_c \mathbf{H}^{-1} \right| = \left[ \mathbf{I}_{N_u} - \mathbf{M}_c \mathbf{G}_c \right] \mathbf{H}^{-1}$$

$$\mathbf{M}_{uc} = \mathbf{Q} \mathbf{G}_{uc}^T$$

L'intérêt de cette structure est de conserver une structure de régulateur sous forme RST, et donc une programmation de la loi de commande par l'intermédiaire de l'équation aux différences (1.10). En effet à partir de la relation (1.22), et selon le principe de l'horizon fuyant, seule la première valeur de la séquence de commande est appliquée au système. On déduit la structure du régulateur [34]:

$$\begin{aligned} S(q^{-1}) &= 1 + m_{uc1}^T \text{ih}_{uc}(q^{-1}) q^{-1} + m_{c1}^T \text{ih}_c(q^{-1}) q^{-1} \\ R(q^{-1}) &= m_{uc1}^T \text{if}_{uc}(q^{-1}) + m_{c1}^T \text{if}_c(q^{-1}) \\ T(q) &= m_{uc1}^T [q^{N_2} \dots q^{N_2}]^T + m_{c1}^T [q^{N_2} \dots q^{N_2}]^T \end{aligned} \quad (1.23)$$

$m_{uc1}^T$  et  $m_{c1}^T$  sont les premières lignes des matrices  $m_{uc}$  et  $m_c$  respectivement. Les degrés de ces polynômes sont identiques à ceux déterminés lors de la commande GPC.

### I.6.3 Minimisation du critère prédictif sous contraintes de type inégalité

Lorsque le système se trouve soumis à un ensemble de contraintes regroupées sous la forme synthétique de la relation (1.21), la simple minimisation du critère GPC (1.7) pour lequel existait une solution explicite, se transforme désormais en un problème de programmation quadratique beaucoup plus délicat à résoudre. Les contraintes demeurent malgré tout linéaires, nous permettant d'utiliser des techniques plus difficiles à mettre en œuvre dans le cas général. La forme matricielle du critère (1.14) peut se reformuler de la façon suivante [27]:

$$J = \tilde{u}^T H \tilde{u} + 2c^T \tilde{u} + e^T e \quad (1.24)$$

Avec :

$$H = (G_{uc}^T G_{uc} + \lambda I_{Nu})$$

$$c = G_{uc}^T e$$

$$e = f_{uc} - w_{uc}$$

### I.6.4. Application du Formalisme LMI

On a adopté le formalisme LMI comme outil de minimisation. Cette démarche est détaillée dans les paragraphes ci-dessous.

#### a. Formalisme LMI

Une inégalité matricielle linéaire (notée par la suite LMI) peut se formaliser par la relation :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i < 0 \quad (1.25)$$

Où  $x_1, x_2, \dots, x_n$  représentent les coordonnées de l'optimum  $x$  recherché,  $F_j = F_j^T \in R^{P \times P}$  des matrices données, et  $F(x) < 0$  signifie que  $F(x)$  est définie négative. Un ensemble d'inégalités matricielles linéaires :  $F_1(x) < 0, F_2(x) < 0, \dots, F_k(x) < 0$

Peut dès lors se traduire par une seule inégalité matricielle linéaire [33],[34]:

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_k(x) \end{bmatrix} = \text{diag}(F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)) < 0 \quad (1.26)$$

Aucune distinction ne sera donc faite par la suite entre un ensemble d'inégalités matricielles Linéaires et une unique LMI.

À partir de ce formalisme, et de façon primordiale pour notre problème d'optimisation (1.24), et (1.21) des inégalités quadratiques convexes peuvent se transformer en inégalités matricielles linéaires grâce au lemme de Schur.

Soit  $Q(x)=Q(x)^T$ ,  $R(x)=R(x)^T$ , et  $S(x)$  présentant une dépendance affine vis à vis de «  $x$  ».

Alors la LMI :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.27)$$

est équivalente aux inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{cases} R(x) < 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} Q(x) < 0 \\ R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1}S(x) < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Ce formalisme permet d'aborder la problématique de faisabilité, à savoir trouver le domaine admissible satisfaisant les inégalités. Il permet aussi de traiter les problèmes d'optimisation linéaire (ce qui constitue avant tout l'objet de ce paragraphe), c'est à dire minimiser une fonction de coût linéaire sous contraintes LMI :

$$\text{Minimiser} \quad \mathbf{c}^T x \quad (1.29)$$

Sous la contrainte  $F(x) < 0$

$F$  : est une matrice symétrique dépendant de manière affine de la variable «  $x$  », «  $\mathbf{c}$  » est un vecteur réel. La solution est alors donnée par la valeur de «  $x$  » incluse dans le domaine admissible, et minimisant le terme linéaire «  $\mathbf{c}^T x$  ». Des solveurs ont été développés pour

permettre la résolution de ces deux types de problèmes ; ainsi une valeur de «  $x$  » admissible est calculée de façon itérative, le test d'arrêt se basant sur la précision recherchée pour cette valeur.

### b. Transformation sous forme LMI

Un problème d'optimisation par LMI nécessite d'après la relation précédente (1.29) Que le problème initial soit restructuré de façon à faire intervenir une fonction de coût linéaire et des contraintes de type inégalité strictes. Cette réécriture de l'objectif de commande impose Alors les étapes suivantes :

- i. Transformation de la fonction de coût quadratique
- ii. Formulation des contraintes de type égalité
- iii. Formulation des contraintes de type inégalité
- iv. Modification des expressions matricielles non diagonales de certaines contraintes envisagent successivement ces quatre aspects.

**i.** De façon générale, la minimisation d'une fonction quadratique convexe  $f(x)$  peut se traduire de façon équivalente par la stratégie de minimisation suivante :

$$\text{Minimiser } \gamma \text{ et trouver un } x \text{ admissible satisfaisant } f(x) < \gamma \quad (1.30)$$

Cette inégalité stricte, mais non linéaire, se transforme alors simplement par le lemme de Schur en une LMI.

Dans le cas du GPC, la relation (1.24) devient alors :

$$\text{Minimiser } \gamma \text{ et trouver un } \tilde{u} \text{ admissible satisfaisant } j(\tilde{u}) < \gamma \quad (1.31)$$

Ce qui se traduit par le problème d'optimisation [27]:

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser } \gamma \in R^+ \\ &\text{Selon } \begin{bmatrix} 2c^T \tilde{u} + e^T e \gamma & \tilde{u}^T \\ \tilde{u} & -H^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{et} \quad -H^{-1} < 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

qui correspond parfaitement au formalisme LMI, avec :

$$\begin{cases} Q(\tilde{u}) = 2c^T \tilde{u} + e^T e - \gamma \\ R(\tilde{u}) = -H^{-1} \\ S(\tilde{u}) = \tilde{u}^T \end{cases}$$

**ii.** Les contraintes terminales (1.17) peuvent se reformuler en termes d'optimisation d'une borne supérieure, s'écrivant alors sous une forme compatible avec la structure LMI :

Minimiser  $\varphi \in R^+$

$$\text{Selon } \begin{cases} G_c \tilde{u} - (w_c - f_c) < \varphi \mathbf{1}_m \\ -G_c \tilde{u} + (w_c - f_c) < \varphi \mathbf{1}_m \end{cases} \quad (1.33)$$

Avec  $\mathbf{1}_m \in \mathfrak{R}^m$ . de façon pratique, considérer  $\varphi \ll 1$  s'avère suffisant pour assurer l'équivalence entre les relations (1.17) et (1.33) (plutôt que  $\varphi \rightarrow 0$  qui informatiquement n'est pas simple à mettre en œuvre).

**iii-** D'après le paragraphe 1.6, les contraintes de type inégalité (1.18c), (1.19c), et (1.20c) sont déjà sous une forme adaptée :

$$\begin{cases} L_{N_u} \tilde{u} - u_{\max} < 0 \\ -L_{N_u} \tilde{u} + u_{\min} < 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\begin{cases} I_{N_u} \tilde{u} - u_{\max} < 0 \\ -I_{N_u} \tilde{u} + u_{\min} < 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

$$\text{et : } \begin{cases} G_{N_u} \tilde{u} - \hat{y}_{\max} + f_{uc} < 0 \\ -G_{N_u} \tilde{u} + \hat{y}_{\min} - f_{uc} < 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

**iv.** Toutes les contraintes précédentes (1.33), (1.34), (1.35), (1.36) doivent enfin se présenter sous une forme diagonale, définissant ainsi un espace matriciel convexe symétrique, afin d'éviter la définition d'une LMI particulière pour chaque inégalité. A l'issue des quatre étapes précédentes, le problème sous forme finale est alors le suivant [14],[27]:

Minimiser  $\gamma \in R^*$

$$\text{Selon } \begin{bmatrix} 2c^T \tilde{u} + e^T e - \gamma & \tilde{u}^T \\ \tilde{u} & -H^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.37)$$

$$\text{diag} (G_c \tilde{u} - (w_c - f_c) - \alpha \varphi \mathbf{1}_m) < 0$$

$$\text{diag} (-G_c \tilde{u} + (w_c - f_c) - \alpha \varphi \mathbf{1}_m) < 0$$

$$\text{diag} (L_c \tilde{u} - u_{\max}) < 0$$

$$\text{diag} (-L_c \tilde{u} + u_{\min}) < 0$$

$$\text{diag} (I_c \tilde{u} - \tilde{u}_{\max}) < 0$$

$$\text{diag} (-I_c \tilde{u} + \tilde{u}_{\min}) < 0$$

$$\text{diag} (G_c \tilde{u} - (\hat{y}_{\max} + f_{uc_m})) < 0$$

$$\text{diag} (-G_c \tilde{u} + \hat{y}_{\min} + f_{uc_m}) < 0$$

$$\text{diag} (G_c \tilde{u} - (w_c - f_c) - \alpha \varphi \mathbf{1}_m) < 0$$

$$\text{diag} (-G_c \tilde{u} + (w_c - f_c) - \alpha \varphi \mathbf{1}_m) < 0$$

où  $\alpha \ll 1$  est choisie numériquement suffisamment petit.

Finalement, ce problème (1.37) est un problème d'optimisation par LMI de type (1.29) si l'on choisit le vecteur de décision suivant :

$$x = [\tilde{u}, \gamma]^T \quad (1.38)$$

La forme finale utilisée par les solveurs LMI est dès lors :

$$\text{Minimiser } [0, \dots, 0, 1][\tilde{u}, \gamma] \quad (1.39)$$

$$\text{Selon } F(x) < 0$$

où  $F(x)$  caractérise le jeu de contraintes de la formulation (1.37).

### I.7. Exemple : Application sur un moteur asynchrone

Considérons l'application de la technique GPC pour la commande en vitesse d'un moteur asynchrone, similaire à celle présentée dans [3],[36], pour laquelle le modèle, résultat d'une identification, est défini par la fonction de transfert suivante, à la période d'échantillonnage de 5ms

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-1}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{1.344 q^{-1} + 3.04 q^{-2}}{1 - 0.98 q^{-1} - 0.02 q^{-2}} \quad (1.40)$$

Cette fonction correspond à une entrée en tension, exprimée en volts et à une sortie en vitesse exprimée en radians par seconde.

#### a. Avec l'algorithme de GPC

Les résultats de simulation obtenus avec les paramètres de réglage suivant :  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 8$ ,  $N_u = 1$  et  $\lambda = 200$ .

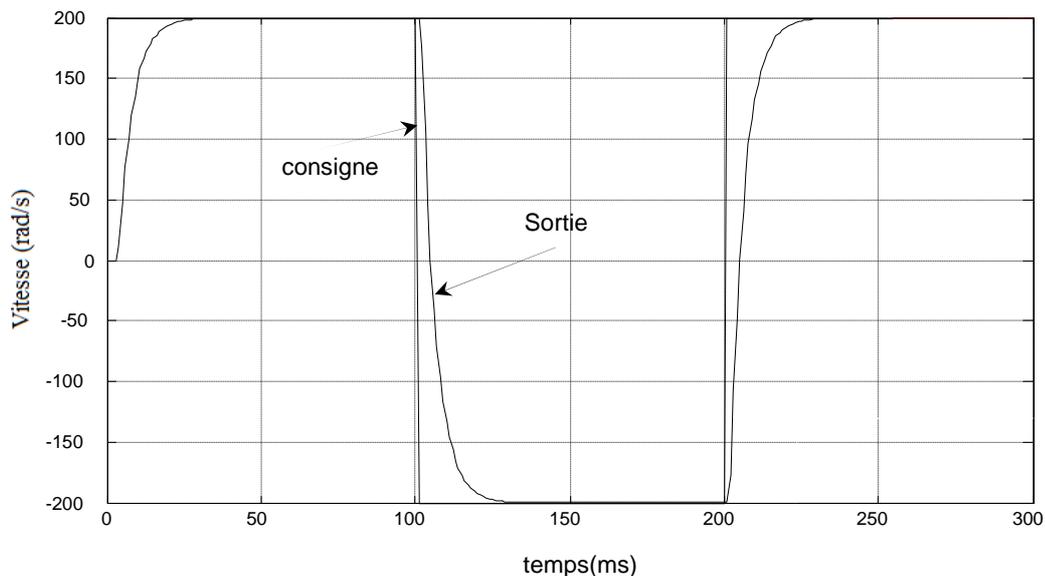


Figure.1.7. Vitesse du moteur asynchrone (GPC)

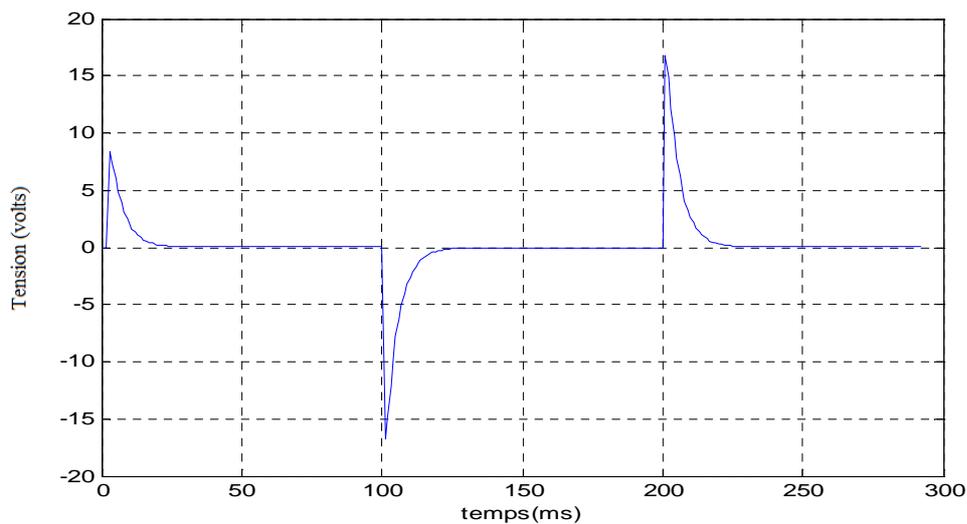


Figure.1.8. Commande couple appliquée au moteur (GPC)

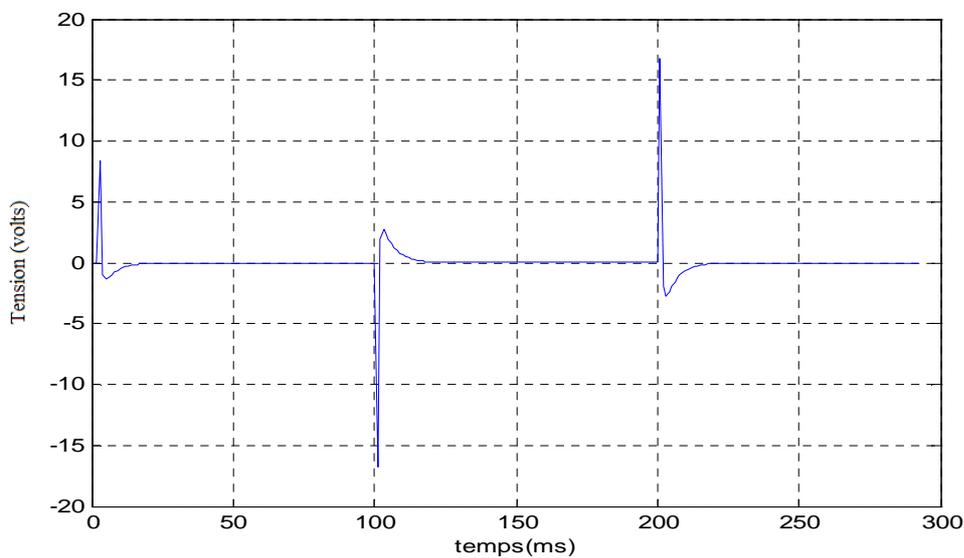


Figure.1.9. Incrément de commande (GPC)

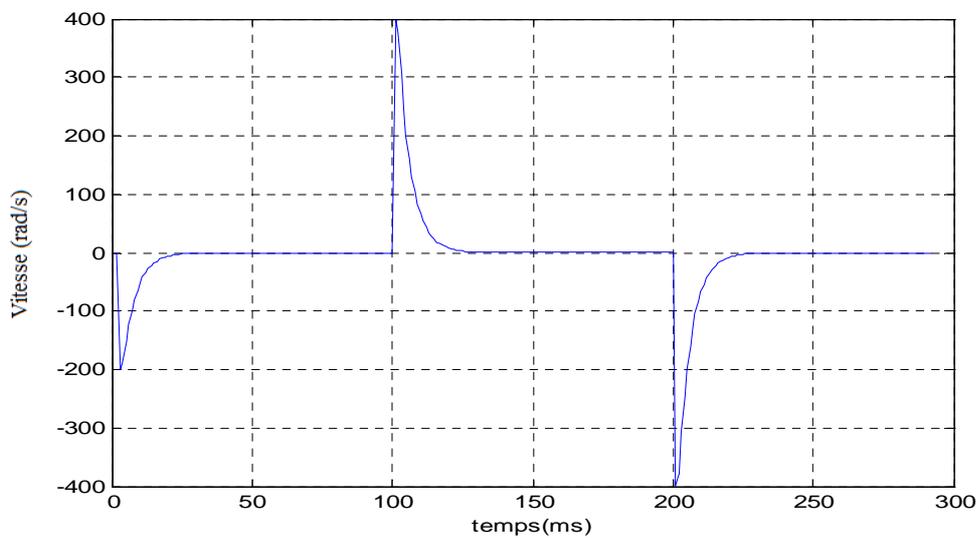


Figure.1.10. Erreur de vitesse (GPC)

Les courbes obtenues en simulation montrent la réponse d'un système stable commandé par la commande GPC.

### b. Avec l'algorithme de GPCC-LMI

Le but de cette partie est de tester l'impact de la structure prédictive appliquée précédemment à laquelle on a ajouté la prise en compte des contraintes terminales, et des contraintes inégalité (dures) avec l'approche LMI, on introduit ces contraintes sur le signal de commande ( $-6 \leq u \leq 6$ ), et l'incrément de commande ( $-0.6 \leq \Delta u \leq 0.6$ ), puis de la comparer à la structure GPC mise en œuvre précédemment.

Les paramètres de simulations :  $N_1 = 1$  ;  $N_2 = 8$  ;  $N_u = 1$  ;  $\lambda = 200$  ;  $m = 2$  ;

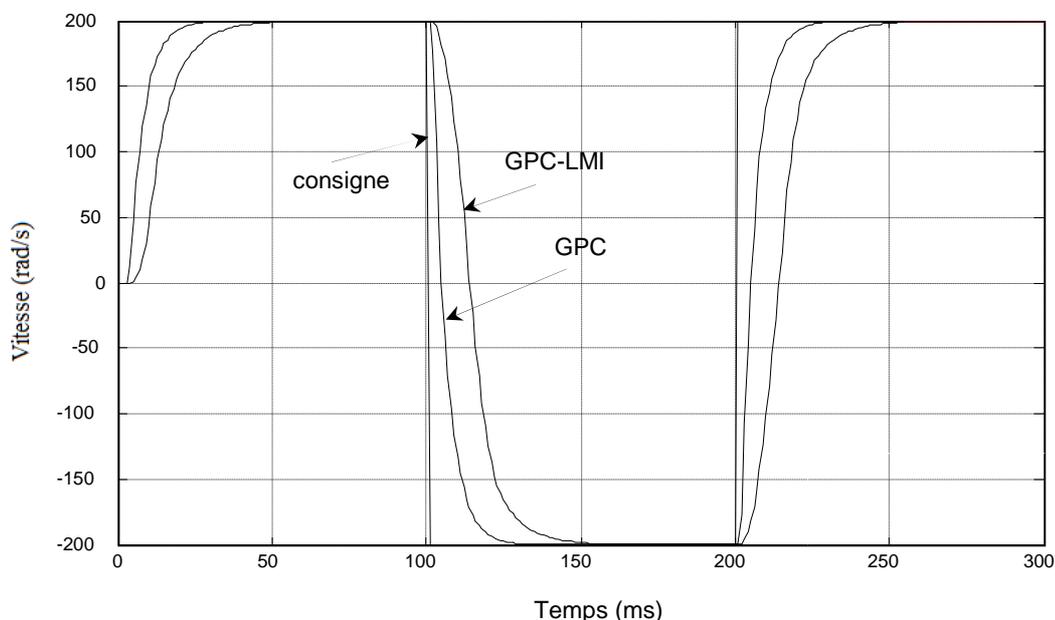


Figure.1.11. Comparaison entre les Signaux de sortie pour les différentes structures

On constate sur la figure suivante que la prise en compte des contraintes terminales et des contraintes dures avec l'approche LMI, de cette façon améliore donc les performances du système, en terme de la stabilité et du dépassement, comme montré sur la figure ci-dessus.

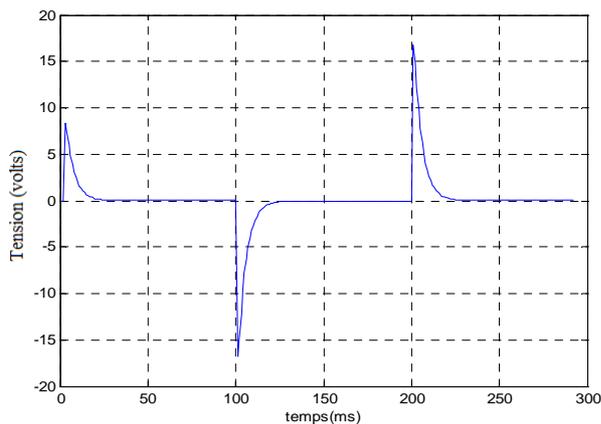


Fig. 1.12. Signal de commande pour la structure GPC

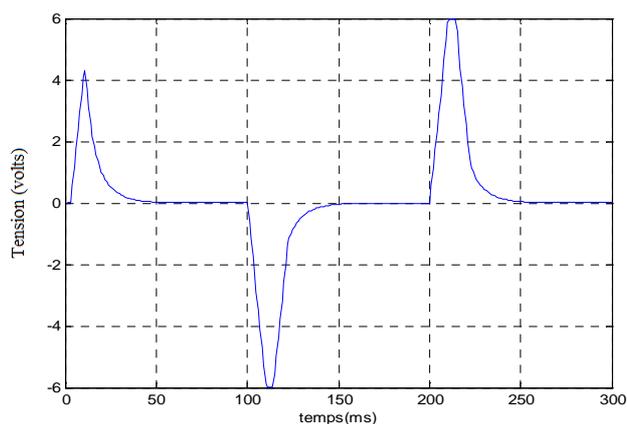


Fig. 1.13. Signal de commande pour la structure GPCC-LMI

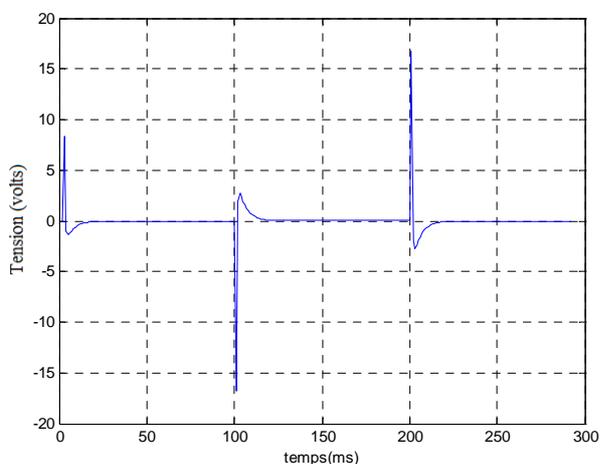


Fig. 1.14. Signal d'incrément de commande pour la structure GPC

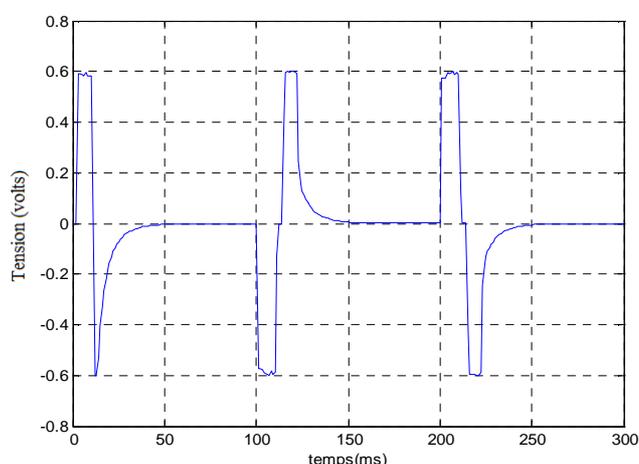


Fig. 1.15. Signal d'incrément de commande pour la structure GPCC-LMI

On remarque qu'avec GPCC-LMI on peut assurer une limitation sur le signal de commande et l'incrément de commande, qui ont des influences sur l'effort de commande, et l'incrément de commande.

### I.8. Conclusion

On a présenté dans ce chapitre la commande GPC et ses propriétés de robustesse. On a vu que le polynôme  $C$  du modèle CARIMA joue un rôle d'observateur de la loi de commande et peut être utilisé comme un paramètre de réglage de la robustesse du correcteur. Dans la suite on a traité le problème des contraintes qui apparaît souvent dans les systèmes industriels en utilisant l'approche LMI en se basant toujours sur la commande GPC, cette approche LMI nous a permis de traiter en même temps les deux types de contraintes, égalités (terminales) et inégalités (dures) dans un seul algorithme.

## Chapitre 2

### La double paramétrisation de Youla

II.1. Introduction .....	28
II.2. La paramétrisation de Youla .....	28
II.3. La double Paramétrisation de Youla et structuration de correcteur .....	35
II.4. Conclusion .....	38

## II.1. Introduction

La paramétrisation de Youla est connue pour être l'outil fondamental pour représenter l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné par l'ensemble des systèmes stables. La question qui se pose alors est de savoir quelles sont les relations entre ces deux ensembles et comment peut-on utiliser ces relations.

Le but de ce chapitre est donc de comprendre pourquoi un tel outil possède des propriétés très intéressantes pour l'automatique et surtout comment il est possible d'obtenir cette paramétrisation de manière simple et efficace.

## II.2. La paramétrisation de Youla

### II.2.1. Définition

La paramétrisation de Youla est un outil qui permet d'établir un lien entre l'ensemble de correcteurs stabilisant un système et l'ensemble de systèmes stables.

Il s'agit de paramétrer de manière complète la famille de correcteurs stabilisants pour un système donné. On considère le système en boucle fermée de la Figure (2.1). L'hypothèse de départ est que  $G$  est stabilisable par  $u$  et détectable par  $y$ , et que  $G$  est strictement propre [4].

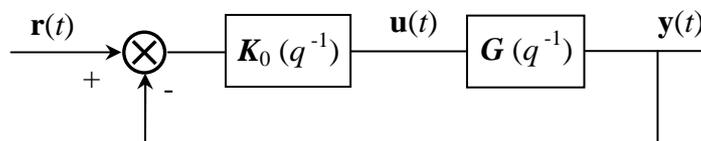


Figure 2.1 : Boucle fermée classique

Les deux théorèmes suivants définissent la paramétrisation de Youla:

### **Théorème 1**

Soit

$$G_{yu} = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (2.1)$$

des factorisations premières à gauche et à droite de  $G_{yu}$ , où  $M$ ,  $N$ ,  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$  sont des matrices de transferts stables.

Soit de même les factorisations premières d'un correcteur  $K_0$  stabilisant  $G$  :

$$K_0 = U_0 V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1} \tilde{U}_0 \quad (2.2)$$

avec :  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\tilde{U}_0$ ,  $\tilde{V}_0$  Sont des matrices de transfert stables [24].

Si  $K_0$  est un correcteur stabilisant, alors  $N, M, U_0, V_0, \tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{U}_0$  et  $\tilde{V}_0$  peuvent être choisies telles que :

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) appelée l'équation de Bezout.

### **Théorème 2**

En considérant (2.1) et (2.2) telles que (2.3) soient vérifiées, pour toute matrice de transfert stable  $Q$  de dimensions adéquates, on définit :

$$U = U_0 + M Q \quad (2.4)$$

$$V = V_0 + N Q \quad (2.5)$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + Q \tilde{M} \quad (2.6)$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0 + Q \tilde{N} \quad (2.7)$$

Sous ces hypothèses, on vérifie l'égalité :

1.  $UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$  et le correcteur  $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$  est stabilisant pour  $G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$
2. De plus pour chaque correcteur stabilisant il existe des factorisations premières du type (2.4 à 2.7)

### **Remarques :**

- Il est important de noter que la factorisation du correcteur initial  $K_0$  (2.2) avec la condition supplémentaire (2.3) existe toujours.
- La condition (2.3) peut être interprétée comme une condition de stabilité de la boucle fermée par le correcteur initial. En effet, en utilisant les notations précédentes, les trois propositions suivantes sont équivalentes [6],[42]:

- $K_0$  stabilise  $G$
- Il existe une factorisation co-première à gauche de  $K_0$  telle que

$$\tilde{V}_0 M - \tilde{U}_0 N = I \quad (2.8)$$

- Il existe une factorisation co-première à droite de  $K_0$  telle que

$$\tilde{M}V_0 - \tilde{N}U_0 = I \quad (2.9)$$

Ce théorème nous offre un résultat fondamental, à savoir : une fois connu un correcteur stabilisant quelconque, on est capable de générer la famille de tous les correcteurs stabilisants, au moyen de représentations fractionnelles. Ces représentations peuvent aussi s'exprimer par un formalisme d'espace d'état. Cette famille de correcteurs peut aussi s'écrire sous la forme [1]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \tilde{V}_0^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{I} + V_0^{-1} \mathbf{N} \mathbf{Q})^{-1} V_0^{-1} \quad (2.10)$$

Ce théorème permet de conclure également que la paramétrisation de Youla n'est pas unique. Il existe en réalité une infinité de possibilités, en fonction du correcteur stabilisant initial  $\mathbf{K}_0$  choisi, et des représentations fractionnelles choisies pour le système  $\mathbf{G}$  et le correcteur initial  $\mathbf{K}_0$ .

Tout correcteur  $\mathbf{K}$  stabilisant  $\mathbf{G}$  peut être représenté sous la forme LFT (*Linear Fractional Transformation*) de la Figure 2.2, où le système  $\mathbf{J}$  admet la représentation suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_0 & \tilde{V}_0^{-1} \\ V_0^{-1} & -V_0^{-1} \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

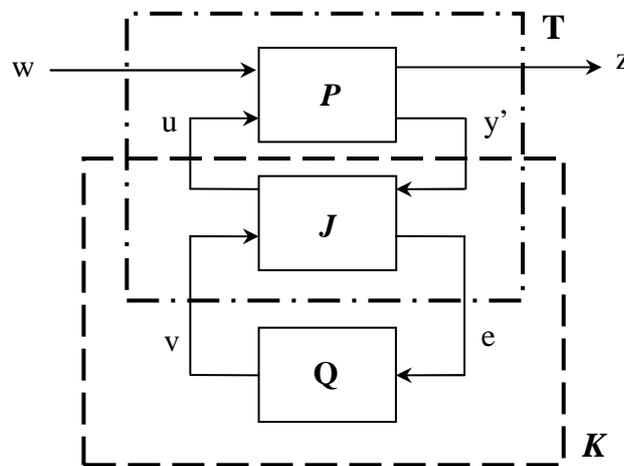


Figure 2.2 : Forme générale de la paramétrisation de Youla

### II.2.2. Propriétés

Ce paragraphe récapitule quelques propriétés de la paramétrisation de Youla. Les propriétés 1 et 4 seront utilisées par la suite, et les propriétés 2 et 3 sont données afin d'illustrer d'autres aspects de la paramétrisation, non utilisés dans ce travail [4],[6].

**1. Propriété 1**

Par définition : il existe une bijection entre l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné et l'ensemble des systèmes stables.

**2. Propriété 2**

Pour énoncer cette propriété, il nous faut donner une représentation standard du système. Cette représentation standard est donnée sous forme générale par la Figure 2.2. Si l'on ne considère pas le bloc d'incertitude ou perturbation, la boucle fermée de la Figure 2.3. Peut se reformuler sous la forme standard de la Figure 2.4.

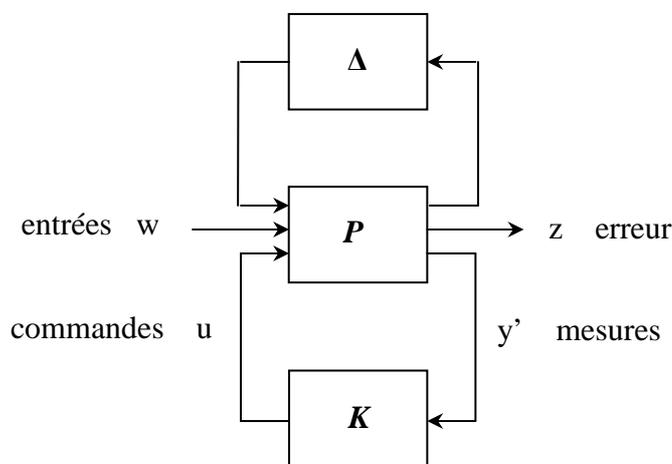


Figure 2.3 : Représentation standard

La Figure 2.4 est obtenue en considérant les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} z \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & G \\ I & G \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = r \quad z = y' = r + y$$

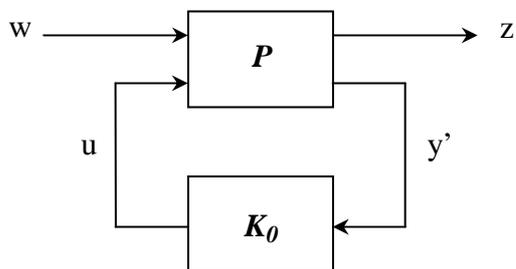


Figure 2.4 : Représentation standard sans incertitude

On note les différents transferts par les égalités [6]:

$$P * K = P * J * Q = T * Q \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad T_{22} = 0 \quad (2.12)$$

Cette propriété fondamentale exprime que le système  $T$ , formé par l'interconnexion de  $P$  et de  $J$ , Figure (2.2), a un transfert rigoureusement nul entre l'entrée  $e$  et la sortie  $v$ . le transfert en boucle fermée entre l'entrée  $w$  et la sortie  $z$  peut s'écrire :

$$H_{zw} = T_{11} + T_{12} Q (I - T_{22} Q)^{-1} T_{21} \quad (2.13)$$

Comme  $T_{22} = 0$ , on arrive à l'expression suivante :

$$H_{zw} = T_{11} + T_{12} Q T_{21} \quad (2.14)$$

La Figure 2.4 permet aussi de trouver l'expression (2.10), en cherchant la relation entre  $y'$  et  $u$ . Soit  $K_0$ , Figure 2.6, un correcteur stabilisant le système. A partir de ce correcteur, nous pouvons construire un ensemble de correcteurs stabilisant le système en procédant en deux étapes [10],[42]:

- ✓ Nous modifions  $K_0$  de telle sorte qu'il génère un signal auxiliaire de sortie  $e$  (de même dimension que  $y'$ ) et accepte un signal d'entrée  $v$  (de même dimension que  $u$ ) comme indiqué Figure 2.5. Ceci est effectué de façon à assurer une matrice de transfert en boucle fermée nulle entre  $v$  et  $e$ , tout en conservant le transfert  $K_0$  en boucle ouverte entre  $u$  et  $y'$ .

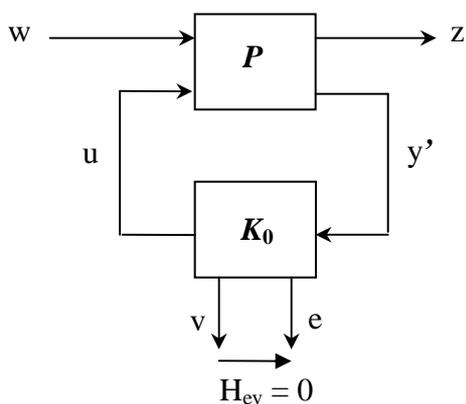


Figure 2.5 : Correcteur initial modifié

- ✓ Nous connectons une matrice  $Q$  stable entre  $e$  et  $v$ , comme indiqué dans la Figure 2.5. Le correcteur  $K$  ainsi construit correspond au correcteur initial modifié par  $Q$ . Ce correcteur stabilise le système, car  $Q$  est stable et, comme  $H_{ev} = 0$ , on n'introduit pas de nouveau bouclage.

On arrive à la Figure 2.6 .où l'on voit le système d'interconnexion  $J$ , qui correspond au correcteur  $K_0$  modifié.

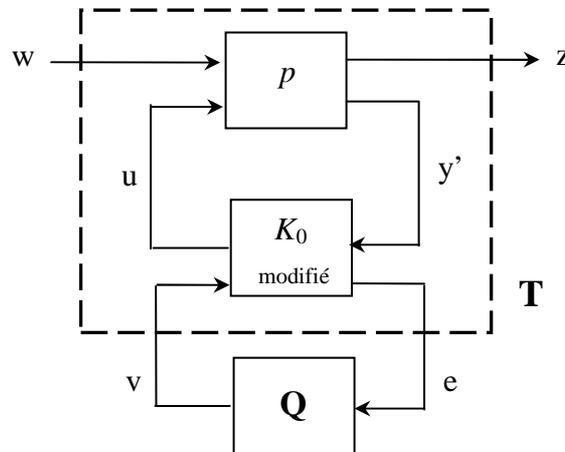


Figure 2.6 : Correcteur initial modifié avec paramètre de Youla

Du fait que le transfert entre " v " et " e " est nul, le système se réécrit comme indiqué en (2.14). On obtient alors la même expression affine de la paramétrisation de Youla. Toutefois, pour que cette paramétrisation obtenue à partir du correcteur modifié soit équivalente à la paramétrisation de Youla, il faut qu'elle permette d'atteindre tous les transferts stables possibles.

### 3. Propriété 3 : interprétation dans l'espace d'état

Cette propriété nous donne une interprétation de la paramétrisation dans une représentation par espace d'état [6].

Soit une représentation d'état du système T défini sur la Figure 2.6 :

$$T = \left( \begin{array}{c|cc} A_T & B_T & B_{\hat{u}} \\ \hline C_T & D_T & D_{Tu} \\ \hline C_{\hat{y}} & D_{\hat{y}T} & D_{\hat{y}\hat{u}} \end{array} \right) \quad (2.15)$$

Alors puisque  $T_{22} = 0$  , la propriété suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} C_{\hat{y}}(zI - A_T)^{-1}B_{\hat{u}} = 0 \\ D_{\hat{y}\hat{u}} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Cette propriété exprime le fait que les sous-espaces non-commandables et non observables de T sont supplémentaires dans l'espace d'état. Ainsi, elle permet d'obtenir une représentation d'état

qui est simultanément sous forme commandable et observable. Le changement de base correspondant permet d'obtenir le partitionnement suivant avec une matrice d'état sous forme triangulaire par blocs :

$$T = \left( \begin{array}{cc|cc|c} A_1 & A_3 & B_{11} & B_{21} & B_{\hat{u}} \\ 0 & A_2 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ \hline C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} & D_{1\hat{u}} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} & D_{2\hat{u}} \\ \hline 0 & C_{\hat{y}} & D_{\hat{y}1} & D_{\hat{y}2} & 0 \end{array} \right) \quad (2.17)$$

**Remarque :**

Les matrices  $D_{ij}$  de  $T$  sont les mêmes que celles du système initial  $P$  pour deux raisons :

- La structure particulière du transfert direct de  $J$  ne génère aucune transmission directe de  $w$  vers  $z$ .
- Le changement de base trigonalisant n'affecte plus ces transmissions directes.

Cette propriété est intéressante dans le sens où plusieurs correcteurs stabilisants pour le système  $G$  avec des structures très différentes peuvent se mettre sous une même représentation grâce au paramètre de Youla.

**4. Propriété 4 : convexité**

Cette propriété fait référence à la convexité obtenue avec la paramétrisation de Youla.

On a les deux propriétés suivantes :

- L'ensemble des matrices de transfert stable et convexe.
- Le transfert de la boucle fermée est linéaire en  $Q$  :

$$T * Q = T_{11} + T_{12} Q T_{21} \quad (2.18)$$

Cette propriété nous permet de transformer le problème de synthèse de correcteur ou de robustification d'un correcteur initial en un problème de synthèse convexe. Cette transformation sera étudiée dans le chapitre suivant [6].

Voyons maintenant le cas particulier de la paramétrisation de Youla quand le système  $G$  est stable. Dans ce cas, on peut simplifier la paramétrisation et obtenir une représentation par modèle interne où le paramètre de Youla a un sens physique.

### II.2.3. Problème d'optimisation avec le paramètre de Youla

Le problème étudié ici consiste à trouver un correcteur qui minimise un critère donné (lui-même étant éventuellement le résultat de la combinaison de plusieurs critères) tout en satisfaisant les contraintes imposées. Le problème peut s'écrire comme suit [7]:

$$\min_{\{H \in C_i\}_{i=1,2,\dots,m}} \phi(H) \quad (2.19)$$

$\phi$  est la fonction ou le critère à minimiser.  $C_1, C_2, \dots, C_m$  sont les  $m$  contraintes à satisfaire. On arrive à un problème d'optimisation convexe. Chaque contrainte est satisfaite par un sous-ensemble convexe de transferts, donc le sous-ensemble de transferts satisfaisant toutes les contraintes, s'il existe, il sera aussi convexe. Au sein de ce sous-ensemble, il faut minimiser la fonction  $\phi$  qui est, à son tour, convexe dans ce sous-ensemble.

Ces critères et contraintes peuvent être spécifiés en fonction du paramètre de Youla sur la forme :

$$\min_{\{Q \in C'_i\}_{i=1,2,\dots,m}} \phi'(Q) \quad (2.20)$$

où  $\phi'$  indique le critère fonction du paramètre de Youla et  $C'_i$  les ensembles paramétrés par le paramètre de Youla qui vérifient les contraintes fixées.

On est donc en présence d'un problème d'optimisation convexe où il faut trouver le paramètre de Youla ( $Q$ ) qui tout en satisfaisant les contraintes spécifiées minimise le critère. Ce paramètre appartient à l'ensemble des matrices de transfert stables, ensemble de dimensions infinies [17].

## II.3. La double Paramétrisation de Youla et structuration de correcteur

### II.3.1. La structure du correcteur

Dans cette section, nous présentons la méthodologie du nouvel algorithme basé sur la double paramétrisation de Youla. A partir d'un correcteur polynomial  $RST$  initial, stabilisant le système, représenté Figure 1.2, et que l'on notera  $R_0S_0T_0$ , on paramètre la classe des régulateurs stabilisants, conférant au système bouclé le même transfert entrée/sortie que celui du régulateur initial, de la façon suivante [19],[23]:

$$\begin{aligned} S &= S_0 - q^{-1} B Q \\ R &= R_0 + \Delta A Q \\ T &= T_0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Où  $Q$  peut être n'importe quel transfert stable, nous pouvons réécrire la relation (2.21) que:



(2.22) devient

$$\begin{cases} R(q^{-1}) = R_0(q^{-1}) + \Delta(q^{-1})A(q^{-1}) \left( \frac{Q_{11num}(q^{-1})}{Q_{11den}(q^{-1})} \right) \\ S(q^{-1}) = S_0(q^{-1}) - q^{-1}B(q^{-1}) \left( \frac{Q_{11num}(q^{-1})}{Q_{11den}(q^{-1})} \right) \\ T(q^{-1}) = T_0(q^{-1}) \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} R(q^{-1}) = \frac{R_0(q^{-1})Q_{11den}(q^{-1}) + \Delta(q^{-1})A(q^{-1})Q_{11num}(q^{-1})}{Q_{11den}(q^{-1})} = \frac{R_1}{Q_{11den}(q^{-1})} \\ S(q^{-1}) = \frac{S_0(q^{-1})Q_{11den}(q^{-1}) - q^{-1}B(q^{-1})Q_{11num}(q^{-1})}{Q_{11den}(q^{-1})} = \frac{S_1}{Q_{11den}(q^{-1})} \\ T(q^{-1}) = T_0(q^{-1}) = T_1(q^{-1}) \end{cases} \quad (2.24)$$

Ces expressions correspondent au schéma de la Figure 2.8.

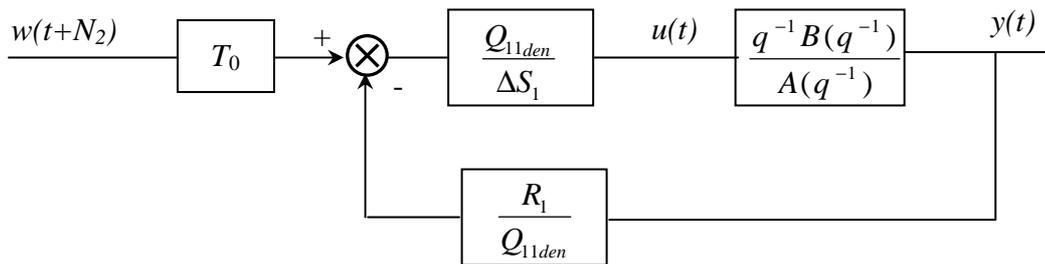


Figure 2.8 : Correcteur *RST* après paramétrisation

Elles peuvent être représentées aussi comme indiquées Figure 2.9

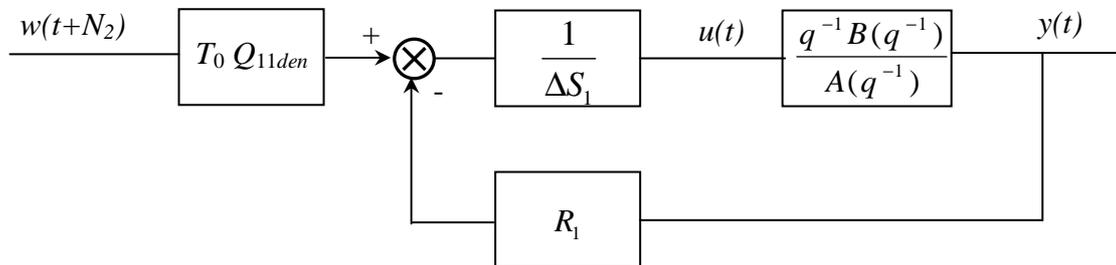


Figure 2.9 : Correcteur *RST* polynomial après paramétrisation

On utilisera par la suite la relation (2.24). Bien que l'expression donnant un correcteur *RST* soit basée sur des transferts stables, le passage à un correcteur polynomial est trivial comme il vient

d'être montré. Le nouveau contrôleur  $R_1S_1T_1$  avec les paramètres Youla est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} R_1(q^{-1}) = R_0(q^{-1})Q_{11den}(q^{-1}) + \Delta(q^{-1})A(q^{-1})Q_{11num}(q^{-1}) \\ S_1(q^{-1}) = S_0(q^{-1})Q_{11den}(q^{-1}) - q^{-1}B(q^{-1})Q_{11num}(q^{-1}) \\ T_1(q^{-1}) = T_0(q^{-1})Q_{11den}(q^{-1}) \end{cases} \quad (2.25)$$

Les degrés des polynômes  $R_1 S_1 T_1$  après la paramétrisation sont :

- Degré de  $R_1(q^{-1})$  :  $\max(n_{R_0} + n_{Q_{11den}}, n_a + 1 + n_{Q_{11num}}) = n_a + \max(n_{Q_{11den}}, 1 + n_{Q_{11num}})$
- Degré de  $S_1(q^{-1})$  :  $\max(n_{S_0} + n_{Q_{11den}}, n_b + 1 + n_{Q_{11num}}) = n_b + \max(n_{Q_{11den}}, 1 + n_{Q_{11num}})$
- Degré de  $T_1(q^{-1})$  :  $n_c + N_2 - N_1 + n_{Q_{11num}}$

Utilisation d'expressions (2.25), nous appliquons une double paramétrisation de Youla pour robustifier le nouveau correcteur  $R_1S_1T_1$ , comme on peut le voir à la Figure 2.10, c'est effectué sur la base des mêmes spécifications, à savoir temporelle et fréquentielle. La représentation du nouveau correcteur avec la double paramétrisation de Youla est représentée dans la Figure 2.10.

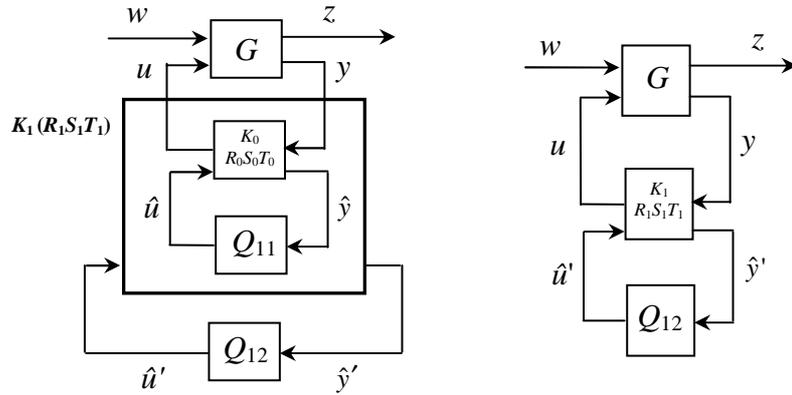


Figure.2.10. structure du nouveau correcteur avec la double paramétrisation de Youla

### 2.3.2. Algorithmme

*étape 1* : Synthèse de contrôleur polynomial initial invariant  $R_0S_0T_0$  avec les paramètres de réglages  $N_1, N_2, N_u$  et  $\lambda$ , le correcteur GPC-RST est synthétisé avec contraintes sur la sortie du système, le signal de commande et l'incrément de commande représentés sous forme LMI.

*étape 2* : Robustification de contrôleur  $R_0S_0T_0$  par le premier paramètre de Youla  $Q_{11}$  vérifie certaines spécifications fréquentielle et temporelle.

*étape 3* : Avec le paramètre de Youla  $Q_{11}$  réduit le nouveau contrôleur polynomial  $R_1S_1T_1$ .

*étape 4* : Robustification du nouveau contrôleur par une double paramétrisation de Youla  $Q_{12}$ .

## 2.4. Conclusion

Ce chapitre est le cœur de notre travail, à savoir, la double paramétrisation de Youla et ses propriétés, qui permettront dans le chapitre à venir de résoudre le problème de robustification d'un correcteur initial. Cette paramétrisation rend possible :

- La paramétrisation de tous les correcteurs stabilisant le système à partir d'un correcteur initial.
- L'expression des spécifications fréquentielles et temporelles en boucle fermée de façon convexe sous le paramètre de Youla.

A partir de ces deux propriétés, le problème de robustification d'un correcteur initial peut se traduire en un problème d'optimisation convexe. On verra dans le chapitre suivant l'application de ces concepts à un correcteur GPC et le moyen de résoudre numériquement le problème d'optimisation.

## Chapitre 3

### Formulation convexe des spécifications

III.1. Introduction .....	41
III.2. Généralités sur la robustesse.....	41
III.3. Commande prédictive robuste .....	42
III.4. Rappel sur les incertitudes non-structurées .....	42
III.5. Paramétrisation de Youla d'un correcteur à deux degrés de liberté .....	46
III.6. Spécifications de robustesse et performance nominale .....	51
III.7. Problème d'optimisation convexe .....	54
III.8. Choix de la forme du paramètre de Youla .....	69
III.9. Conclusion .....	61

### III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons une méthode de robustification de la loi de commande GPC par la double paramétrisation de Youla. La commande GPC conduit à un correcteur  $RST$  polynomial à deux degrés de liberté. La méthode proposée est en réalité applicable à toute loi de commande sous cette forme à deux degrés de liberté. Dès lors, elle peut aussi être vue comme une stratégie de synthèse de correcteurs à deux degrés de liberté.

Les méthodes de synthèse des correcteurs à deux degrés de liberté basées sur la paramétrisation de Youla font intervenir des techniques de synthèse de type  $H_\infty$ . Le fait d'avoir un correcteur à deux degrés de liberté permet de séparer la dynamique de poursuite et la dynamique de régulation, et l'utilisation de la paramétrisation de Youla permet de faire la synthèse de chaque dynamique séparément. On définit ainsi un problème  $H_\infty$  pour la dynamique de poursuite et un autre problème  $H_\infty$  pour la dynamique de régulation.

Le chapitre débute par une présentation du contexte de la robustesse et la commande prédictive robuste. Ensuite, une deuxième partie rappelle sur les incertitudes non-structurées résultats fondamentaux de la théorie de la commande robuste nécessaires à la compréhension de la technique de robustification mise en œuvre. Les trois paragraphes suivants ont pour but de présenter spécifiquement la méthode de robustification développée, en enrichissant progressivement les spécifications prises en compte, de façon à garantir la robustesse en stabilité face à des incertitudes non-structurées additives, résolue via un problème d'optimisation (dans le domaine fréquentiel).

### III.2. Généralités sur la robustesse

Cette partie présente les outils principaux nécessaires à la compréhension de la technique de robustification proposée dans cette thèse. Pour une étude approfondie de la notion de robustesse, le lecteur pourra consulter les développements très détaillés fournis dans [4],[25],[39],[40]. Les résultats sont présentés pour des systèmes discrets, linéaires, invariants dans le temps, monovariables et sous formalisme d'une fonction de transfert.

Dans la pratique, les systèmes ne sont pas isolés et subissent leur environnement. De plus, un modèle ne décrit jamais complètement et parfaitement le comportement d'un système. La loi de commande est toujours synthétisée pour qu'un certain modèle (dit nominal) satisfasse des spécifications de stabilité nominale et de performances nominales (erreur de poursuite nulle, dépassement inférieur à une valeur imposée, spécifications fréquentielles particulières ...). Mais

ces spécifications ne sont généralement plus respectées quand des incertitudes interviennent au niveau du modèle.

Dès lors, l'influence des incertitudes sur le modèle doit être prise en compte explicitement afin de réaliser un correcteur robuste. Plusieurs types d'incertitudes existent. Ainsi, on inclut naturellement des incertitudes non-structurées pour tenir compte des dynamiques négligées, surtout à haute fréquence [40]. Les autres types d'incertitudes ne sont pas introduits forcément de manière naturelle dans la commande des systèmes. Dans ce chapitre, seules sont considérées les incertitudes non-structurées.

### III.3. Commande prédictive robuste

Les aspects liés à la robustesse de la loi de commande prédictive ont attiré l'attention des spécialistes depuis de nombreuses années. Diverses stratégies ont ainsi été développées, visant à l'amélioration des caractéristiques de robustesse en stabilité face à plusieurs types d'incertitudes, face à certaines contraintes imposées et ainsi que des caractéristiques face à des spécifications de performance nominale ou de robustesse vis-à-vis des perturbations ou des bruits de mesure [11].

Dans le cas sans contraintes, la robustesse est étudiée par rapport aux incertitudes intervenant au niveau du modèle et par rapport aux perturbations existantes dans l'environnement dans lequel se trouve le processus. Pour améliorer la robustesse face à des incertitudes, [41] propose un algorithme qui permet le choix d'un paramètre de Youla en se basant sur des spécifications fréquentielles, de type norme  $H_\infty$ , pour les systèmes discrets représentés par fonctions de transfert.

### III.4. Rappel sur les incertitudes non-structurées

L'ensemble des systèmes réels (physiques, chimiques, ...) se distingue de l'ensemble des modèles mathématiques. Le point positif de cette affirmation est que les modèles mathématiques sont plus simples et implicitement plus faciles à commander. L'aspect négatif est que si une loi de commande donne de bons résultats sur un modèle mathématique, elle peut ne pas être suffisamment performante pour le système réel.

Généralement, la procédure de modélisation laisse de côté des parties non-modélisées du système, qui interviennent principalement à haute fréquence. Ces éléments négligés lors de l'étape de modélisation peuvent influencer de façon négative le comportement du système corrigé. Une stratégie permettant de prévenir ces problèmes éventuels consiste à considérer des incertitudes non-structurées agissant sur le modèle [11].

Généralement, l'influence des incertitudes augmente proportionnellement avec la fréquence. Pour cette raison, le modèle décrit bien le comportement du système aux basses fréquences ainsi que le comportement temporel, mais devient imprécis à haute fréquence [39].

La structure générale d'un système ( $G$ ) bouclé par un correcteur ( $K$ ) en présence des incertitudes ( $\Delta \in RH_\infty$ ) est donnée Figure 3.1.

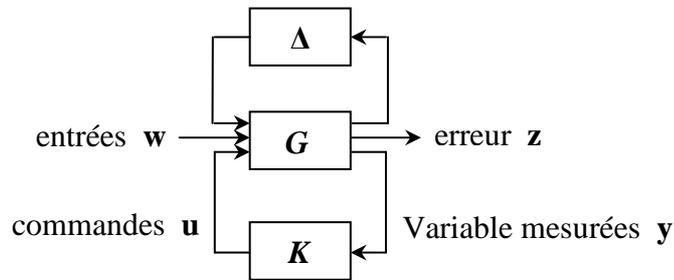


Figure 3.1 : Schéma-bloc général d'un système asservi en présence d'incertitudes

#### III.4.1. Incertitudes non-structurées additives

Les incertitudes non-structurées additives peuvent servir à formuler des problèmes de robustesse en stabilité [4]. Si l'on s'intéresse à l'effet sur le comportement du système, les incertitudes additives non-structurées peuvent modifier la fonction de transfert du système monovariante ou la fonction de transfert d'un système monovariante ( $G$ ) de la manière générale suivante :

$$G \rightarrow G' \quad \text{avec} \quad G' = G + \Delta \quad (3.1)$$

où  $G'$  est placé dans un voisinage de  $G$  caractérisé par l'incertitude prise en compte.

La Figure 3.2 montre les deux types d'incertitudes additives rencontrées directe et indirecte. Seules des incertitudes additives directes sont considérées par la suite.

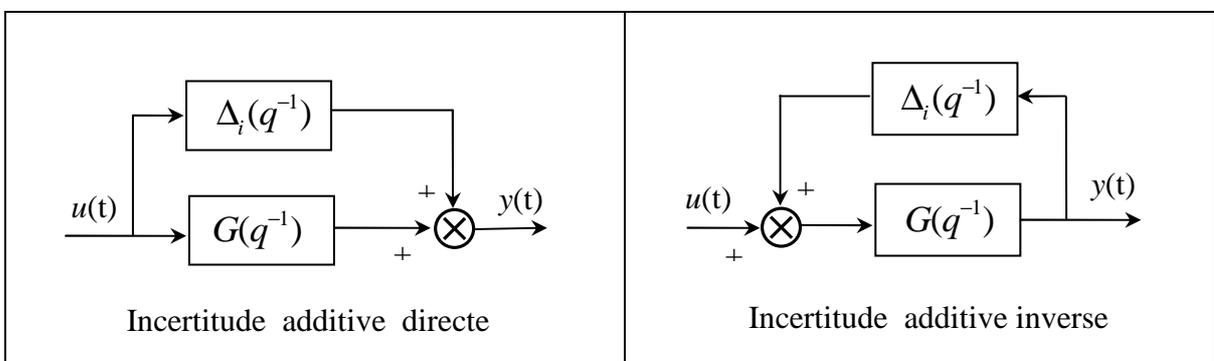


Figure 3.2 : Représentation d'une incertitude non-structurée additive directe et inverse

**III.4.2. Incertitudes non-structurées multiplicatives**

En général, les incertitudes multiplicatives peuvent être explicitées sous la forme suivante :

$$G \rightarrow G' \quad \text{avec} \quad G' = (\mathbf{I} + \Delta)G \tag{3.2}$$

La Figure 3.3 propose plusieurs types d'incertitudes multiplicatives :

- incertitudes multiplicatives directes en entrée ;
- incertitudes multiplicatives directes en sortie ;
- incertitudes multiplicatives inverses en entrée ;
- incertitudes multiplicatives inverses en sortie.

**Remarque**

Des incertitudes non-structurées en entrée peuvent être transformées en incertitudes non-structurées en sortie [25].

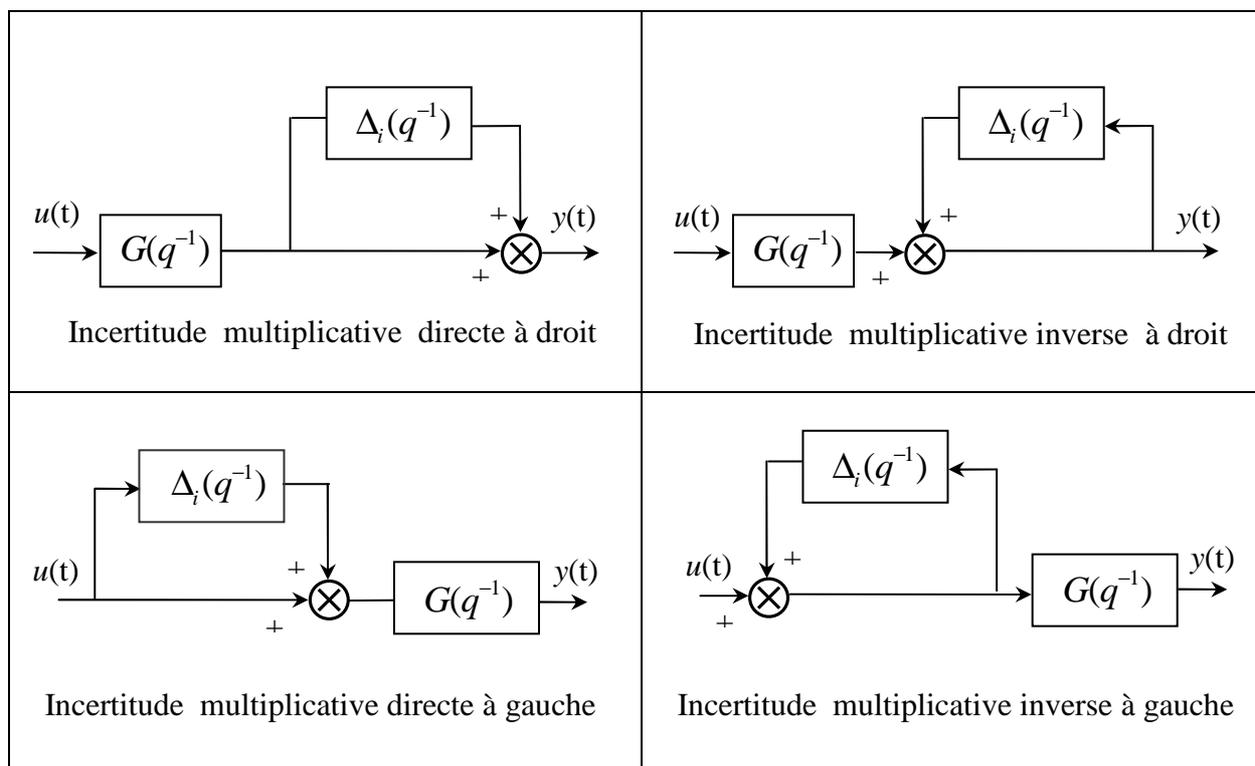


Figure 3.3 : Représentation d'une incertitude non-structurée multiplicative directe et inverse, en entrée et en sortie

**Remarque**

Pour chaque forme d'incertitude non-structurée présentée (Figure 3.2 et Figure 3.3), il existe des tests de robustesse en stabilité fournis par le théorème du petit gain et des conditions suffisantes pour garantir la performance nominale face à ce type d'incertitude. Le lecteur pourra consulter [25],[11] pour plus de détails.

**III.4.3. Outil de robustesse**

Prendre en compte des incertitudes non-structurées (additives ou multiplicatives) revient classiquement à imposer des contraintes sur leur taille en termes de norme  $H_\infty$ . Pour mettre en évidence une dépendance fréquentielle, les valeurs singulières maximales peuvent être utilisées. Des méthodes de calcul analytique de la norme  $H_\infty$  d'un système sont données dans [40], ainsi que les propriétés les plus importantes de cette norme. Etant une norme sous-multiplicative (et implicitement une norme matricielle), la norme  $H_\infty$  est appropriée à l'analyse des systèmes monovariables.

Se basant sur la norme  $H_\infty$ , plusieurs théorèmes ont formulé des résultats de stabilité robuste. Le théorème du petit gain est utilisé dans ce chapitre et détaillé ci-dessous.

- **Théorème de petit Gain**

Le théorème du petit gain propose une condition de stabilité robuste en présence d'incertitudes de modèle. L'interconnexion d'un modèle décrit par une fonction de transfert stable  $P \in RH_\infty$  avec l'incertitude donnée par la fonction de transfert stable et propre  $\Delta_i \in RH_\infty$  est représentée Figure 3.4 et telle que [9],[42]:

$$\left| \Delta_i(e^{-j\omega}) \right| < \gamma \quad \text{pour tout } \omega \in [-\pi, \pi]$$

alors le système bouclé en question est asymptotiquement stable si et seulement si la fonction de transfert  $P(q^{-1})$  est propre, asymptotiquement stable et telle que :

$$\left| P(e^{-j\omega}) \right| < \frac{1}{\gamma} \quad \text{pour tout } \omega \in [-\pi, \pi]$$

A la différence du théorème basé sur le critère de stabilité de Nyquist utilisé au chapitre 1, on considère ici que  $\Delta_i$  est stable. En revanche, la condition d'avoir le même nombre de pôles instables dans le modèle et dans le système disparu.

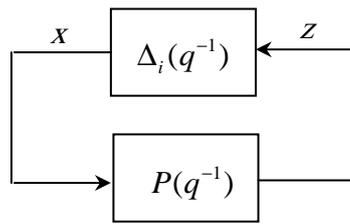


Figure 3.4 : Système  $P$  bouclé par l'incertitude non-structurée

### III.5. Paramétrisation de Youla d'un correcteur à deux degrés de liberté

Considérons un correcteur GPC initial noté  $R_0S_0T_0$ , représenté par la Figure 3.5. Ce correcteur a été synthétisé avec  $C(q^{-1}) = 1$  et les paramètres  $N_1, N_2, N_u$  et  $\lambda$  ajustés de façon à obtenir le comportement entrée/sortie désiré [3].

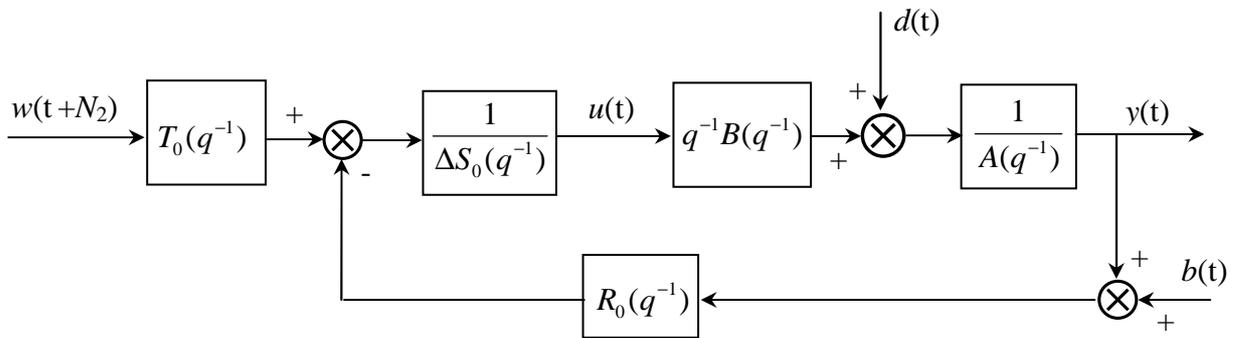


Figure 3.5 : Correcteur  $R_0S_0T_0$  initial

Afin d'obtenir la paramétrisation de Youla de ce correcteur initial, il faut tout d'abord définir une structure de bouclage standard puis appliquer le théorème 2.2. Pour cela, modifions la Figure 3.5, pour arriver à la Figure 3.6, puis à la Figure 3.7.

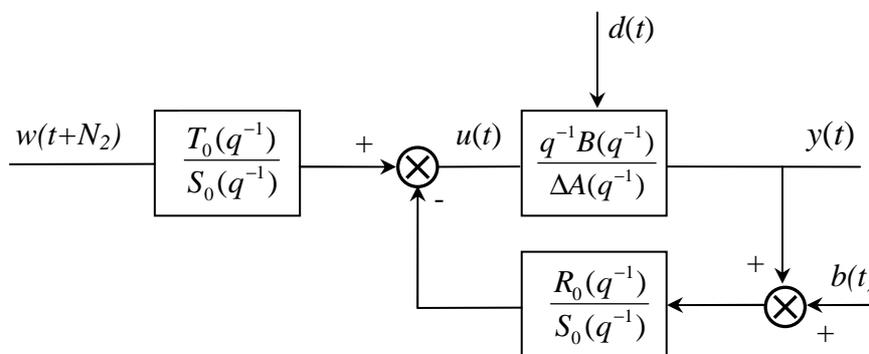


Figure 3.6 : Correcteur initial, structure modifiée

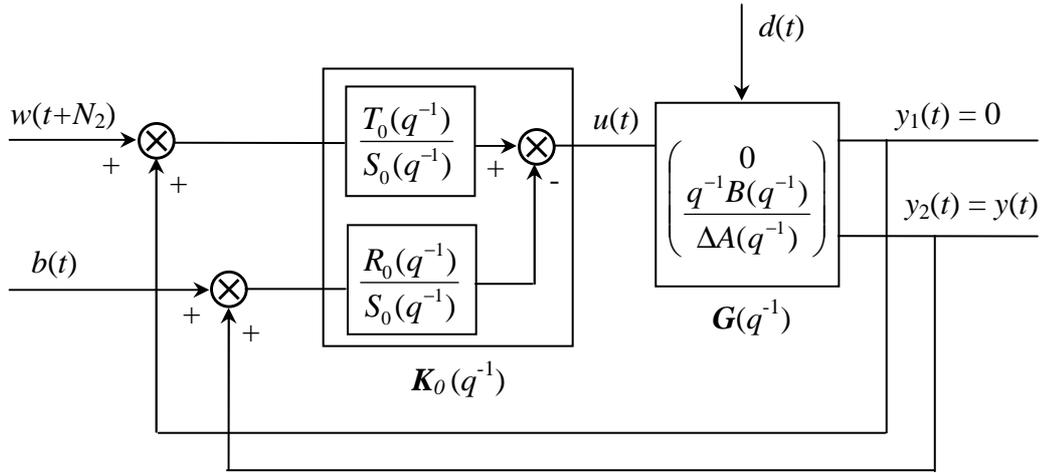


Figure 3.7 : Correcteur initial avec la structure du bouclage standard

L'action intégrale du correcteur initial est incluse dans le modèle du système, permettant ainsi de paramétrer tous les correcteurs qui conservent l'action intégrale [42].

En relation avec les notations de la Figure 2.4, on définit comme suit les grandeurs de la Figure 3.7:

$$G(q^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q^{-1}B \\ \Delta A \end{pmatrix} \quad K_0(q^{-1}) = (C_1 \quad C_2) = \begin{pmatrix} T_0 & -R_0 \\ S_0 & S_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } r = \begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Afin de pouvoir appliquer le Théorème 2.2, on doit maintenant effectuer des factorisations fractionnelles co-premières telle que (2.1), (2.2) et (2.3) soient vérifiées.

Ces trois relations nous donnent huit équations matricielles à huit inconnues, avec cependant deux relations redondantes parmi ces huit équations. En effet :

$$\tilde{V}_0 U_0 - \tilde{U}_0 V_0 = 0 \quad (3.4)$$

est redondante avec (2.2) ; il s'agit en réalité de la même équation.

$$-\tilde{N} M + \tilde{M} N = 0 \quad (3.5)$$

est redondante avec (2.1).

On arrive donc à six équations à huit inconnues, où  $N$ ,  $M$ ,  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{U}_0$  et  $\tilde{V}_0$  sont les inconnues, et le correcteur initial  $K_0$  et le modèle  $G$  sont connus.

$$\begin{cases} K_0 = U_0 V_0^{-1} \\ K_0 = \tilde{V}_0^{-1} \tilde{U}_0 \\ G = N M^{-1} \\ G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \\ \tilde{V}_0 M - \tilde{U}_0 N = I \\ -\tilde{N} U_0 + \tilde{M} V_0 = I \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans ces six équations, fixer la valeur de  $M$  et  $\tilde{M}$  permet de déduire les autres inconnues. On trouve alors :

$$\begin{cases} V_0 = (I - G K_0)^{-1} \tilde{M}^{-1} \\ U_0 = K_0 V_0 \\ \tilde{V}_0 = (I - K_0 G)^{-1} M^{-1} \\ \tilde{U}_0 = \tilde{V}_0 K_0 \\ N = G M \\ \tilde{N} = \tilde{M} G \end{cases} \quad (3.7)$$

La factorisation fractionnelle trouvée de cette façon sera valide si tous les transferts de  $N, M, U_0, V_0, \tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{U}_0$  et  $\tilde{V}_0$  sont stables.

On choisit:

$$M = \frac{\Delta A}{A_c} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta A}{A_0} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Où  $A_0 A_c = \Delta A S_0 + q^{-1} B R_0$  est l'équation caractéristique de la boucle fermée obtenue avec le correcteur initial  $\mathbf{K}_0$  de la Figure 3.1. Cette équation caractéristique est factorisée comme dans le cas d'un placement de pôles, en un polynôme  $A_c$  correspondant à la dynamique de commande et un polynôme  $A_0$  correspondant à la dynamique de l'observateur. Les deux polynômes sont stables, toutes leurs racines étant de module inférieur à 1, car le correcteur initial est un correcteur stabilisant.

Avec ce choix pour  $M$  et  $\tilde{M}$ , il vient :

$$\begin{aligned}
N &= \begin{pmatrix} 0 \\ q^{-1}B \\ A_c \end{pmatrix} & \tilde{N} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -q^{-1}B \\ A_0 \end{pmatrix} & \tilde{M} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta A}{A_0} \end{pmatrix} & M &= \frac{\Delta A}{A_c} \\
U_0 &= \begin{pmatrix} -\frac{\Delta A T_0}{A_0 A_c} & \frac{R_0}{A_c} \end{pmatrix} & \tilde{U}_0 &= \begin{pmatrix} T_0 & -R_0 \\ A_0 & -A_0 \end{pmatrix} & V_0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{q^{-1}B T_0}{A_0 A_c} & -\frac{S_0}{A_c} \end{pmatrix} & \tilde{V}_0 &= \frac{S_0}{A_0}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Avec cette factorisation, où tous les transferts sont stables, et en considérant  $\mathbf{Q} = [Q_2 \ Q_1]$ , le Théorème 2.2 fournit le correcteur stabilisant :

$$K(q^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{T_0 - A_0 Q_2}{S_0 - q^{-1} B Q_1} & -\frac{R_0 + \Delta A Q_1}{S_0 - q^{-1} B Q_1} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Soit :

$$\begin{cases} T(q^{-1}) = T_0(q^{-1}) - A_0(q^{-1})Q_2(q^{-1}) \\ R(q^{-1}) = R_0(q^{-1}) + \Delta(q^{-1})A(q^{-1})Q_1(q^{-1}) \\ S(q^{-1}) = S_0(q^{-1}) - q^{-1}B(q^{-1})Q_1(q^{-1}) \end{cases} \tag{3.11}$$

Où  $Q_1(q^{-1})$  et  $Q_2(q^{-1})$  sont des transferts stables. Le transfert  $Q_2$  modifie le comportement entrée/sortie, tandis que le paramètre  $Q_1$  modifie la dynamique de la boucle fermée ou de régulation, sans changer le transfert entrée/sortie. Le choix de  $M$  et  $\tilde{M}$  (3.8) a été effectué de sorte qu'en faisant  $Q_2 = 0$  on retrouve la paramétrisation à la base des stratégies SGPC et  $Q$  – design (Annexe) [1].

Cette paramétrisation permet donc de paramétrer tous les correcteurs qui stabilisent le système et qui conservent l'action intégrale. On peut alors se poser la question suivante : si pour un correcteur initial  $R_1 S_1 T_1$  et certaines spécifications on obtient un paramètre de Youla optimal  $\mathbf{Q}_1 = (Q_2^1 \ Q_1^1)$  qui permet de répondre aux caractéristiques optimales de robustesse et de performance pour les spécifications considérées, serait-il possible d'atteindre ce même résultat à partir d'un autre correcteur initial noté  $R_2 S_2 T_2$  ?

Pour répondre à cette question, il faut trouver le paramètre  $\mathbf{Q}_2 = (Q_2^2 \ Q_1^2)$ , tel que les deux correcteurs  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  suivants soient équivalents [42].

$$K_1(q^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{T_1 - A_0^1 Q_2^1}{S_1 - q^{-1} B Q_1^1} & -\frac{R_1 + \Delta A Q_1^1}{S_1 - q^{-1} B Q_1^1} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$K_2(q^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{T_2 - A_0^2 Q_2^2}{S_2 - q^{-1} B Q_1^2} & -\frac{R_2 + \Delta A Q_1^2}{S_2 - q^{-1} B Q_1^2} \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Soit :

$$\frac{T_1 - A_0^1 Q_2^1}{S_1 - q^{-1} B Q_1^1} = \frac{T_2 - A_0^2 Q_2^2}{S_2 - q^{-1} B Q_1^2} \quad (3.14)$$

$$\frac{R_1 + \Delta A Q_1^1}{S_1 - q^{-1} B Q_1^1} = \frac{R_2 + \Delta A Q_1^2}{S_2 - q^{-1} B Q_1^2} \quad (3.15)$$

(3.15) conduit au résultat :

$$(R_1 + \Delta A Q_1^1)(S_2 - q^{-1} B Q_1^2) = (R_2 + \Delta A Q_1^2)(S_1 - q^{-1} B Q_1^1)$$

$$R_1 S_2 - R_2 S_1 + Q_1^1 (\Delta A S_2 + q^{-1} B R_2) - Q_1^2 (\Delta A S_1 + q^{-1} B R_1) = 0$$

$$Q_1^2 = \frac{R_1 S_2 - R_2 S_1}{A_c^1 A_c^1} + \frac{A_c^2 A_0^2}{A_c^1 A_0^1} Q_1^1 \quad (3.16)$$

A partir de (3.14) on obtient :

$$(T_1 - A_0^1 Q_2^1)(S_2 - q^{-1} B Q_1^2) = (T_2 - A_0^2 Q_2^2)(S_1 - q^{-1} B Q_1^1)$$

En remplaçant  $Q_1^2$  on trouve :

$$(T_2 - A_0^2 Q_2^2) = \frac{(T_1 - A_0^1 Q_2^1)(S_2 A_c^1 A_0^1 - q^{-1} B R_1 S_2 + q^{-1} B R_2 S_1 - q^{-1} B A_c^2 A_0^2 Q_1^1)}{A_c^1 A_0^1 (S_1 - q^{-1} B Q_1^1)}$$

$$(T_2 - A_0^2 Q_2^2) = \frac{(T_1 - A_0^1 Q_2^1) A_c^2 A_0^2 (S_1 - q^{-1} B Q_1^1)}{A_c^1 A_0^1 (S_1 - q^{-1} B Q_1^1)}$$

Soit :

$$Q_2^2 = \frac{T_2}{A_0^2} - \frac{(T_1 - A_0^1 Q_2^1) A_c^2}{A_c^1 A_0^1} \quad (3.17)$$

En considérant que les correcteurs initiaux  $R_1 S_1 T_1$  et  $R_2 S_2 T_2$  sont des correcteurs stabilisants, les polynômes  $A_c^1, A_0^1, A_c^2$  et  $A_0^2$  sont des polynômes stables et, donc le paramètre  $\mathbf{Q}_2 = (Q_2^2 \quad Q_1^2)$ , est un paramètre stable. En conséquence, pour n'importe quel correcteur initial, on peut toujours, grâce à la paramétrisation de Youla, trouver le correcteur optimal par rapport aux spécifications considérées.

### III.6. Spécifications de robustesse et performance nominale

La paramétrisation de Youla paramétrant tous les correcteurs stabilisants peut s'appliquer au système décrit par la Figure 3.8.

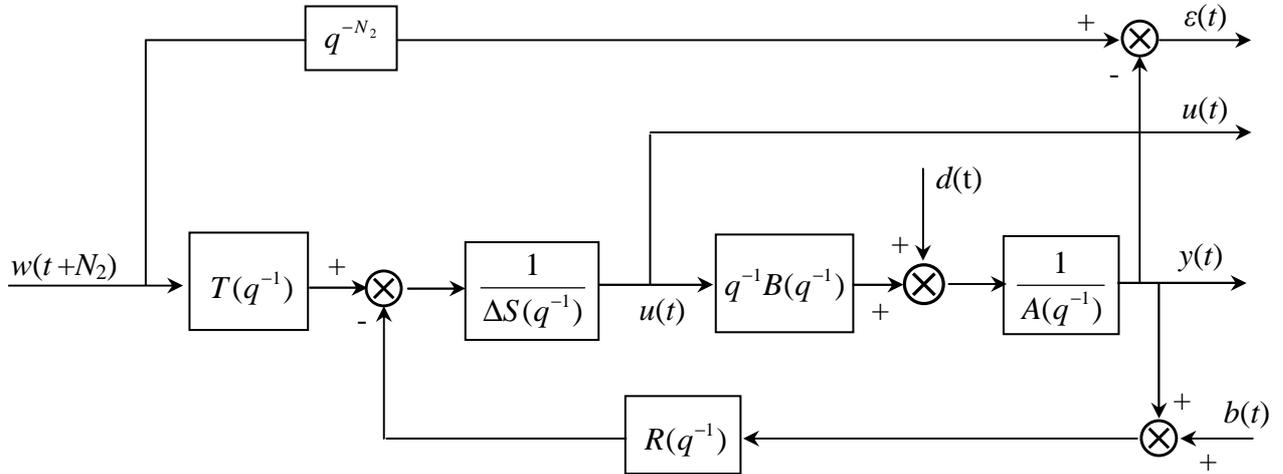


Figure 3.8 : Système avec régulateur *RST*, entrées  $w, d, b$  et sorties  $\varepsilon, y, u$ .

L'application de la paramétrisation, définie par la relation (3.11), au correcteur initial conduit au correcteur représenté Figure (3.9).

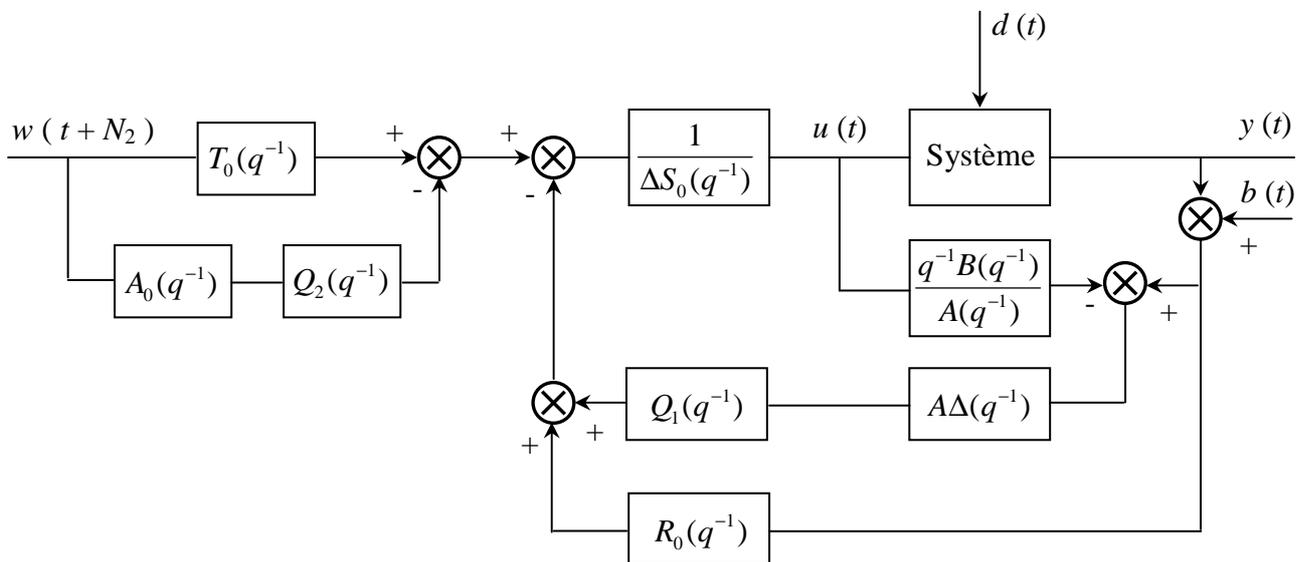


Figure 3.9 : Régulateur GPC à deux degrés de liberté avec paramétrisation de Youla

Cette représentation peut être modifiée dans un seul bloc, et en prenant en compte les signaux de perturbation ( $d$ ) et de bruit de mesure ( $b$ ) et l'erreur ( $\varepsilon$ ), (Figure 3.8 et 3.9), on arrive à la structure de la Figure 3.10, avec [22] :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} b \\ d \\ w \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

et :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{q^{-1}BR_0 + q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 & -\frac{\Delta S_0 + q^{-1}B\Delta}{A_0A_c} Q_1 & \frac{A_0A_c q^{-N_2} - q^{-1}BT_0 + q^{-1}BA_0}{A_0A_c} Q_2 \\ -\frac{R_0A}{A_0A_c} - \frac{\Delta A^2}{A_0A_c} Q_1 & -\frac{R_0}{A_0A_c} - \frac{\Delta A}{A_0A_c} Q_1 & \frac{T_0A}{A_0A_c} - \frac{AA_0}{A_0A_c} Q_2 \\ -\frac{q^{-1}BR_0}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 & \frac{\Delta S_0}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta}{A_0A_c} Q_1 & \frac{q^{-1}BT_0}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}BA_0}{A_0A_c} Q_2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

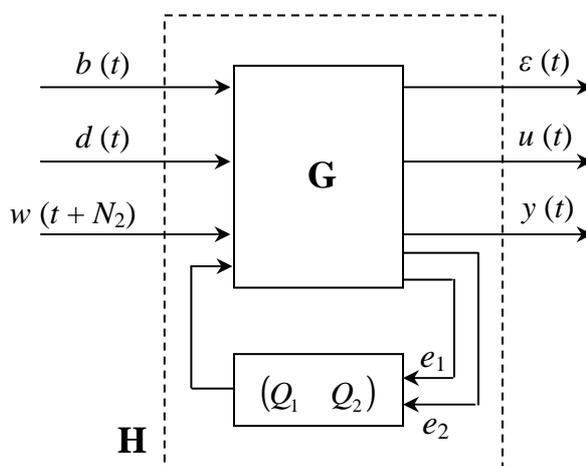


Figure 3.10 : Régulateur GPC à deux degrés de liberté avec Paramétrisation de Youla,  
Formalisme par blocs

On constate dès lors aisément que le paramètre  $Q_1$  modifie les fonctions de transfert associant  $b$  et  $d$  à  $\varepsilon$ ,  $u$  et  $y$ , et le paramètre  $Q_2$  modifie les fonctions de transfert reliant  $w$  à  $\varepsilon$ ,  $u$  et  $y$ . En conséquence,  $Q_1$  modifie la dynamique de la boucle fermée et  $Q_2$  modifie la dynamique de poursuite [42].

On va maintenant examiner des spécifications de robustesse en stabilité face à des incertitudes non structurées, et des spécifications de performance nominale, grâce au respect de gabarits temporels.

### III.6.1. Robustesse en stabilité – Spécifications fréquentielles

La prise en compte d'incertitudes non structurées additives directes conduit à représenter le système comme indiqué Figure 3.11.

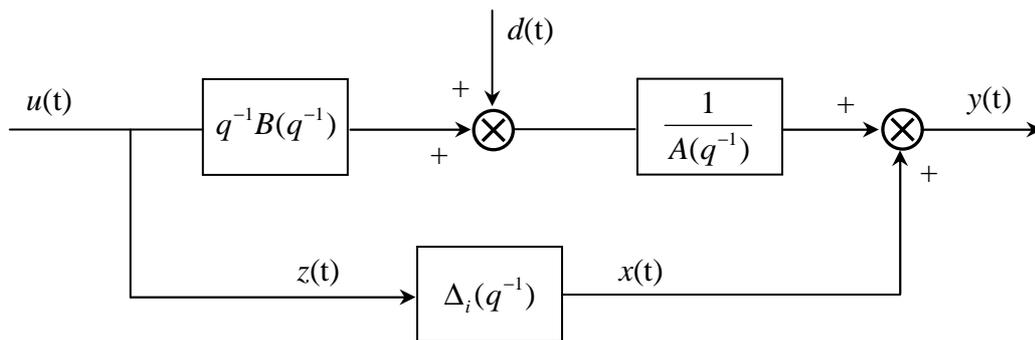


Figure 3.11 : Système avec incertitude additive directe

La robustification vis-à-vis d'une incertitude additive directe non structurée est donc maximisée par la minimisation de la norme  $H_\infty$  suivante [15] :

$$\min_{Q_1 \in RH_\infty} \|P(q^{-1})W(q^{-1})\|_\infty \quad (3.20)$$

Le transfert  $W$  sert à pondérer davantage la bande de fréquences où les incertitudes sont les plus importantes. Cette spécification est convexe en  $Q_1$ , comme indiqué au chapitre 2. La notation  $RH_\infty$  indique l'espace de toutes les matrices de transfert propres et stables à coefficients réels.

En faisant la même chose pour les autres types d'incertitudes non structurées, telles que les incertitudes additives inverses, multiplicatives directes et inverses, on arrive au transfert  $P$  du Tableau 3.1. Une robustification vis-à-vis de l'une de ces incertitudes entraîne la minimisation de la norme  $H_\infty$  du transfert  $P$  correspondant. Dans ce tableau, on a noté par  $K$  le rapport  $R/\Delta S$  correspondant au correcteur à l'intérieur de la boucle, et par  $G$  le modèle  $q^{-1}B/A$ .

$\Delta_i$	$P$
Additive directe	$-\frac{R_0 A}{A_0 A_c} - \frac{A^2 \Delta}{A_0 A_c} Q_1 = -\sigma_c K$
Additive inverse	$\frac{q^{-1} B \Delta S_0}{A_0 A_c} - \frac{q^{-2} B^2 \Delta}{A_0 A_c} Q_1 = \sigma_d G$
Multiplicative directe	$-\frac{q^{-1} B R_0}{A_0 A_c} - \frac{q^{-1} B \Delta A}{A_0 A_c} Q_1 = -\sigma_c$
Multiplicative inverse	$\frac{S_0 \Delta A}{A_0 A_c} - \frac{\Delta A q^{-1} B}{A_0 A_c} Q_1 = \sigma_d$

Tableau 3.1 : Transfert  $P$  connecté aux blocs d'incertitude non structurée

Dans le cas des incertitudes additives directes, on remarque que le transfert  $P$  obtenu correspond au transfert obtenu par le critère de Nyquist développé au paragraphe 1.5.2.

### III.6.2. Performance nominale – spécifications temporelles

#### III.6.2.1. Dépassement

Nous définissons le critère de dépassement par [7,13]:

$$\Phi_{dep}(Q) = \sup_{t \geq 0} (S_{ij}(t) - 1) \quad (3.21)$$

Nous démontrons facilement que cette fonction est convexe. Par conséquent, il est facile de déduire que les familles paramétrées en  $\beta$  :

$$C_{dep}^\beta = \{Q / \Phi_{dep}(Q) \leq \beta\} \quad (3.22)$$

est une famille d'ensembles convexes.

Ainsi, minimiser le dépassement de la réponse  $S_{ij}(t)$  sous des contraintes convexes  $\{C_1, \dots, C_m\}$  revient à résoudre le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\min(\Phi_{dep}(Q) / Q \in \{C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m\}) \quad (3.23)$$

#### III.6.2.2. Enveloppe temporelle

Il s'agit de contraindre la réponse temporelle  $S_{ij}(t)$ , correspondant pour une entrée donnée, au fait de rester à l'intérieur d'un gabarit temporel imposé. Nous cherchons donc les éléments appartenant à l'ensemble suivant [7]:

$$C_{env} = \{Q / \forall t \geq 0; S_{\min}(t) \leq S_{ij}(t) \leq S_{\max}(t)\} \quad (3.24)$$

Cette contrainte est convexe et peut s'exprimer sous la forme :

$$C_{env} = \{Q / \Phi_{env}(Q) \leq 0\} \quad (3.25)$$

en prenant comme critère convexe :

$$\Phi_{env}(Q) = \max_{t \geq 0} (S_{ij}(t) - S_{\max}(t), S_{\min}(t) - S_{ij}(t)) \quad (3.26)$$

### III.7. Problème d'optimisation convexe

Avec ces deux spécifications, fréquentielles et temporelles, le problème de robustification d'un correcteur initial est défini comme un problème de minimisation sous contraintes, où le critère à

minimiser, la contrainte à satisfaire et l'espace d'appartenance du paramètre de Youla sont convexes. Il s'agit dès lors d'un problème d'optimisation convexe [13].

Ainsi, par exemple, la robustification du régulateur initial vis-à-vis d'incertitudes additives directes, des dynamiques négligées par exemple, tout en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation, afin de ne pas trop ralentir la dynamique de régulation, se traduit par :

$$\min_{\substack{Q_1 \in RH_\infty \\ \Phi_{env}(Q_1) < 0}} \left\| \left( -\frac{R_0 A}{A_0 A_c} - \frac{A^2 \Delta}{A_0 A_c} Q_1 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (3.27)$$

Où  $\Phi_{env}(Q_1)$  définit la contrainte d'enveloppe du rejet de perturbation. Dans ce cas, seul le paramètre  $Q_1$  du paramètre  $Q$  intervient dans l'optimisation, car il s'agit de modifier la dynamique de la boucle fermée ou de régulation.

De la même façon, on peut envisager un problème d'optimisation modifiant la dynamique de poursuite. On peut ainsi faire respecter un gabarit pour la réponse à un échelon, tout en minimisant le transfert entrée/commande, de façon à minimiser, par exemple, la commande en haute fréquence. Ceci conduit au problème décrit par (3.28).

Dans ce cas, seul le paramètre  $Q_2$  intervient, car on cherche à modifier la dynamique entrée/sortie.

$\Phi_{env}(Q_2)$  définit la contrainte d'enveloppe temporelle imposée à la réponse à un échelon [42].

$$\min_{\substack{Q_2 \in RH_\infty \\ \Phi_{env}(Q_2) < 0}} \left\| \left( \frac{T_0 A}{A_0 A_c} - \frac{A A_0}{A_0 A_c} Q_2 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (3.28)$$

De façon générale, les spécifications fréquentielles et temporelles peuvent être utilisées indistinctement pour chercher une robustesse en stabilité ou une performance nominale. Ainsi, dans le dernier exemple, la minimisation de la norme  $H_\infty$  sert à diminuer la commande en haute fréquence pour le système nominal, on cherche donc à garantir une performance nominale. De même, le critère de robustesse en stabilité face à des incertitudes additives directes peut être traduit par le respect d'un gabarit pour le transfert bruit de mesure/commande, qui est, en fait, le transfert  $P$  considéré dans ce cas.

La prise en compte de contraintes fréquentielles ou temporelles supplémentaires est aussi possible. Ainsi, si l'on souhaite robustifier vis-à-vis d'incertitudes multiplicatives directes, tout en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation, mais en considérant aussi l'effet du bruit de mesure sur la commande, on peut l'exprimer :

$$\min_{\substack{Q_1 \in RH_\infty \\ \Phi_{env1}(Q_1) < 0 \\ \Phi_{env2}(Q_1) < 0}} \left\| \left( -\frac{q^{-1} B R_0}{A_0 A_c} - \frac{q^{-1} B \Delta A}{A_0 A_c} Q_1 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (3.29)$$

Où  $\Phi_{env1}(Q_1)$  définit le gabarit à respecter par la perturbation, et  $\Phi_{env2}(Q_1)$  le gabarit à respecter par l'effet du bruit de mesure sur la commande. Le même problème peut se traduire par :

$$\min_{\substack{Q_1 \in RH_\infty \\ \Phi_{env}(Q_1) < 0}} \left\| \left( -\frac{q^{-1} B R_0}{A_0 A_c} - \frac{q^{-1} B \Delta A}{A_0 A_c} Q_1 \right) W_1(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (3.30)$$

$$\left\| \left( -\frac{R_0 A}{A_0 A_c} - \frac{A^2 \Delta}{A_0 A_c} Q_1 \right) W_2(q^{-1}) \right\|_\infty$$

Dans ce cas, on minimise les transferts  $P$  correspondant à des incertitudes multiplicatives directes et additives directes, en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation. L'équivalence entre les deux problèmes vient du fait qu'un bruit de mesure et une dynamique négligée en haute fréquence peuvent se modéliser par des incertitudes additives directes ; pour ce type d'incertitude le transfert  $P$  considéré correspond au transfert entre le bruit de mesure ( $b$ ) et la commande ( $u$ ).

### III.8. Choix de la forme du paramètre de Youla

Considérant les contraintes fréquentielles et temporelles formulées dans la partie précédente, on en conclut qu'il est nécessaire de minimiser une norme  $H_\infty$  parmi les paramètres  $Q$  ( $Q_1$  ou  $Q_2$ ) qui satisfont la contrainte temporelle. Le problème à ce stade réside dans le fait que  $Q$  appartient à l'ensemble des systèmes stables, ensemble de dimension infinie. A l'heure actuelle, il n'existe aucune méthode permettant de résoudre ce type d'optimisation. Une solution possible consiste alors à restreindre l'espace de recherche à un sous-ensemble généré par une base de transferts stables [1] :

$$Q = \sum_{l=0}^{n_q} \alpha_l Q_l \quad \text{avec} \quad \alpha_l \in R \quad (3.31)$$

Ce type de base vérifie que le sous-ensemble généré tend vers l'ensemble de systèmes stables. Dans le cas des systèmes discrets, une base naturelle de systèmes stables est  $Q_l(q^{-1}) = q^{-l}$ , ce qui revient à rechercher le transfert  $Q$  sous la forme d'un polynôme. L'avantage lié au choix de cette base réside dans la simplicité de la mise en œuvre. Malgré tout, dans certains cas, deux types de problèmes peuvent survenir.

D'une part, la réalisation de dynamiques lentes au sein du paramètre  $Q$  nécessite un polynôme d'ordre élevé ; cette configuration peut se rencontrer dans le cadre de la robustification vis-à-vis d'incertitudes en haute fréquence, où  $Q$  a pour but notamment de ralentir la boucle fermée.

D'autre part, l'implantation d'un polynôme d'ordre élevé risque d'augmenter le temps de calcul et les erreurs numériques du correcteur. Pour concilier ces deux aspects, le degré du polynôme est déterminé par essais successifs avec un ordre initial faible, 10 par exemple, et en l'augmentant progressivement. Pour pallier les inconvénients liés à l'implémentation, une solution peut consister, comme on le verra par la suite, à approcher le polynôme par un transfert d'ordre beaucoup moins élevé, dont la mise en œuvre est plus simple et fiable.

Si l'on conserve la base de transferts stables du paramètre  $Q$  fournie par la relation (3.31), il s'avère possible d'approcher les spécifications sur les contraintes fréquentielles et temporelles par des inégalités linéaires, et le problème peut ensuite être résolu par une minimisation sous contraintes de type inégalité.

### III.8.1. Utilisation de la Norme $H_\infty$ pour les spécifications fréquentielles

La relation (3.20) peut s'écrire de la façon suivante [8]:

$$\min_{Q \in RH_\infty} \left\| P(q^{-1})W(q^{-1}) \right\|_\infty = \min_{Q \in RH_\infty} \max_{\substack{\omega \\ 0 \leq \omega \leq \pi}} |T_1 + T_2 Q| \quad (3.32)$$

en considérant que chaque expression  $P$  du Tableau 3.1 peut se mettre sous la forme  $T_1 + T_2 Q$ .

Soit :

$$\min_{Q \in RH_\infty} \max_{\substack{\omega \\ 0 \leq \omega \leq \pi}} |T_1(e^{-j\omega}) + T_2(e^{-j\omega})Q(e^{-j\omega})| \quad (3.33)$$

En notant  $\gamma$  le majorant de la relation précédente, et en discrétisant de demi-cercle unité, il vient :

$$|T_1(e^{-j\theta_k}) + T_2(e^{-j\theta_k})Q(e^{-j\theta_k})| \leq \gamma \quad \text{avec : } \theta_k = \frac{\pi(k-1)}{N-1} \quad \text{pour } k = 1, \dots, N$$

Avec  $Q$  généré par une base de transferts stables (3.31), on déduit :

$$\left| \underbrace{T_1(e^{-j\theta_k})}_{T_{1k}} + \underbrace{T_2(e^{-j\theta_k}) \left[ Q_0(e^{-j\theta_k}) \dots \dots \dots Q_{n_q}(e^{-j\theta_k}) \right]}_{T_{2k}} \right| \leq \gamma$$

$\left[ \begin{array}{c} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n_q} \end{array} \right]_{\alpha}$

Soit, en simplifiant la notation :

$$|T_{1k} + T_{2k} \alpha| \leq \gamma \quad \text{pour } k = 1, \dots, N$$

Cette inégalité portant sur le module, du type  $|u| \leq \gamma$ , est une contrainte quadratique. Il est possible de l'approximer par les quatre inégalités suivantes [8],[16]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u) + \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \\ \operatorname{Re}(u) - \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \\ -\operatorname{Re}(u) + \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \\ -\operatorname{Re}(u) - \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à réécrire les quatre inégalités ci-dessus sous la forme :

$$AX - B \leq 0 \tag{3.34}$$

La première de ces inégalités :

$$\operatorname{Re}(T_{1k} + T_{2k} \alpha) + \operatorname{Im}(T_{1k} + T_{2k} \alpha) \leq \gamma \tag{3.35}$$

après la simplification on obtient :

$$\left[ \operatorname{Re}(T_{2k}) + \operatorname{Im}(T_{2k}) - 1 \right] \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} - \left[ -\operatorname{Re}(T_{1k}) - \operatorname{Im}(T_{1k}) \right] \leq 0 \tag{3.36}$$

En regroupant les quatre inégalités, on obtient finalement le critère à minimiser sous forme matricielle:

$$\min_{AX - B \leq 0} CX \tag{3.37}$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(T_{21}) + \operatorname{Im}(T_{21}) & -1 \\ \operatorname{Re}(T_{21}) - \operatorname{Im}(T_{21}) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ -\operatorname{Re}(T_{2N}) - \operatorname{Im}(T_{2N}) & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(4N+1) \times (n_q+2)} & B &= \begin{bmatrix} -\operatorname{Re}(T_{11}) - \operatorname{Im}(T_{11}) \\ -\operatorname{Re}(T_{11}) + \operatorname{Im}(T_{11}) \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(T_{1N}) + \operatorname{Im}(T_{1N}) \\ 0 \end{bmatrix}_{(4N+1) \times 1} \\ X^T &= \begin{bmatrix} \alpha_0 & \dots & \alpha_{n_q} & \gamma \end{bmatrix}_{1 \times (n_q+2)} & C &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times (n_q+2)} \end{aligned}$$

Avec : A et B sont des matrices qui dépendent de  $T_{1k}$  et  $T_{2k}$ .

C : c'est un vecteur qui contient les éléments que nous cherchons.

### III.8.2. Respect d'un gabarit temporel

De façon similaire à la manipulation effectuée au paragraphe précédent, un transfert  $H_{ij}$  de la relation (3.20) devient [1],[42]:

$$H_{ij} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 Q \quad (3.38)$$

Soit encore, si l'on conserve la base des transferts stables fournie par la relation (3.29) :

$$\frac{s_i(t)}{e_j(t)} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 \sum_{l=0}^{n_q} \alpha_l Q_l \quad (3.39)$$

La réponse à  $e_j(t)$  s'exprime donc par :

$$s_i(t) = \tilde{T}_1 e_j(t) + \tilde{T}_2 \alpha_0 Q_0 e_j(t) + \dots + \tilde{T}_2 \alpha_{n_q} Q_{n_q} e_j(t) \quad (3.40)$$

En notant enfin  $s_1(t) = \tilde{T}_1 e_j(t)$  et  $s_{2i}(t) = \tilde{T}_2 Q_i e_j(t)$ , il vient :

$$s_i(t) = s_1(t) + \begin{bmatrix} s_{20}(t) & s_{21}(t) & \dots & s_{2n_q}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n_q} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

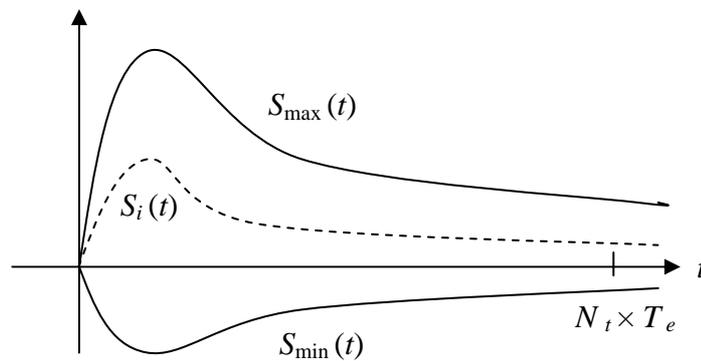


Figure 3.12 : Gabarit temporel

En considérant les  $(N_t + 1)$  premières valeurs de la réponse  $s_i(t)$  et les valeurs maximale  $s_{\max}(t)$  et minimale  $s_{\min}(t)$  du gabarit temporel, voir Figure 3.12, on obtient l'inégalité matricielle suivante :

$$\left. \begin{array}{l} s_i(t) - s_{\max}(t) \leq 0 \\ -s_i(t) + s_{\min}(t) \leq 0 \end{array} \right\} \text{ pour } t_0, t_1 \dots t_{N_t} \quad (3.42)$$

Soient les contraintes supplémentaires :

$$\tilde{A}X - \tilde{B} \leq 0 \quad (3.43)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} s_{20}(t_0) & s_{21}(t_0) & \cdots & s_{2n_q}(t_0) & 0 \\ s_{20}(t_1) & s_{21}(t_1) & \cdots & s_{2n_q}(t_1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{20}(t_{N_i}) & s_{21}(t_{N_i}) & \cdots & s_{2n_q}(t_{N_i}) & 0 \\ -s_{20}(t_0) & -s_{21}(t_0) & \cdots & -s_{2n_q}(t_0) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -s_{20}(t_{N_i}) & -s_{21}(t_{N_i}) & \cdots & -s_{2n_q}(t_{N_i}) & 0 \end{bmatrix}_{(2N_i+2) \times (n_q+2)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} S_{\max}(t_0) - s_1(t_0) \\ S_{\max}(t_1) - s_1(t_1) \\ \vdots \\ S_{\max}(t_{N_i}) - s_1(t_{N_i}) \\ -S_{\min}(t_0) + s_1(t_0) \\ \vdots \\ -S_{\min}(t_{N_i}) + s_1(t_{N_i}) \end{bmatrix}_{(2N_i+2) \times 1}$$

Il convient alors d'ajouter ces contraintes (3.43) à celles définies par la relation (3.37)

$$\min \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (3.44)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix} \mathbf{X} - \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \leq 0$$

Le problème initial devient ainsi un problème de programmation linéaire qui peut être résolu par des algorithmes classiques. Par ailleurs, puisque le problème est convexe en  $Q$ , la convergence vers le minimum global est garantie, tout au moins dans l'espace de recherche. Dans notre travail on a utilisé un algorithme de programmation quadratique. En cas de problèmes de conditionnement numérique lors de la résolution, il est préférable d'ajouter un terme quadratique à l'optimisation, ce dernier s'exprimant par :

$$\min \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} + \mathbf{C} \mathbf{X} \quad \text{avec } \mathbf{H} \ll \mathbf{I} \quad (3.45)$$

Lorsque les solutions recherchées ne satisfont pas correctement les gabarits imposés, c'est à dire, lorsque le problème n'a pas de solution, il est nécessaire soit de relâcher les contraintes, soit d'augmenter l'espace de recherche, afin de trouver un problème solvable. A partir d'un problème solvable, on peut alors durcir les contraintes afin de s'approcher le plus possible du problème sans solution initiale.

### 3.9. Conclusion

Ce chapitre développe une méthode proposée pour la robustification des lois de commande GPC basée sur la paramétrisation de Youla. Le paramètre de Youla obtenu par cette méthode de robustification est un compromis entre toutes les spécifications de stabilité robuste et de performances nominales désirées. Par ailleurs, la paramétrisation de Youla étant une procédure coûteuse en termes de taille importante du correcteur obtenu, une approximation du paramètre de Youla (d'ordre élevé) par un paramètre d'ordre réduit s'impose, la démarche adoptée ici considère des méthodes spécifiques à la représentation sous forme d'une fonction de transfert.

L'utilisation de plusieurs spécifications en boucle fermée permet d'obtenir une synthèse mixte robustesse/performance nominale, où la relation entre les deux est facile à ajuster grâce à l'utilisation de gabarits temporels pour les spécifications temporelles en boucle fermée.

La méthode proposée est enfin applicable à tout correcteur *RST* polynomial et peut être utilisée soit pour modifier la dynamique de régulation avec l'objectif de robustifier le correcteur initial, soit pour modifier la dynamique de poursuite, comme nous allons les montrer dans le chapitre suivant. Par ailleurs, tout correcteur peut être transformé en une structure *RST* polynomiale et donc la méthode est applicable à tout correcteur initial.

## Chapitre 4

### Application de la stratégie de robustification sur processus

IV.1. Application de la commande prédictive sous contraintes à un problème de positionnement .....	63
IV.2. Introduction .....	64
IV.3. Modélisation .....	58
IV.4. Résultats .....	58
IV.5. Conclusion .....	67

## **IV.1. Application de la commande prédictive sous contraintes à un problème de positionnement**

Ce chapitre envisage l'application des structures de commande prédictive sous contraintes développées lors des chapitres précédents à un système électromécanique. Le problème choisi consiste à commander en position une machine asynchrone, processus réputé sensible du point de vue des performances dynamiques. L'approche se sert des modèles existants pour aboutir à la construction de lois de type GPC de faible complexité. Le problème de positionnement de la machine asynchrone envisagé ici s'intègre dans la problématique dite transitive rapide et implique pour le banc considéré des périodes d'échantillonnage faibles de sorte que l'application des lois de commande basées sur la résolution totale en ligne des problèmes d'optimisation s'avère déconseillée, leur complexité ne permettant pas la construction de la commande en temps réel.

La présence de contraintes et leurs influences sur le fonctionnement et sur la structure de la loi de commande constituent les principaux points abordés. L'analyse et la synthèse de la loi de commande prédictive, pour l'exemple choisi, reprennent les résultats théoriques décrits lors des chapitres précédents. On retrouve ainsi les trois types de contraintes rencontrés le plus souvent dans la pratique : les contraintes de fonctionnement (caractérisées dans notre cas par des contraintes sur le signal de commande, image du couple sur la machine), les contraintes de performance (illustrées ici par des contraintes sur l'erreur de positionnement) ainsi que des contraintes de stabilité (contraintes à la fin de l'horizon de prédiction). Soulignons que, dans la pratique, la commande des machines asynchrones est assurée par des lois classiques et qu'en présence de contraintes, ces schémas sont très souvent invalidés ou nécessitent des mécanismes de supervision (souvent difficiles à régler) pour empêcher la violation des contraintes. La philosophie de commande prédictive offre en ce sens une formulation temporelle qui permet l'inclusion des contraintes dès le début du processus de synthèse.

Ce chapitre débute par une introduction proposant une description rapide de l'application considérée et du modèle utilisé, ce dernier constituant l'élément primordial pour la construction des lois prédictives. Après un rappel des schémas de commande classiquement implantés sur cette machine et qui serviront de référence en termes de performance, les techniques de commande prédictive sont ensuite élaborées en soulignant les avantages offerts durant la phase de synthèse. Les premières limitations introduites seront induites par des contraintes terminales permettant l'utilisation d'horizons de prédiction plus faibles. Les contraintes de type inégalité considérées ensuite seront placées sur la commande, incrément de commande et sur la sortie du système.

La commande mise en œuvre dans ce travail repose sur un régulateur GPC de position et les résultats obtenus sont donc comparés à ceux obtenus avec le PID. Le paragraphe 4.3.5 est dédié à la synthèse du correcteur GPC. Le paragraphe 4.3.6 ensuite examine la structure du régulateur PID utilisé. Un type de robustification a été mis en œuvre, visant à diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande. Dans ce cas, des contraintes au niveau du rejet de perturbation sont prises en compte.

## IV.2. Introduction

L'application choisie se classe dans la catégorie des machines électriques, et plus particulièrement des machines asynchrones, type de moteurs électriques très répandu de nos jours, avec des versions variant de quelques watts jusqu'aux mégawatts. Même si la machine asynchrone est très appréciée pour ses qualités de robustesse, de fiabilité et de coût, les variateurs de vitesse ont parfois posé problème (alimentation à fréquence variable), des réponses acceptables n'ayant été fournies qu'après l'émergence de la technologie à semi-conducteurs [22].

Les progrès de l'électronique de puissance ont ouvert la voie à l'application de stratégies de commande avancées une effervescence a ainsi été constatée depuis plusieurs années en ce qui concerne les sujets de recherche liés à la commande d'entraînements électriques, concrétisée au niveau théorique par les travaux de [36]. Dans la suite des développements, la présentation du système ainsi que la partie de modélisation nécessaire pour l'application des techniques prédictives sont largement inspirées des travaux de [38] inclus dans un numéro du JESA (Journal européen des systèmes automatisés) dédié à ce sujet.

La structure de l'actionneur asynchrone regroupe les blocs suivants (Figure 4.1) :

- L'alimentation en tension constante
- Un onduleur triphasé de tension
- Des capteurs de courant
- La machine asynchrone en elle-même
- Le capteur de position
- Une carte interface entre les éléments mentionnés ci-dessus et l'ordinateur
- L'ordinateur

La technique de robustification précédente est maintenant appliquée sur un contrôle de position de référence effectuant un entraînement par moteur à induction (Commande Directe de Flux Orientée (CDFO) du moteur à induction (asynchrone) à double alimentation (MADA)). La boucle externe de position incluant la loi prédictive qui nous intéresse ici, exprimée sous forme *RST*, l'objectif est

alors de robustifier ce correcteur initial, de sorte que la loi de commande soit moins sensible (robuste) aux bruits de mesure et aux incertitudes de modèle (variations des paramètres) à haute fréquence. Cependant, cette robustification doit être réalisée, d'une part, en conservant le comportement entrée/sortie imposé par le correcteur initial (dynamique de poursuite) et, d'autre part, en respectant un gabarit spécifié au préalable pour le rejet des perturbations, afin de ne pas trop ralentir la dynamique de régulation de la boucle fermée [42].

Les caractéristiques de moteur à induction sont : Puissance  $P = 1,1 \text{ kW}$ , couple nominal  $\tau_{\text{rom}} = 7 \text{ nm}$ . Le capteur de position a des points de 14400 par rotation. Le contrôle interne de ce moteur est un contrôle direct axé sur le terrain (DFOC), avec un taux d'échantillonnage  $76.6 \mu\text{s}$ . Figure 4.1 montre l'architecture de contrôle de la position du moteur à induction.

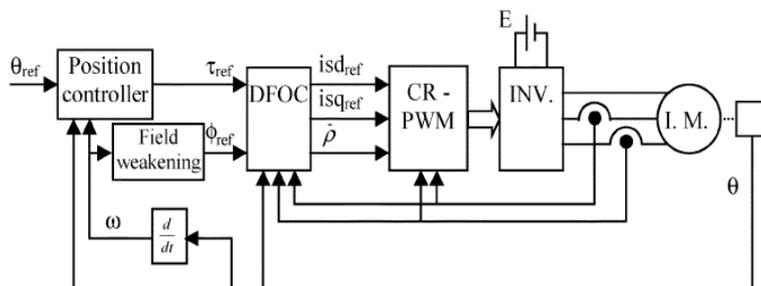


Figure.4.1. Structure du DFOC avec un correcteur de position.

### IV.3. Modélisation

La construction des lois de commande prédictive nécessite l'existence d'un modèle de comportement du moteur issu d'une étape d'identification expérimentale. L'étape de modélisation effectuée révèle les éléments caractéristiques suivants.

#### IV.3.1. Modèle du système électrique (commande en couple)

La partie électrique est représentée par une fonction de transfert d'ordre un du couple de référence vers le couple effectif. Elle englobe la boucle de courant, la commande à flux orienté, la MLI (Modulation de Largeur d'Impulsion) et la dynamique de l'onduleur. Cette fonction fait donc intervenir une constante de temps  $\tau_e$  :

$$\frac{C}{C^*} = \frac{1}{1 + \tau_e s} \quad s \text{ variable de Laplace} \quad (4.1)$$

où  $C$  est le couple électromagnétique et  $C^*$  la consigne en couple.

### IV.3.2. Modèle du système mécanique

La partie mécanique du moteur est caractérisée par l'inertie du moteur et de la charge ramenée sur l'arbre moteur  $J$ , le coefficient de frottement visqueux  $f$  et le couple de charge  $\Gamma$ . La constante  $\tau_e$  représentant la partie électrique est négligeable en comparaison avec la constante de temps mécanique équivalente. La relation entre le couple électromécanique  $C$  et la vitesse  $\Omega$  est donc de la forme [22] :

$$\left. \begin{array}{l} C = J \frac{d\Omega}{dt} + f \Omega \\ C = (J s + f) \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Omega}{C} = \frac{1}{J s + f} \quad (4.2)$$

### IV.3.3. Facteur de transformation des unités

La vitesse fournie en [ $rad/s$ ] nécessite l'introduction d'un facteur de proportionnalité pour déterminer son expression en [ $tour/min$ ] :

$$\Omega [rad / s] \xrightarrow{\frac{K=60}{2\pi}} \tilde{\Omega} [tour / min] \quad (4.3)$$

### IV.3.4. Intégration de la vitesse

La position est liée à la vitesse par une simple intégration :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\ \tilde{\Omega} = s \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\theta}{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{s} \quad (4.4)$$

Ces éléments permettent de construire un modèle complet du système à commander, utilisé lors de la synthèse des lois prédictives. La Figure 4.2 résume ce modèle, reprenant les parties mécanique et électrique ainsi que le bloqueur et l'échantillonneur, caractérisant l'interface entre le système analogique et le PC.

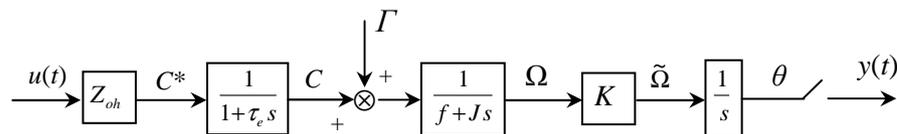


Figure 4.2 : Modèle de la machine asynchrone.  $C^*$  consigne en couple;  $C$  couple électromagnétique ;  $\Gamma$  charge ;  $\Omega$  vitesse angulaire ;  $\theta$  position.

Finalement, le modèle utilisé est représenté par une fonction de transfert discrète ( pour  $J = 0.007 \text{ Kgm}^2$  ,  $f = 0,01 \text{ Nm rad}^{-1}$  et une période d'échantillonnage de  $T_e = 14 \times 76,6 \mu\text{s} = 1,0724 \text{ ms}$ ) entre le couple électromécanique et l'écart angulaire [22]:

$$\frac{\theta(q^{-1})}{u(q^{-1})} = \frac{10^{-4}(0.821q^{-1} + 0.8206q^{-2})}{(1 - q^{-1})(1 - 0.998q^{-2})} \quad (4.5)$$

#### IV.3.5. Structure de la machine asynchrone commandée par le correcteur *RST*

En se basant sur le modèle de la machine asynchrone décrit précédemment, des stratégies de commande classiques ou avancées peuvent être mises en place. Ce paragraphe présente les lois de commande qui peuvent être implémentées par des régulateurs de type *RST* (Figure 4.3).

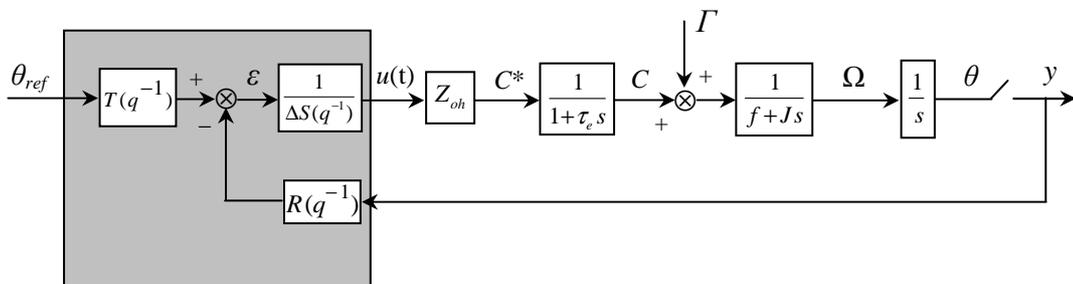


Figure 4.3 : Schéma bloc pour la commande basée sur des régulateurs *RST*

Notons que la restriction à cette classe de lois de commande, de faible complexité, implique que la famille des contraintes qui peuvent être prises en compte lors de la synthèse des algorithmes prédictifs est restreinte à des contraintes de type égalité.

#### IV.3.6. Structure de commande de type PID

Ce paragraphe détaille la stratégie de commande classique basée sur le régulateur PID, qui servira de référence pour les comparaisons à venir. Notons que cette stratégie de commande est relativement sophistiquée, puisqu'elle fait intervenir un régulateur PID avec anticipation et filtre de l'action dérivée [22],[36].

La présentation de cette structure est divisée en trois parties. La première développe la synthèse des paramètres du régulateur PID ; la deuxième montre l'implantation du correcteur et finalement, la troisième partie présente la structure *RST* de ce correcteur, utilisée pour l'analyse fréquentielle de la commande obtenue, et les résultats de cette analyse.

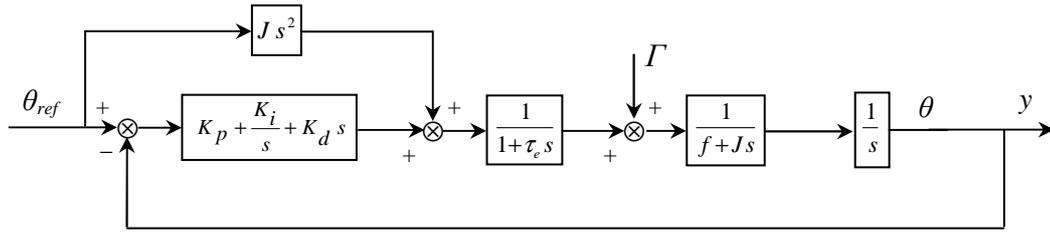


Figure 4.4 : Modèle utilisé pour la synthèse du PID

Le choix des paramètres du régulateur PID s'effectue à partir d'un modèle simplifié pour lequel la constante de temps électrique est négligée par rapport à la constante mécanique, de même pour le terme de frottement visqueux dans le transfert mécanique. Avec ce modèle simplifié (en fait un double intégrateur), la fonction de transfert entre la perturbation de couple  $\Gamma$  et la sortie  $\theta$  est :

$$\frac{\theta}{\Gamma} = \frac{\frac{1}{J}s}{s^3 + \frac{K_d}{J}s^2 + \frac{K_p}{J}s + \frac{K_i}{J}} \quad (4.6)$$

On identifie alors l'équation caractéristique de ce transfert à la relation :

$$(s + \omega_0)(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2) \quad (4.7)$$

d'où :

$$\begin{aligned} K_p &= \omega_0^2 (1 + 2\xi) J \\ K_i &= \omega_0^3 J \\ K_d &= \omega_0 (1 + 2\xi) J \end{aligned} \quad (4.8)$$

L'objectif est ainsi de fixer la dynamique du rejet de perturbation, la dynamique de poursuite fixée par  $\omega_0$  dépend en fait du terme d'anticipation. Tous les paramètres de réglage sont linéairement dépendants de l'inertie et de cette façon, la valeur de  $J$  peut être utilisée comme un potentiomètre pour ajuster le PID sur le système réel. Pour  $J = 0,007 \text{ kgm}^2$ ,  $\xi = 1$  et  $\omega_0 = 50 \text{ rad/s}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} K_p &= 52,5 \text{ Nm/rad} \\ K_i &= 875 \text{ Nm/rad} \\ K_d &= 1,05 \text{ Nm/rad} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ce régulateur PID peut être implanté de façon numérique en utilisant la transformation d'Euler avec  $T_e = 1,0724 \text{ ms}$  et un filtre pour l'action dérivée (fréquence de coupure de  $1500 \text{ rad/s}$ ). Pour

faciliter l'analyse, la structure d'un tel régulateur PID peut s'exprimer sous la forme RST polynomiale équivalente :

$$\Delta S(q^{-1})C^*(t) = T(q^{-1})\theta_{ref}(t) - R(q^{-1})\theta(t) \quad (4.10)$$

donnant ici :

$$\begin{aligned} S_{PID}(q^{-1}) &= 1 + 1,218q^{-1} + 0,371q^{-2} \\ R_{PID}(q^{-1}) &= 2586,983 - 5054,545q^{-1} + 2489,434q^{-2} - 19,447q^{-3} \\ R_{PID}(q^{-1}) &= 7065,841q - 11564,441 - 2740,862q^{-1} + 9798,461q^{-2} + 302,1q^{-3} - 2254,49q^{-4} \end{aligned} \quad (4.11)$$

#### IV.4. Résultats

##### ➤ Correcteur GPC robustifié

La synthèse du correcteur GPC se divise en trois parties. Une première partie est dédiée à la synthèse de contrôleur polynomial initial invariant  $R_0S_0T_0$  avec les paramètres de réglages  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_u$  et  $\lambda$ , le correcteur GPC-RST est synthétisé avec contraintes sur la sortie du système, le signal de commande et l'incrément de commande représentés sous forme LMI. La deuxième partie présente une première robustification de contrôleur  $R_0S_0T_0$  par le premier paramètre de Youla  $Q_{11}$  vérifie certaines spécifications fréquentielle et temporelle. La troisième partie présente une deuxième robustification par la double paramétrisation de Youla où l'on considère en plus des spécifications de la première robustification afin de diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande.

##### *i. Première étape: la conception du correcteur initial avec contraintes sous forme LMI*

Un correcteur RST - GPC initial est synthétisé avec  $C(q^{-1})=1$  et les paramètres de réglage suivants:  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 16$ ,  $N_u = 1$ ,  $\lambda = 0.0001$ ,  $m = 2$ .

On considère un ensemble de contraintes sur la commande et l'incrément de commande (décrit par les limitations  $u_{\min} = 0$ ;  $u_{\max} = 3$  et  $\Delta u_{\min} = -0,3$ ;  $\Delta u_{\max} = 0,3$ ), et sur la sortie (avec les limitations  $y_{\min} = 0$  et  $y_{\max} = 200$ ) venant s'ajouter aux contraintes terminales déjà décrites précédemment. L'ensemble des contraintes se résume donc à :

$$\begin{cases} u_{\min} \leq u(t+k) \leq u_{\max}, k = 1 \dots N_u \\ \Delta u_{\min} \leq \Delta u(t+k) \leq \Delta u_{\max}, k = 1 \dots N_u \\ y_{\min} \leq \hat{y}(t+k) \leq y_{\max}, k = N_1 \dots N_2 \\ \hat{y}(t+N_2+k) = w(t+N_2+j), k = 1 \dots N_c \end{cases} \quad (4.12)$$

Avec ce réglage particulier, le régulateur GPC-RST équivalent sous contraintes est obtenu par les trois modules polynomiaux suivants:

$$\begin{aligned}
R_0(q^{-1}) &= 0.284 - 0.237 q^{-1} - 0.0048 q^{-2} \\
S_0(q^{-1}) &= 1 + 0.734 q^{-1} \\
T_0(q^{-1}) &= 0.01006 + 0.00869 q^{-1} + 0.00731 q^{-2} + 0.005949 q^{-3} + 0.00457 q^{-4} + 0.00319 q^{-5} + \\
&\quad 0.00182 q^{-6} + 0.00043 q^{-7}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ii. deuxième étape : première robustification de correcteur initial  $R_0S_0T_0$

### ✓ Choix de paramètres pour les spécifications fréquentielles

La robustification de cette commande implique tout d'abord le choix d'un transfert à minimiser, et d'une pondération  $W$ .

- pour la fonction de transfert à minimiser

$$P(q^{-1}) = \frac{AR_0}{A_c} + \frac{A^2\Delta}{A_c} Q_{11} = T_1 + T_2 Q_{11} \tag{4.14}$$

A partir de la relation (3.32) la dernière devienne :

$$\min_{Q_{11}} \left\| W \left[ \frac{\overbrace{AR_0}^{T_1}}{A_c} + \frac{\overbrace{A^2\Delta}^{T_2}}{A_c} Q_{11} \right] \right\| = \min_{Q_{11}} \max_{\omega} |T_1 + T_2 Q_{11}| \tag{4.15}$$

- pour la pondération  $W(q^{-1})$

On prend comme premier pas une pondération égale à 1 ( $W(q^{-1}) = 1$ ), et après on a pondéré l'avantage des hautes fréquences. Considérons ici :  $W(q^{-1}) = \frac{1 - 0,3q^{-1}}{0,8}$

### ✓ Choix de paramètres pour les spécifications temporelles

Il est ensuite nécessaire de se donner le transfert et le gabarit désiré pour le rejet de la perturbation. Le transfert entre la perturbation  $d(t)$  (échelon unité) et la sortie  $y(t)$  donné par :

$$\frac{y(t)}{d(t)} = \frac{\Delta S_0}{A_c} - \frac{q^{-1} B \Delta}{A_c} Q_{11} \tag{4.16}$$

Avec ce choix de paramètres (pondération et gabarit), la recherche du paramètre  $Q_{11}$  est réalisée via une structure de programmation linéaire, relation (3.31), en imposant un polynôme d'ordre 40, ramené ensuite à une fonction de transfert d'ordre 2 par l'algorithme de moindre carrée. On obtient:

$$Q_{11} = \frac{-0,2184 + 0,1690q^{-1}}{1 - 1,6377q^{-1} + 0,6889q^{-2}} \quad (4.17)$$

Le choix de  $N_t$  est lié au gabarit imposé et dépend du temps de réponse du système. La valeur de  $N$ , nombre de points de discrétisation du demi-cercle unité, est fonction de l'allure du critère fréquentiel à minimiser et du degré du polynôme. Dans cet exemple, on a choisi  $N = 60$ . La validité des paramètres choisis est déterminée à posteriori grâce à une simulation temporelle et fréquentielle avec le correcteur initial obtenu.

L'ordre du polynôme a été déterminé par essais successifs, avec un ordre initial de 20, augmenté progressivement. Le choix d'un transfert d'ordre 2 se justifie de la même façon.

La Figure 4.5 montre le rejet de perturbation et la Figure 4.6 représente la marge de robustesse  $B_r$  d'un correcteur initial et d'un correcteur robustifié par la première paramétrisation de Youla  $Q_{11}$ .

Concernant le gabarit pour le rejet de perturbation décrit par  $\Phi_{env}$ , on a considéré ici un gabarit en relation avec le rejet de perturbation obtenu avec le correcteur PID, afin de comparer les résultats. La Figure 4.5 donne ainsi le gabarit imposé ainsi que le rejet de perturbation obtenu avec le correcteur PID et le correcteur GPC initial et robustifié par  $Q_{11}$ . Ce rejet correspond à une perturbation de couple en échelon de 3,5 Nm. A la différence de la perturbation considérée au chapitre 3.

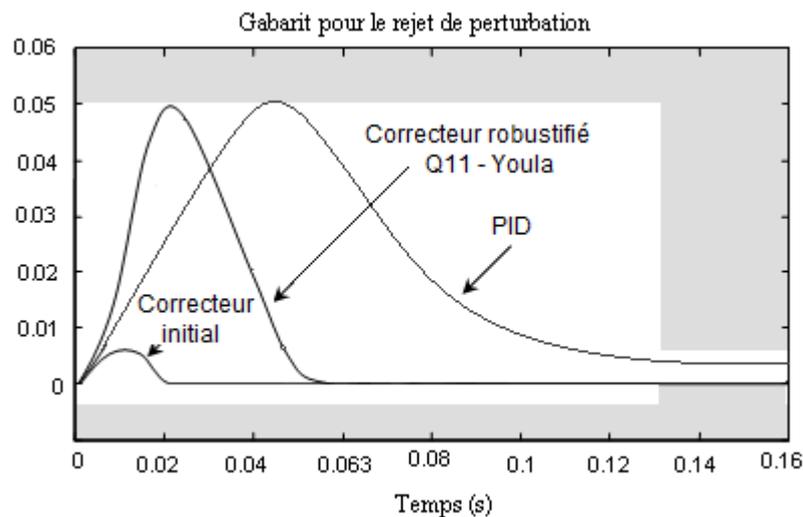


Figure 4.5 : Gabarit pour le rejet de perturbation pour les correcteurs, initial, PID et robustifié par  $Q_{11}$

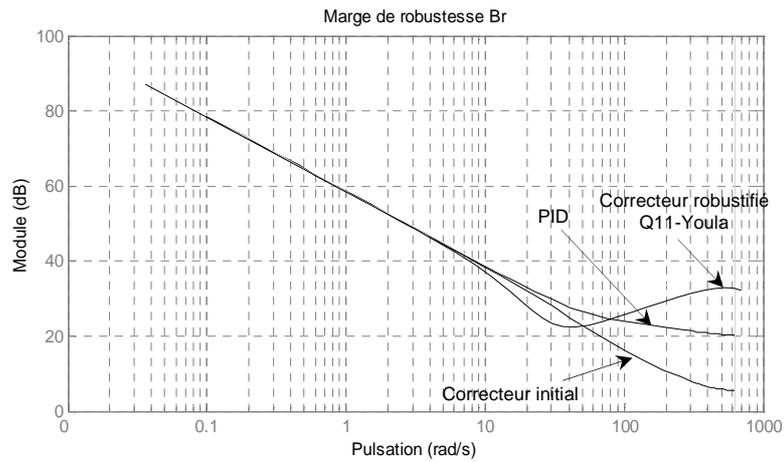


Figure 4.6 : Marge de robustesse  $B_r$  pour les correcteurs, initial, PID et robusteifié par  $Q_{11}$

On constate aisément que le correcteur robusteifié induit au système un rejet de perturbation plus rapide et une meilleure marge de robustesse que pour le cas du correcteur PID.

En appliquant cette loi de commande prédictive robusteifiée, les résultats temporels de la Figure 4.7 mettent en évidence une erreur de poursuite de niveau faible (ce qui est normal puisque le comportement entrée/sortie de la boucle fermée est préservé) et un signal de commande subissant l'influence du bruit de mesure.

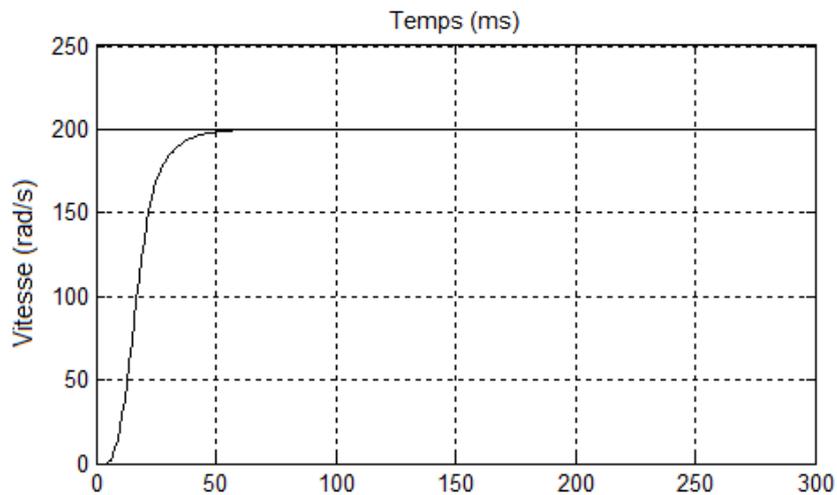


Figure.4.7 : Position de réponse pour le correcteur initial GPC.

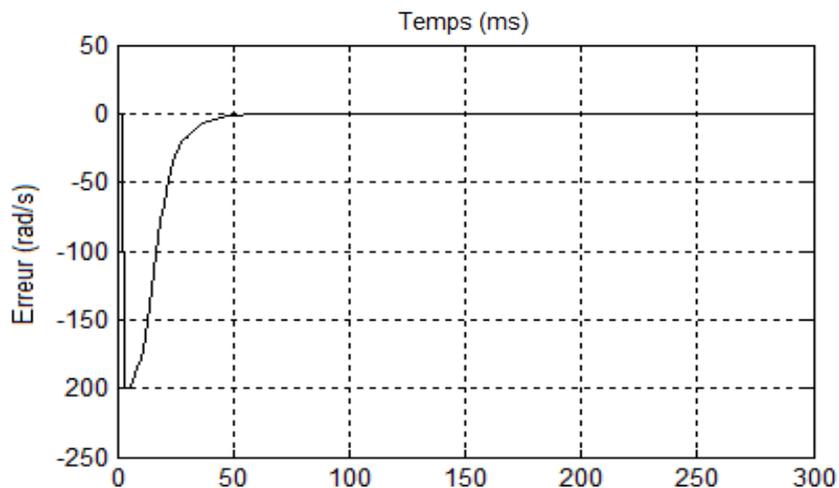


Figure.4.8 : L'erreur de position pour le correcteur initial GPC.

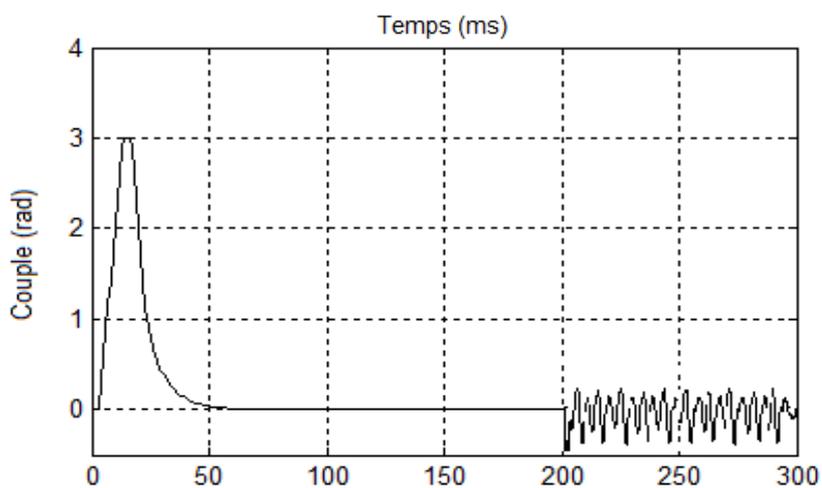


Figure.4.9 : Signal de commande pour le correcteur initial GPC.

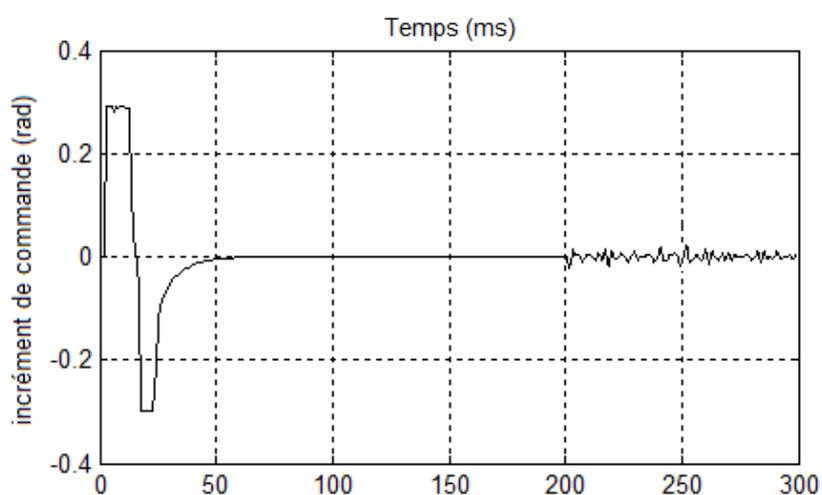


Figure.4.10 : Signal d'incrément de commande pour le correcteur initial GPC.

Nous pouvons voir sur les figures ci-dessus que la dynamique de poursuite est très rapide sans dépassement (Figure 4.7), mais le bruit sur le signal de commande est très important (figure 4.9). Ce comportement de la dynamique de régulation s'explique par le choix  $C(q^{-1})=1$ . Avec ce choix, tous les pôles de l'observateur de la loi de commande sont placés à l'origine, ce qui induit une dynamique de régulation très rapide (rejet de perturbation très rapide), mais aussi une amplification du bruit de mesure sur la commande.

Le rejet des perturbations est obtenu avec l'action du correcteur initial. Les différents essais en simulation nous en permettent de choisir un  $N_t = 38$ . La Figure 4.5 illustre que le gabarit imposé pour le rejet de perturbation est pratiquement respecté pour le correcteur robustifié.

L'analyse de l'effet du bruit de mesure sur la commande peut être effectuée à partir de la Figure 4.11. En effet, cette marge de robustesse (1.13) correspond à l'inverse du transfert bruit de mesure/commande [42].

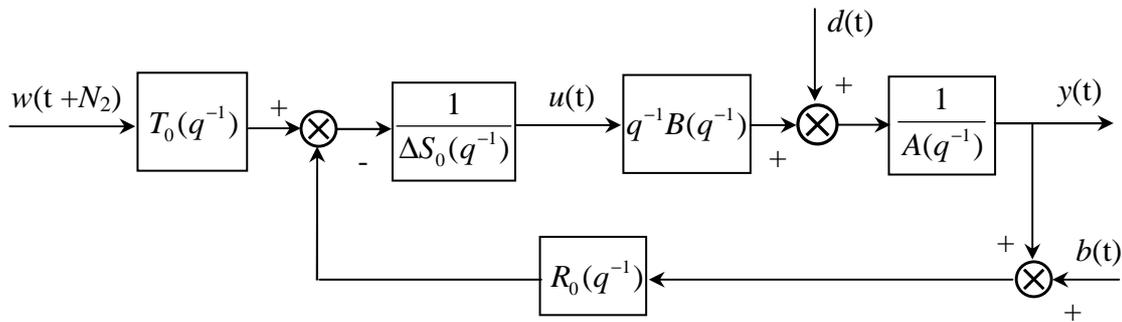


Figure 4.11 : Transfert bruit de mesure/commande

Le transfert bruit de mesure/commande correspond à :

$$\frac{u(t)}{b(t)} = -\frac{R(q^{-1})A(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta S(q^{-1}) + q^{-1}A(q^{-1})R(q^{-1})} \Rightarrow \left| \frac{u(t)}{b(t)} \right| = \frac{1}{B_r} \quad (4.18)$$

On observe donc que le plus fort filtrage à haute fréquence correspond aux méthodes des deux correcteurs PID et initial.

iii. Troisième étape : Deuxième robustification par la double paramétrisation de Youla  $Q_{12}$

#### ➤ Robustification face à des bruits de mesure

L'objectif de cette robustification est de diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande, tout en garantissant le respect d'un gabarit pour le rejet de perturbation. Robustifier pour diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande se traduit par une robustification maximisant l'incertitude additive directe tolérée sans perte de stabilité, incertitudes qui peuvent être, par

exemple, des dynamiques négligées à haute fréquence. Notons que l'on fixe  $Q_{22} = 0$  puisque l'on souhaite conserver le comportement entrée/sortie fourni par le correcteur GPC. On déduit alors le problème d'optimisation suivant (en reprenant les notations des chapitres précédents). Remplacement le correcteur initial  $R_0S_0T_0$  et  $Q_{11}$  dans (2.25) nous obtenons le nouveau correcteur  $R_1S_1T_1$ .

$$\begin{aligned}
 S_1(q^{-1}) &= 1 - 0.7882 q^{-1} + 0.0250 q^{-2} - 0.0174 q^{-3} \\
 R_1(q^{-1}) &= 1 + 280.0120 q^{-1} - 427.7740 q^{-2} - 186.5032 q^{-3} + 545.6994 q^{-4} - 211.5062 q^{-5} \\
 T_1(q^{-1}) &= 0.0478 q^{-1} + 0.1025 q^{-2} + 0.1161 q^{-3} + 0.1295 q^{-4} + 0.1430 q^{-5} + 0.1562 q^{-6} \\
 &\quad + 0.1693 q^{-7} + 0.1823 q^{-8} + 0.1952 q^{-9} + 0.2081 q^{-10} + 0.2206 q^{-11} + 0.2331 q^{-12} \\
 &\quad + 0.2457 q^{-13} + 0.1278 q^{-14} + 0.270 q^{-15} + 0.2820 q^{-16} - 13.3853 q^{-17} + 10.3550 q^{-18}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Pour robustifier ce nouveau correcteur, un filtre passe-haut est choisi en fonction de pondération, c'est de donner plus de poids aux fréquences élevées:

$$W(q^{-1}) = \frac{1 - 0,4 q^{-1}}{0,6} \tag{4.20}$$

La minimisation a été effectuée via une programmation linéaire, avec un paramètre  $Q_{12}$  polynomial d'ordre 60 et 180 points de discrétisation pour la réponse fréquentielle. Ce polynôme est ensuite approché par une fonction de transfert d'ordre 2. On obtient le paramètre suivant :

$$Q_{12} = \frac{57201,40 + 78188,64 q^{-1}}{1 - 0,1467 q^{-1} - 0,1240 q^{-2}} \tag{4.21}$$

Les Figures ci-dessus reproduisent les résultats temporels obtenus pour le cas de correcteur robustifié par la double paramétrisation de.

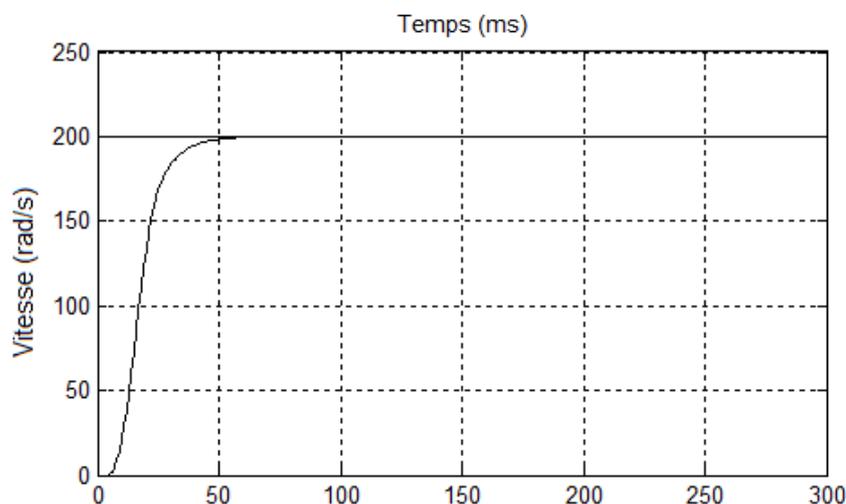


Figure.4.12. Position de réponse pour le correcteur robustifié par  $Q_{12}$

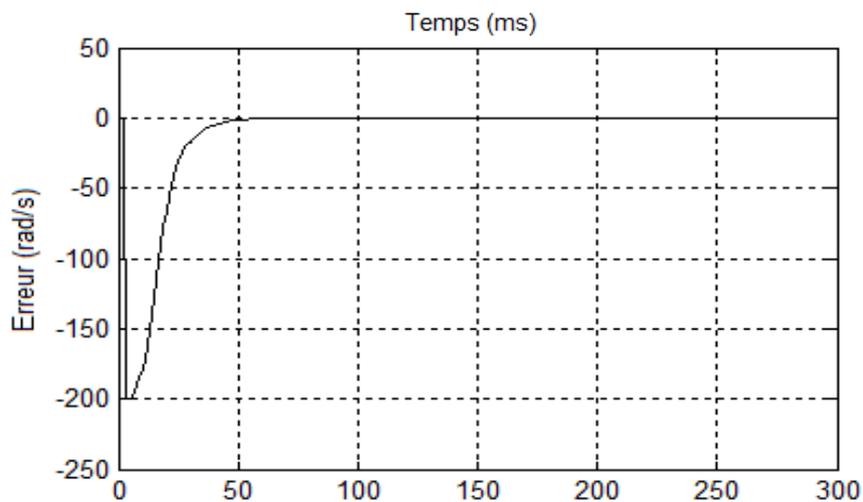


Figure.4.13. L'erreur de position pour le correcteur robustifié par  $Q_{12}$

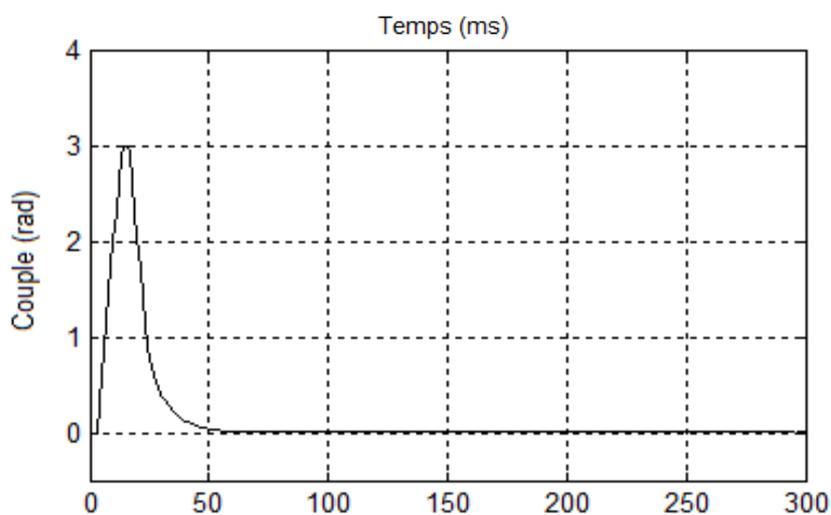


Figure.4.14. Signal de commande pour le correcteur robustifié par  $Q_{12}$ .

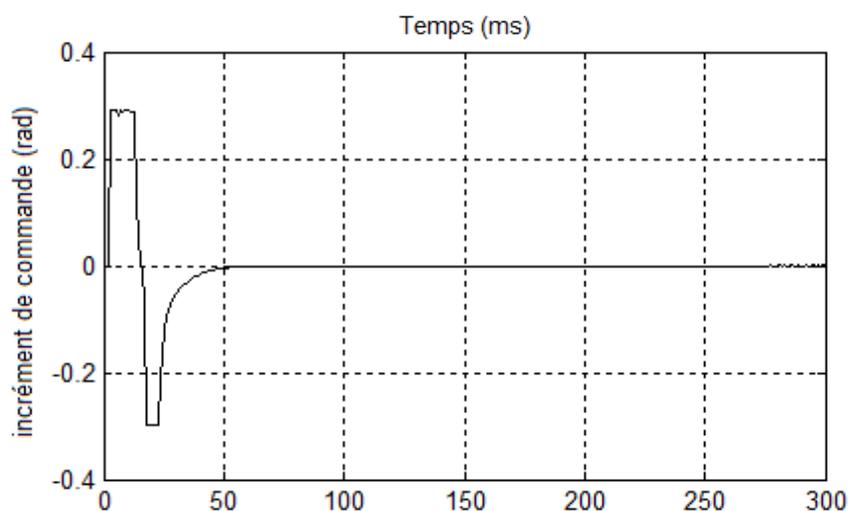


Figure.4.15. Signal d'incrément de commande pour le correcteur robustifié par  $Q_{12}$

Les deux Figures 4.14 et 4.15 montrent que le correcteur GPC-RST robustifié par la double paramétrisation de Youla réduit l'effet du bruit de mesure sur le signal de commande et le rejet de l'incertitude est plus rapide.

La Figure 4.16 montre le rejet de perturbation et la Figure 4.17 la marge de robustesse  $B_r$  obtenus pour le correcteur robustifié par la double paramétrisation de Youla, que l'on nommera Correcteur robustifié  $Q_{12}$ -Youla. Cette marge de robustesse correspond à l'inverse du transfert minimisé (4.18). Dans les deux cas, on a aussi superposé les résultats obtenus avec le correcteur initial et robustifié par le premier paramètre de Youla.

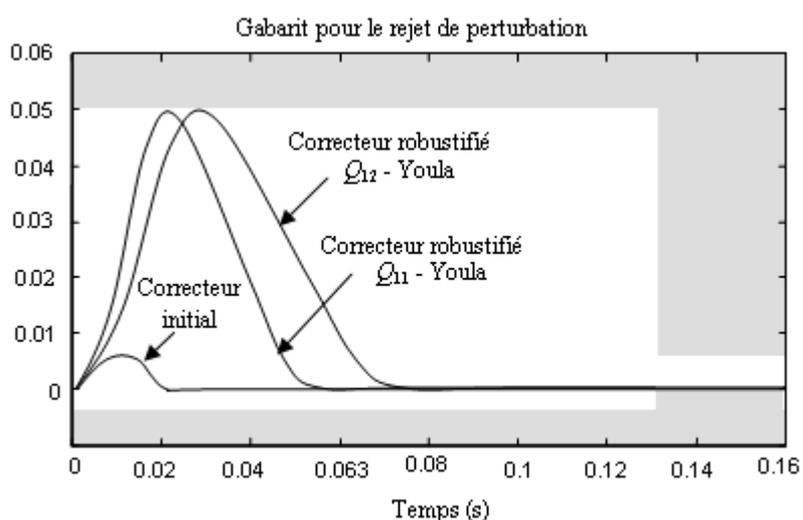


Figure 4.16 : Respect du gabarit pour le correcteur initial et robustifié par  $Q_{11}$  et  $Q_{12}$

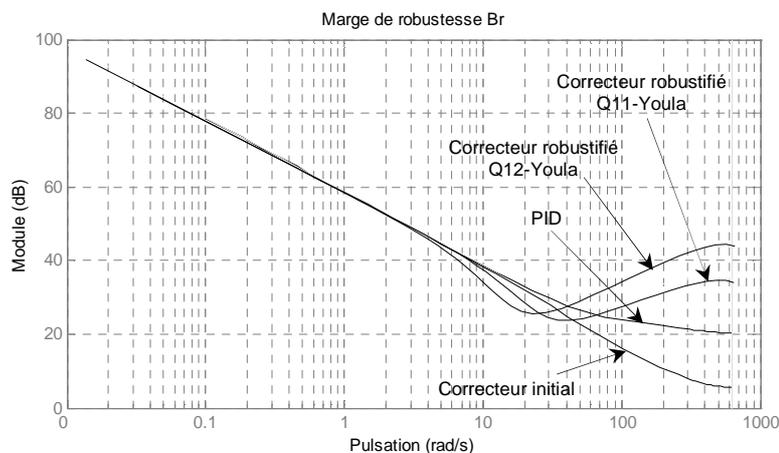


Figure 4.17 : Comparaison des marges de robustesse  $B_r$

La dernière Figure montre clairement que la stratégie proposée dans le cadre de ce travail, est que le correcteur qui est basé sur la double paramétrisation de Youla donne une meilleure marge de robustesse à haute fréquence tout en conservant un rejet de perturbation plus rapide.

### IV.3. Conclusion

Ce chapitre montre les résultats obtenus lors de l'application de notre technique de robustification à un système électromécanique, où on a mis en œuvre un système de positionnement piloté par un correcteur prédictif GPC robustifié. On a pu voir que la méthode développée permet de prendre en compte plusieurs contraintes sous forme LMI et spécifications fréquentielles et temporelles afin de faire face aux bruits de mesure du capteur de position. Avec la robustification proposée, on a pu robustifier un régulateur GPC initial, synthétisé avec  $C(q^{-1})=1$ , afin de diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande.

Cette robustesse en performance est obtenue grâce à la réalisation d'un compromis entre la performance nominale et la robustesse en stabilité. La performance nominale est assurée par le respect d'un gabarit temporel pour le rejet de perturbation. En effet, la prise en compte de spécifications sous forme de respect d'un gabarit temporel permet d'ajuster le compromis robustesse/performance d'une façon visuelle simple. En outre, grâce aux deux degrés de liberté du régulateur GPC, la robustification ne modifie pas le transfert entrée/sortie, de sorte que la performance nominale de la dynamique de poursuite obtenue avec le correcteur GPC initial est conservée.

On a comparé ensuite les caractéristiques de robustesse et performance obtenues par GPC avec celles obtenues avec un correcteur PID. On a pu constater que le correcteur GPC robustifié induit un meilleur suivi et un rejet de perturbation plus rapide que le correcteur PID pour un même effet du bruit de mesure sur le signal de commande. En outre, le correcteur GPC robustifié assure la même robustesse en performance face à une incertitude sur l'inertie du système que le correcteur PID, tout en ayant une marge de robustesse  $B_r$  plus grande en haute fréquence. Cette marge de robustesse plus grande a permis au correcteur GPC de rejeter des incertitudes plus grandes en haute fréquence (impact sur le bruit de commande).

Finalement, l'application présentée dans ce chapitre a permis d'illustrer la nécessité de robustifier un correcteur GPC sous contraintes initialement synthétisé avec  $C(q^{-1})=1$ . La méthode de robustification proposée effectue cette robustification en combinant des spécifications temporelles et fréquentielles de la boucle fermée, ce qui permet d'ajuster de façon visuelle le compromis recherché entre la robustesse et la performance.

## Conclusion Générale

Dans ce travail on a présenté une méthode de robustification de lois de commande prédictive, notamment de la Commande Prédictive Généralisée (GPC), basée sur la double paramétrisation de Youla. Pour étudier cette méthode on s'est basé sur les parties suivantes :

- Dans un premier temps on a synthétisé un correcteur polynomial prédictif GPC-RST initial et invariant par les paramètres de réglage ( $N_1, N_2, N_u$  et  $\lambda$ ) de la commande prédictive avec des contraintes sur la sortie, la commande et l'incrément de commande mis sous forme LMI.
- Ce correcteur est robustifié par le premier paramètre de Youla face aux bruits de mesures et des incertitudes additives non structurées, on a utilisé les caractéristiques de convexité obtenues avec la paramétrisation de Youla pour traduire le problème de robustification en un problème d'optimisation convexe. Pour ce faire, on a exprimé les caractéristiques de robustesse désirées à partir des spécifications fréquentielles et temporelles de la boucle fermée, comme par exemple la minimisation de la norme  $H_\infty$  d'un transfert en boucle fermée ou le respect d'un gabarit temporel par un signal. Ces spécifications permettent de prendre en compte des critères de robustesse face à des incertitudes non structurées et des critères de performance nominale.
- Dans le but d'assurer non seulement de bonnes propriétés de robustesse en stabilité, mais aussi un bon niveau de performance nominale pour le rejet de perturbations, en utilisant pour la deuxième fois la paramétrisation de Youla pour avoir un correcteur robustifié plus performant, cette méthode consiste à trouver les nouveaux paramètres maximisant la robustesse dans une gamme de fréquences, tout en respectant de nouvelles contraintes fréquentielles et temporelles. Le double paramètre de Youla trouvé permet de gérer le compromis entre les deux aspects de robustesse, robustesse en stabilité et performance nominale.

Cette méthodologie a été ensuite résolue numériquement. Le paramètre de Youla appartenant à un ensemble de dimension infinie, en l'occurrence l'ensemble des systèmes stables, l'obtention d'une solution optimale n'est pas possible à l'heure actuelle. On a donc cherché une solution sous-optimale dans un sous-espace généré par une base de systèmes stables.

Pour valider son travail on a appliqué la méthode de la robustification sur la commande de moteur à induction. La commande a été robustifiée afin de diminuer l'effet d'incertitudes non structuré en haute fréquence, tout en garantissant une dynamique pour le rejet de perturbation grâce à un gabarit temporel. Ceci a permis de constater que le compromis robustesse/performance est facile à gérer avec les gabarits temporels, et que de bonnes marges de robustesse peuvent être atteintes.

## Annexe A

### • Méthodes de robustification classique de la commande prédictive

Dans ce paragraphe, sont examinées trois approches développées dans la littérature, pour la robustification d'une commande GPC. Ces méthodes, ainsi que la méthode développée dans ce travail, sont des méthodes à deux étapes : dans une première étape, on cherche les paramètres GPC ( $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_u$  et  $\lambda$ ) conférant au système le comportement entrée/sortie désiré, et dans une deuxième étape, on cherche à robustifier ce correcteur initial sans changement du comportement entrée/sortie fixé par l'étape initiale. On a vu, dans le paragraphe précédent, que le polynôme  $C$  permet de robustifier le correcteur initial sans changement du comportement entrée/sortie de la boucle fermée.

Ce comportement peut être généralisé à une classe de contrôleurs stabilisant le système. Avant d'aborder les différentes approches de robustification, la paramétrisation permettant de paramétrer cette classe de contrôleurs stabilisant le système est préalablement développé [42].

#### a. Approche SGPC

Cette approche est appelée *Stable Generalized Predictive Control* (SGPC) [19], car elle présente une méthode basée sur la GPC pour des systèmes instables et difficilement stabilisables avec GPC. La dernière phase de cette méthode réalise une robustification de la commande obtenue à partir du paramètre  $Q$ . Il s'agit de trouver le paramètre  $Q$  qui apporte le maximum de robustesse au régulateur, en minimisant une norme pondérée.

La relation (1.13), soit la marge de robustesse  $B_r$ , peut ici s'exprimer en fonction du régulateur  $R_0S_0T_0$  obtenu pour  $C = 1$ , et du paramètre  $Q$  compte tenu de (2.21). Pour le régulateur  $R_0S_0T_0$  et à partir (1.10), on a :

$$A_c = A \Delta S_0 + q^{-1} B R_0 \quad (\text{a.1})$$

La relation (1.13) devient :

$$B_r = \left| \frac{P_c}{AR} \right| = \left| \frac{A\Delta S + q^{-1}BR}{AR} \right| = \left| \frac{A\Delta(S_0 - q^{-1}BQ) + q^{-1}B(R_0 + \Delta AQ)}{A} \frac{1}{R_0 + \Delta AQ} \right| \quad (\text{a.2})$$

$$= \left| \frac{A_c}{A} \frac{1}{R_0 + \Delta A Q} \right| = \left| \frac{1}{U} \right|$$

Pour augmenter la robustesse, on doit trouver  $Q$  tel que  $1/U$  soit maximisé. En introduisant une pondération  $W$ , cette relation devient :

$$\min_Q \|W(q^{-1})U(q^{-1})\|_{\infty} = \min_Q \sup_{\omega} |W(e^{-j\omega})U(e^{-j\omega})| \quad (\text{a.3})$$

On doit alors trouver  $Q$  tel que la norme  $H_{\infty}$  soit minimisée.  $W$  permet de pondérer de façon plus importante les fréquences où les incertitudes du modèle sont les plus grandes. Pour  $A(q^{-1})$  est stable, une expression pour  $Q_{opt}$  est donnée par :

$$Q_{opt} = \frac{Qn_{opt}}{Qd_{opt}} = \frac{\left( -WAR_0 + \frac{W(1)A(1)R_0(1)}{A_c(1)} A_c \right)}{WA^2} \Delta \quad (\text{a.4})$$

## b. Approche C - design

Cette approche [1] propose un choix simple de  $C$  pour les cas où le système est stable. Ce choix procure une robustesse équivalente à celle obtenue par l'approche précédente. Le polynôme  $C$  proposé est :

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})(1 - \beta q^{-1})^{N_1 - \delta(P)} \quad (\text{a.5})$$

avec les paramètres GPC recommandés suivants :

$$\begin{aligned} N_1 &= N_u \geq n \\ N_2 &= N_1 + n - 1 \\ \lambda &= \alpha^{-2i} \end{aligned}$$

pour :

$$n = \text{ordre du système} \frac{q^{-1}B(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})}$$

où :

- $\beta$  doit être approximativement de l'ordre du pôle dominant de  $A$ .
- $\delta(P)$  représente le degré du polynôme  $P$ . Ce polynôme correspond à la définition d'une trajectoire de référence issue de la consigne. Dans notre cas, il n'est pas utilisé, et donc

$$\delta(P) = 0$$

la relation (5) devienne :

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})(1 - \beta q^{-1})^{N_1} \quad (\text{a.6})$$

Cette approche montre que l'on peut trouver des marges de robustesse égales ou supérieures à celles obtenues par la méthode SGPC.

### c. Approche Q – design

Cette approche [2] vise à trouver un polynôme  $Q$  simple qui permette de robustifier la commande sans trop dégrader les performances du système. En effet, l'objectif des deux méthodes précédentes était de maximiser la robustesse, sans trop s'inquiéter de la perte de performances que cette robustification peut engendrer :

$$B_r = \left| \frac{A_c C}{A R} \right| = \left| \frac{A_c}{A} \frac{1}{R_0 + \Delta A Q} \right| = \left| \frac{A_c}{A R_0} \frac{R_0}{R_0 + \Delta A Q} \right|$$

Dans l'expression  $\left| \frac{A_c C}{A R} \right|$ ,  $A_c$  et  $A$  sont fixés par les paramètres GPC choisis et le modèle. Il serait possible de robustifier le système en modifiant  $C/R$ , mais le problème qui se pose est de ne pas pouvoir choisir librement la forme de  $C/R$ , car  $R$  dépend de  $C$ . Pour éviter ce problème, l'idée consiste à choisir un paramètre  $Q$  permettant de découpler les deux parties, sous la forme :

$$Q = \frac{R_0}{A} \frac{M^*}{C^*} \quad (\text{a.7})$$

On obtient alors :

$$B_r = \left| \frac{A_c}{A R_0} \frac{R_0}{R_0 + \Delta A Q} \right| = \left| \frac{A_c}{A R_0} \frac{R_0}{R_0 + \Delta A \frac{R_0}{A} \frac{M^*}{C^*}} \right| = \left| \frac{A_c}{A R_0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta M^*}{C^*}} \right| \quad (\text{a.8})$$

Dans cette expression, la première partie est donnée par les paramètres GPC choisis, et la deuxième partie est libre, car on peut fixer librement les valeurs de  $\Delta M^*$  et  $C^*$ .

Le choix proposé par la méthode considère  $\frac{1}{1 + \frac{\Delta M^*}{C^*}}$  sous la structure d'un filtre passe-haut, afin

que le système devienne ainsi moins sensible aux incertitudes à haute fréquence.

La structure classiquement définie est la suivante :

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta M^*}{C^*}} = \frac{1 - \mu_1 q^{-1}}{(1 - \mu_2) + (\mu_2 - \mu_1)q^{-1}} \quad (\text{a.9})$$

avec :  $\mu_1 < 1$  et  $0 < \mu_2 \leq \mu_1$

Cela implique :

$$\frac{\Delta M^*}{C^*} = \frac{-\mu_2(1 - q^{-1})}{1 - \mu_1 q^{-1}} \Rightarrow \begin{cases} M^* = -\mu_2 \\ C^* = 1 - \mu_1 q^{-1} \end{cases} \quad (\text{a.10})$$

on replacer dans (8) on obtient :

$$B_r = \left| \frac{A_c}{AR} \cdot \frac{1 - \mu_1 q^{-1}}{(1 - \mu_2) + (\mu_2 - \mu_1)q^{-1}} \right| \quad (\text{a.11})$$

Pour régler les paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , on commence par  $\mu_1 = \mu_2$  et  $0,6 \leq \mu_1 \leq 0,9$  de façon à assurer largement la stabilité du système. Une fois la valeur de  $\mu_1$  fixée, on diminue  $\mu_2$ . Cela a pour résultat de diminuer l'effet passe-haut, sans toucher à la bande passante. On joue donc avec les dynamiques négligées autorisées à haute fréquence et la performance.

## Annexe B

### • Approche d'un polynôme par un transfert

Dans la résolution du problème d'optimisation par programmation linéaire, le paramètre  $Q$  peut être cherché sous forme d'un polynôme. Dans ce cas, on peut arriver à des ordres élevés pour ce polynôme, afin de considérer un espace important pour la recherche du paramètre. Lors des robustifications effectuées dans ce travail, on est arrivé par exemple à des polynômes d'ordre 100 et plus. L'implantation d'un correcteur avec un paramètre  $Q$  d'ordre très élevé risque d'augmenter le temps de calcul et les erreurs numériques du correcteur. Pour ces raisons, il est utile d'essayer d'approximer ce polynôme par un transfert.

### • Résolution par les moindres carrés

Considérons un polynôme  $P(q^{-1})$  de la forme

$$P(q^{-1}) = P_0 + P_1 q^{-1} + \dots + P_{np} q^{-np} \quad (\text{b.1})$$

que l'on souhaite approximer par un transfert  $T(q^{-1})$  de la forme :

$$T(q^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (\text{b.2})$$

Pour le faire, on va considérer le diagramme de la Figure 1.

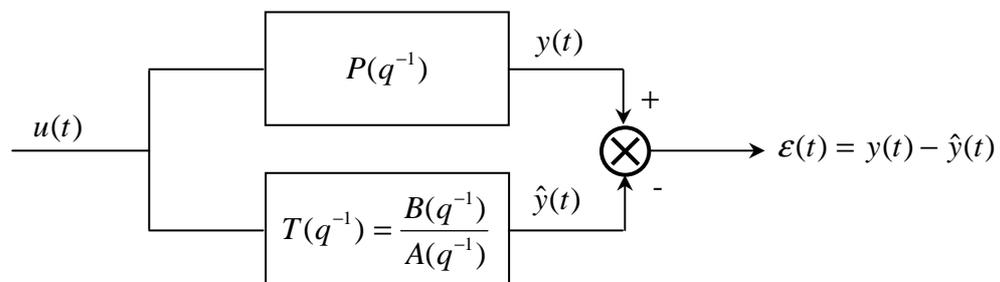


Figure 1 : Approche d'un polynôme par un transfert

La démarche adoptée consiste à trouver  $T(q^{-1})$  tel que l'erreur quadratique  $\varepsilon(t)^2$  soit minimisée pour une entrée  $u(t)$  donnée. La sortie  $\hat{y}(t)$  à l'instant  $t$  s'écrit :

$$\hat{y}(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) = b_0u(t) + b_1u(t-1) + \dots + b_{nb}u(t-nb) - a_1\hat{y}(t-1) - \dots - a_{na}\hat{y}(t-na) \quad (\text{b.3})$$

La minimisation de  $\varepsilon^2 = (y - \hat{y})^2$  mène à un problème de minimisation non linéaire, car  $\hat{y}(t)$  dépend de  $\hat{y}$  aux instants précédents qui, à leur tour, dépendent de  $B(q^{-1})$  et  $A(q^{-1})$ . Pour contourner ce problème, on considère :

$$\hat{y}(t) = b_0u(t) + b_1u(t-1) + \dots + b_{nb}u(t-nb) - a_1y(t-1) - \dots - a_{na}y(t-na) \quad (\text{b.4})$$

ce qui correspond au diagramme de la Figure 2.

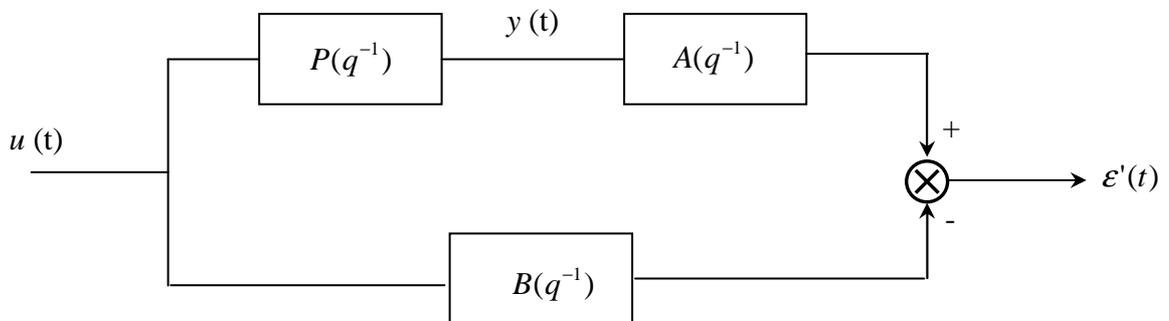


Figure 2 : Approximation polynôme/transfert par les moindres carrés

On peut maintenant écrire  $\varepsilon'(t)$  en fonction des paramètres de  $B(q^{-1})$ , de  $A(q^{-1})$  et des données connues, soit, l'entrée  $u(t)$  et la sortie produite par le polynôme  $P(q^{-1})$ . On a de façon matricielle :

$$\hat{y}(t) = \left( \begin{array}{cccccc} -y(t-1) & \dots & -y(t-na) & u(t) & u(t-1) & \dots & u(t-nb) \end{array} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{nb} \end{pmatrix}}_{\theta} \quad (\text{b.5})$$

Considérons une entrée  $u(t)$  à  $N_{mc}$  valeurs discrètes :

$$u = (u(t_1) \ \dots \ u(t_{N_{mc}})) \quad (\text{b.6})$$

On a :

$$\hat{Y} = \Phi \theta \quad (\text{b.7})$$

Avec pour  $nb < na$  :

$$\Phi = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & u(t_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -y(t_1) & 0 & \cdots & 0 & u(t_2) & u(t_1) & 0 & \cdots & 0 \\ -y(t_2) & -y(t_1) & \cdots & 0 & u(t_3) & u(t_2) & u(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -y(t_{nb}) & \cdots & \cdots & -y(t_1) & u(t_{nb+1}) & \cdots & \cdots & \cdots & u(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ -y(t_{N_{mc}-1}) & \cdots & \cdots & -y(t_{N_{mc}-na}) & u(t_{N_{mc}}) & u(t_{N_{mc}-1}) & \cdots & \cdots & u(t_{N_{mc}-nb}) \end{array} \right)_{N_{mc} \times (na+nb+1)}$$

l'erreur devient :

$$\varepsilon = Y - \hat{Y} = Y - \Phi \theta \quad (\text{b.8})$$

D'où la minimisation suivante :

$$\min_{\theta} \varepsilon^2 = \min_{\theta} (Y - \hat{Y})^2 = \min_{\theta} (Y - \Phi \theta)^2 \quad (\text{b.9})$$

En dérivant par rapport à  $\theta$  et en égalant à zéro, on obtient :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (\text{b.10})$$

## Table des Figures

Figure 1.1	Modèle CARIMA.	9
Figure 1.2	Régulateur polynomial équivalent de la loi CPC.	11
Figure 1.3	Système avec bruit à haute fréquence en sortie.	13
Figure 1.4	Modèle CARIMA du Système avec bruit de mesure.	13
Figure 1.5	Système bouclé pour analyse de la robustesse.	14
Figure 1.6	Interprétation de la condition de robustesse en stabilité.	14
Figure 1.7	Vitesse du moteur asynchrone (GPC).	23
Figure 1.8	Commande couple appliquée au moteur.	24
Figure 1.9	Incrément de commande.	24
Figure 1.10	Erreur de vitesse.	24
Figure 1.11	Comparaison entre les Signaux de sortie pour les différentes structures.	25
Figure 1.12	Signal de commande pour la structure GPC.	26
Figure 1.13	Signal de commande pour la structure GPCC-LMI.	26
Figure 1.14	Signal d'incrément de commande pour la structure GPC.	26
Figure 1.15	Signal d'incrément de commande pour la structure GPCC-LMI.	26
Figure 2.1	Boucle fermée classique.	28
Figure 2.2	Forme générale de la paramétrisation de Youla.	30
Figure 2.3	Représentation standard.	31
Figure 2.4	Représentation standard sans incertitude.	31
Figure 2.5	Correcteur initial modifié.	32
Figure 2.6	Correcteur initial modifié avec paramètre de Youla.	33
Figure 2.7	Régulateur polynomial équivalent avec paramétrisation de tous les régulateurs stabilisants amenant au même transfert entrée/sortie.	36
Figure 2.8	Correcteur $RST$ après paramétrisation.	37
Figure 2.9	Correcteur $RST$ polynomial après paramétrisation.	37
Figure 2.10	Structure du nouveau correcteur avec la double paramétrisation de Youla.	38
Figure 3.1	Schéma-bloc général d'un système asservien présence d'incertitudes	43
Figure 3.2	Représentation d'une incertitude non-structurée additive directe et inverse	43
Figure 3.3	Représentation d'une incertitude non-structurée multiplicative directe et inverse, en entrée et en sortie	44
Figure 3.4	Système $P$ bouclé par l'incertitude non structurée.	46
Figure 3.5	Correcteur $R_0S_0T_0$ initial.	46
Figure 3.6	Correcteur initial, structure modifiée.	46
Figure 3.7	Correcteur initial avec la structure du bouclage standard.	47
Figure 3.8	Système avec régulateur $RST$ , entrées $w, d, b$ et sorties $\varepsilon, y, u$ .	51
Figure 3.9	Régulateur GPC à deux degrés de liberté avec paramétrisation de Youla.	51
Figure 3.10	Régulateur GPC à deux degrés de liberté avec Paramétrisation de Youla, formalisme par blocs	52
Figure 3.11	Système avec incertitude additive directe.	53

Figure 3.12	Gabarit temporel	59
Figure 4.1	Structure du DFOC avec un correcteur de position.	65
Figure 4.2	Modèle de la machine asynchrone.	66
Figure 4.3	Schéma bloc pour la commande base sur des régulateurs <i>RST</i>	67
Figure 4.4	Modèle utilisé pour la synthèse du PID	68
Figure 4.5	Gabarit pour le rejet de perturbation pour les correcteurs, initial, PID et robustifié par $Q_{11}$	71
Figure 4.6	Marge de robustesse $B_r$ pour les correcteurs, initial, PID et robustifié par $Q_{11}$ .	72
Figure 4.7	Position de la réponse de position pour le correcteur initial GPC.	72
Figure 4.8	L'erreur de position pour le correcteur initial GPC.	73
Figure 4.9	Signal de commande et l'incrément de commande pour le correcteur initial.	73
Figure 4.10	Signal d'incrément de commande pour le correcteur initial.	73
Figure 4.11	Transfert bruit de mesure/commande	74
Figure 4.12	Position de position pour le correcteur robustifié par $Q_{12}$ .	75
Figure 4.13	L'erreur de position pour le correcteur robustifié par $Q_{12}$ .	76
Figure 4.14	Signal de commande pour le correcteur robustifié par $Q_{12}$ .	76
Figure 4.15	Signal d'incrément de commande pour le correcteur robustifié par $Q_{12}$ .	76
Figure 4.16	Respect du gabarit pour le correcteur initial et robustifié par $Q_{11}$ et $Q_{12}$ .	77
Figure 4.17	Comparaison des marges de robustesse $B_r$ .	77

## Références bibliographiques

- [1] P. Rodríguez, D. Dumur, " *Generalized Predictive Control Robustification Under Frequency and Time-Domain Constraints* ", *IEEE transactions on control systems technology*, Vol 13, N°4, 2005.
- [2] P. Ansay, M. Gevers, V. Wertz, " *Enhancing the robustness of GPC via the Youla parametrization* ", Submitted to *European Journal of Control*, 1996.
- [3] P. Boucher, D. Dumur, " *La commande prédictive* ", Collection méthode et pratique de l'ingénieur, Edition Technip, Paris, 1996.
- [4] J.M. Maciejowski, " *Multivariable feedback design* ", Addison-Wesley publishing company, Wokingham, England, 1989.
- [5] E.F. Camacho, C. Bordons, " *Model predictive control* ", Springer – Verlag, London, 1999.
- [6] B. Clément, " *Synthèse multiobjectifs et séquençement de gains : application au pilotage d'un lanceur spatial* ". Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2001.
- [7] S. Hbaïeb, S. Font, " *Synthèse de lois de commandes optimales par optimisation convexe* ", Journées Doctorales d'Automatique (JDA), Toulouse, 2001.
- [8] S. Hbaïeb, " *Analyse de cahier des charges en automatique par optimisation convexe* ", Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2002.
- [9] T.M. Buss, " *Robust Constrained Model Predictive Control by Linear Matrix Inequalities*", Institute of Automatic control engineering. Englewood Cliffs, 2008.
- [10] B. Clément, " *Utilisation de la Paramétrisation de Youla pour la commande* ", Service Automatique de Supélec, Groupe Commande Robuste, 2000.
- [11] C.N. Stoica, " *Robustification de lois de commande prédictives multivariées* ", Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2008.
- [12] B. Clément, G. Duc, " *Flexible ARM multiobjective control via Youla parameterization and LMI optimization* ", 3rd IFAC Rocond – Prague, 2000.
- [13] S.H. baieb, S. Font, " *Analyse des spécifications par synthèse convexe* ", Journée du Groupe de Commande Robuste, Service Automatique Supélec, 2000.

- 
- [14] G. Scorletti, " *Automatique Fréquentielle : des critères graphiques à l'optimisation LMI* ", CIFA, Nantes, 2002.
- [15] K. Glover, D. McFarlane, " *Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with  $H_\infty$  - bounded uncertainty* ", IEEE Transactions on automatic control, Vol. 34, pp. 821-830, 1989.
- [16] W. Helton, A. Sideris, " *Frequency response algorithms for  $H_\infty$  optimization with time domain constraints* ", IEEE Transactions on automatic control, Vol.34, pp. 427-434, 1989.
- [17] J.A. Rossiter, B. Kouvaritakis. " *Youla parameter and robust predictive control with constraint handling* ", workshop on non-linear predictive control, Ascona, 1998.
- [18] G. Zames, " *Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses* ", IEEE Transactions on automatic control, AC-26, pp. 301-320, 1981.
- [19] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, A.O.T. Chang, " *Stable generalized predictive control : an algorithm with guaranteed stability* ", IEE Proceedings-D, 139(4), pp. 349-362, 1992.
- [20] D. Pailles, " *Modélisation et commande robuste d'un procédé de traitement des eaux de type biofiltre* ", Mémoire présenté en vue d'obtenir le diplôme d'ingénieur C.N.AM en automatique, Toulouse, 1997.
- [21] E.G. Kassapakis, K. Warwick, " *Predictive control for Autopilot design* ", University of Reading, Berkshire, UK, 1993.
- [22] S. Olaru, " *Contribution à l'étude de la commande prédictive sous contraintes par approche géométrique* ", Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2005.
- [23] H. Niemann, J. Stoustrup, " *Tuning Controllers using the Dual Youla Parameterization* ", Proceedings of the American Control Conference Chicago, 2000.
- [24] H. Niemann, " *Dual Youla Parameterization* ", IEE Proc-Control Theory Appl, Vol 150, No 5, 2003.
- [25] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, " *Robust and optimal control* ", Ed. Prentice Hall, 1996.
- [26] L. Chisci, P. Falugi, G. Zappa, " *Predictive control for constrained systems with polytopic uncertainty* ", Proceeding of ACC, Arlington, VA, pp. 3073-3078, 2001.
- [27] D. Dumur, " *Contribution à l'analyse et au développement d'algorithmes de commande prédictive* ", rapport de synthèse Présenté en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des chercheurs, Université Paris XI, 2002.
- [28] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, P.O.M. Scockaert, " *Constrained model predictive control: Stability and optimality* ", Automatica, Vol.36, pp. 789-814, 2000.

- 
- [29] S. Oлару, D. Dumur, " *Feasibility of Constrained Generalized Predictive Control within Invariant Sets Framework* ", 5th IEEE Asian Control Conference ASCC'04, Melbourne, Australie, pp. 20-23, 2004.
- [30] S. Oлару, D. Dumur, " *Explicit constrained model predictive control. The influence of constraints redundancy* ", 5th IEEE International Conference on Control and Automation, Budapest, Hongrie, pp. 26-29, 2005.
- [31] A. Bemporad, F. Borelli, M. Morari, " *Robust Model Predictive Control : Piecewise Linear Explicit Solution* ", Proceedings of the European Control Conference, pp.939-944, Karlsruhe, 2001.
- [32] F. Borelli, " *Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems* ", Springer Verlag, Berlin, 2003.
- [33] E.F. Camacho, " *Constrained Generalized Predictive Control (Constrained receding horizon predictive control)* ", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.38(2), pp.327-331, 1993.
- [34] G.C. Goodwin, M.M. Seron, J.A. De Dona, " *Constrained Control and Estimation* ", Springer - Verlag, London, 2004.
- [35] E. Kerrigan, " *Feedback Min-max Model Predictive Control using a Single Linear Program : Robust Stability and the Explicit Solution* ", International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 14, 2004.
- [36] C. Canudas, " *Commande des moteurs asynchrones* ", vol.1 et 2, Editions Hermes, 2000.
- [37] E.F. Camacho, C. Bordons, " *Model Predictive Control* ", Springer, 2003.
- [38] E. Mendes, J.P. Barbot, " *Benchmark transitive rapide* ", APII Journal Europeen des Systemes Automatisés, Vol.36-5, pp. 701-708, 2002.
- [39] M. Morari, E. Zafiriou, " *Robust process* ", Prentice-Hall, 1989.
- [40] F. Doyle, B. Francis, A. Tannenbaum, " *Feedback control theory* ", Macmillan Publishing Co., 1990.
- [41] J.A. Rossiter, " *Model based predictive control. A practical approach* ", CRC Press LLC, 2003.
- [42] P. Rodríguez, " *Robustification de lois de commande prédictive par la paramétrisation de Youla* ". Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2003.

## Résumé

Ce travail décrit une méthode de robustification de lois de commande prédictive sous contraintes mises sous forme LMI basée sur la double paramétrisation de Youla. Dans la première partie, après l'étude de la Commande Prédictive Généralisée GPC, un correcteur polynomial *RST* initial et invariant est synthétisé par les paramètres de réglage ( $N_1, N_2, N_u$  et  $\lambda$ ) de la commande prédictive avec des contraintes sur la sortie, la commande et l'incrément de commande. Ce correcteur est robustifié par le premier paramètre de Youla face aux bruits de mesures et des incertitudes additives non structurées. Cet outil permet de paramétrer toutes les classes de correcteurs stabilisant un système donné, et permet l'obtention de spécifications convexes en boucle fermée. Ces deux caractéristiques sont utilisées pour traduire le problème de robustification d'un correcteur en un problème d'optimisation convexe avec des spécifications de performance nominale et de robustesse en stabilité face à des incertitudes non structurées. Ces spécifications peuvent être exprimées soit par des critères fréquentiels, soit par des contraintes temporelles.

Dans la seconde partie, pour augmenter la marge de robustesse du second correcteur dans une gamme de fréquence donnée, on utilise pour la deuxième fois la paramétrisation de Youla pour avoir un correcteur robustifié plus performant. Cette méthode consiste à trouver les nouveaux paramètres maximisant la robustesse dans une gamme de fréquences, tout en respectant les contraintes fréquentielles et temporelles.

Cette méthodologie de robustification a été appliquée en vue de robustifier la commande directe de flux orientée du moteur à induction à double alimentation avec un contrôleur prédictive.

**Mots clés :** Commande prédictive, la commande robuste, linéaire matrice égalité LMI, paramétrisation de Youla, optimisation convexe, double paramétrisation de Youla, programmation linéaire.

## Abstract

This work (describes a methodology) we use the dual Youla parameterisation approach for the robustification of predictive linear control systems using LMI-based constraints. This method based on an approach of convex optimization, is used to robustify the generalized predictive controller GPC algorithm applied to an AutoRegressive Integrated Moving Average (CARIMA) model. The design method consists of two steps. In the first step the synthesis and the robustification of the initial polynomial controller RST-GPC is carried out. This is achieved under constraints on the system output, the control signal and its increment represented as LMI using Youla parameterisation. This controller is then robustified considering frequency and time-domain constraints. In the second step, the new controller is robustified by a dual Youla parameterisation considering frequential and temporal constraints. The effectiveness of this methodology are demonstrated and applied for position control of an induction motor drive.

**Keywords:** Generalised Predictive Control, robust control, Linear Matrix Inequality LMI, convex optimization, Youla Parameterisation, dual Youla Parameterisation, induction motor.

## ملخص

لقد قمنا في هذا العمل بدراسة طريقة تقوية التحكم التنبئي العام تحت شروط وضعت على شكل LMI بواسطة ثنائي أبعاد يولا. في المرحلة الاولى، بعد تعريف و دراسة التحكم التنبئي العام و إظهار خصائصه العامة، قمنا بتطبيق المصحح *RST* المكافئ لهذا التحكم مع شروط طبقت على إشارات الخروج، التحكم و تغيير التحكم. هذا المصحح تم تقويته للمرة الأولى بواسطة أبعاد يولا ضد أرتيبيات القياس و الاضطرابات المضافة غير مبنية. هذه الأبعاد التي تسمح لنا بتجميع كل أصناف المصححات الكلاسيكية و العامة لنظام معين، وبلوغ بعض الخصوصيات لحلقة مغلقة. هذه الخصائص لأبعاد يولا تستعمل من أجل نقل أو تحويل مشكل تقوية المصحح إلى مشكل الحل الأنسب. كما قمنا بإستعمال بعض الخصائص مثل ضغوطات التواثرات أو الضغوطات الزمنية من أجل البلوغ إلى نتائج أسمى. في المرحلة الثانية، ومن اجل رفع مجال التقوية للمصحح الثنائي في مجال تواترات محددة قمنا بتطبيق للمرة الثانية أبعاد يولا من اجل الحصول على مصحح قوي و مستقر.

في الأخير طبقنا تقنية التقوية بطريقة ثنائي أبعاد يولا على نظام لتحكم محرك تزامني و لقد كانت النتائج جد مرضية في تطبيق هذه التقنية الحديثة.

**الكلمات المفتاحية :** التحكم التنبئي، التحكم القوي، المصحح الخطي، أبعاد يولا، ثنائي أبعاد يولا، البرمجة الخطية، المحرك التزامني.