

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE  
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR  
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

## THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

### **DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : TRAITEMENT DU SIGNAL

Par :

**BENSOUICI Tahar**

## THEME

### **IMPLEMENTATION NUMERIQUE DU RETARD D'ORDRE FRACTIONNAIRE**

Devant le Jury :

Président	A. Bennia	<i>Professeur, Université de Constantine</i>
Rapporteur	A. Charef	<i>Professeur, Université de Constantine</i>
Examineurs	F. Soltani	<i>Professeur, Université de Constantine</i>
	A. Goutas	<i>Maître de Conférence "A", Université de Skikda</i>
	A. Djouambi	<i>Maître de Conférence "A", Université de Oum El Bouaghi</i>

Année : 2012

# *Dédicaces*

*A mes parents,*

*A mes frères, mes sœurs,*

*A mes nièces et mes neveux,*

*A tous mes amis,*

*A tous ceux qui travaillent pour que cette Nation soit meilleure.*

# *Remerciements*

Avant tout, mes remerciements à mon **DIEU** le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire de traitement du signal, de l'Université Mentouri de Constantine, sous la direction scientifique de Monsieur le professeur **ABDELFATAH CHAREF**, que je tiens à remercier très vivement de son enthousiasme envers mon travail, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Je le remercie, également, pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements et ses précieux conseils.

Je suis très honoré que Monsieur **BENNIA ABDELHAK**, Professeur à l'Université de Mentouri de Constantine, ait accepté de présider le jury de cette thèse.

J'exprime ma gratitude envers Monsieur **SOLTANI FAOUZI** professeur à l'Université de Mentouri de Constantine, d'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examinateur. Je l'en remercie sincèrement.

Je remercie le Docteur **AHCENE GOUTAS**, Maître de Conférence **A**, à l'Université de Skikda, qui a bien accepté d'être membre du jury et de juger cette thèse ;

Je remercie également Monsieur **ABDELBAKI DJOUAMBI**, Maître de Conférence **A** à l'Université de Oum El Bouaghi et membre du Laboratoire de traitement du signal, qui a bien accepté de juger ce travail de thèse ;

Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire de traitement du signal, équipe système, pour leurs aides, serviabilités et leurs encouragements.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes amis, et à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce modeste travail.

Enfin, un grand merci à mes parents et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien.

# *Table des matières*

<b>Remerciements</b> .....	i
<b>Liste des figures</b> .....	Vii
<b>Liste des tableaux</b> .....	xi
<b>Introduction Générale</b> .....	<b>1</b>
1.1 Introduction .....	1
1.2 Objectif de la thèse .....	4
1.3 Présentation de la thèse .....	5
<b>Chapitre 1 : Opérateurs d'Ordre Fractionnaire</b> .....	<b>7</b>
1.1 Introduction .....	7
1.2 Approximations analogiques d'opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire .....	9
1.2.1 Méthode de Charef : Fonction de singularité .....	9
1.2.1.1 Approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire .....	10
1.2.1.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire .....	12
1.3 Approximations numériques d'opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire .....	14
1.3.1 Méthode directe de discrétisation .....	15
1.3.1.1 Approximation discret en utilisant l'intégration et l'expansion de série entière .....	15
1.3.1.2 Approximation discret en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue discret .....	16
1.3.2 Méthode indirecte de discrétisation .....	16
1.3.2.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui .....	17
1.3.2.2 Discrétisation de dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation fraction Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui .....	18
1.4 Approximations numériques d'opérateurs numériques d'ordre fractionnaire .....	19
1.5 Conclusion .....	20

<b>Chapitre 2 : Filtres À Retards Fractionnaires</b> .....	<b>21</b>
2.1 Introduction .....	21
2.2 Définition des retards fractionnaires .....	22
2.2.1 Cas continu .....	22
2.2.2 Cas discret .....	22
2.2.3 Définition du retard par référence au temps continu .....	24
2.2.4 Caractéristique des retards fractionnaire .....	25
2.3 Retards fractionnaires : approximations .....	26
2.3.1 Approximations des retards fractionnaires par des filtres RIF .....	27
2.3.1.1 Méthode des moindres carrés .....	27
2.3.1.2 Méthode des moindres carrés avec bande passante réduite .....	28
2.3.1.3 Interpolateur de Lagrange (F.I.L.) : Critère de platitude maximale .....	28
2.3.2 Approximations des retards fractionnaires par des filtres RII .....	29
2.3.2.1 Filtres RII Passe-Tout .....	29
2.3.2.2 Autres Filtres RII .....	31
2.4 Conclusion .....	32
<b>Chapitre 3 : Conception du Retard d'Ordre Fractionnaire par des filtres R.I.I</b> .....	<b>33</b>
3.1 Introduction .....	33
3.2 Formulation du problème .....	33
3.2.1 Premier model basé sur la transformation avant .....	33
3.2.2 Second modèle basé sur la transformation bilinéaire .....	34
3.2.3 Troisième modèle basé sur la transformation d'Euler .....	35
3.3 Conception du retard numérique d'ordre fractionnaire par un filtre numérique RII .....	37
3.3.1 Filtre numérique RII par la transformation avant .....	39
3.3.1.1 Analyse de la stabilité .....	41
3.3.2 Filtre numérique RII par la transformation bilinéaire .....	42
3.3.3 Filtre numérique RII par la transformation d'Euler .....	43
3.4 Exemples de simulations et commentaires .....	45
3.4.1 Exemples 1 .....	45
3.4.2 Exemples 2 .....	52
3.4.3 Exemples 3 .....	59
3.5 Comparaison et discussion .....	67

3.5.1 Comparaison avec la méthode de Pei et Wang .....	67
3.5.1.1 Transformation avant .....	67
3.5.1.2 Transformation bilinéaire .....	72
3.5.1.3 Transformation d'Euler .....	77
3.5.2 Comparaison avec la méthode de Zhang .....	83
3.5.2.1 Transformation avant .....	82
3.5.2.2 Transformation bilinéaire .....	87
3.6 Conclusion .....	92
<b>Chapitre 4 : Application de la méthode de conception .....</b>	<b>93</b>
4.1 Introduction .....	93
4.2 Transformation d'Euler fractionnaire .....	93
4.2.1 Motivation .....	93
4.2.2 Conception de la transformation d'Euler fractionnaire .....	94
4.2.2.1 Utilisation de la transformation bilinéaire .....	94
4.2.2.2 Utilisation de la transformation avant .....	97
4.2.3 Exemples et comparaisons .....	100
4.2.3.1 Exemples .....	100
4.2.3.2 Comparaisons .....	105
4.3 Conception de filtre peigne .....	109
4.3.1 Introduction .....	109
4.3.2 Conception de filtre peigne .....	110
4.3.3 Exemples de conception .....	112
4.4 Conclusion .....	116
<b>Conclusion Générale .....</b>	<b>117</b>
1 Conclusion .....	117
2 Perspectives et suggestions .....	118
<b>Références .....</b>	<b>119</b>

# *Liste des figures*

1.1	Diagramme de Bode de la fonction $1/(1 + s/p_T)^m$ et son approximation.....	10
2.1	Schéma-bloc de l'élément de retard fractionnaire idéal .....	23
2.1	La fonction sinus cardinal décalée de $D=3$ échantillons (a) et décalée de $D=3.3$ échantillons (b) pour $T=1$ .....	26
3.1	Tracé de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.82}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ .....	47
3.2	Tracé de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.82}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ .....	47
3.3	Retard de Groupe du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.82}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ .....	48
3.4	Tracé de l'erreur relative $E_a$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.82}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ .....	49
3.5	Tracé de l'erreur relative $E_p$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.82}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ .....	49
3.6	Tracé de l'erreur relative $E_g$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.82}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ .....	50
3.7	Réponse impulsionnelle du filtre numérique RII $G_F(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.82}$ .....	51
3.8	Position des pôles et des zéros du filtre numérique RII $G_F(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.82}$ .....	51
3.9	Tracé de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.4}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ .....	54
3.10	Tracé de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.4}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ .....	54
3.11	Retard de Groupe du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.4}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ .....	55
3.12	Tracé de l'erreur relative $E_a$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.4}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ .....	56

<b>3.13</b>	Tracé de l'erreur relative $E_p$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.4}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ .....	56
<b>3.14</b>	Tracé de l'erreur relative $E_g$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.4}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ .....	57
<b>3.15</b>	Réponse impulsionnelle du filtre numérique RII $G_T(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.4}$ .....	58
<b>3.16</b>	Position des pôles et des zéros du filtre numérique RII $G_T(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.4}$ .....	59
<b>3.17</b>	Tracé de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.7}$ et le filtre numérique RII $G_E(z)$ .....	61
<b>3.18</b>	Tracé de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.7}$ et le filtre numérique RII $G_E(z)$ .....	62
<b>3.19</b>	Retard de Groupe du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.7}$ et le filtre numérique RII $G_E(z)$ .....	62
<b>3.20</b>	Tracé de l'erreur relative $E_a$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.7}$ et le filtre numérique RII $G_E(z)$ .....	63
<b>3.21</b>	Tracé de l'erreur relative $E_p$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.7}$ et le filtre numérique RII $G_E(z)$ .....	64
<b>3.22</b>	Tracé de l'erreur relative $E_g$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.7}$ et le filtre numérique RII $G_E(z)$ .....	64
<b>3.23</b>	Réponse impulsionnelle du filtre numérique RII $G_E(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.7}$ .....	65
<b>3.24</b>	Position des pôles et des zéros du filtre numérique RII $G_E(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.7}$ .....	66
<b>3.25</b>	Tracés de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ , du filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang .....	68
<b>3.26</b>	Tracés de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ , du filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang .....	68



<b>3.27</b>	Tracés de Bode (retard de groupe) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ , du filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et du filtre numérique RII passe- tout de Pei et Wang.....	69
<b>3.28</b>	Tracés de Bode des erreurs relatives $E_a$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.....	69
<b>3.29</b>	Tracés de Bode des erreurs relatives $E_p$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.....	70
<b>3.30</b>	Tracés de Bode des erreurs relatives $E_g$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.....	70
<b>3.31</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII $G_F(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ .....	71
<b>3.32</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ .....	71
<b>3.33</b>	Tracés de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ , du filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et du filtre numérique RII passe- tout de Pei et Wang.....	73
<b>3.34</b>	Tracés de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ , du filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et du filtre numérique RII passe- tout de Pei et Wang.....	73
<b>3.35</b>	Tracés de Bode (retard de groupe) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ , du filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et du filtre numérique RII passe- tout de Pei et Wang.....	74
<b>3.36</b>	Tracés de Bode des erreurs relatives $E_a$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.....	74
<b>3.37</b>	Tracés de Bode des erreurs relatives $E_p$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.....	75

<b>3.38</b>	Tracés de Bode des erreurs relatives $E_g$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.....	75
<b>3.39</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII $G_T(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ .....	76
<b>3.40</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ .....	76
<b>3.41</b>	Tracés de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ , du filtre numérique RII $G_E(z)$ proposée et du filtre numérique RII passe- tout de Pei et Wang.....	78
<b>3.42</b>	Tracés de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ , du filtre numérique RII $G_E(z)$ proposée et du filtre numérique RII passe- tout de Pei et Wang.....	78
<b>3.43</b>	Tracés de Bode (retard de groupe) du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ , du filtre numérique RII $G_E(z)$ proposée et du filtre numérique RII passe- tout de Pei et Wang.....	79
<b>3.44</b>	Tracés de Bode des erreurs relatives $E_a$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ et le filtre numérique RII $G_E(z)$ proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.....	79
<b>3.45</b>	Tracés de Bode des erreurs relatives $E_p$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ et le filtre numérique RII $G_E(z)$ proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.....	80
<b>3.46</b>	Tracés de Bode des erreurs relatives $E_g$ entre le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ et le filtre numérique RII $G_E(z)$ proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.....	80
<b>3.47</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII $G_E(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ .....	81
<b>3.48</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-0.91}$ .....	81
<b>3.49</b>	Réponse en amplitude du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-5.9}$ , du filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et du filtre numérique RII de Zhang.....	84

<b>3.50</b>	Réponse en retard de groupe du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-5.9}$ , du filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et du filtre numérique RII de Zhang.....	85
<b>3.51</b>	Tracés des erreurs relatives $E_a$ entre le retard numérique fractionnaire plein idéal $z^{-5.9}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et le filtre numérique RII de Zhang .....	85
<b>3.52</b>	Tracés des erreurs relatives $E_g$ entre le retard numérique fractionnaire plein idéal $z^{-5.9}$ et le filtre numérique RII $G_F(z)$ proposée et le filtre numérique RII de Zhang .....	86
<b>3.53</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII $G_F(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-5.9}$ .....	86
<b>3.54</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII de Zhang approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-5.9}$ .....	87
<b>3.55</b>	Réponse en amplitude du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-5.1}$ , du filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et du filtre numérique RII de Zhang .....	88
<b>3.56</b>	Réponse en retard de groupe du retard numérique fractionnaire idéal $z^{-5.1}$ , du filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et du filtre numérique RII de Zhang .....	89
<b>3.57</b>	Tracés des erreurs relatives $E_a$ entre le retard numérique fractionnaire plein idéal $z^{-5.1}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et le filtre numérique RII de Zhang .....	89
<b>3.58</b>	Tracés des erreurs relatives $E_g$ entre le retard numérique fractionnaire plein idéal $z^{-5.1}$ et le filtre numérique RII $G_T(z)$ proposée et le filtre numérique RII de Zhang .....	90
<b>3.59</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII $G_T(z)$ approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-5.1}$ .....	90
<b>3.60</b>	Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII de Zhang approximant le retard numérique fractionnaire idéal $z^{-5.1}$ .....	91
<b>4.1</b>	Réponse en amplitude du dérivateur analogique $s = j\omega$ , de la transformation d'Euler $\frac{(1-z)}{T}$ et la transformation d'Euler fractionnaire $F_1(z)$ pour différentes valeurs du $\alpha$ ..	95
<b>4.2</b>	L'erreur relative moyenne $Er_m(\alpha)$ en fonction du paramètre $\alpha$ .....	96
<b>4.3</b>	Réponse en amplitude de dérivateur analogique $s = j\omega$ ,de la transformation d'Euler $\frac{(1-z)}{T}$ et la transformation d'Euler fractionnaire $F_2(z)$ pour différentes valeurs du $\alpha$ ..	98
<b>4.4</b>	L'erreur relative moyenne $Er_m(\alpha)$ en fonction du paramètre $\alpha$ .....	99
<b>4.5</b>	Réponse en amplitude de dérivateur analogique $s = j\omega$ , de la transformation d'Euler $(1-z^{-1})$ et de la transformation d'Euler fractionnaire $F_1(z)$ .....	101

<b>4.6</b>	Réponse en amplitude de dérivateur analogique $s = j\omega$ , de la transformation d'Euler $(1 - z^{-1})$ et la transformation d'Euler fractionnaire $F_2(z)$ .....	101
<b>4.7</b>	Réponses en amplitude des dérivateurs analogique $s^2 = (j\omega)^2$ , numérique $F_{SD-Eu}(z)$ , numérique $F_{SD-F1}(z)$ et numérique $F_{SD-F2}(z)$ .....	103
<b>4.8</b>	Réponses en amplitude des intégrateurs analogique $1/s = 1/(j\omega)$ , numérique $F_{I-Eu}(z)$ , numérique $F_{I-F1}(z)$ et numérique $F_{I-F2}(z)$ .....	104
<b>4.9</b>	Réponses en amplitude des filtres $H_B(s)$ , numérique $H_{B-Eu}(z)$ , numérique $H_{B-F1}(z)$ et numérique $H_{B-F2}(z)$ .....	105
<b>4.10</b>	Réponses en amplitude du dérivateur analogique $s = j\omega$ , des transformations proposées $F_1(z)$ et $F_2(z)$ , de Ngo $F_{Ngo}(z)$ et de Pei & Hsu $F_{Pei\&Hsu}(z)$ .....	106
<b>4.11</b>	Réponses en phase du dérivateur analogique $s = j\omega$ , des transformations proposées $F_1(z)$ et $F_2(z)$ , de Ngo $F_{Ngo}(z)$ et de Pei & Hsu $F_{Pei\&Hsu}(z)$ .....	107
<b>4.12</b>	Fonctions erreur absolue en amplitude $E_{ab}$ des méthodes de transformation proposées $F_1(z)$ et $F_2(z)$ , de Ngo $F_{Ngo}(z)$ et de Pei & Hsu $F_{Pei\&Hsu}(z)$ .....	108
<b>4.13</b>	La réponse en fréquence de l'amplitude du filtre peigne .....	110
<b>4.14</b>	Les réponses en fréquence du filtre peigne idéal $H_C(z)$ et de son approximation par un filtre numérique RII $H_C^F(z)$ .....	113
<b>4.15</b>	Les réponses en fréquence du filtre peigne idéal $H_C(z)$ et de son approximation par un filtre numérique RII $H_C^T(z)$ .....	115
<b>4.16</b>	Les réponses en fréquence du filtre peigne idéal $H_C(z)$ et de son approximation par un filtre numérique RII $H_C^E(z)$ .....	116

# *Liste des tableaux*

<b>3.1</b>	Fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale en utilisant les trois transformations .....	37
<b>3.2</b>	Les trois filtres numériques RII du retard fractionnaire proposés .....	44
<b>3.3</b>	Comparaison entre les différentes méthodes proposées et la méthode in [74] .....	82
<b>4.1</b>	IEA des méthodes de transformation proposées $F_1(z)$ , $F_2(z)$ , de Ngo $F_{N\text{go}}(z)$ et de Pei & Hsu $F_{\text{Pei}\&\text{Hsu}}(z)$ .....	109

# *Introduction Générale*

---

1. Introduction .....	1
2. Objectifs de la thèse .....	4
3. Présentation de la thèse .....	5

---

## 1. Introduction

Cette thèse s'intéresse à un outil particulier de traitement du signal : le filtre à temps discret qui simule le retard fractionnaire, que l'on appellera plus brièvement, "filtre de retard fractionnaire". Cet outil est une transformation qui peut s'appliquer à tout signal à temps discret, c'est-à-dire dans la pratique à tout signal à temps continu échantillonné.

Malgré que l'idée des opérateurs d'ordre fractionnaire est aussi vieille que celle de l'ordre entier, mais c'était dans les dernières décennies que l'utilisation de ces opérateurs d'ordre fractionnaire était devenus de plus en plus populaire dans beaucoup de domaine de recherche. Leur application dans le domaine du traitement de signal est considérée comme un thème émergent. Alors, l'objectif principal de ce travail est de contribuer à l'application des concepts des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire dans la conception et l'implémentation numérique de retard d'ordre fractionnaire.

### Calcul Fractionnaire

Le terme fractionnaire a émergé ces dernières années, en liaison avec différentes théories et techniques de traitement du signal, parfois sans aucun lien visible entre eux. Néanmoins, la première référence à ce secteur est apparue en 1695 dans une lettre de Bernoulli à Leibniz, où il a formulé une question sur la signification d'une dérivée d'ordre non-entier. C'était le début du calcul fractionnaire, qui est l'origine des systèmes fractionnaires à temps continu, décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Depuis lors, le calcul fractionnaire a évolué par les contributions de nombreux mathématiciens célèbres. Malgré le progrès dans des mathématiques pures, nous avons dû attendre jusqu'aux années 1920 pour voir l'apparition des études concernant l'utilisation du calcul fractionnaire en sciences appliquées.

En outre, seulement dans les trois dernières décennies, où l'application du calcul fractionnaire dans l'ingénierie a mérité l'attention, motivée par les travaux de Mandelbrot sur les fractales, cela a mené à un impact significatif dans plusieurs secteurs scientifiques et a attiré, définitivement, l'attention aux objets fractionnaires.

Actuellement, de nouveaux thèmes font l'objet de recherches actives, telles que le mouvement brownien fractionnaire, les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire à temps discret, filtre de retard fractionnaire et les ondelettes fractionnaires.

## Opérateurs d'ordre Fractionnaire

Parallèlement au calcul fractionnaire, les opérateurs d'ordre fractionnaire ont reçus un intérêt considérable dans beaucoup d'applications, ils fournissent des modèles plus précis que les opérateurs ordinaires. La diversité d'applications de ces opérateurs à de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie [1-7] (la viscoélasticité, du génie biomédicale, la modélisation et de l'identification des systèmes, la chimie [8-13], traitement du signal [14-18] et la commande [19-23]...), implique inévitablement une grande variété de problèmes posés, ainsi qu'une multiplicité de solutions proposées

Les opérateurs d'ordre fractionnaire se partagent en deux classes : la classe des opérateurs analogiques et la classe des opérateurs numériques. Les opérateurs analogiques idéals d'ordre fractionnaire sont l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire. Et les opérateurs numériques idéals d'ordre fractionnaire sont le retard et l'avance d'ordre fractionnaire. L'implémentation analogique et numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire est donc très importante parce qu'ils sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles. Comme ils ne peuvent pas être exactement implémentés, seulement une implémentation limitée en fréquence peuvent cependant être accomplies en utilisant des techniques d'approximation. En ce qui concerne les opérateurs analogiques idéals d'ordre fractionnaire, l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire, on peut compter plusieurs travaux fondamentaux [3], [24-30] qui fournissent une bonne compréhension des diverses techniques d'approximation analogique, numérique et d'implémentation.

Dans le cas des opérateurs d'ordre fractionnaire numériques, on peut trouver quelques travaux pour l'approximation et l'implémentation de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire mais, très peu de travaux ont été faits pour l'opérateur d'avance numérique d'ordre fractionnaire. En général, les chercheurs préfèrent l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles parce qu'il est bien connu que, pour le but d'interpolation ou d'évaluation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes. Et à cause de leur capacité de modéliser des fonctions par des zéros et des pôles, les fonctions rationnelles convergent fréquemment plus rapidement que l'expansion en série de puissance. Les méthodes d'approximation rationnelle les plus utilisées dans la littérature sont [3] : Méthode d'Oustaloup, Méthode de Charef et Méthode CFE (continued fraction expansion). Dans notre travail on a utilisé seulement la méthode d'approximation de Charef qui sera entièrement détaillée dans le chapitre 1.



## Filtre de Retard Fractionnaire

Un avantage fondamental des techniques de traitement numérique du signal, par rapport aux méthodes analogiques traditionnelles, est l'implémentation facile d'un retard constant : pour un moment donné, le signal est simplement stocké dans une mémoire tampon. Cette technique fonctionne parfaitement, car le retard désiré est un multiple de l'intervalle d'échantillonnage utilisé. Cependant, quand un retard d'une fraction de l'intervalle d'échantillonnage, est nécessaire ou, en particulier, si l'on désire pour contrôler la valeur de retard sans interruption (continuellement), des méthodes plus sophistiquées doivent être utilisées.

Le problème de mettre en application un retard fractionnaire par des moyens numériques se produit dans plusieurs applications. Dans l'un des premiers traitements du sujet [31] (l'implémentation numérique du retard fractionnaire), un déphaseur numérique a été proposé pour trois problèmes : l'annulation d'écho, traitement de réseau d'antenne à commande de phase et la synthèse de la parole.

Plus tard, les articles ont inclus des applications telles que l'estimation du temps de retard, l'orientation du faisceau de réseau d'antennes, l'ajustement du temps des récepteurs numériques, la modélisation des instruments musicales, le codage et la synthétisation de la parole, la conception de filtre en peigne et la conversion analogique numérique [32-40].

Similaires à leurs domaines d'application, les méthodes de conception du retard fractionnaire sont également très diverses. La majorité des techniques de conception qui ont été proposées dans la littérature, se concentrent exclusivement sur les filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) et les filtres passe-tout à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) [33-34] et [41-46]. Le problème de conception de ces filtres, est considéré essentiellement comme un problème d'interpolation dans le domaine temporel. Des techniques standard telles que la méthode de fenêtrage [32], l'approximation qui est basée sur le critère de platitude maximale à basse fréquence équivalente à l'interpolation de Lagrange [32], la méthode Minimax ou de Chebyshev [32], la méthode stochastique [32] et les méthodes basées sur des filtres RII passe-tout [32], ont été appliquées dans la conception des filtres de retard fractionnaire. Dans [32], les auteurs fournissent une revue complète sur les performances des filtres de retard fractionnaire pour plusieurs techniques de conception.

Récemment, les filtres de retard fractionnaire numériques, fixes et variables, sont des sujets d'un intérêt croissant. Tandis que la conception et la réalisation des filtres RIF de retard

fractionnaire pourraient être considérées comme un champ mature, bien développé et même rempli, il reste beaucoup à faire et étudier dans le cas des filtres RII de retard fractionnaire. Ces derniers sont basés généralement sur des structures passe-tout, offrant un gain unité pour toutes les fréquences et permettant ainsi de se concentrer uniquement sur l'approximation de retard de phase.

Les réalisations des filtres RII à retard fractionnaire, sont souvent préférables à cause de leur complexité moindre (moins de multiplicateurs et de retards) et de leur retard global plus faible (en raison de l'ordre moins élevé de la fonction de transfert). Cependant, la conception de ce type de filtres numériques est beaucoup plus compliquée à cause des problèmes comme l'instabilité et de plus haut niveau des bruits de quantification.

## 2. Objectifs de la thèse

L'objectif principal de ce travail est l'application des concepts des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire dans la conception et l'implémentation numérique de retard numérique d'ordre fractionnaire idéale. Dans ce contexte, une méthode d'implémentation numérique du retard idéale  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) a été proposée en utilisant des filtres RII basée sur les systèmes d'ordre fractionnaire en utilisant différentes techniques. Des simulations ont été faites et les résultats obtenus ont été satisfaisants. Comme application, l'implémentation par un filtre numérique RII du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale a été utilisée dans la conception d'un filtre peigne numérique. Une technique de transformation du domaine analogique au domaine discret basée sur le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) dite transformation d'Euler d'ordre fractionnaire a été proposé. La conception de cette transformation d'Euler d'ordre fractionnaire a été obtenue en utilisant l'implémentation par un filtre numérique RII du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale.

Les simulations réalisées ont montrés l'amélioration de la transformation Analogique-Numérique dans les hautes fréquences par rapport à la transformée d'Euler classique. La méthode de transformation proposée a été aussi comparée aux méthodes existantes les plus récentes dans la littérature et les résultats de simulation obtenus ont été très satisfaisants.

## 3. Présentation de la thèse

Cette thèse comporte les chapitres suivants:

## Chapitre II : Opérateurs d'Ordre Fractionnaire

Ce chapitre est une introduction aux notions fondamentales de la théorie des opérateurs d'ordre fractionnaires, ainsi que leurs techniques d'approximation, pour une bonne compréhension des autres chapitres. Une présentation de la méthode de fonction de singularité est donnée pour être utilisée comme méthode d'approximations des opérateurs numériques d'ordre fractionnaire. Enfin, une brève introduction aux méthodes d'approximation de ces opérateurs est considérée à la fin du chapitre.

## Chapitre III : Filtres à retards fractionnaires

Ce chapitre introduit les notions de base sur les retards fractionnaires concernées par notre travail de recherche. Il comporte deux parties :

- Dans la première partie, nous définissons les retards fractionnaires numériques idéaux. Nous donnons également leurs caractéristiques ainsi que les raisons pour lesquelles l'approximation du retard d'ordre fractionnaire est nécessaire.
- La seconde partie est consacrée à la description des différentes méthodes utilisées pour approximer le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal. Deux familles différentes d'approximations seront présentées. La première est basée sur les filtres RIF et la seconde sur les filtres RII passe-tout. Enfin, on présente en détail les deux méthodes d'approximations du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal par des filtres RII les plus récentes.

## Chapitre IV : Conception du retard d'ordre fractionnaire par des filtres RII

Ce chapitre contient les contributions principales de cette thèse. En premier lieu, nous montrons que pour des conditions bien précises l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , peut être obtenu par discrétisation d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant les fonctions génératrices suivantes : la transformation avant, la transformation bilinéaire (Tustin) et la transformation d'Euler. Puis, la conception de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) par des filtres RII est obtenue par discrétisation, en utilisant les transformations avant, bilinéaire et Euler, de l'approximation de la fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire analogique initiateur du retard  $z^{-m}$  par une fonction rationnelle. Des exemples illustratives sont données pour justifier l'efficacité et la précision des approches proposées pour concevoir un filtre

numérique RII stable, causale et à phase minimale approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$

## **Chapitre V : Application de la méthode de conception**

Ce chapitre est dédié à l'application de l'implémentation par un filtre numérique RII du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale dans la conception d'un filtre peigne numérique et dans l'élaboration d'une technique de transformation du domaine analogique au domaine discret basée sur le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) dite transformation d'Euler d'ordre fractionnaire.

Ce travail se terminera par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus et suggère les futures perspectives.

# *Opérateurs d'Ordre Fractionnaire*

---

1.1 Introduction .....	7
1.2 Approximations analogiques d'opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire .....	9
1.2.1 Méthode de Charef : Fonction de singularité .....	9
1.2.1.1 Approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire .....	10
1.2.1.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire .....	12
1.3 Approximations numériques d'opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire .....	14
1.3.1 Méthode directe de discrétisation .....	15
1.3.1.1 Approximation discret en utilisant l'intégration et l'expansion de série entière .....	15
1.3.1.2 Approximation discret en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue discret .....	16
1.3.2 Méthode indirecte de discrétisation .....	16
1.3.2.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui .....	17
1.3.2.2 Discrétisation de dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation fraction Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui .....	18
1.4 Approximations numériques d'opérateurs numériques d'ordre fractionnaire .....	19
1.5 Conclusion .....	20

---

## 1.1. Introduction

Dans les dernières décennies, un intérêt considérable a été porté pour les opérateurs d'ordre fractionnaire. Cette importance et popularité sont dues principalement à de nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie [1-7]. En réalité, on peut reporter leur adoption dans les domaines de la viscoélasticité, du génie biomédicale, de la modélisation et de l'identification des systèmes, de la chimie [8-13] et, particulièrement, les domaines du traitement du signal [14-18] et de la commande [19-23]. Alors, les implémentations analogiques et numériques de ces opérateurs sont des sujets de recherche très importants.

Les opérateurs d'ordre fractionnaire se partagent en deux classes : la classe des opérateurs analogiques et la classe des opérateurs numériques. Les opérateurs analogiques idéals d'ordre fractionnaire sont l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire qui sont représentés dans le domaine fréquentiel par les fonctions de transfert irrationnelles suivantes :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \quad , \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (1.1)$$

$$G_D(s) = s^m \quad , \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (1.2)$$

Les opérateurs numériques idéals d'ordre fractionnaire sont le retard et l'avance d'ordre fractionnaire qui sont représentés dans le domaine fréquentiel par les fonctions de transfert irrationnelles suivantes :

$$G_R(s) = z^{-m} \quad , \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (1.3)$$

$$G_A(s) = z^m \quad , \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (1.4)$$

Comme on peut le remarquer, ces opérateurs sont des généralisations des opérateurs classiques d'ordre entier. Alors, l'ordre fractionnaire  $m$  leur donne plus de flexibilité dans la modélisation des systèmes physiques et dans la conception des algorithmes de commande et de traitement du signal. Comme ils ne peuvent pas être exactement implémentés seulement des implémentations limitées en fréquence peuvent cependant être accomplies en utilisant des techniques d'approximation.

Concernant les opérateurs analogiques idéals d'ordre fractionnaire, l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire, beaucoup de travaux ont été fait pour leurs approximations. Dans la référence [3], on peut trouver un bon résumé des méthodes existantes pour leurs implémentations analogiques par des fonctions rationnelles dans le domaine fréquentiel. Pour

leurs implémentations numériques différentes techniques ont été élaborées qu'on peut trouver dans [24-30]. En général, il y a deux techniques de discrétisation : directe et indirecte. Dans la technique indirecte, les méthodes utilisées requissent deux étapes, premièrement une approximation analogique est faite dans le domaine fréquentiel puis une des méthodes de transformation du domaine analogique au domaine discret tel qu'Euler, Tustin ou Al-Alaoui est utilisée pour la discrétisation. Les méthodes de la technique directe sont basées sur l'application du développement en série de puissance dans le domaine discret des opérateurs d'ordre fractionnaire quand la transformation d'Euler, de Tustin et d'Al-Alaoui approximent l'intégrateur et le dérivateur réguliers.

Concernant les opérateurs d'ordre fractionnaire numériques, on peut trouver quelques travaux pour l'approximation et l'implémentation de l'opérateur de retard d'ordre fractionnaire mais, très peu de travaux ont été faits pour l'opérateur d'avance d'ordre fractionnaire. Le concept de retard d'ordre fractionnaire a été trouvé très utile dans la résolution de plusieurs problèmes pratiques dans différents domaines d'ingénierie y compris dans l'orientation du faisceau de réseau d'antennes, l'ajustement du temps des récepteurs numériques, l'estimation du temps de retard, la modélisation des instruments musicaux, le codage et la synthétisation de la parole, la conception de filtre en peigne et la conversion analogique numérique [32-40]. Plusieurs techniques ont été proposées pour la conception de filtre numérique de type RII et RIF pour l'approximation de l'opérateur retard d'ordre fractionnaire idéale [33-34] et [41-46]. Contrairement à l'opérateur de retard d'ordre fractionnaire, l'opérateur d'avance d'ordre fractionnaire n'a pas reçu autant d'attention de la communauté du traitement du signal malgré que le concept de la prédiction linéaire soit très bien établi dans le domaine du traitement du signal et elle a plusieurs applications pratiques à savoir les télécommunications et le traitement de la parole [47]. Le travail de la référence [48] a été le seul travail trouvé dans la littérature qui s'intéresse à l'implémentation de l'opérateur d'avance d'ordre fractionnaire.

Comme l'objectif principal de ce travail de recherche est l'application des concepts des systèmes d'ordre fractionnaire dans la conception et l'implémentation numérique de retard d'ordre fractionnaire, alors dans ce chapitre des notions fondamentales de la théorie des systèmes d'ordre fractionnaires ainsi que leurs techniques d'approximation seront présentées. Des méthodes classiques de conception numérique du retard d'ordre fractionnaire vont aussi être exposées.

## 1.2. Approximations analogiques d'opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire

Il existe plusieurs techniques d'approximation des opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles. Dans la référence [3], on peut trouver un bon résumé de ces méthodes d'approximation. Parmi ces méthodes on peut énumérer la méthode de l'expansion par fractions continues, les méthodes de Carlson, de Charef, de Matsuda et d'Oustaloup. Mais, les méthodes de Charef et d'Oustaloup sont les plus utilisées dans la littérature. Dans tous les travaux de recherche réalisés dans cette thèse la méthode d'approximation utilisée pour l'approximation des opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles est celle de Charef dite méthode de la fonction de singulière. Alors, dans ce chapitre, on va présenter cette méthode d'approximation en détail.

### 1.2.1. Méthode de Charef : Fonction de singularité

Cette méthode est basée sur l'approximation du pole à puissance fractionnaire (PPF) représenté par la fonction suivante [49] :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} \quad (1.5)$$

on peut réécrire la fonction (1.5) comme suit:

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.6)$$

Où  $(N+ 1)$  est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système. L'équation (1.6) peut être tronquée à un nombre fini  $N$ , et l'approximation devient :

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.7)$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :



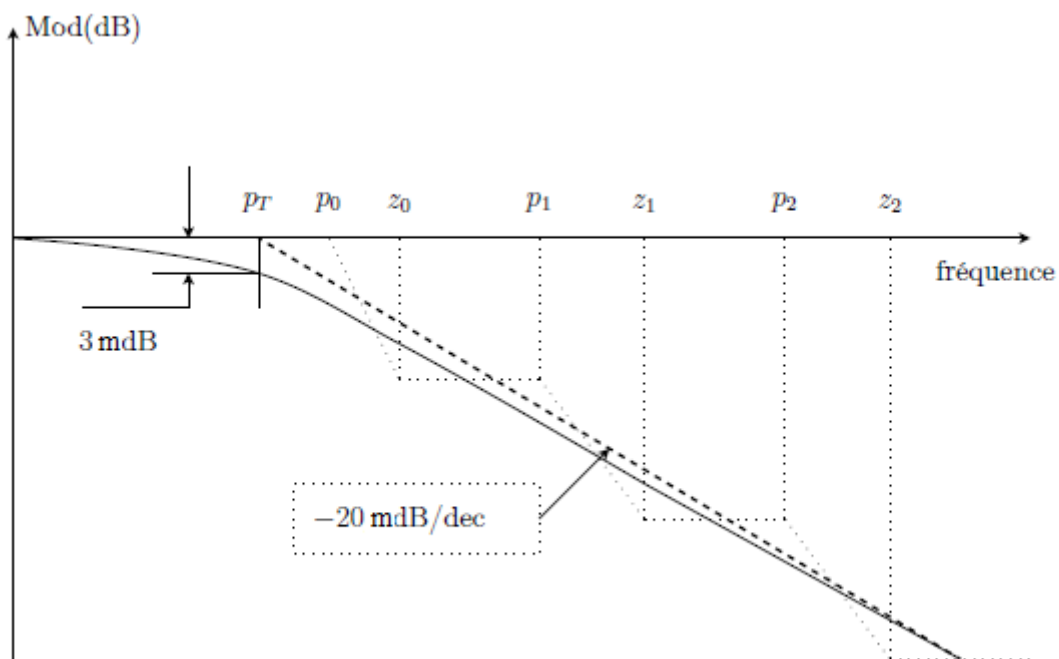
$$p_0 = p_t \sqrt{b}, p_i = p_0 (a.b)^i, z_i = a.p_0 (a.b)^i \quad (1.8)$$

Avec

$$a = 10^{y/10(m-1)}, b = 10^{y/10.m}, a.b = 10^{y/10m(1-m)}, m = \frac{\log(a)}{\log(a.b)} \quad (1.9)$$

Où  $y$  est l'erreur d'approximation en dB.

La figure 1.1 présente le Diagramme de Bode de  $1/(1 + s/p_T)^m$  avec une pente de  $-m20$  dB/dec et son approximation par des lignes droites en zig-zag avec des pentes individuelles de  $-20$  dB/dec et  $0$  dB/dec.



**Figure (1.1)** : Diagramme de Bode de la fonction  $1/(1 + s/p_T)^m$  et son approximation.

### 1.2.1.1. Approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire [13]

La fonction de transfert de l'opérateur intégral d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \quad (1.10)$$

Où  $s=j\omega$  est la fréquence complexe et  $m$  un nombre réel positif tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (1.11)$$

En supposant que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} \quad (1.12)$$

Avec  $K_I = 1/\omega_c^m$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure de PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  :  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{(\varepsilon/10.m)} - 1}$  ou  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (1.10) et le PPF de l'équation (1.11) dans la bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ .

Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (1.11), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente 20dB/dec et 0dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan  $s$  tel que  $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 \dots < z_{N-1} < p_N$  ; d'où l'approximation suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.13)$$

Où les  $p_i$  et les  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation.

En utilisant la méthode de la fonction de singularité, les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par le choix d'une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ .

Pour déterminer le nombre  $N$ , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $\omega_{\max}$ " cette bande, telle que  $\omega_{\max}$  soit égal à 100 fois  $\omega_n$ , son expression est donnée par :

$$N = \text{parite entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{p_0} \right]}{\log(a.b)} \right] + 1 \quad (1.14)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = p_0(a.b)^i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = a.p_0(a.b)^i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1$$

Où  $a$  et  $b$  sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de  $y$  et  $m$  sont données par :

$$a = 10^{y/10(1-m)}, b = 10^{y/10.m}. \text{ Avec, } p_0 = \omega_c \sqrt{b}, z_0 = a.p_0$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, on doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires

$$G_I(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i a p_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (1.15)$$

Où les coefficients  $h_i$  sont les résidus qui sont déterminés par :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j a p_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - (ab)^{(i-j)} \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

### 1.2.1.2. Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire [13]

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (1.16)$$

Où  $s=j\omega$  est la fréquence complexe et  $m$  un nombre réel positif tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit

$$G_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (1.17)$$

En supposant que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$G_D(s) = K_D \left( \frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} s^m = s^m \quad (1.18)$$

Avec  $K_D = \omega_c^m$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  :  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{(\varepsilon/10.m)} - 1}$  ou  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (1.16) et le ZPF de l'équation (1.17) dans la bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ .

Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (1.17), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20mdB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente 20dB/dec et 0dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan  $s$  tel que  $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 \dots < z_{N-1} < p_N$  ; d'où l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (1.19)$$

En utilisant la méthode de la fonction de singularité, les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par le choix d'une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ .

Pour déterminer le nombre  $N$ , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " $\omega_{\max}$ " cette bande :

$$N = \text{parite entiere} \left[ \frac{\log \left[ \frac{\omega_{\max}}{p_0} \right]}{\log(a.b)} \right] + 1 \quad (1.20)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = z_0(a.b)^i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = a.z_0(a.b)^i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$\text{avec, } z_0 = \omega_c \sqrt{b} \text{ et } p_0 = a.z_0$$

La fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera donc la suivante :

$$G_D(s) = K_D \cdot \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0} \right)} \quad (1.21)$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer  $\frac{G_D(s)}{s}$  en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} \cdot K_D \cdot \prod_{i=0}^N \frac{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0} \right)} \quad (1.22)$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (1.23)$$

### 1.3. Approximations numériques des opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire

La discrétisation est une étape nécessaire lorsqu'on utilise des machines fonctionnant en discret pour commander ou simuler des modèles continus. Dans le cas des opérateurs d'ordre

fractionnaire analogiques, il existe deux méthodes permettant d'obtenir l'équivalent discret de ces opérateurs analogiques.

### 1.3.1 Méthode directe de discrétisation

La première méthode est appelée méthode directe de discrétisation, car elle permet d'approximer directement l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire dans le domaine discret. Parmi les techniques de discrétisation existantes on peut citer les plus utilisées, la technique de l'expansion en série entière et la technique de l'expansion en fraction continue.

#### 1.3.1.1 Discrétisation utilisant la technique de l'expansion de série entière

La combinaison de la fonction génératrice d'Euler donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur dérivateur  $s = \frac{(1-z^{-1})}{T}$  et la technique de l'expansion de série entière (PSE) pour

l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^m = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^m$ , mène à l'expression suivante [3]:

$$s^m \cong T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} z^{-k} \quad (1.24)$$

Cette équation est l'expression du dérivateur d'ordre fractionnaire de Grunwald-Leitnikov d'ordre  $m$  [19]. Alors, la dérivée d'ordre fractionnaire  $m$  d'une fonction causale  $f(t)$  est obtenue à partir de l'expression (1.24) comme suit :

$$\frac{d^m f(t = nT)}{dt} = T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f((n-k)T) \quad (1.25)$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage. L'exécution de la PSE pour l'opérateur intégrateur

d'ordre fractionnaire  $s^{-m} = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^{-m}$  mène aussi à la formule donnée par Lubich [48]

comme suit :

$$s^{-m} \cong T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} z^{-k} \quad (1.26)$$

Donc, l'intégration d'ordre fractionnaire  $m$  d'une fonction causale  $f(t)$  est obtenue aussi à partir de l'expression (2.26) par :

$$I^m f(t = nT) = T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} f((n-k)T) \quad (1.27)$$

Où  $I^m$  dénote l'opération d'intégration d'ordre fractionnaire  $m$ .

Une autre possibilité pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire analogiques avec la technique de l'expansion de série entière (PSE) est l'utilisation de la règle de Tustin

(bilinéaire)  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  comme une fonction génératrice.

### 1.3.1.2 Approximation discret en utilisant l'intégration numérique et l'expansion en fraction continue

La technique de l'expansion en fraction continue (CFE) qui approxime une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle a été aussi utilisée pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire. Dans la référence [51], cette technique d'approximation a été appliqué pour le dérivateur et l'intégrateur d'ordre fractionnaires  $s^m$  et  $s^{-m}$ , respectivement, lorsque la fonction génératrice de Tustin donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur

dérivateur  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  est utilisé. Alors, l'expression suivante a été obtenue :

$$s^{\pm m} = \left( \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{\pm m} \cong T^{\mp m} \text{CFE} \left[ \left( \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{\pm m} \right] = T^{\mp m} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} \quad (1.28)$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage,  $p$  et  $q$  sont les ordres de l'approximation des polynômes  $P$  et  $Q$ .

### 1.3.2 Méthode indirecte de discrétisation

La deuxième méthode, appelée la méthode indirecte, se déroule en deux étapes. Dans la première on calcule le modèle rationnel continu qui approxime l'opérateur d'ordre fractionnaire comme suit :

$$s^{\pm m} \cong G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1.29)$$

Puis dans une seconde étape, en utilisant les méthodes de discrétisation usuelles pour obtenir le modèle rationnel discret qui approxime le modèle fractionnaire analogique comme suit :

$$s^{\pm m} \cong G(s)|_s = F(z) \quad (1.30)$$

où  $F(z)$  est la fonction génératrice de discrétisation donnée par :

$$\text{- Euler [52]:} \quad s = F(z) = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

$$\text{- Tustin [52]:} \quad s = F(z) = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$\text{- Al-Alaoui [53]:} \quad s = F(z) = \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7}$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage.

Dans ce qui suit, on présente le modèle rationnel discret obtenu en utilisant les trois méthodes classiques de discrétisation appliquées au modèle rationnel analogique obtenu par la méthode de Charef [13].

### 1.3.2.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui

Dans notre cas, l'implémentation numérique de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire est la discrétisation de la fonction rationnelle  $G_1(s)$  de l'équation (1.15) approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-m}$  ( avec  $0 < m < 1$  ) par les trois méthodes d'Euler, Tustin et Al-Alaoui. Par conséquent, les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) obtenus sont donnés par les fonctions de transfert suivantes :

$$\text{- Euler [30,54-55] :} \quad s^{-m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left( 1 + \frac{T}{p_i} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i \cdot z}{(\delta_i \cdot z - \chi_i)} \quad (1.31)$$

$$\text{- Tustin [30,54-55]:} \quad s^{-m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left( 1 + \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} = (z+1) \cdot \sum_{i=0}^N \frac{h_i \cdot z}{(\alpha_i \cdot z - \lambda_i)} \quad (1.32)$$



$$- \text{ Al-Alaoui [30,54-55]: } s^{-m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{p_i}}{1 + \frac{1-z^{-1}}{7}}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i \cdot (z+1/7)}{(\ell_i \cdot z - \delta_i)} \quad (1.33)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1 + \frac{2}{Tp_i}, & \lambda_i &= \frac{2}{Tp_i} - 1, & \delta_i &= 1 + \frac{1}{Tp_i}, \\ \chi_i &= \frac{1}{Tp_i}, & \ell_i &= 1 + \frac{8}{7Tp_i}, & \partial_i &= \frac{8}{7Tp_i} - \frac{1}{7}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

### 1.3.2.2 Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui

De la même manière, l'implémentation numérique de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est la discrétisation de la fonction rationnelle  $G_D(s)$  de l'équation (1.23) approximant le dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^m$  (avec  $0 < m < 1$ ) par les trois méthodes d'Euler, Tustin et Al-Alaoui. Donc, les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) obtenus sont donnés par les fonctions de transfert suivantes :

$$- \text{ Euler [30,54-55]: } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{1-z^{-1}}{T}}{\left(1 + \frac{\frac{1-z^{-1}}{T}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i(z-1)}{T(\delta_i \cdot z - \chi_i)} \quad (1.35)$$

$$- \text{ Tustin [30,54-55]: } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\left(1 + \frac{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i(z-1)}{(\alpha_i \cdot z - \lambda_i)} \quad (1.36)$$

$$- \text{ Al-Alaoui [30,54-55]: } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7}}{\left( 1 + \frac{\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7}}{p_i} \right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{8}{7T} \frac{g_i(z-1)}{(\ell_i \cdot z - \partial_i)} \quad (1.37)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1 + \frac{2}{Tp_i}, & \lambda_i &= \frac{2}{Tp_i} - 1, & \delta_i &= 1 + \frac{1}{Tp_i}, \\ \chi_i &= \frac{1}{Tp_i}, & \ell_i &= 1 + \frac{8}{7Tp_i}, & \partial_i &= \frac{8}{7Tp_i} - \frac{1}{7}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

#### 1.4. Approximations numériques d'opérateurs numériques d'ordre fractionnaire

Dans les applications pratiques des systèmes discrets, la plupart du temps nous traitons les signaux qui sont des versions échantillonnées des signaux à temps continu et à bande limitée. Normalement, ces signaux sont traités synchroniquement dans le sens où le domaine temporel est l'ensemble des nombres entiers pour chacun d'eux. Cependant, il y a des applications où ceci ne se produit pas. Nous pouvons traiter des signaux obtenus en échantillonnant des signaux à temps continu avec le même intervalle d'échantillonnage, mais dans différents instants de temps, par exemple les processus que l'on appelle les processus temporisé (time-delayed processes) [56]. D'autre part, dans d'autres applications, nous pouvons avoir besoin de connaître le comportement d'un système entre les instants d'échantillonnage [57].

Ces considérations motivent de permettre la généralisation de la notion de « retard » et « d'avance » fractionnaire. Le problème d'implémentation de système discret pour retarder/avancer un signal par une fraction de la période d'échantillonnage par des moyens numériques mène systématiquement aux méthodes, bien établies, de conception de filtre pour rechercher les solutions efficaces à ce problème particulier.

Le concept de retard d'ordre fractionnaire a été trouvé très utile dans la résolution de plusieurs problèmes pratiques dans différent domaines d'ingénierie y compris dans l'orientation du faisceau de réseau d'antennes, l'ajustement du temps des récepteurs numériques, l'estimation

du temps de retard, la modélisation des instruments musicales, le codage et la synthétisation de la parole, la conception de filtre en peigne et la conversion analogique numérique [31-38]. Plusieurs techniques ont été proposées pour la conception de filtre numérique de type RII et RIF pour l'approximation de l'opérateur retard d'ordre fractionnaire idéale. Les méthodes d'approximation existantes, incluent l'application du critère de platitude maximale équivalent à l'interpolation de Lagrange, la méthode de fenêtrage de la réponse impulsionnelle idéale, la méthode Minimax ou de Chebyshev, la méthode stochastique et les méthodes basées sur des filtres RII passe-tout. [32,34-35] et [42-46]. Toutes ces méthodes sont basées sur des techniques d'interpolation.

Au contraire, l'opérateur d'avance fractionnaire numérique n'a pas obtenu beaucoup d'attention de la communauté traitement du signal, malgré cela que la pertinence de la prédiction linéaire dans le traitement du signal moderne est un fait bien établi et la prédiction en une étape a plusieurs applications pratiques, notamment dans les télécommunications et le traitement de la parole [47]. Le seul travail que nous avons trouvé dans la littérature traitant la mise en œuvre de l'opérateur avance fractionnaire est donnée dans [48].

## 1.5. Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux notions fondamentales de la théorie des opérateurs d'ordre fractionnaires. Après une introduction sur les opérateurs analogiques et numériques d'ordre fractionnaire, nous avons présenté les méthodes d'approximation de ces opérateurs analogiques, avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière qui était entièrement détaillée, car elle a été actuellement la plus utilisée pour la simulation, l'approximation et la réalisation des systèmes non entiers : l'approximation du système (PPF et ZPF) d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel de dimension finie. C'est cette approximation qui sera utilisée dans le chapitre quatre pour la conception numérique de retard d'ordre fractionnaire par des filtres généraux à réponse impulsionnelle infinie (RII). Enfin nous avons donné une brève introduction aux méthodes d'approximation numérique de ces opérateurs numériques.

# Chapitre 2

## *Filtres des retard Fractionnaire*

---

2.1 Introduction .....	21
2.2 Définition à retards fractionnaires .....	22
2.2.1 Cas continu .....	22
2.2.2 Cas discret .....	22
2.2.3 Définition du retard par référence au temps continu .....	24
2.2.4 Caractéristique des retards fractionnaire .....	25
2.3 Retards fractionnaires : approximations .....	26
2.3.1 Approximations des retards fractionnaires par des filtres RIF .....	27
2.3.1.1 Méthode des moindres carrés .....	27
2.3.1.2 Méthode des moindres carrés avec bande passante réduite .....	28
2.3.1.3 Interpolateur de Lagrange (F.I.L.) : Critère de platitude maximale .....	28
2.3.2 Approximations des retards fractionnaires par des filtres RII .....	29
2.3.2.1 Filtres RII Passe-Tout .....	29
2.3.2.2 Autres Filtres RII .....	31
2.4 Conclusion .....	32

---

## 2.1. Introduction

Le problème théorique du retard fractionnaire peut se manifester selon différents aspects et sa résolution peut amener des résultats particulièrement surprenants. Les filtres de retard fractionnaires sont conçus pour retarder leur signal d'entrée discret par une quantité fractionnaire de la période d'échantillonnage. Ils trouvent leurs applications dans très nombreux domaines. Ils permettent par exemple d'estimer, de mesurer et de contrôler précisément le retard entre deux ou plusieurs canaux d'émission ou de réception, notamment en filtrage d'antenne pour l'estimation du temps de retard, le contrôle et la mesure de la focalisation des rayons. Ils interviennent également dans la correction automatique de systèmes numériques de mesure, pour lesquels la période d'échantillonnage subit des perturbations à cause, soit de modifications des conditions de transmission du canal analogique, soit de dérives de l'horloge. On trouve également les retards fractionnaires dans la conception du filtre en peigne et conversion analogique-numérique. Notons également que les filtres de retards fractionnaires sont aussi très utilisés dans la modélisation d'instruments de musique et synthèse et codage de la parole [32-40]. Ces applications sont données à titre d'exemples et leur liste est loin d'être exhaustive. Beaucoup de techniques de conception ont été proposées pour approximer le retard fractionnaire idéal par des filtres numériques de type RIF et RII. Certaines méthodes ont été développées pour concevoir un filtre numérique de retard fractionnaire fixe [33-34], [41-45] et d'autres méthodes pour concevoir un filtre numérique de retard fractionnaire variable [46,58-65]. Les méthodes de conception classiques les plus connues pour l'approximation de retard fractionnaire par des filtres numériques ont été présentées dans [32]. Quelques méthodes récentes de conception de retard fractionnaire par des filtres numériques vont aussi être brièvement décrites ultérieurement.

Ce chapitre se décompose en deux parties distinctes : dans la première partie, nous définissons les retards fractionnaires idéaux. Ceci sera fait par référence au temps continu, bien que d'autres définitions soient possibles. Nous donnons également les caractéristiques de ceux-ci ainsi que les raisons pour lesquelles l'approximation de retard fractionnaire est nécessaire. Dans la deuxième partie, nous présentons quelques approches aboutissant à différentes approximations permettant la réalisation de filtres RIF et RII pour les retards fractionnaires.

## 2.2. Définitions des retards fractionnaires

Cette partie est consacrée à la définition du retard fractionnaire en temps continu et discret ainsi que la définition dite par référence au temps continu. Nous considérons également la solution idéale du problème des retards fractionnaires et montrons pourquoi l'approximation de ceux-ci est nécessaire.

### 2.2.1 Cas continu

Soit un système linéaire continu dont le but est de retarder son signal continu d'entrée  $x_c(t)$  par une quantité  $\tau$  désirée. Le signal de sortie  $y_c(t)$  peut être exprimé comme :

$$y_c(t) = x_c(t - \tau) \quad (2.1)$$

La fonction de transfert de cet élément de retard peut s'écrire à l'aide de la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} H_{C,id}(j\omega_c) &= \frac{Y_C(\omega_c)}{X_C(\omega_c)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y_c(t) e^{-j\omega_c t} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\omega_c t} dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t - \tau) e^{-j\omega_c t} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\omega_c t} dt} \\ &= \frac{e^{-j\omega_c \tau} X_C(\omega_c)}{X_C(\omega_c)} = e^{-j\omega_c \tau} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $\omega_c = 2\pi f$  est la pulsation (rad/s).

### 2.2.2 Cas discret

En temps discret, le retard sur un signal à bande limitée, s'exprimera comme :

$$y(n) = x(n - D) \quad (2.3)$$

où  $D = \frac{\tau}{T}$  est un nombre réel,  $T$  est la période d'échantillonnage. La transformée de Fourier en temps discret (TFTD) du signal de sortie  $y(n)$  est défini comme :

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\omega T n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - D) e^{-j\omega T n} = e^{-j\omega T D} X(\omega) \quad (2.4)$$

La fonction de transfert en temps discret  $H_{id}(e^{j\omega T})$  de cet élément de retard s'écrira :

$$H_{\text{id}}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{e^{-j\omega TD} X(\omega)}{X(\omega)} = e^{-j\omega TD} \quad (2.5)$$

Avec  $|\omega T| \leq \pi$ , celle-ci constitue la fonction de transfert d'un retard idéal en temps discret, qui est donc de période  $2\pi/T$ . Autrement dit, la fonction de transfert  $H_{\text{id}}(e^{j\omega T})$  est appelée aussi **filtre idéal de retard fractionnaire**. Afin d'être cohérent avec la notation de la transformée en Z utilisée généralement dans le traitement numérique du signal, l'équation (2.5) se réécrit alors comme suit :

$$H_{\text{id}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-D} X(z)}{X(z)} = z^{-D} \quad (2.6)$$

où  $D \in \mathfrak{R}_+$  est la longueur du retard entre deux échantillons. Donc le retard D peut être écrit sous la forme

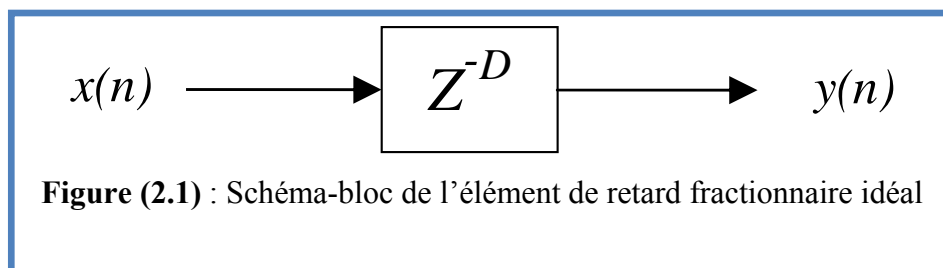
$$D = D_{\text{ent}} + m \quad (2.7)$$

$$D_{\text{ent}} = \lfloor D \rfloor \quad (2.8)$$

Où la notation  $\lfloor \cdot \rfloor$  symbolise la fonction partie entière. Elle est définie comme :

$$\lfloor r \rfloor = \max_{k \leq r} (k), \text{ où } r \in \mathfrak{R} \text{ et } k \in \mathbb{Z} \quad (2.9)$$

Donc le schéma-bloc de l'élément de retard idéal est illustré sur la figure (2.1).



Pour comprendre comment produire un retard fractionnaire en utilisant un système à temps discret, il est nécessaire d'aborder une autre approche plus traditionnelle des retards fractionnaires, qui est appelée retard par référence au temps continu.

### 2.2.3 Définition du retard par référence au temps continu

La notion des retards fractionnaires peut également faire l'objet d'une ré-interprétation du théorème de Shannon-Whittaker. Celui-ci établit une formule de reconstruction d'un signal à bande limitée à partir de ses échantillons (avec une période d'échantillonnage  $T$  fixe). Cette interprétation ne s'applique évidemment que lorsque les conditions du théorème de Shannon-Whittaker sont réunies pour définir le signal à temps continu suivant:

$$\forall t \in \mathfrak{R}, x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin\left(\pi \frac{t-nT}{T}\right)}{\pi \frac{t-nT}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (2.10)$$

Selon l'équation (2.10) l'interpolateur idéal à bande limitée a une réponse impulsionnelle en temps continu comme suit :

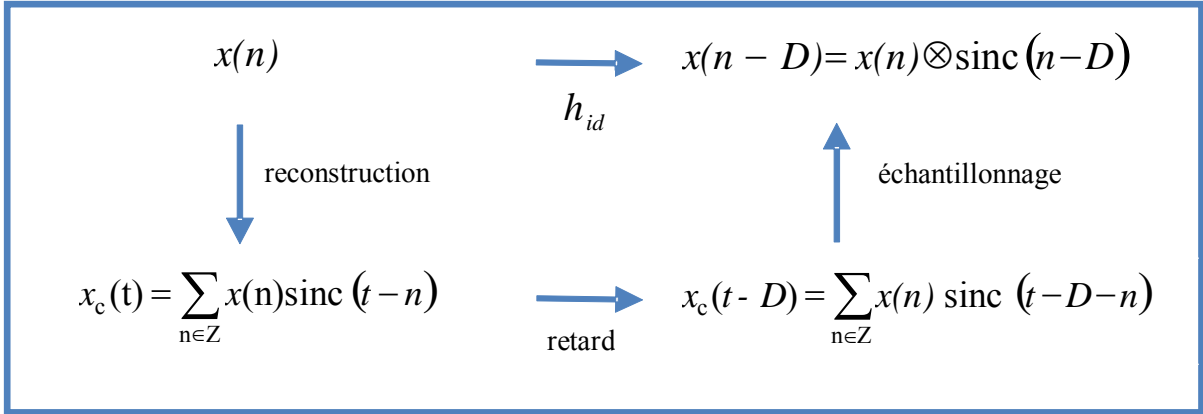
$$h_c(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (2.11)$$

pour  $t \in \mathfrak{R}$ . Cette réponse impulsionnelle que Shannon a appelé la fonction cardinale de Whittaker, convertit un signal à temps discret à un signal à temps continu. Dans les applications de retard, cependant, il est nécessaire de connaître la valeur d'un signal à un instant unique entre les échantillons. Le résultat désiré peut être obtenu en décalant l'équation (2.11) par un retard  $D$  et puis en l'échantillonnant aux points équidistants. Ainsi, la sortie  $y(n)$  de l'élément de retard fractionnaire idéal en temps discret, est calculée comme :

$$y(n) = x(n-D) = x(n) \otimes \text{sinc}(n-D) \quad (2.11)$$

On peut conclure que, produire un retard fractionnaire en temps discret, consiste à calculer l'amplitude du signal continu sous-jacent au signal discret (reconstruction) entre deux échantillons. La définition des retards fractionnaires par référence au temps continu se fait donc de la manière suivante [66]: à partir d'une séquence discrète  $x(n)$ , nous reconstruisons le signal continu correspondant  $x_c(t)$  en utilisant l'équation (2.10), nous décalons ensuite ce signal continu du retard  $D$  désiré et ré-échantillons le signal continu décalé. Nous obtenons ainsi le retard fractionnaire désiré  $D$  sur la séquence discrète  $x(n)$ . Le schéma commutatif suivant rend compte de la définition des retards par référence au temps continu:





Où  $h_{id}$  est le filtre de retard fractionnaire par référence au temps continu.

On remarque que cette définition du retard ne s'applique qu'aux signaux discrets à énergie finie correspondant à l'échantillonnage d'un signal à temps continu, également d'énergie finie, et à bande limitée.

## 2.2.4 Caractéristique des retards fractionnaires

L'interpolateur idéal à bande limitée ainsi défini à comme fonction de transfert :

$H_{id}(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega TD}$  avec  $|\omega T| \leq \pi$  et  $D$  réel, il possède les caractéristiques suivantes:

- Réponse en amplitude :  $|H_{id}(e^{j\omega T})| = 1$
- Réponse en phase :  $\arg\{H_{id}(e^{j\omega T})\} = -TD\omega$

Il s'agit donc d'un système passe-tout à phase linéaire. De plus, on a :

- Retard de phase :  $\tau_{p,id} = -\frac{\arg\{H_{id}(e^{j\omega T})\}}{\omega} = TD$
- Retard de groupe :  $\tau_{g,id} = -\frac{\partial \arg\{H_{id}(e^{j\omega T})\}}{\partial \omega} = TD$

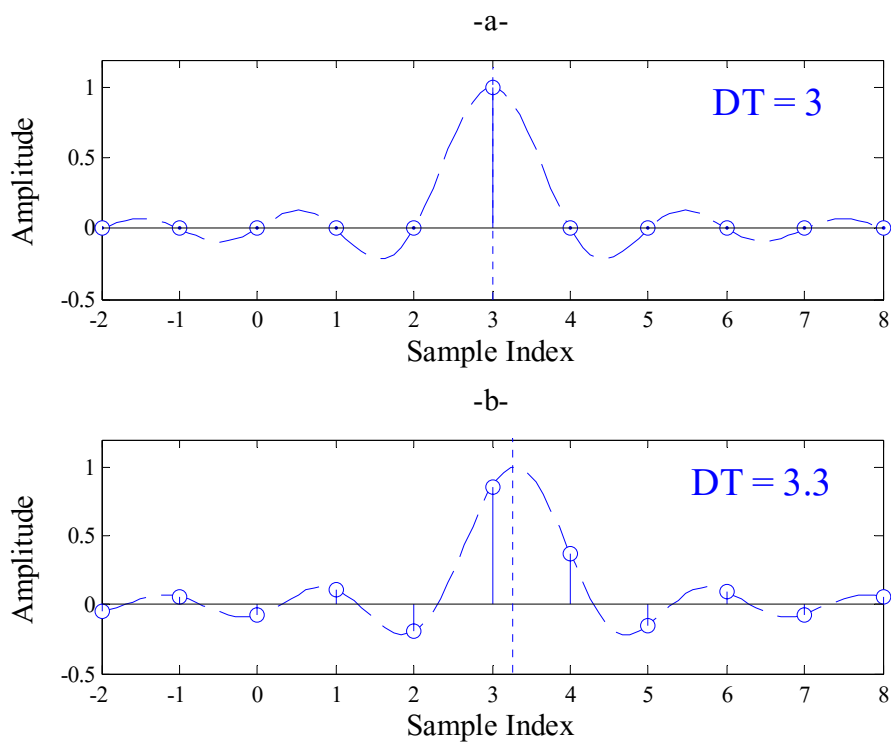
Par la transformée de Fourier inverse, la réponse impulsionnelle (R.I.) du retard idéal s'écrit:

$$\begin{aligned} h_{id}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(\omega T) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega TD} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-TD)} d\omega \\ &= \frac{e^{j\omega\pi(n-TD)} - e^{-j\omega\pi(n-TD)}}{j2\pi(n-TD)} = \frac{\sin[\pi(n-DT)]}{\pi(n-DT)} = \text{sinc}(n-DT) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Cette fonction est une version décalée et échantillonnée du sinus cardinal. Elle s'annule pour toutes les valeurs entières de  $DT$  exceptée celles où  $DT = n$ , dans ce cas elle vaut exactement 1.

- Quand  $DT$  est entier, la réponse impulsionnelle correspond exactement à la fonction de Dirac décalée. La R.I. d'un retard entier se réduit donc à un simple retard au sens traditionnel numérique comme montré sur la figure 2.2.a.
- Par contre si  $D$  est réel et non entier, la R.I. ne s'annule pour aucune valeur de  $n$ . La R.I. est dans ce cas infiniment longue (voir Fig.2.2.b.).  $H_{id}(e^{j\omega T})$  correspond alors à un filtre non-causal, qui ne peut pas être rendu causal par aucun décalage fini dans le temps. De plus le filtre n'est pas BIBO (Bounded Input Bouded Output) puisqu'il n'est pas absolument-sommable.

En conclusion pour  $D$  réel et non entier, le filtre n'est pas réalisable et des approximations devront être utilisées. Ces approximations vont abordées dans la section suivante.



**Figure (2.2)** La fonction sinus cardinal décalée de  $D=3$  échantillons (a) et décalée de  $D=3.3$  échantillons (b) pour  $T=1$

### 2.3. Retards fractionnaires : approximations

Cette section est consacrée à la description des différentes méthodes pour approximer le filtre idéal de retard fractionnaire. Dans la section précédente on a vu que la réalisation de ceci nécessite des approximations puisque le filtre réalisant la réponse impulsionnelle idéale n'est

pas réalisable. Deux familles différentes d'approximation sont présentées ici : La première technique d'approximation est basée sur les filtres RIF et la deuxième méthode est basée sur les filtres RII.

### 2.3.1 Approximation des retards fractionnaires par des filtres RIF

Dans cette partie, l'approximation des retards fractionnaires par des filtres RIF sera discutée et pour plus de détails sur ce sujet voir [32]. Nous présenterons différentes méthodes de réalisations de filtres RIF par fenêtrage de la réponse impulsionnelle idéale du retard fractionnaire tel que décrit en équation (2.12) [32], [67-69].

$$h_{id}(n) = \text{sinc}(n - DT)$$

La fonction de transfert du filtre RIF d'ordre N approximant le retard idéal est donné par :

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n) z^{-n} \quad (2.13)$$

où N est l'ordre du filtre et h(n) avec (n = 0, 1, ..., N) sont les coefficients réels qui forment la réponse impulsionnelle du filtre RIF.

Nous définissons aussi une fonction d'erreur  $E(e^{j\omega T})$  comme la différence entre la fonction de transfert idéale et son approximation:

$$E(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega T}) - H_{id}(e^{j\omega T}) \quad (2.14)$$

#### 2.3.1.1. Méthode des moindres carrés

Dans cette méthode [32], [69], on cherche à minimiser la fonction d'erreur des moindres carrés :

$$E_{LS} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |E(e^{j\omega T})|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |H(e^{j\omega T}) - H_{id}(e^{j\omega T})|^2 d\omega \quad (2.15)$$

Pour un filtre RIF d'ordre N, la solution optimale est celle consistant à tronquer symétriquement au nombre N+1 les coefficients de  $h_{id}(n)$  autour de sa valeur maximale (évidemment, l'erreur d'approximation diminue avec l'ordre N). La réponse impulsionnelle du filtre RIF ainsi obtenu est :

$$h(n) = \begin{cases} \text{sinc}(n - DT) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.16)$$

Afin de minimiser l'erreur, N doit être choisi de façon à ce que [69]:

$$\frac{N-1}{2} \leq D \leq \frac{N+1}{2}, \text{ pour } N \text{ impair}$$

Le retard  $D$  est alors localisé entre les deux pics centraux du sinus cardinal.

$$\frac{N}{2} - 1 \leq D \leq \frac{N}{2} + 1, \text{ pour } N \text{ pair}$$

Le retard  $D$  est localisé à moins d'un demi-échantillon du pic central de sinus cardinal.

Le problème de cette méthode de construction de filtres RIF réside dans l'existence du phénomène de Gibbs, i.e. l'oscillation de la réponse en fréquence tant en amplitude qu'en phase et ce indépendamment de l'ordre du filtre.

### 2.3.1.2. Méthode des moindres carrés avec bande passante réduite

Cette méthode est une variante de la précédente. Cette fois un interpolateur passe-bas est utilisé comme filtre prototype à la place d'un filtre interpolateur toute bande [32]. La solution idéale est celle qui minimise l'erreur dans l'intervalle de fréquence  $\left[0, \frac{\alpha}{2}\pi\right]$ , tel que ( $0 < \alpha < 1$ ). La solution correspondante à l'équation (2.15) est donnée par :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sin[\alpha\pi(n-DT)]}{\pi(n-DT)} & , N \leq n \leq M+N \\ 0 & , \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (2.17)$$

Où  $M$  est l'indice du premier échantillon différent de zéro et qui est défini comme :

$$M = \begin{cases} \text{round}(D) - \frac{N}{2} & , \text{ pour } N \text{ pair} \\ \lfloor D \rfloor - \frac{N-1}{2} & , \text{ pour } N \text{ impair} \end{cases} \quad (2.18)$$

Où  $\text{round}(\cdot)$  dénote l'opération d'arrondi à l'entier le plus proche et  $\lfloor \cdot \rfloor$  symbolise la fonction partie entière comme donnée par l'équation (2.9).

Le phénomène de Gibbs est réduit mais la bande passante aussi (d'un facteur  $\alpha$ ).

### 2.3.1.3. Interpolateur de Lagrange: Critère de platitude maximale

Une autre approche consiste à maximiser la platitude de la fonction d'erreur  $E(e^{j\omega T})$  autour de la fréquence  $\omega = 0$  [32]. Ceci est obtenu par annulation de la fonction d'erreur  $E(e^{j\omega T})$  ainsi que ses  $N$  premières dérivées à la fréquence  $\omega = 0$ . Les coefficients du filtre RIF d'ordre  $N$  obtenu de cette manière sont les même que ceux utilisés dans l'interpolation classique de

Lagrange d'ordre  $N$  passant par  $N+1$  points équidistants. Le critère de platitude maximale à la fréquence  $\omega = 0$  s'écrit, pour  $k = 0, 1, \dots, N$ :

$$\left. \frac{d^k E(e^{j\omega T})}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = \frac{d^k}{d\omega^k} \left[ \sum_{n=0}^N h(n) e^{-j\omega Tn} - e^{-j\omega TD} \right] \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (2.19)$$

Pour  $k = 0$ , on aura :

$$\sum_{n=0}^N h(n) - 1 = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^N h(n) = 1 \quad (2.20)$$

Alors une des exigences du critère de platitude maximale est que la somme des coefficients du filtre doit donc être égale à 1, ou bien l'amplitude de la réponse fréquentielle du filtre RIF d'ordre  $N$  à la fréquence  $\omega = 0$  doit être égale à 1.

Pour  $k \neq 0$ ,  $N$  équations linéaires sont obtenues à partir de l'équation (2.19) comme suit :

$$\sum_{n=0}^N n^k h(n) = (D)^k \quad \text{pour } k = 1, \dots, N \quad (2.21)$$

Des équations (2.20) et (2.21), on a un système de  $N+1$  équations à  $N+1$  inconnues qui se résout simplement sous forme matricielle (inversion d'une matrice de Vandermonde). La solution de ce système donne les  $N+1$  coefficients du filtre RIF d'ordre  $N$  comme suit :

$$h(n) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^N \frac{D-k}{n-k} \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N \quad (2.22)$$

D'autres méthodes d'approximation sous forme de réponse impulsionnelle finie (RIF) ont été développées. On peut mentionner l'approche de fenêtrage de la réponse impulsionnelle, la méthode générale des moindres carrés pour réponse fréquentielle complexe, la méthode Minimax ou de Chebyshev et la méthode stochastique. Toutes ces méthodes sont exposées en détails dans [32].

## 2.3.2. Approximation des retards fractionnaires par filtres RII

### 2.3.2.1 Filtres RII Passe-Tout

Dans ce paragraphe nous présentons brièvement l'utilisation de filtres RII ou récursifs passe-tout pour la réalisation de retards fractionnaires. Ces filtres ont une réponse en amplitude constante unitaire et ce quelque soit l'ordre du filtre. Leur réponse en phase est de plus paramétrable. Ils semblent donc tout indiqués pour la réalisation de retards fractionnaires qui

est avant tout un problème d'approximation de phase. La fonction de transfert du filtre RII passe-tout d'ordre  $N$  s'exprime :

$$H(z) = \frac{z^{-N}A(z^{-1})}{A(z)} = \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{N-1}z^{-(N-1)} + a_Nz^{-N}} \quad (2.23)$$

Les pôles et les zéros d'un filtre RII passe-tout étant inverse l'un de l'autre, la réponse en amplitude est constante et égale à un, c'est à dire  $|H(e^{j\omega T})| = 1$ . Pour garantir la stabilité d'un filtre numérique, les pôles de la fonction de transfert doivent se trouver à l'intérieur du cercle unité. La réponse en phase s'exprime :

$$\arg\{H(e^{j\omega T})\} = -N\omega T - 2\Theta_D(\omega) \quad (2.24)$$

où  $\Theta_D(\omega)$  est la réponse en phase de son dénominateur :

$$\Theta_D(\omega) = \arctan \frac{\sum_{k=0}^N a_k \sin(k\omega T)}{\sum_{k=0}^N a_k \cos(k\omega T)} \quad (3.25)$$

avec  $a_0 = 1$ .

La réalisation de retards fractionnaires sous forme de filtres RII passe-tout peut se faire en appliquant le critère de platitude maximale sur le retard de phase [1]. Thiran [70] propose une solution analytique pour retrouver les coefficients d'un filtre passe-tout d'ordre  $N$  approximant un retard fractionnaire  $D$ :

$$a_k = (-1)^k \binom{N}{k} \prod_{n=0}^N \frac{D - N + n}{D - N + k + n} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, N \quad (2.26)$$

où  $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(n-k)!}$  est le produit binomial. Le filtre passe-tout est stable lorsque

$N-1 < D$  et la plage de meilleur approximation du retard fractionnaire correspond à  $N-1 < D < N$  [27]. Remarquons que dans le cas de l'utilisation de filtres passe-tout, l'ordre du filtre  $N$  est de l'ordre de  $D$ , le retard approximé ( $2D$  pour les filtres interpolateurs de Lagrange d'ordre  $N$ ). Les filtres passe-tout réalisés selon ces critères sont généralement très précis à basse fréquence, mais contrairement aux filtres R.I.F, Lorsque le retard varie la réponse souffre de problème de transitoires [69]. Cependant, remarquons l'existence de techniques permettant d'éliminer plus ou moins bien ces transitoires [71], [72], [73].

Récemment, Pei et Hsu [74] avait proposé, pour l'approximation des retards fractionnaires, de suivre une démarche similaire à celles développées par Thiran ; où, les coefficients des filtres

RII. passe-tout d'ordre  $N$  approximant le retard fractionnaire  $z^{-D}$ , sont obtenus par la troncature de l'expansion de série de puissance de la fonction  $(1 - z^{-1})^{-D}$ . Donc, les coefficients  $a_k$ 's de l'équation (2.23) peuvent être données comme :

$$a_k = \frac{(-1)^n}{n!2^n} \sum_{k=0}^{N-n} \frac{m \times (m+1) \times \dots \times (m+n-1)}{k!2^n} \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N \quad (2.27)$$

Où  $m$  est un nombre réel tel que  $0 < m < 1$ .

### 2.3.2.2. Autres Filtres RII

Il est nécessaire aussi de mentionner la méthode de Zhang proposé dans [75], cette approche consiste à appliquer le critère de platitude maximale pour approximer le retard fractionnaire, par des filtres RII représenté par la fonction de transfert suivant :

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{1 + \sum_{r=1}^M b_r z^{-r}} \quad (2.28)$$

Avec les coefficients  $a_n$ 's et  $b_r$ 's sont donnés sous forme compacte et qui sont déterminés par :

$$\begin{cases} a_n = (-1)^{n+1} \frac{M!}{n!(N-n)!} \frac{\prod_{i=0}^N (i - D_{\text{ent}} - m)}{\prod_{i=0}^M (i - n + D_{\text{ent}} + m)} \\ b_r = (-1)^r \frac{M!}{r!(M-r)!} \prod_{i=0}^N \frac{(i - D_{\text{ent}} - m)}{(i - r + D_{\text{ent}} + m)} \end{cases} \quad (2.29)$$

Où  $m$  est un nombre réel tel que  $-0.5 < m < 0.5$ , et  $D_{\text{ent}}$  dénote le retard d'ordre entier.

## 2.4. Conclusion

Ce chapitre introduit les notions de base sur les retards fractionnaires concernées par notre travail de recherche. Nous avons défini les retards fractionnaires idéaux numériques, nous avons également vu que la réalisation de ceux-ci nécessite des approximations puisque le filtre réalisant la réponse impulsionnelle idéale n'est pas réalisable. On a présenté également différentes formes d'approximations de ceux-ci sous forme de filtres RIF: par fenêtrage de la réponse impulsionnelle idéale, par application du critère de platitude maximale équivalent à l'interpolation de Lagrange et sous forme de filtres RII passe-tout.

Enfin nous avons donné les deux méthodes les plus récentes, qui approximent le retard fractionnaire par des filtres RII. Jusqu'à présent, l'approximation du retard idéal d'ordre fractionnaire par un filtre numérique RII stable et à phase minimale n'a pas été discutée dans la littérature. Pour cette raison nous avons développé une nouvelle méthode de conception de retard fractionnaire par des filtres numériques RII à phase minimale. Cette méthode sera bien détaillée et présentée dans le chapitre suivant.



# Chapitre 3

## *Conception du Retard d'Ordre Fractionnaire par des Filtres R.I.I*

3.1 Introduction .....	33
3.2 Formulation du problème .....	33
3.2.1 Premier model basé sur la transformation avant .....	33
3.2.2 Second modèle basé sur la transformation bilinéaire .....	34
3.2.3 Troisième modèle basé sur la transformation d'Euler .....	35
3.3 Conception du retard numérique d'ordre fractionnaire par un filtre numérique RII .....	37
3.3.1 Filtre numérique RII par la transformation avant .....	39
3.3.1.1 Analyse de la stabilité .....	41
3.3.2 Filtre numérique RII par la transformation bilinéaire .....	42
3.3.3 Filtre numérique RII par la transformation d'Euler .....	43
3.4 Exemples de simulations et commentaires .....	45
3.4.1 Exemples 1 .....	45
3.4.2 Exemples 2 .....	52
3.4.3 Exemples 3 .....	59
3.5 Comparaison et discussion .....	67
3.5.1 Comparaison avec la méthode de Pei et Wang .....	67
3.5.1.1 Transformation avant .....	67
3.5.1.2 Transformation bilinéaire .....	72
3.5.1.3 Transformation d'Euler .....	77
3.5.2 Comparaison avec la méthode de Zhang .....	83
3.5.2.1 Transformation avant .....	83
3.5.2.2 Transformation bilinéaire .....	87
3.6 Conclusion .....	92

### 3.1. Introduction

À cause de sa représentation par une fonction irrationnelle, le retard d'ordre fractionnaire idéale numérique  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , ne peut pas être exactement implémenté en pratique, seulement une implémentation limitée peut être accomplie en utilisant les techniques d'approximation. Plusieurs techniques ont été proposées pour l'approximation du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale par des filtres numériques. Mais dans la littérature la majorité de ces techniques de conception conduise à des filtres numériques RIF et à des filtres numériques RII passe-tout ou à phase non minimale. Alors, dans ce chapitre des méthodes d'implémentation de filtres numériques approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , sont présentées. Ces filtres numériques sont des filtres numériques RII à phase minimale obtenus en se basant sur les systèmes d'ordre fractionnaire.

### 3.2 Formulation du problème:

Le procédé le plus utilisé pour calculer la fonction de transfert d'un filtre numérique, consiste à transformer la fonction de transfert  $G(s)$  de son homologue analogique du plan  $S$  au plan  $Z$  par une règle de transformation reliant  $s$  à  $z$ . Alors, dans cette partie, nous allons démontrer que pour des conditions bien précises l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , peut être obtenu par discrétisation d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant les fonctions génératrices suivantes :

- la transformation Avant ;
- la transformation d'Euler ;
- la transformation bilinéaire ou de Tustin.

Pour chacune de ces transformations, nous décrirons la méthode utilisée pour calculer la fonction de transfert de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , à partir de la fonction de transfert d'un système d'ordre fractionnaire analogique représenté par un pôle à puissance fractionnaire comme :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (3.1)$$

où  $m$  est un nombre réel tel que  $0 < m < 1$ ,  $\omega_c$  la fréquence de coupure à  $-3m$  dB.

#### 3.2.1 Premier model basé sur la transformation Avant [76]

La discrétisation de la fonction de transfert analogique de l'équation (3.1) en utilisant la transformation avant  $s = \frac{1-z^{-1}}{TZ^{-1}}$  [52], où  $T$  est la période d'échantillonnage, conduit à la fonction de transfert numérique  $G_F(z)$  :

$$G_F(z) = G\left(s = \frac{1-z^{-1}}{TZ^{-1}}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1-z^{-1}}{\omega_c TZ^{-1}}\right)^m} = \frac{(\omega_c TZ^{-1})^m}{[1 - (1 - T\omega_c)z^{-1}]^m} \quad (3.2)$$

Si la fréquence de coupure  $\omega_c$  est choisie tel que :

$$\omega_c = \frac{1}{T} \Rightarrow T\omega_c = 1 \quad (3.3)$$

le terme  $(1-T\omega_c)$  s'annule, alors la fonction de transfert numérique  $G_F(z)$  de l'équation (3.2) sera :

$$G_F(z) = z^{-m}$$

Donc, le premier modèle discret correspondant à la fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , est donnée par :

$$D_F(z) = z^{-m} = \frac{1}{(1+Ts)^m} \Bigg|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (3.4)$$

### 3.2.2 Second modèle basé sur la transformation bilinéaire (Tustin) [77]

Soit l'équation suivante:

$$I(z) = (1 + z^{-1})^m \quad (3.5)$$

La réponse fréquentielle  $I(e^{j\omega T})$  de  $I(z)$  est donnée par:

$$I(e^{j\omega T}) = (1 + e^{-j\omega T})^m = \left(2 \cos \frac{\omega T}{2}\right)^m e^{-j\frac{m}{2}\omega T} \quad (3.6)$$

Pour  $(\omega T)$  très petit, nous avons  $\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cong 1$ , alors on a :

$$I(e^{j\omega T}) \cong 2^m e^{-j\frac{m}{2}\omega T} \quad (3.7)$$

Donc, pour  $(\omega T)$  très petit l'équation (3.7) devient:

$$I(z) = (1 + z^{-1})^{-m} \cong 2^m z^{-\frac{m}{2}} \quad (3.8)$$

La discrétisation de la fonction de transfert analogique de l'équation (3.1) en utilisant la transformation bilinéaire  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  [52], où  $T$  est la période d'échantillonnage, conduit aussi à la fonction de transfert numérique  $G_T(z)$  :

$$G_T(z) = G\left(s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{T\omega_c} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^m} = \left(\frac{T\omega_c}{2}\right)^m \frac{(1+z^{-1})^m}{\left[1 + \frac{T\omega_c}{2} + \left(\frac{T\omega_c}{2} - 1\right)z^{-1}\right]^m} \quad (3.9)$$

Si la fréquence de coupure  $\omega_c$  est choisie tel que :

$$\omega_c = \frac{2}{T} \Rightarrow T\omega_c = 2 \quad (3.10)$$

le terme  $\left(\frac{T\omega_c}{2} - 1\right)$  s'annule, alors la fonction de transfert numérique  $G_T(z)$  de l'équation (3.9) sera :

$$G_T(z) = 2^{-m} (1+z^{-1})^m = 2^{-m} I(z) \quad (3.11)$$

De l'équation (3.8) on a  $I(z) \cong 2^m z^{-\frac{m}{2}}$ , pour  $(\omega T)$  très petit, par conséquent, la fonction de transfert  $G_T(z)$  de l'équation (3.11) sera :

$$G_T(z) = 2^{-m} (1+z^{-1})^m = z^{-\frac{m}{2}} \quad (3.12)$$

Alors, le second modèle discret correspondant à la fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-\frac{m}{2}}$ , pour  $0 < m < 1$ , est donnée par :

$$D_T(z) = z^{-\frac{m}{2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{T\omega_c}{2}\right)^m} \Bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (3.13)$$

### 3.2.3 Troisième modèle basé sur la transformation d'Euler [78]

Soit l'équation suivante:

$$I(z) = (2 - z^{-1})^m \quad (3.14)$$

La réponse fréquentielle  $I(e^{j\omega T})$  de  $I(z)$  est donnée par:

$$I(e^{j\omega T}) = (2 - e^{-j\omega T})^{-m} = \left( \sqrt{5 - 4\cos \omega T} e^{j \left( \tan^{-1} \left( \frac{\sin \omega T}{2 - \cos \omega T} \right) \right)} \right)^{-m} \quad (3.15)$$

Pour  $(\omega T)$  très petit, nous avons  $\cos(\omega T) \cong 1$ ,  $\sin(\omega T) \approx \omega T$  et  $\tan^{-1}(\omega T) \approx \omega T$  alors on a :

$$I(e^{j\omega T}) \cong e^{-jm\omega T} \quad (3.16)$$

Donc, pour  $(\omega T)$  très petit l'équation (3.14) devient:

$$I(z) = (2 - z^{-1})^{-m} \cong z^{-m} \quad (3.17)$$

De la même manière, la discrétisation de la fonction de transfert analogique de l'équation (3.1) en utilisant la transformation d'Euler  $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$  [52], où  $T$  est la période d'échantillonnage, conduit aussi à la fonction de transfert numérique  $G_E(z)$  :

$$G_E(z) = G\left(s = \frac{1-z^{-1}}{T}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1-z^{-1}}{T\omega_c}\right)^m} \quad (3.18)$$

Si la fréquence de coupure  $\omega_c$  est choisie tel que :

$$\omega_c = \frac{1}{T} \Rightarrow T\omega_c = 1 \quad (3.19)$$

la fonction de transfert numérique  $G_E(z)$  de l'équation (3.18) sera :

$$G_E(z) = (2 - z^{-1})^{-m} = I(z) \quad (3.20)$$

De l'équation (3.17) on a  $I(z) \cong z^{-m}$ , pour  $(\omega T)$  très petit, alors la fonction de transfert  $G_E(z)$  de l'équation (3.20) sera :

$$G_E(z) = (1 + z^{-1})^m = z^{-m} \quad (3.21)$$

Alors, le troisième modèle discret correspondant à la fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , est donnée par :

$$D_E(z) = z^{-m} = \frac{1}{(1 + Ts)^m} \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (3.22)$$

Le tableau (3.1) résume l'obtention de la fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale en utilisant les trois fonctions de transformation.

**Tableau 3.1:** Fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale en utilisant les trois transformations

<b>Premier modèle</b>	$D_F(z) = z^{-m} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \Bigg _{s=\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}}$	Avec $\omega_c = \frac{1}{T}$
<b>Second modèle</b>	$D_T(z) = z^{-\frac{m}{2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \Bigg _{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}}$	Avec $\omega_c = \frac{2}{T}$
<b>Troisième modèle</b>	$D_E(z) = z^{-m} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \Bigg _{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$	Avec $\omega_c = \frac{1}{T}$

Il faut noter que la fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale obtenue dans les trois modèles précédents est une fonction irrationnelle. Donc la méthode de conception de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$  pour  $0 < m < 1$ , par des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie est simplement obtenus par approximation de la fonction de transfert analogique du pôle à puissance fractionnaire

### 3.3 Conception du retard numérique d'ordre fractionnaire par un filtre numérique RII:

Il faut noter que la fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale pour les trois modèles précédents est une fonction irrationnelle obtenue par discrétisation du pôle à puissance fractionnaire analogique de l'équation (3.1) qui est lui-même une fonction irrationnelle. Donc la conception de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$  pour  $0 < m < 1$ , par des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie (RII)

est simplement faite par discrétisation de l'approximation de la fonction de transfert analogique du pôle à puissance fractionnaire par une fonction rationnelle.

Dans la section (2.2.1), on a présenté l'approximation de la fonction de transfert analogique du pôle à puissance fractionnaire de l'équation (3.1) par une fonction rationnelle. Alors, de l'équation (2.7), on peut écrire que :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.23)$$

Les pôles  $p_i$  et les zéros  $z_i$  de cet approximation sont donnés par :  $p_i = p_0(ab)^i$ ,  $z_i = z_0(ab)^i$ , pour  $i=0,1,\dots,N$ . Où les paramètres d'approximations  $a$ ,  $b$ ,  $z_0$ ,  $p_0$  et  $N$  sont calculés par [5] :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}, \quad b = 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}, \quad p_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad z_0 = ap_0 \text{ et } N = \left\{ \text{Integer} \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_{10}}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \right\}, \text{ avec } \omega_{\max}$$

est la bande fréquentielle d'approximation maximale. Donc, l'équation (3.23) devienne :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} \quad (3.24)$$

où les résidus  $k_i$ , pour  $i=0,1,\dots,N$ , sont calculés par  $k_i = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left[1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N \left[1 - (ab)^{(i-j)}\right]}$ .

Alors, une fois l'approximation par une fonction rationnelle du pôle à puissance fractionnaire analogique obtenue, le filtre numérique RII approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ ,  $0 < m < 1$ , est obtenu par discrétisation de l'équation (3.24) en utilisant les trois transformations avant, bilinéaire et Euler.

### 3.3.1 Filtre numérique RII par la transformation Avant [76]

A partir des équations (3.4) et (3.24), le filtre numérique RII approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , en utilisant la transformation

Avant  $s = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$  est donné comme suit:

$$D_F(z) = z^{-m} = \frac{1}{(1+Ts)^m} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1} z_0 (ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1} p_0 (ab)^i} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left( 1 + \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1} p_0 (ab)^i} \right)} \quad (3.25)$$

Une forme plus simplifiée du filtre numérique RII du retard d'ordre fractionnaire est donné par:

$$D_F(z) = z^{-m} = [b^N \sqrt{b}] \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N (z + \bar{p}_i)} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)} \quad (3.26)$$

où les pôles  $(-\bar{p}_i)$ , les zéros  $(-\bar{z}_i)$  et les résidus  $\bar{k}_i$  sont égales à :

$$\bar{p}_i = Tp_0(ab)^i - 1, \quad \bar{z}_i = Tz_0(ab)^i - 1, \quad \text{et} \quad \bar{k}_i = k_i Tp_0(ab)^i$$

La réponse impulsionnelle de ce filtre RII du retard d'ordre fractionnaire est obtenue en utilisant la transformée en Z inverse de l'équation (3.26) comme:

$$\begin{aligned} d_F(n) &= \mathcal{Z}^{-1} \{D_F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1} \left( \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)} \right) = \sum_{i=0}^N \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)} \right\} \\ d_F(n) &= \sum_{i=0}^N \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z^{-1} \left( \frac{\bar{k}_i z}{(z + \bar{p}_i)} \right) \right\} \\ d_F(n) &= \sum_{i=0}^N \bar{k}_i (-\bar{p}_i)^{(n-1)} u(n-1) \end{aligned} \quad (3.27)$$

où  $u(n)$  est la fonction échelon unité et  $n=0, 1, \dots, +\infty$ .

On suppose que  $x(n)$  et  $y(n)$ , sont respectivement, l'entrée et la sortie de ce filtre numérique RII du retard d'ordre fractionnaire, nous aurons alors:



$$D_F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left[ b^N \sqrt{b} \right] \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N (z + \bar{p}_i)} = \frac{z^{(N+1)} \sum_{i=0}^N \beta_i z^{-(i+1)}}{z^{(N+1)} \sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^N \beta_i z^{-(i+1)}}{\sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i z^{-i}} \quad (3.28)$$

où les coefficients  $\beta_i$  et  $\alpha_i$  sont donnés comme:

$$\left( \begin{array}{l} \beta_0 = [b^N \sqrt{b}] \\ \beta_i = [b^N \sqrt{b}] \frac{1}{i!} \left[ \sum_{j_0=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{N-1} \dots \sum_{j_{(i-1)}=0}^{N-1} \bar{z}_{j_0} \bar{z}_{j_1} \dots \bar{z}_{j_{(i-1)}} \right] \end{array} \right), \text{ pour } i=1, \dots, N; \text{ and } j_0 \neq j_1 \neq \dots \neq j_{(i-1)}; \text{ et}$$

$$\left( \begin{array}{l} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_i = \frac{1}{i!} \left[ \sum_{j_0=0}^N \sum_{j_1=0}^N \dots \sum_{j_{(i-1)}=0}^N \bar{p}_{j_0} \bar{p}_{j_1} \dots \bar{p}_{j_{(i-1)}} \right] \end{array} \right), \text{ pour } i=1, \dots, (N+1); \text{ and } j_0 \neq j_1 \neq \dots \neq j_{(i-1)};$$

De l'équation (3.28), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^N \beta_i z^{-(i+1)} X(z)$$

Puisque  $\alpha_0 = 1$ , on peut écrire :

$$Y(z) + \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^N \beta_i z^{-(i+1)} X(z)$$

$$Y(z) = - \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z^{-i} Y(z) \sum_{i=0}^N \beta_i z^{-(i+1)} X(z)$$

Donc la sortie du filtre numérique RII du retard d'ordre fractionnaire est donnée par:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N \beta_i x(n-i-1) - \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i y(n-i) \quad (3.29)$$

Il est bien connu, qu'un filtre numérique conçu stable peut atteindre une performance plus faible que prévu ou devenir même instable quand il est mis en œuvre avec un dispositif de précision finie. Il a été également noté que la conception de filtres numériques peut être mise en œuvre avec des réalisations différentes et que l'effet de la longueur finie sur sa performance et la stabilité dépend de la structure de réalisation. Cette propriété peut être utilisée pour choisir la meilleure réalisation afin d'améliorer la robustesse de la stabilité et les performances sous des perturbations des paramètres. Ainsi, les effets de précision finie seront interprétés comme l'incertitude paramétrique dans les coefficients du filtre, et la conception suivra une mauvaise approche pour obtenir une structure robuste de filtre numérique qui souffre une dégradation minimale lorsque les effets de précision finie sont pris en compte.

### 3.3.1.1 Analyse de la stabilité

Il est bien connu que la discrétisation des systèmes analogiques par la transformation

Avants  $s = \frac{1-z^{-1}}{TZ^{-1}}$  peut conduire à un système numérique instable [52]. Alors, le filtre

numérique RII de l'équation (3.26) approximant l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéal peut devenir instable malgré qu'il soit obtenu à partir de la fonction rationnelle stable approximant le pôle à puissance fractionnaire de l'équation (3.24). Donc,

pour garantir la stabilité du filtre RII numérique du retard d'ordre fractionnaire de l'équation (3.26), nous devons mettre quelques conditions sur la période d'échantillonnage et les paramètres d'approximation. Pour garantir la stabilité du système représenté par la fonction de

transfert de l'équation (2.26), ses pôles  $[-\bar{p}_i] = -[Tp_0(ab)^i - 1]$  doivent être à l'intérieur du

cercle d'unité; donc, nous devons avoir  $|\bar{p}_i| = |-[Tp_0(ab)^i - 1]| < 1$ , pour  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . On

peut ainsi écrire:

$$-1 < (Tp_0(ab)^i - 1) < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < (Tp_0(ab)^i) < 2$$

Et comme tous les paramètres  $T, p_0, a, b$  sont des nombres positifs, nous aurons :

$$Tp_0(ab)^i < 2$$

puis,

$$T < \frac{2}{(p_0(ab)^i)} \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.30)$$

À partir de l'approximation analogique du FPP ci-dessus, les pôles sont tels que

$$p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{(N-1)} < p_N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p_N} < \frac{1}{p_{(N-1)}} < \frac{1}{p_{(N-2)}} < \dots < \frac{1}{p_1} < \frac{1}{p_0}$$

On a  $p_i = p_0(ab)^i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, N$ , alors l'équation précédente sera :

$$\frac{1}{p_0(ab)^N} < \frac{1}{p_0(ab)^{(N-1)}} < \frac{1}{p_0(ab)^{(N-2)}} < \dots < \frac{1}{p_0(ab)} < \frac{1}{p_0}$$

Par conséquent, pour garantir l'inégalité de l'équation (3.30), pour  $0 < i < N$ , il sera suffisant de la garantir pour  $i = N$ . Donc, on donne la relation entre la période d'échantillonnage  $T$  et les paramètres d'approximation  $p_0, a, b$  et  $N$  qui garantit la stabilité du filtre RII numérique de retard d'ordre fractionnaire comme suit :

$$T < \frac{2}{(p_0(ab)^N)} \quad (3.31)$$

Ainsi, la période d'échantillonnage  $T$  doit être inférieure à deux fois le plus petit temps de relaxation  $\left(\frac{1}{p_0(ab)^N}\right)$  de la fonction rationnelle analogique approximant le pôle à puissance fractionnaire. Puisque la période d'échantillonnage  $T$ , la puissance fractionnaire  $m$  et l'erreur d'approximation  $y$  (les paramètres  $a$  et  $b$  sont des fonctions de  $m$  et de  $y$ ) sont fixes, le seul paramètre qui doit être choisi pour garantir la stabilité du filtre numérique RII du retard fractionnaire est le nombre de pôles  $N$ . Alors,

$$N < \frac{\log\left(\frac{2}{Tp_0}\right)}{\log(ab)} \quad (3.32)$$

### 3.3.2 Filtre numérique RII par la transformation bilinéaire (Tustin) [77]

Des équations (3.13) et (3.24), le filtre numérique RII approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , en utilisant la transformation bilinéaire

$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  est donné comme suit:

$$D_T(z) = z^{-\frac{m}{2}} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \frac{1}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \frac{1}{p_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \frac{1}{p_0(ab)^i}} \quad (3.33)$$

Une forme plus simplifiée de ce filtre numérique RII est donné par:

$$D_T(z) = z^{-\frac{m}{2}} = (z+1) \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{2}{Tz_0(ab)^i}\right) (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{2}{Tp_0(ab)^i}\right) (z + \bar{p}_i)} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i (z+1)}{(z + \bar{p}_i)} \quad (3.34)$$

où les pôles  $(-\bar{p}_i)$ , les zéros  $(-\bar{z}_i)$  et les résidus  $\bar{k}_i$  sont égales à :

$$\bar{p}_i = \frac{\left(1 - \frac{2}{Tp_0(ab)^i}\right)}{\left(1 + \frac{2}{Tp_0(ab)^i}\right)}, \quad \bar{z}_i = \frac{\left(1 - \frac{2}{Tz_0(ab)^i}\right)}{\left(1 + \frac{2}{Tz_0(ab)^i}\right)}, \quad \text{et } \bar{k}_i = \frac{k_i}{\left(\frac{2}{Tp_0(ab)^i} + 1\right)}$$

La réponse impulsionnelle de ce filtre RII du retard d'ordre fractionnaire est obtenue en utilisant la transformée en Z inverse de l'équation (3.34) comme:

$$\begin{aligned}
 d_T(n) &= \mathbf{Z}^{-1} \{D_T(z)\} = \mathbf{Z}^{-1} \left( \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i(z+1)}{(z+\bar{p}_i)} \right) = \sum_{i=0}^N \mathbf{Z}^{-1} \left\{ \frac{\bar{k}_i(z+1)}{(z+\bar{p}_i)} \right\} \\
 d_T(n) &= \sum_{i=0}^N \left[ \mathbf{Z}^{-1} \left\{ \left( \frac{\bar{k}_i z}{(z+\bar{p}_i)} \right) \right\} + \mathbf{Z}^{-1} \left\{ z^{-1} \left( \frac{\bar{k}_i}{(z+\bar{p}_i)} \right) \right\} \right] \\
 d_T(n) &= \sum_{i=0}^N \left[ \bar{k}_i (\bar{p}_i)^n u(n) + \bar{k}_i (\bar{p}_i)^{(n-1)} u(n-1) \right], \text{ pour } n=0, 1, \dots, +\infty \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

### 3.3.3 Filtre numérique RII par la transformation d'Euler [78]

Des équations (3.22) et (3.24), le filtre numérique RII approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , en utilisant la transformation d'Euler

$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$  est donné comme suit:

$$D_E(z) = z^{-m} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{\left( \frac{1-z^{-1}}{T} \right)}{z_0(ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{\left( \frac{1-z^{-1}}{T} \right)}{p_0(ab)^i} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left( 1 + \frac{\left( \frac{1-z^{-1}}{T} \right)}{p_0(ab)^i} \right)} \quad (3.36)$$

Après simplification, l'expression du filtre numérique RII du retard d'ordre fractionnaire est:

$$D_E(z) = z^{-m} = z \left[ \sqrt{b} \cdot (b)^N \right] \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( T z_0(ab)^i + 1 \right) (z - \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N \left( T p_0(ab)^i + 1 \right) (z - \bar{p}_i)} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i z}{(z - \bar{p}_i)} \quad (3.37)$$

où les pôles  $\bar{p}_i$ , les zéros  $\bar{z}_i$  et les résidus  $\bar{k}_i$  sont égales à :

$$\bar{p}_i = \frac{1}{T p_0(ab)^i + 1}, \quad \bar{z}_i = \frac{1}{T z_0(ab)^i + 1} \quad \text{et} \quad \bar{k}_i = \frac{k_i T p_0(ab)^i}{T p_0(ab)^i + 1}$$

La réponse impulsionnelle de ce filtre RII du retard d'ordre fractionnaire est obtenue en utilisant la transformée en Z inverse de l'équation (3.37) comme:

$$\begin{aligned}
 d_E(n) &= \mathbf{Z}^{-1} \{D_E(z)\} = \mathbf{Z}^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i z}{\left(z - \frac{1}{\bar{p}_i}\right)} \right\} = \sum_{i=0}^N \mathbf{Z}^{-1} \left\{ \frac{\bar{k}_i z}{\left(z - \frac{1}{\bar{p}_i}\right)} \right\} \\
 d_E(n) &= \sum_{i=0}^N \mathbf{Z}^{-1} \left\{ \left( \frac{\bar{k}_i z}{\left(z - \frac{1}{\bar{p}_i}\right)} \right) \right\} \\
 d_E(n) &= \sum_{i=0}^N \bar{k}_i \left( -\frac{1}{\bar{p}_i} \right)^{(n)} u(n), \text{ pour } n=0, 1, \dots, +\infty \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

On présente finalement un tableau récapitulatif qui résume les trois filtres numériques RII proposés pour approximer le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$ .

Tableau. 3.2: Les trois filtres numériques RII du retard fractionnaire proposés

Retard numérique d'ordre fractionnaire idéal	Filtre numérique RII du retard fractionnaire	Condition de stabilité
$D_F(z) = z^{-m}$	$D_F(z) = [b^N \sqrt{b}] \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^{N-1} (z + \bar{p}_i)} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)}$	$N < \frac{\log\left(\frac{2}{T p_0}\right)}{\log(ab)}$
$D_T(z) = z^{-\frac{m}{2}}$	$D_T(z) = (z+1) \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{2}{T z_0 (ab)^j}\right) (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{2}{T p_0 (ab)^j}\right) (z + \bar{p}_i)} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i (1+z^{-1})}{(1 + \bar{p}_i z^{-1})}$	Stable
$D_E(z) = z^{-m}$	$D_E(z) = z \left[ \sqrt{b} \cdot (b)^N \right] \frac{\prod_{i=0}^N (z - \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N (z - \bar{p}_i)} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i z}{(z - \bar{p}_i)}$	Stable

### 3.4 Exemples de simulations et commentaires :

Dans cette partie, on présente trois exemples illustratifs pour justifier l'efficacité et la précision des approches proposés pour concevoir un filtre numérique RII stable, causale et à phase minimale approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ . Ces approximations ont été faites dans la bande fréquentielle  $[0 \text{ rad/s}, 1000 \pi \text{ rad/s}]$ . Le choix de la période d'échantillonnage  $T$  est lié à la bande d'approximation ( $T < \pi/1000\pi$ ) ; donc on a choisi  $T = 0.01 \text{ ms}$ .

#### 3.4.1 Exemple 1 : Transformation Avant

Comme premier exemple on considère la conception de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire suivant :

$$D_F(z) = z^{-0.82}$$

Respectivement, l'amplitude en dB, la phase en degrés et le retard de groupe en secondes du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  sont :

$$\text{Amplitude (dB)} = 0$$

$$\text{Phase (deg)} = [(-0.82 \cdot 10^{-5}) \omega](180/\pi)$$

$$\text{Retard de Groupe (sec)} = [0.82 \cdot 10^{-5}]$$

De l'équation (3.4) on peut écrire :

$$D_F(z) = z^{-0.82} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100000}\right)^{0.82}} \Bigg|_s = \frac{1 - z^{-1}}{0.00001z^{-1}}$$

Pendant la conception on a remarqué qu'il y'avait une petite erreur systématique entre les modules et les phases du retard numérique d'ordre fractionnaire et de son approximation. Afin d'éliminer cette erreur, on a accordé la valeur de la fréquence de coupure du pôle à puissance fractionnaire  $\omega_c$ . Donc, au lieu d'utiliser la valeur théorique de la fréquence de coupure  $\omega_c = 1/T$  on a choisi  $\omega_c = 1.1208/T$ . Alors, de l'équation (3.25) on aura :

$$D_F(z) = z^{-0.82} \cong G_F(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{112080}\right)^{0.82}} \Bigg|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{1-z^{-1}}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{1-z^{-1}}{p_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{1-z^{-1}}{p_0(ab)^i}\right)}$$

On choisit l'erreur d'approximation du pôle à puissance fractionnaire par une fonction rationnelle  $y = 0.045$ , alors les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$  et  $z_0$  sont donnés comme suit:

$$a = 1.0593, b = 1.0127, p_0 = 1.1279 \cdot 10^5 \text{ rad/s et } z_0 = 1.1947 \cdot 10^5 \text{ rad/s.}$$

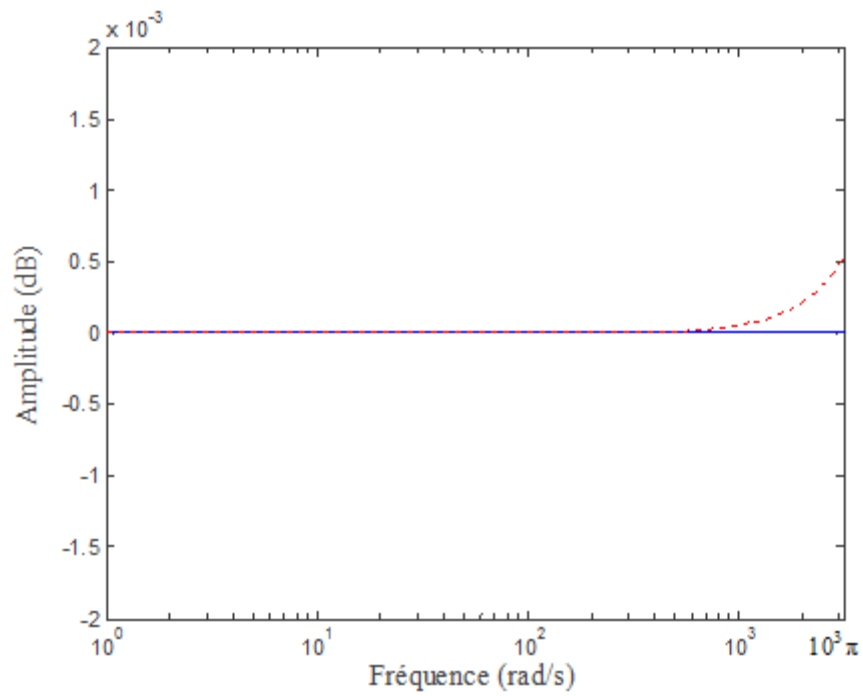
Pour garantir la stabilité du filtre RII numérique du retard d'ordre fractionnaire, le nombre de singularités  $N$  de l'approximation précédente doit vérifier l'équation (3.32). Ainsi,  $N$  est tel que :

$$N = 8 < \frac{\log\left(\frac{2}{Tp_0}\right)}{\log(ab)} = \frac{\log\left(\frac{2}{1.1279}\right)}{\log(1.0727)} = 8.3848$$

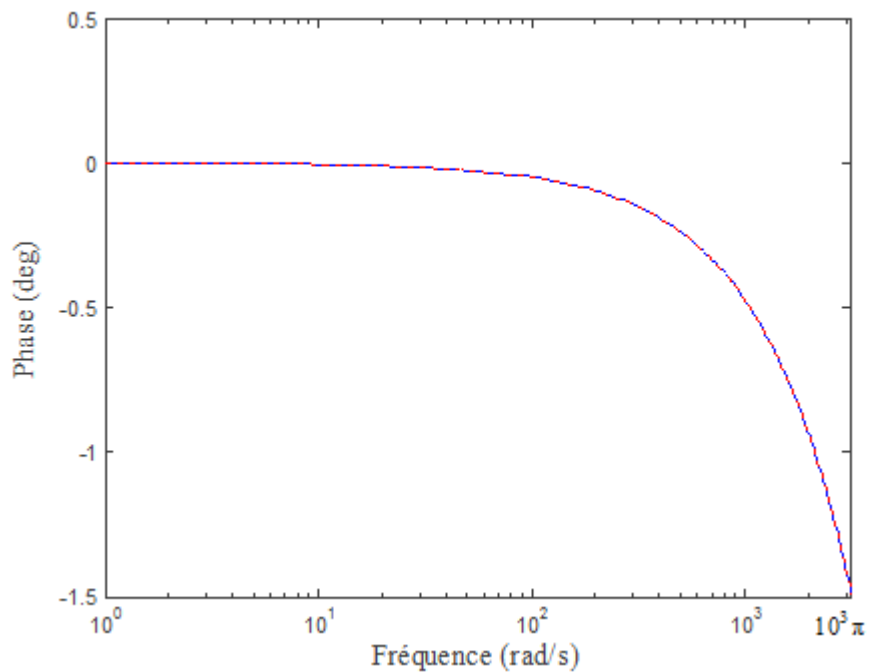
Donc, de l'équation (3.26) l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire  $z^{-0.82}$  est approximé par :

$$z^{-0.82} \cong G_F(z) = 1.1132 \frac{\prod_{i=0}^7 (z + [1.1947(1.0727)^i - 1])}{\prod_{i=0}^8 (z + [1.1279(1.0727)^i - 1])} = \sum_{i=0}^8 \frac{1.1279 \frac{\prod_{j=0}^7 \left[1 - \frac{(1.0727)^{(i-j)}}{1.0593}\right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^8 [1 - (1.0727)^{(i-j)]}}}{(z + [1.1279(1.0727)^i - 1])}$$

Figures (3.1), (3.2) et (3.3) montrent, respectivement, les tracés de Bode (amplitude et phase) et les retards de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  ainsi que le filtre numérique RII  $G_F(z)$  qui l'approxime de l'équation précédente.

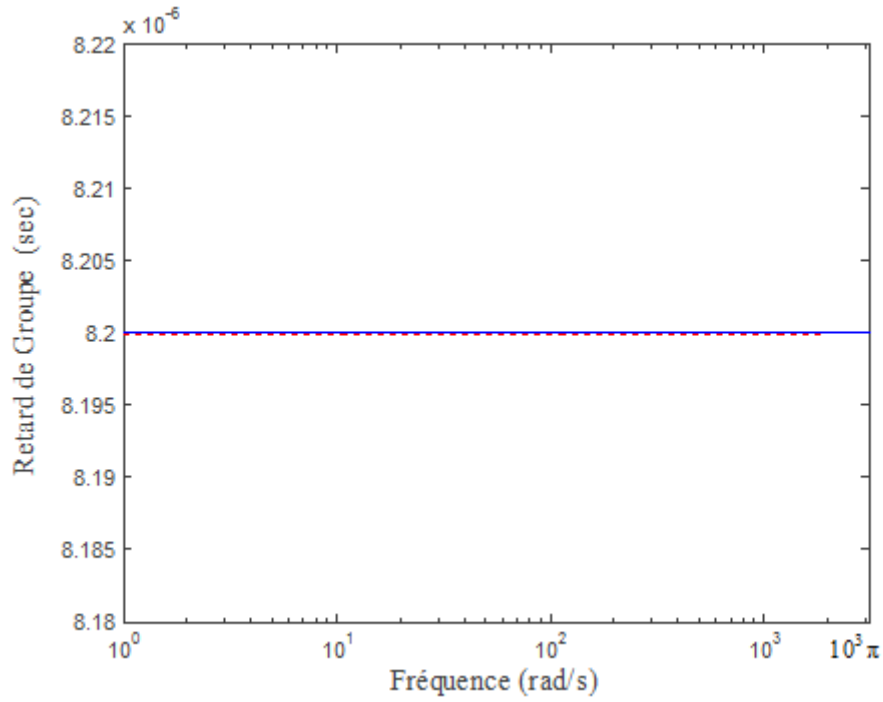


**Figure (3.1) :** Tracé de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  (trait plein) et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  (trait discontinu)



**Figure (3.2) :** Tracé de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  (trait plein) et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  (trait discontinu)





**Figure (3.3) :** Retard de Groupe du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  (trait plein) et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  (trait discontinu)

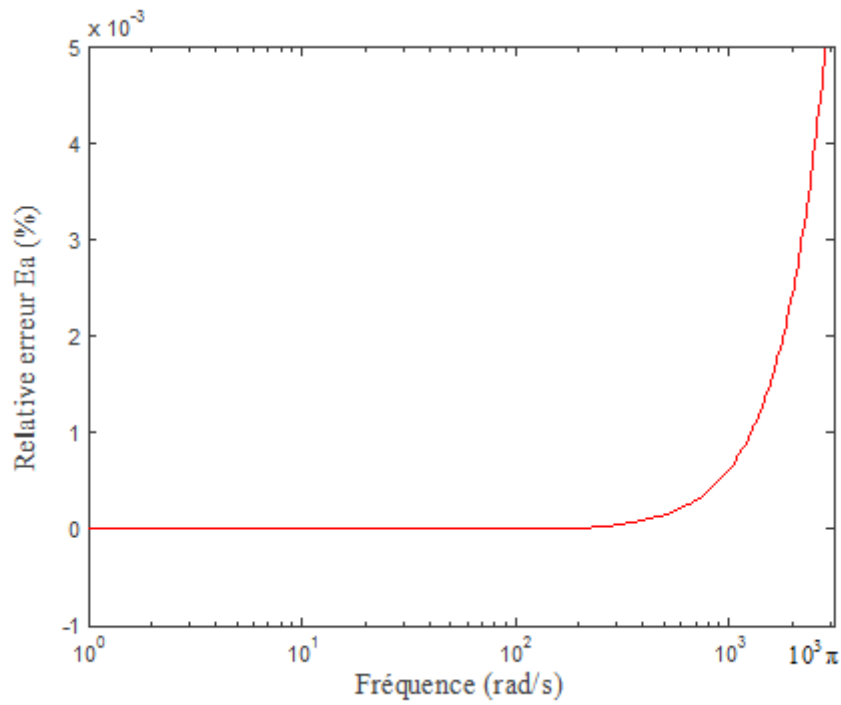
Pour mesurer l'exactitude de l'approximation du retard numérique fractionnaire  $z^{-0.82}$  par un filtre numérique RII dans la bande de fréquence  $[0 \text{ rad/s}, 1000 \pi \text{ rad/s}]$ , les erreurs relatives  $E_a$ ,  $E_p$  et  $E_g$  de l'amplitude, de la phase et du retard de groupe, définis respectivement par les équations suivantes, ont été utilisées

$$E_a = \left| \frac{\left| \left( e^{-0.82j\omega T} \right) - \left| G_F \left( e^{j\omega T} \right) \right| \right|}{\left| \left( e^{-0.82j\omega T} \right) \right|} \right|$$

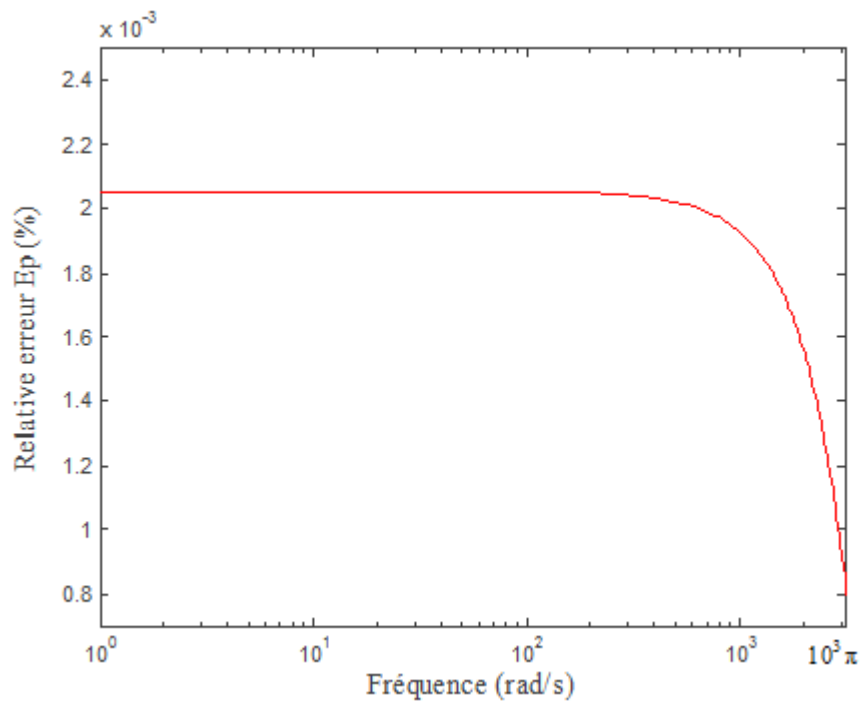
$$E_p = \left| \frac{\text{Angle} \left[ \left( e^{-0.82j\omega T} \right) \right] - \text{Angle} \left[ G_F \left( e^{j\omega T} \right) \right]}{\text{Angle} \left[ \left( e^{-0.82j\omega T} \right) \right]} \right|$$

$$E_g = \left| \frac{\text{Group Delay} \left[ e^{-0.82j\omega T} \right] - \text{Group Delay} \left[ G_F \left( e^{j\omega T} \right) \right]}{\text{Group Delay} \left[ e^{-0.82j\omega T} \right]} \right|$$

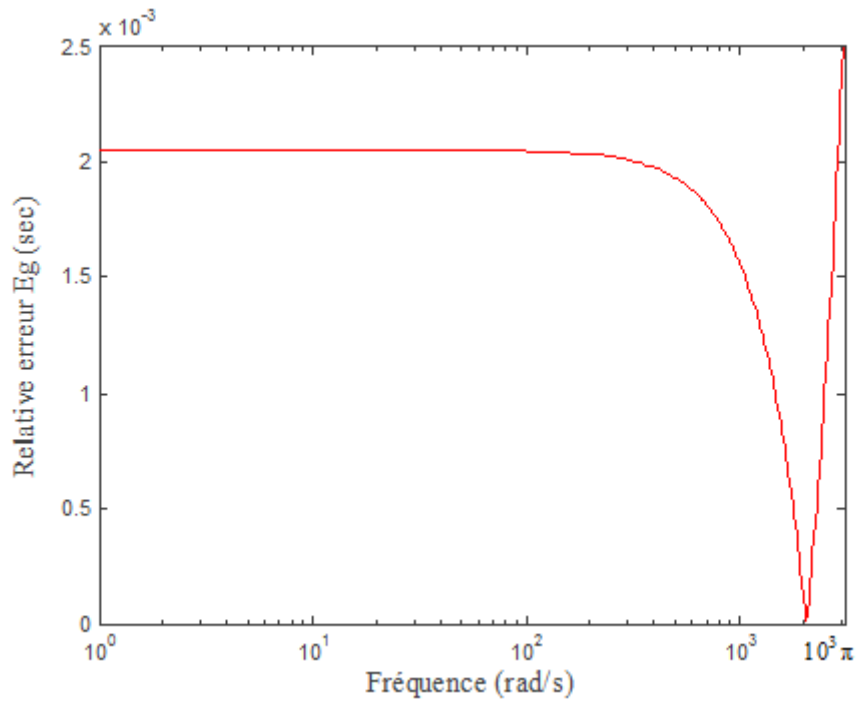
Figures (3.4), (3.5) et (3.6) montrent, respectivement, les tracés de Bode des erreurs relatives  $E_a$ ,  $E_p$  et  $E_g$  entre le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  qui l'approxime.



**Figure (3.4) :** Tracé de l'erreur relative  $E_a$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$



**Figure (3.5) :** Tracé de l'erreur relative  $E_p$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$

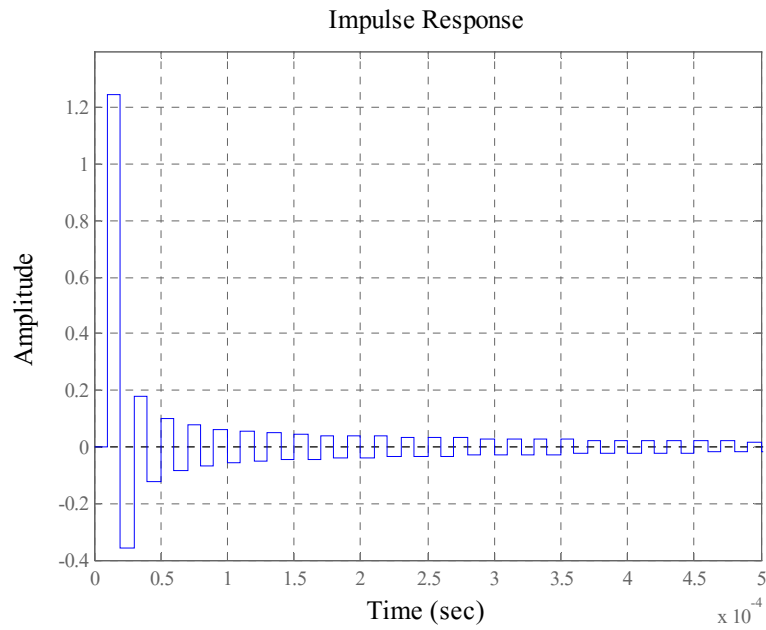


**Figure (3.6) :** Tracé de l'erreur relative  $E_g$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$

La figure (3.7) montre la réponse impulsionnelle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  qui est également obtenue à partir du filtre numérique RII  $G_F(z)$  par la transformé en  $Z$ , pour  $n=0, 1, \dots, +\infty$ , comme suit:

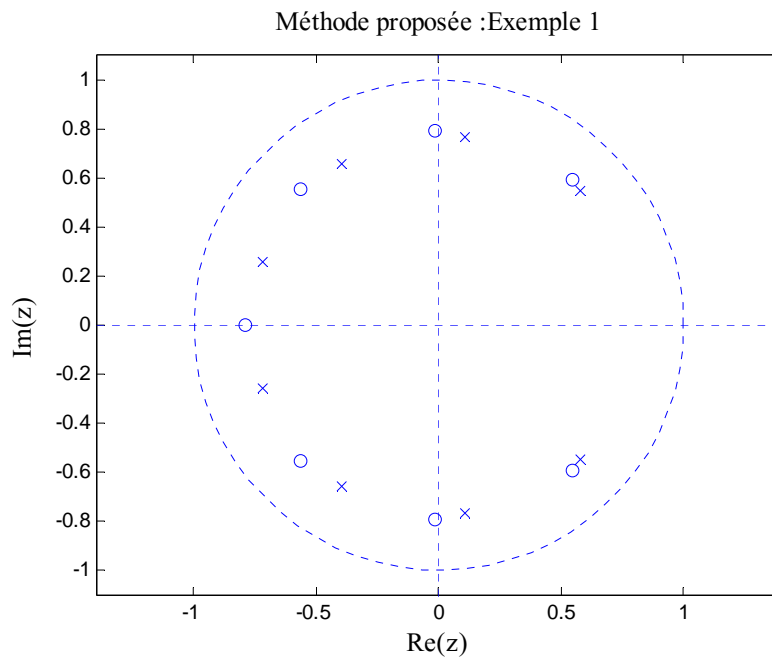
$$d_F(z) = Z^{-1} \{G_F(z)\} = Z^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^8 \frac{1.1279 \frac{\prod_{j=0}^7 \left[ 1 - \frac{(1.0727)^{(i-j)} }{1.0593} \right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^8 \left[ 1 - (1.0727)^{(i-j)} \right]} (1.0727)^i}{(z + [1.1279(1.0727)^i - 1])} \right\}$$

$$d_F(n) = \sum_{i=0}^8 \left\{ 1.1279 \frac{\prod_{j=0}^7 \left[ 1 - \frac{(1.0727)^{(i-j)} }{1.0593} \right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^8 \left[ 1 - (1.0727)^{(i-j)} \right]} (1.0727)^i \left[ 1 - 1.1279(1.0727)^i \right]^{(n-1)} \right\} u(n-1)$$



**Figure (3.7) :** Réponse impulsionnelle du filtre numérique RII  $G_F(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$

La figure (3.8) montre le tracé des positions des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_F(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$ . On note que tous les pôles et les zéros sont à l'intérieur du cercle unité.



**Figure (3.8) :** Position des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_F(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$

**Commentaires :**

- A partir des figures (3.1), (3.2) et (3.3), on peut facilement voir que les tracés de Bode (amplitude et phase) et les retards de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.82}$  et de son approximation par le filtre numérique RII  $G_F(z)$  sont superposés dans la bande de fréquence  $[0 \text{ rad/s}, 1000\pi \text{ rad/s}]$ .
- A partir des figures (3.4), (3.5) et (3.6), respectivement, on note que l'erreur relative  $E_a$  est moins de 0.005%, l'erreur relative  $E_p$  est moins de 0.0021% et l'erreur relative  $E_g$  est moins de 0.0021% dans la bande de fréquence d'intérêt  $[0 \text{ rad/s}, 1000\pi \text{ rad/s}]$ .
- Le filtre numérique d'approximation réalisé est un système linéaire, stable, causale et à phase minimale.
- Ces résultats montrent l'efficacité et l'exactitude de la méthode d'approximation du retard numérique d'ordre fractionnaire par un filtre numérique RII.

**3.4.2 Exemple 2 : Transformation bilinéaire (Tustin)**

Dans cet exemple, on considère la conception de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire suivant :

$$D_T(z) = z^{-0.4}$$

Dans ce cas, l'amplitude en dB, la phase en degrés et le retard de groupe en secondes du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  sont, respectivement, donnés par:

$$\text{Amplitude (dB)} = 0$$

$$\text{Phase (deg)} = [(-0.4 \cdot 10^{-5}) \omega](180/\pi)$$

$$\text{Retard de Groupe (sec)} = [0.4 \cdot 10^{-5}]$$

De l'équation (3.13) on peut écrire :

$$D_T(z) = z^{-\frac{0.8}{2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{200000}\right)^{0.8}} \Bigg|_s = \frac{2}{0.00001} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Comme on a fait dans l'exemple précédent, la valeur de  $\omega_c$  est adaptée de telle sorte que les erreurs relatives de phase, de retard de groupe et d'amplitude soient minimales. Donc, au lieu d'utiliser la valeur théorique de la fréquence de coupure  $\omega_c = 2/T$  on a choisi  $\omega_c = 2.36149/T$ . Alors, de l'équation (3.33) on aura :

$$D_T(z) = z^{-\frac{m}{2}} \cong G_T(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{236149}\right)^{0.8}} \Bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{p_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{p_0(ab)^i}\right)}$$

On choisit l'erreur d'approximation du pôle à puissance fractionnaire par une fonction rationnelle  $y = 0.05$ , alors les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $N$  sont donnés comme suit:

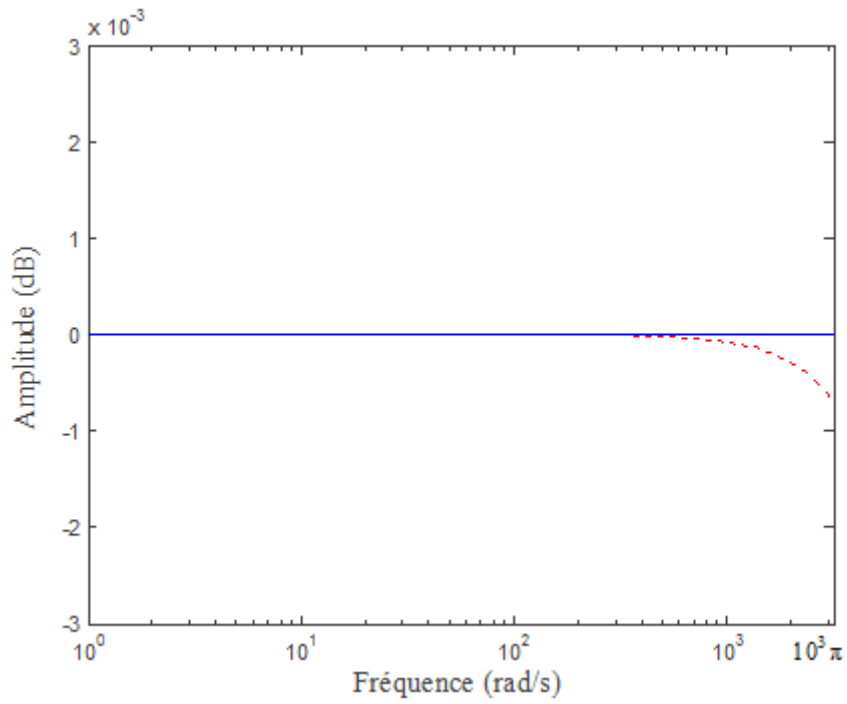
$$a = 1.0593, b = 1.0145, p_0 = 2.3785 \cdot 10^5 \text{ rad/s}, z_0 = 2.5159 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \text{ et } N=4$$

Donc, de l'équation (3.33) l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire  $z^{-0.4}$  est approximé par :

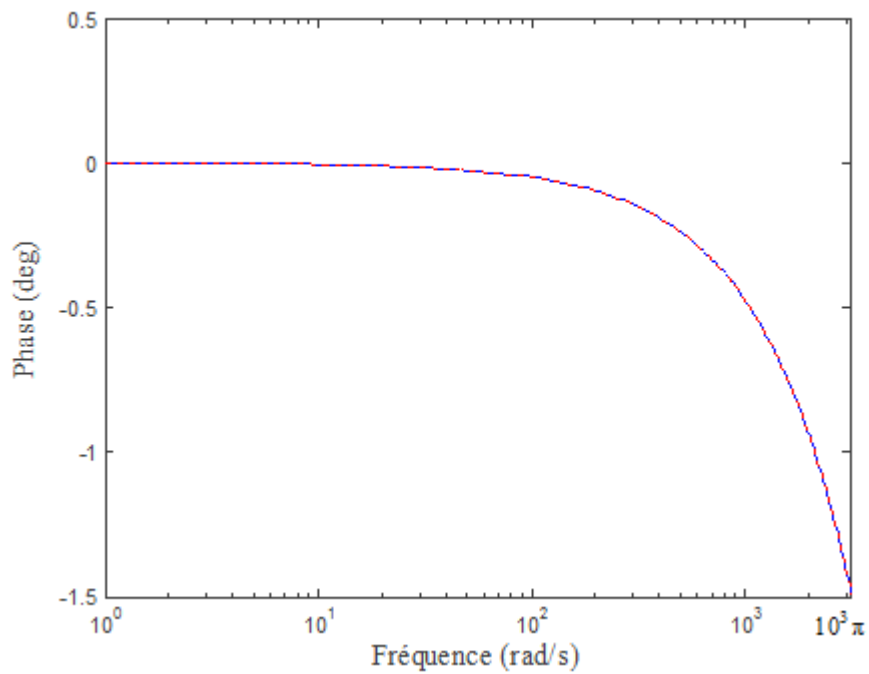
$$z^{-\frac{m}{2}} \cong G_T(z) = (z+1) \frac{\prod_{i=0}^4 \left(1 + \frac{2}{2.5159(1.0746)^i}\right) \left(z + \frac{\left(1 - \frac{2}{2.5159(1.0746)^i}\right)}{\left(1 + \frac{2}{2.5159(1.0746)^i}\right)}\right)}{\prod_{i=0}^4 \left(1 + \frac{2}{2.3785(1.0746)^i}\right) \left(z + \frac{\left(1 - \frac{2}{2.3785(1.0746)^i}\right)}{\left(1 + \frac{2}{2.3785(1.0746)^i}\right)}\right)}$$

$$= \sum_{i=0}^4 \left\{ \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^3 \left[1 - \frac{(1.0746)^{(i-j)}}{1.0593}\right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^4 \left[1 - (1.0746)^{(i-j)}\right]} \right\} \frac{(z+1)}{\left(z + \frac{\left(1 - \frac{2}{2.3785(1.0746)^i}\right)}{\left(1 + \frac{2}{2.3785(1.0746)^i}\right)}\right)}$$

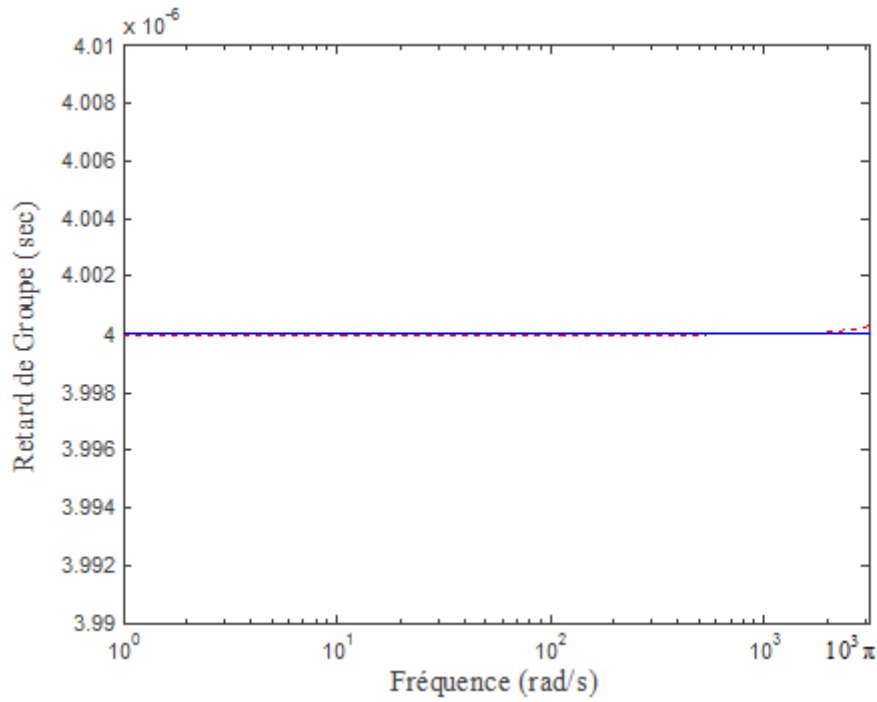
Les figures (3.9), (3.10) et (3.11) montrent, respectivement, les tracés de Bode (amplitude et phase) et les retards de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  ainsi que le filtre numérique RII  $G_T(z)$  qui l'approxime de l'équation précédente.



**Figure (3.9) :** Tracé de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  (trait plein) et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  (trait discontinu)



**Figure (3.10) :** Tracé de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  (trait plein) et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  (trait discontinu)



**Figure (3.11) :** Retard de Groupe du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  (trait plein) et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  (trait discontinu)

De la même façon, les erreurs relatives  $E_a$ ,  $E_p$  et  $E_g$  de l'amplitude, de la phase et du retard de groupe, définis respectivement par les équations suivantes, ont été utilisées pour mesurer l'exactitude de l'approximation du retard numérique fractionnaire  $z^{-0.4}$  par un filtre numérique RII dans la bande de fréquence  $[0 \text{ rad/s}, 1000 \pi \text{ rad/s}]$ .

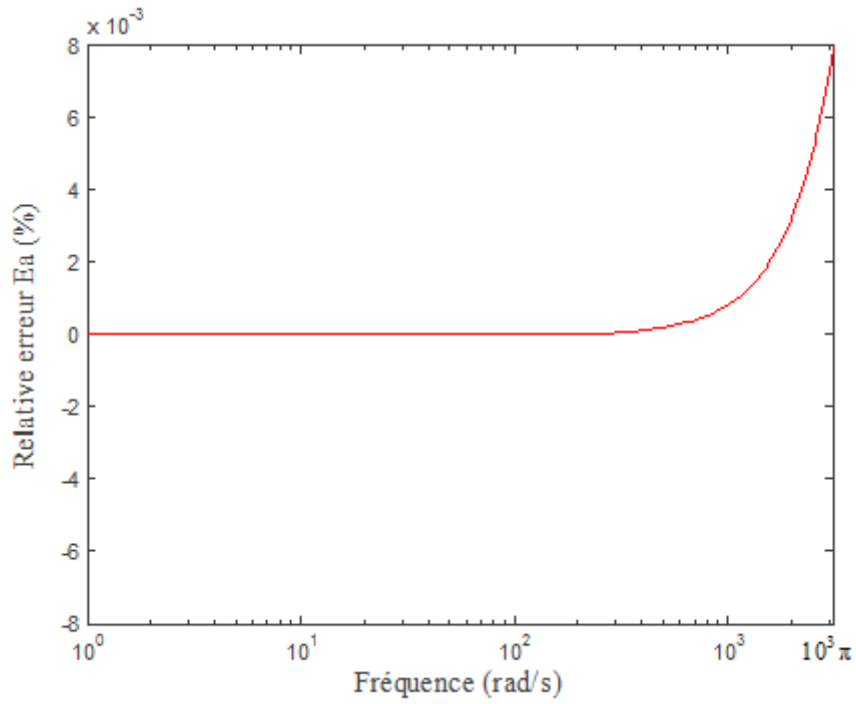
$$E_a = \left| \frac{\left| \left( e^{-0.4j\omega T} \right) - \left| G_T \left( e^{j\omega T} \right) \right| \right|}{\left| \left( e^{-0.4j\omega T} \right) \right|} \right|$$

$$E_p = \left| \frac{\text{Angle} \left[ \left( e^{-0.4j\omega T} \right) \right] - \text{Angle} \left[ G_T \left( e^{j\omega T} \right) \right]}{\text{Angle} \left[ \left( e^{-0.4j\omega T} \right) \right]} \right|$$

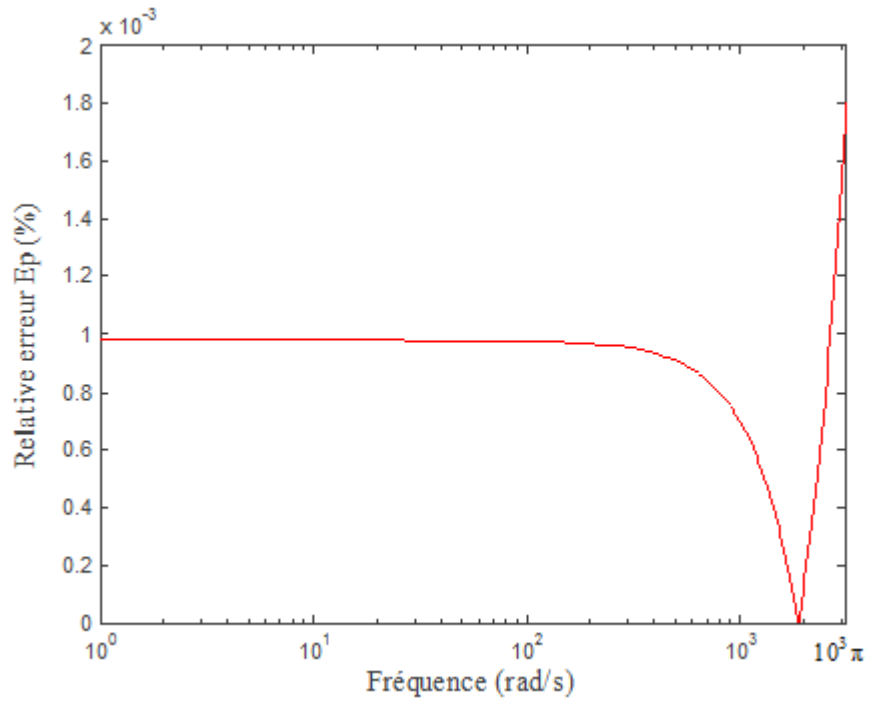
$$E_g = \left| \frac{\text{Group Delay} \left[ e^{-0.4j\omega T} \right] - \text{Group Delay} \left[ G_T \left( e^{j\omega T} \right) \right]}{\text{Group Delay} \left[ e^{-0.4j\omega T} \right]} \right|$$

Les figures (3.12), (3.13) et (3.14) montrent, respectivement, les tracés de Bode des erreurs relatives  $E_a$ ,  $E_p$  et  $E_g$  entre le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  qui l'approxime.

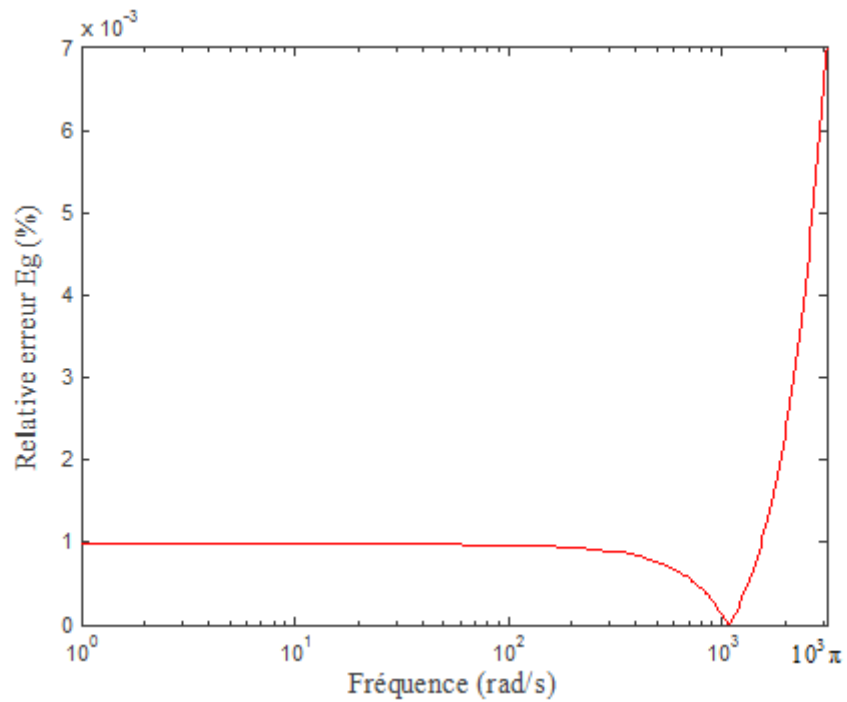




**Figure (3.12) :** Tracé de l'erreur relative  $E_a$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$



**Figure (3.13) :** Tracé de l'erreur relative  $E_p$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$

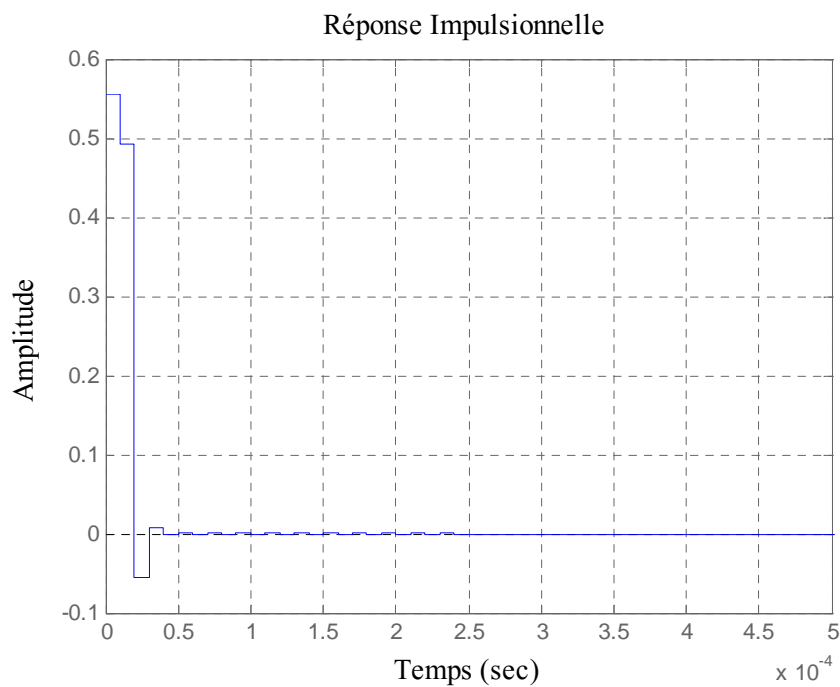


**Figure (3.14) :** Tracé de l'erreur relative  $E_g$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$

La figure (3.15) montre la réponse impulsionnelle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  qui est également obtenue à partir du filtre numérique RII  $G_T(z)$  par la transformé en Z, pour  $n=0, 1, \dots, +\infty$ , comme suit:

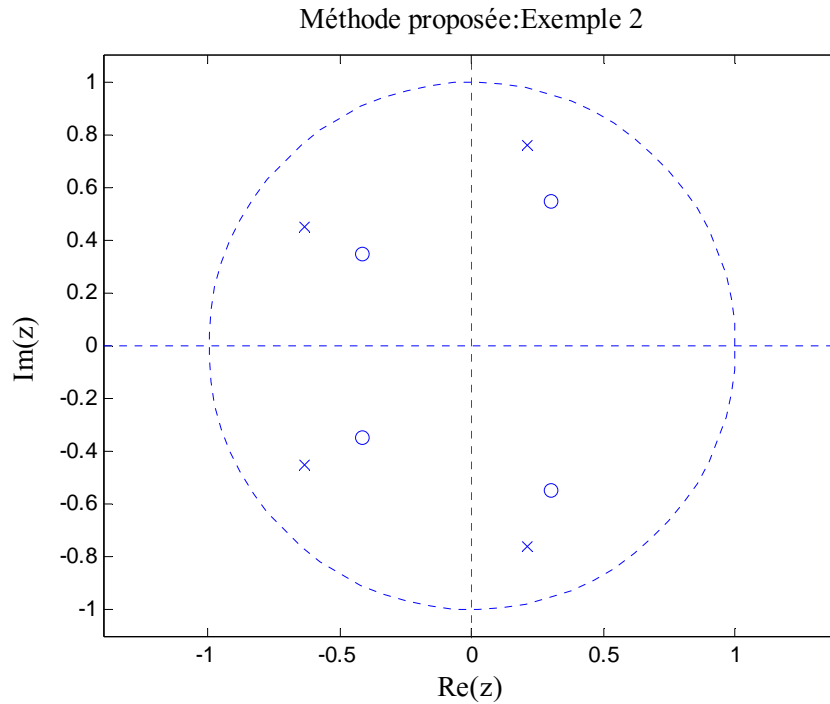
$$d_T(n) = Z^{-1} \{G_T(z)\} = Z^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^4 \frac{\left( \frac{(z+1) \prod_{j=0}^3 \left[ 1 - \frac{(1.0746)^{(i-j)}}{1.0593} \right]}{\left( 1 + \frac{2}{2.3785 (1.0746)^i} \right) \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^4 \left[ 1 - (1.0746)^{(i-j)} \right]} \right)}{\left( z + \frac{\left( 1 - \frac{2}{2.3785 (1.0746)^i} \right)}{\left( 1 + \frac{2}{2.3785 (1.0746)^i} \right)} \right)} \right\}$$

$$d_T(n) = \sum_{i=0}^4 \left[ \frac{\prod_{j=0}^3 \left[ 1 - \frac{(1.0746)^{(i-j)}}{1.0593} \right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^4 \left[ 1 - (1.0746)^{(i-j)} \right]} \right] \left[ \left( \frac{1 - \frac{2}{2.3785 (1.0746)^i}}{1 + \frac{2}{2.3785 (1.0746)^i}} \right)^{(n)} u(n) + \left( \frac{1 - \frac{2}{2.3785 (1.0746)^i}}{1 + \frac{2}{2.3785 (1.0746)^i}} \right)^{(n-1)} u(n-1) \right]$$



**Figure (3.15) :** Réponse impulsionnelle du filtre numérique RII  $G_T(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$

La figure (3.16) montre le tracé des positions des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_F(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$ . On note aussi que tous les pôles et les zéros sont à l'intérieur du cercle unité.



**Figure (3.16) :** Position des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_T(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$

#### Commentaires :

- A partir des figures (3.9), (3.10) et (3.11), on peut facilement voir que les tracés de Bode (amplitude et phase) et les retards de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.4}$  et de son approximation par le filtre numérique RII  $G_T(z)$  sont superposés dans la bande de fréquence  $[0 \text{ rad/s}, 1000\pi \text{ rad/s}]$ .
- Des figures (3.12), (3.13) et (3.14), respectivement, on note que l'erreur relative  $E_a$  est moins de 0.008%, l'erreur relative  $E_p$  est moins de 0.002% et l'erreur relative  $E_g$  est moins de 0.007% dans la bande de fréquence d'intérêt  $[0 \text{ rad/s}, 1000\pi \text{ rad/s}]$ .
- Le filtre numérique d'approximation réalisé est un système linéaire, stable, causale et à phase minimale.
- Ces résultats montrent l'efficacité et l'exactitude de la méthode d'approximation du retard numérique d'ordre fractionnaire par un filtre numérique RII.

### 3.4.3 Exemple 3 : Transformation d'Euler

Pour ce troisième exemple, nous considérons la conception de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéale donné par:

$$D_E(z) = z^{-0.7}$$

L'amplitude en dB, la phase en degrés et le retard de groupe en secondes du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  sont, respectivement:

$$\text{Amplitude (dB)} = 0$$

$$\text{Phase (deg)} = [(-0.7 \cdot 10^{-5}) \omega](180/\pi)$$

$$\text{Retard de Groupe (sec)} = [0.7 \cdot 10^{-5}]$$

De l'équation (3.22) on peut écrire :

$$D_E(z) = z^{-0.7} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100000}\right)^{0.7}} \Bigg|_{s = \frac{1-z^{-1}}{0.00001z^{-1}}}$$

Pour les mêmes raisons que pour les deux exemples précédents, la fréquence de coupure est choisie égale à  $\omega_c = 1.1348/T$  rad/s. Donc, le filtre numérique RII approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$  de l'équation (3.36) devient :

$$D_E(z) = z^{-m} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{113480}\right)^m} \Bigg|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)}{p_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)}{p_0(ab)^i}\right)}$$

On choisit l'erreur d'approximation du pôle à puissance fractionnaire par une fonction rationnelle  $y = 0.1$ , alors les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $N$  sont donnés comme suit:

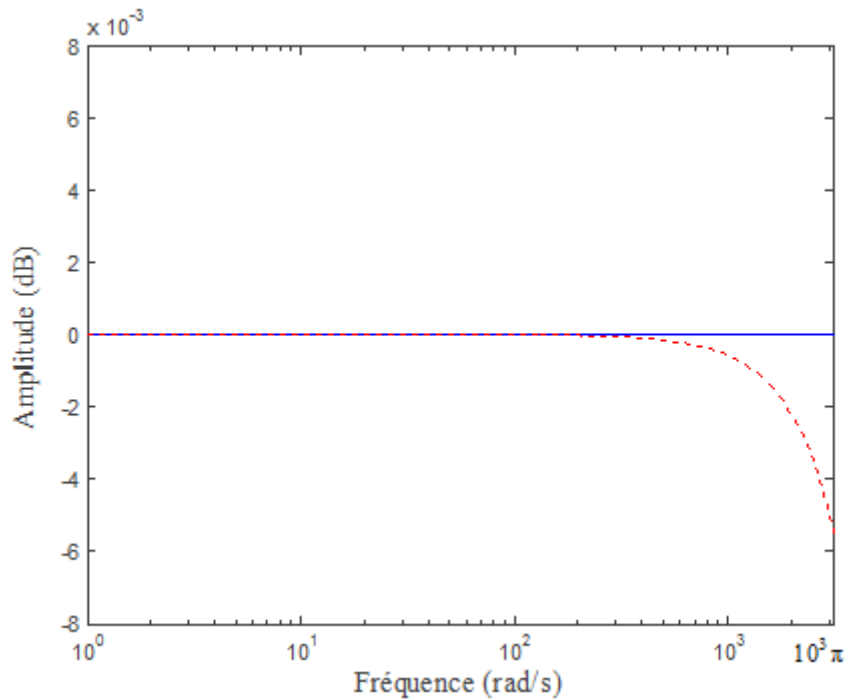
$$a = 1.0798, b = 1.0334, p_0 = 1.1536 \cdot 10^5 \text{ rad/s}, z_0 = 1.2456 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \text{ et } N=10$$

Donc, de l'équation (3.37) l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire  $z^{-0.7}$  est approximé par :

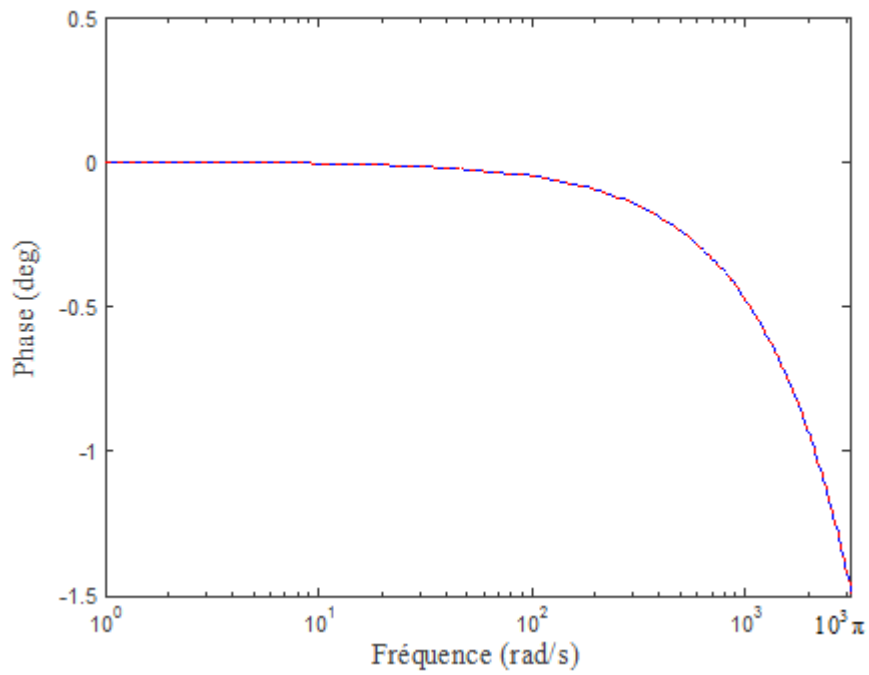
$$z^{-0.7} \cong G_E(z) = 1.4125 \frac{\prod_{i=0}^9 [1.2456(1.1159)^i + 1] \left( z - \frac{1}{[1.2456(1.1159)^i + 1]} \right)}{\prod_{i=0}^{10} [1.1536(1.1159)^i + 1] \left( z - \frac{1}{[1.1536(1.1159)^i + 1]} \right)}$$

$$= \sum_{i=0}^{10} \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^9 \left[ 1 - \frac{(1.1159)^{(i-j)}}{1.0593} \right] \frac{[1.1536(1.1159)^i] z}{[1.1536(1.1159)^i + 1]}}{\left( z - \frac{1}{[1.1536(1.1159)^i + 1]} \right)}$$

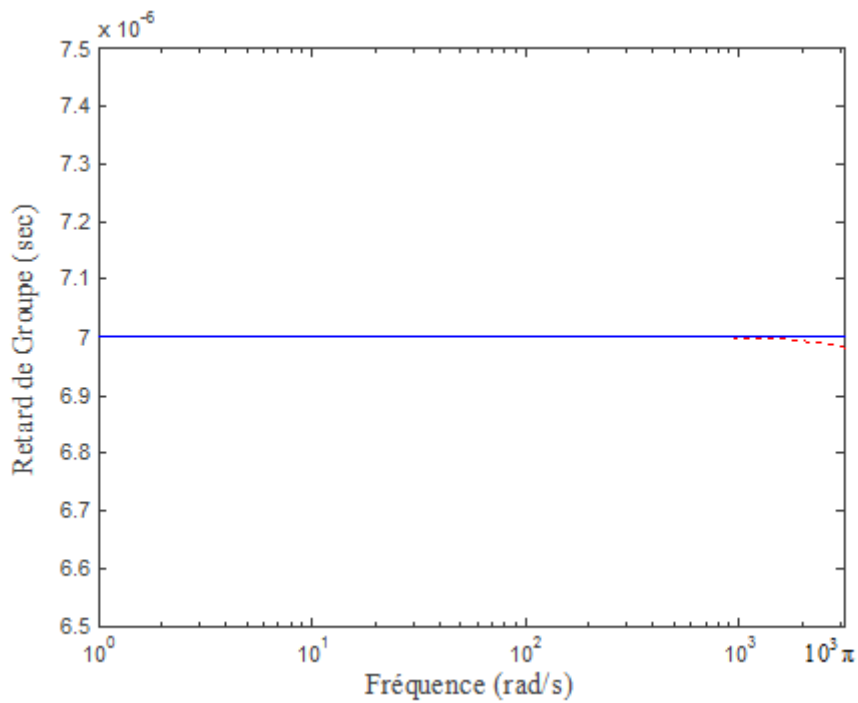
Les figures (3.17), (3.18) et (3.19) présentent, respectivement, les tracés de Bode (amplitude et phase) et les retards de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  ainsi que le filtre numérique RII  $G_E(z)$  qui l'approxime de l'équation précédente.



**Figure (3.17) :** Tracé de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  (trait plein) et le filtre numérique RII  $G_E(z)$  (trait discontinu)



**Figure (3.18) :** Tracé de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  (trait plein) et le filtre numérique RII  $G_E(z)$  (trait discontinu)



**Figure (3.19) :** Retard de Groupe du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  (trait plein) et le filtre numérique RII  $G_E(z)$  (trait discontinu)

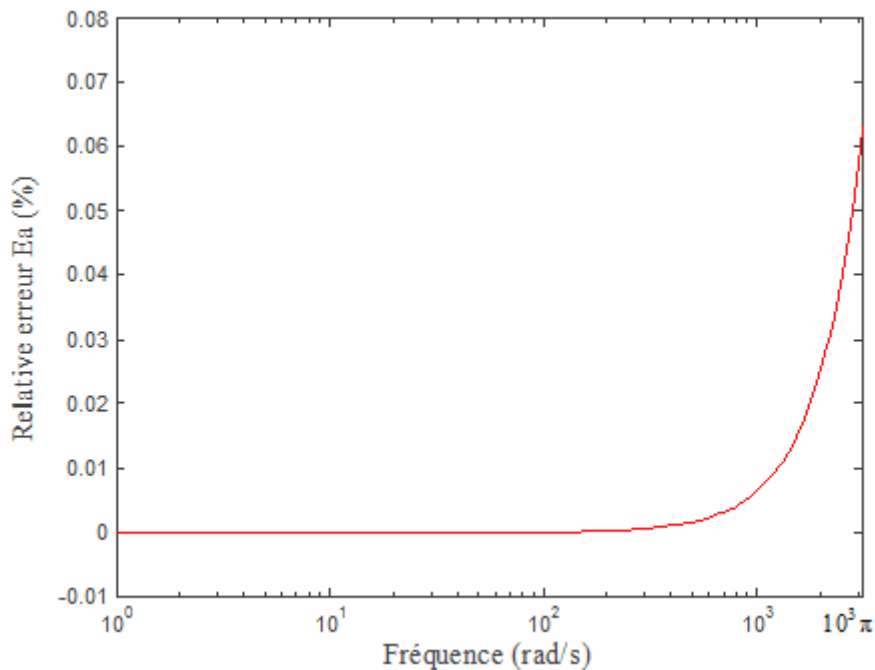
Pour mesurer l'exactitude de l'approximation du retard numérique fractionnaire  $z^{-0.7}$  par un filtre numérique RII dans la bande de fréquence  $[0 \text{ rad/s}, 1000 \pi \text{ rad/s}]$ , les erreurs relatives  $E_a$ ,  $E_p$  et  $E_g$  de l'amplitude, de la phase et du retard de groupe, définis respectivement par les équations suivantes, ont été utilisées

$$E_a = \left| \frac{|(e^{-0.7j\omega T})| - |G_E(e^{j\omega T})|}{|(e^{-0.7j\omega T})|} \right|$$

$$E_p = \left| \frac{\text{Angle}[(e^{-0.7j\omega T})] - \text{Angle}[G_E(e^{j\omega T})]}{\text{Angle}[(e^{-0.7j\omega T})]} \right|$$

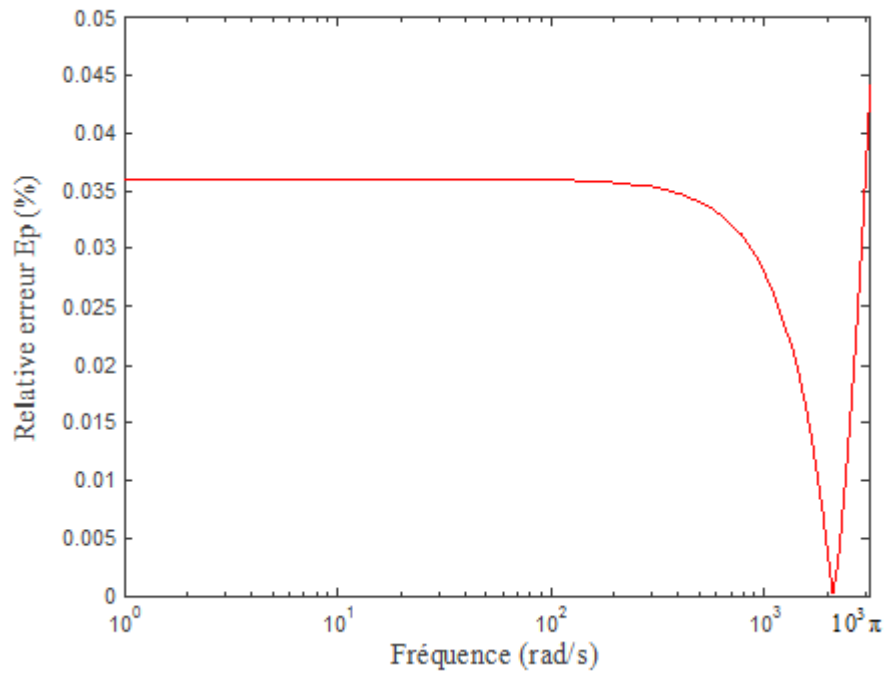
$$E_g = \left| \frac{\text{Group Delay}[e^{-0.7j\omega T}] - \text{Group Delay}[G_E(e^{j\omega T})]}{\text{Group Delay}[e^{-0.7j\omega T}]} \right|$$

Figures (3.20), (3.21) et (3.22) montrent, respectivement, les tracés de Bode des erreurs relatives  $E_a$ ,  $E_p$  et  $E_g$  entre le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  et le filtre numérique RII  $G_E(z)$  qui l'approxime.

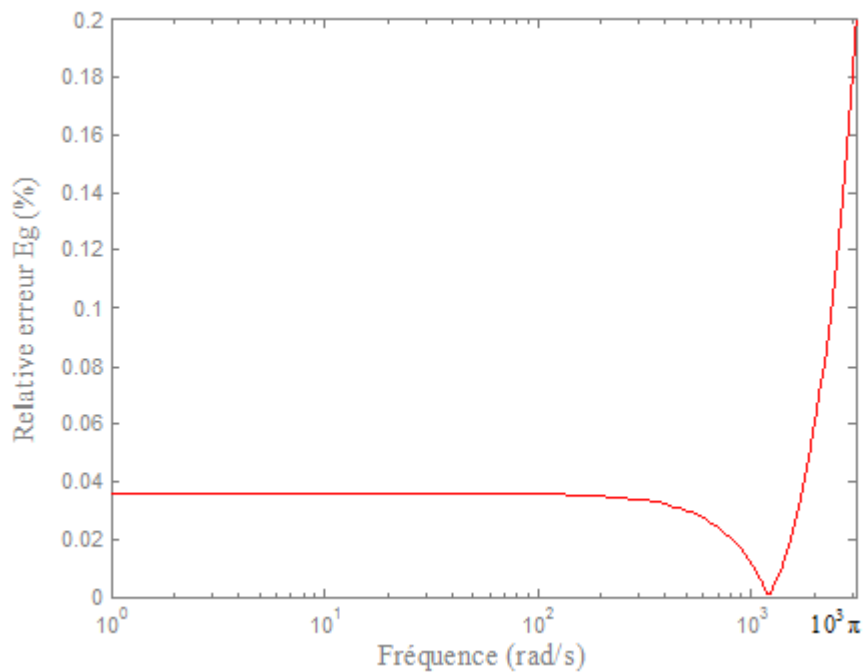


**Figure (3.20) :** Tracé de l'erreur relative  $E_a$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  et le filtre numérique RII  $G_E(z)$





**Figure (3.21) :** Tracé de l'erreur relative  $E_p$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  et le filtre numérique RII  $G_E(z)$

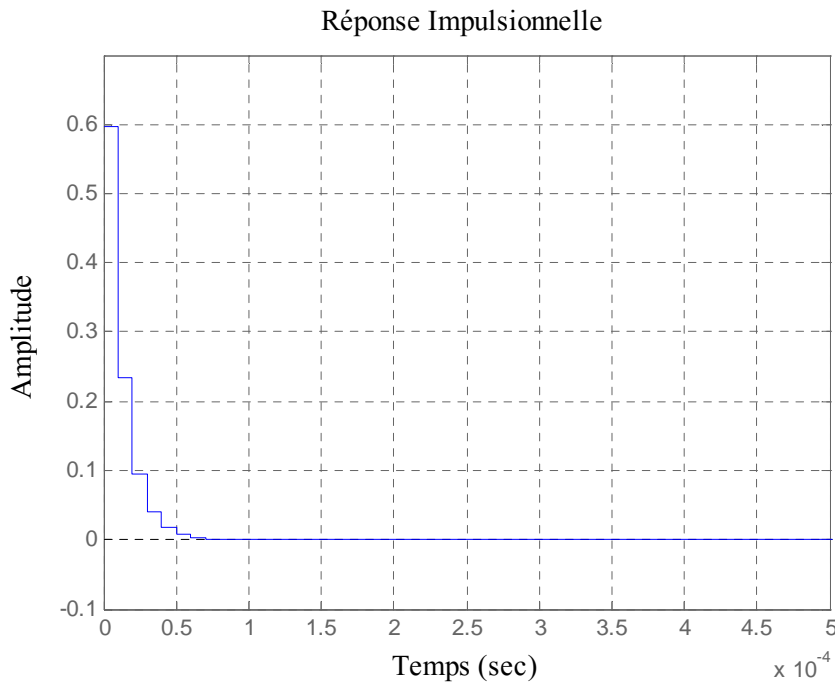


**Figure (3.22) :** Tracé de l'erreur relative  $E_g$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  et le filtre numérique RII  $G_E(z)$

Figure (3.23) montre la réponse impulsionnelle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  qui est également obtenue à partir du filtre numérique RII  $G_E(z)$  par la transformé en Z, pour  $n=0, 1, \dots, +\infty$ , comme suit:

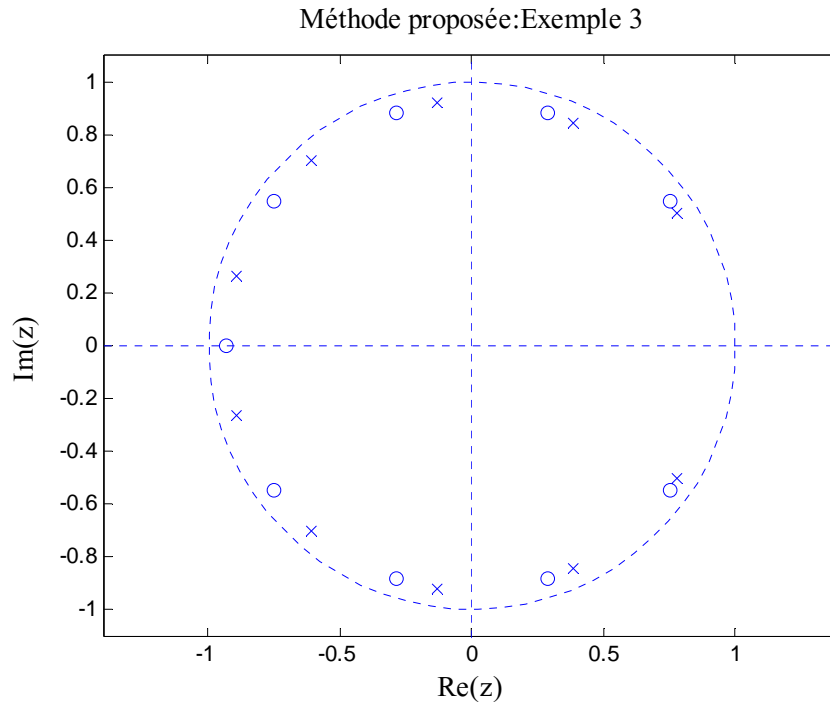
$$d_E(n) = Z^{-1} \{D_E(z)\} = Z^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{10} \frac{\prod_{j=0}^9 \left[ 1 - \frac{(1.1159)^{(i-j)}}{1.0593} \right] \left[ 1.1536 (1.1159)^i \right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{10} \left[ 1 - (1.1159)^{(i-j)} \right] \left[ 1.1536 (1.1159)^{i+1} \right]} z^{-\frac{1}{\left[ 1.1536 (1.1159)^i \right]}} \right\}$$

$$d_E(n) = \sum_{i=0}^{10} \left\{ \frac{\prod_{j=0}^9 \left[ 1 - \frac{(1.1159)^{(i-j)}}{1.0593} \right] \left[ 1.1536 (1.1159)^i \right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{10} \left[ 1 - (1.1159)^{(i-j)} \right] \left[ 1.1536 (1.1159)^{i+1} \right]} \left[ \left( \frac{-1}{\left[ 1.1536 (1.1159)^i + 1 \right]} \right)^{(n)} u(n) \right] \right\}$$



**Figure (3.23) :** Réponse impulsionnelle du filtre numérique RII  $G_E(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$

Figure (3.24) montre le tracé des positions des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_E(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$ . Dans ce cas aussi, tous les pôles et les zéros sont à l'intérieur du cercle unité.



**Figure (3.24) :** Position des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_E(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$

#### Commentaires :

- A partir des figures (3.17), (3.18) et (3.19), on peut facilement voir que les tracés de Bode (amplitude et phase) et les retards de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.7}$  et de son approximation par le filtre numérique RII  $G_E(z)$  sont superposés dans la bande de fréquence  $[0 \text{ rad/s}, 1000\pi \text{ rad/s}]$ .
- Des figures (3.20), (3.21) et (3.22), respectivement, on note que l'erreur relative  $E_a$  est moins de 0.07%, l'erreur relative  $E_p$  est moins de 0.045% et l'erreur relative  $E_g$  est moins de 0.2% dans la bande de fréquence d'intérêt  $[0 \text{ rad/s}, 1000\pi \text{ rad/s}]$ .
- Le filtre numérique d'approximation réalisé est un système linéaire, stable, causale et à phase minimale.
- Ces résultats montrent l'efficacité et l'exactitude de la méthode d'approximation du retard numérique d'ordre fractionnaire par un filtre numérique RII.

### 3.5 Comparaison et discussion

L'objectif de cette section est la validation des méthodes proposées par comparaison des résultats obtenus avec ceux de deux méthodes très récentes à savoir la méthode de Pei et Wang [74] et la méthode de Zhang [75].

#### 3.5.1 Comparaison avec la méthode de Pei et Wang [74]

Pei et Wang ont approximés le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-D}$ ,  $D = (N+m)$  avec  $N$  un nombre entier et  $0 < m < 1$ , par un filtre numérique RII passe-tout ou à phase non minimale comme suit :

$$z^{-D} \cong H(z) = \frac{z^{-N} A(z^{-1})}{A(z)} = \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{N-1}z^{-(N-1)} + a_Nz^{-N}}$$

où, les coefficients  $a_k$ 's, pour  $1 \leq k \leq N$ , sont donnés par :

$$a_k = \frac{(-1)^n}{n!2^n} \sum_{k=0}^{N-n} \frac{m \times (m+1) \times \dots \times (m+n-1)}{k!2^n} \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N$$

Dans cette comparaison, on considère la conception de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire suivant :

$$D(z) = z^{-0.91}$$

Son amplitude en dB, sa phase en degrés et son retard de groupe en secondes sont :

$$\text{Amplitude (dB)} = 0$$

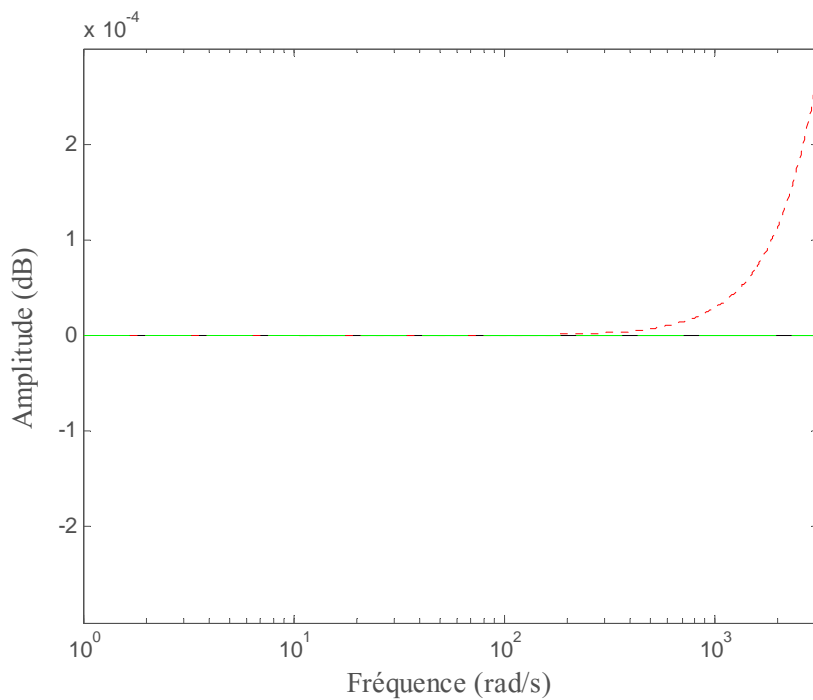
$$\text{Phase (deg)} = [(-0.91 \cdot 10^{-5}) \omega](180/\pi)$$

$$\text{Retard de Groupe (sec)} = [0.91 \cdot 10^{-5}]$$

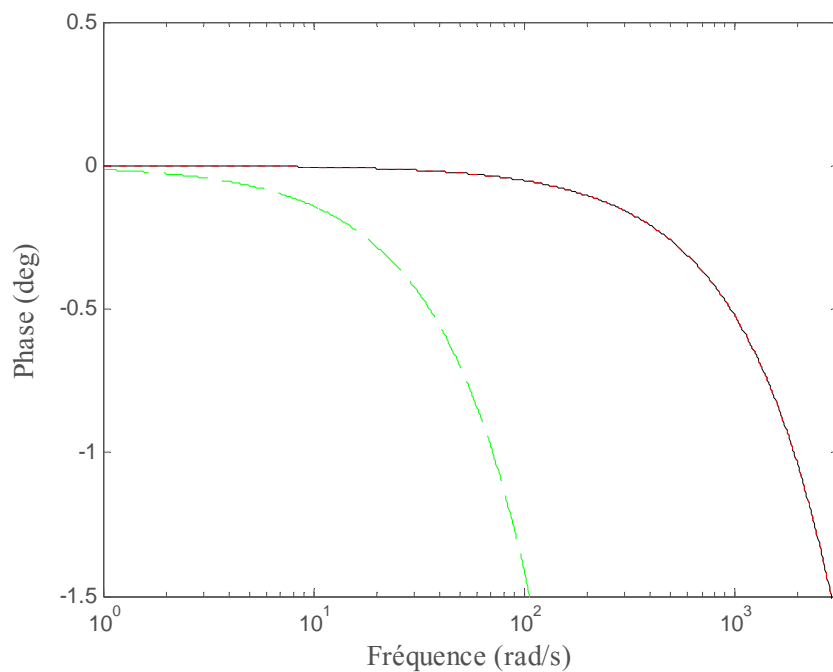
Pour la conception du filtre numérique RII équivalent au retard numérique  $D(z) = z^{-0.9}$ , nous avons adopté la même période d'échantillonnage  $T = 0.01\text{ms}$  et la même bande de fréquence d'approximation  $[0 \text{ rad/s}, 1000\pi \text{ rad/s}]$ .

#### 4.5.1.1 Transformation Avant

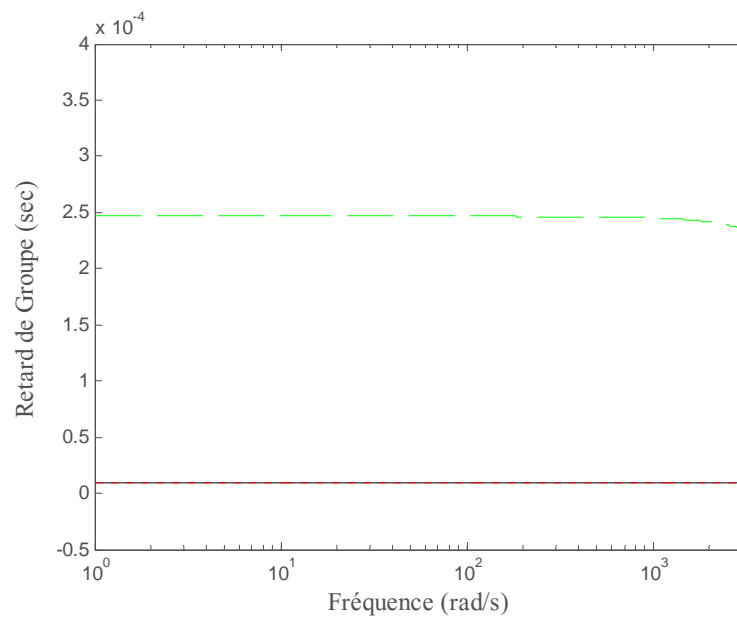
Les figures (3.25), (3.26) et (3.27) montrent les tracés de Bode de l'amplitude, de la phase et du retard de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-0.91}$  ainsi que le filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.



**Figure (3.25) :** Tracés de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert)

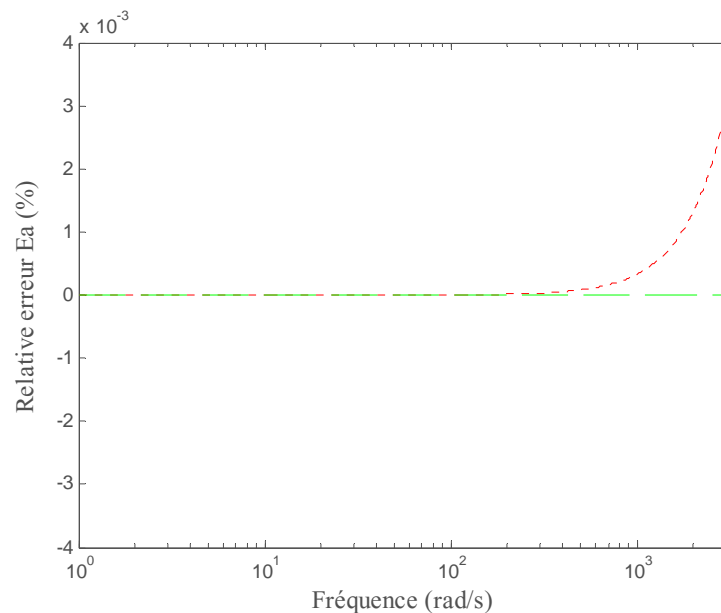


**Figure (3.26) :** Tracés de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

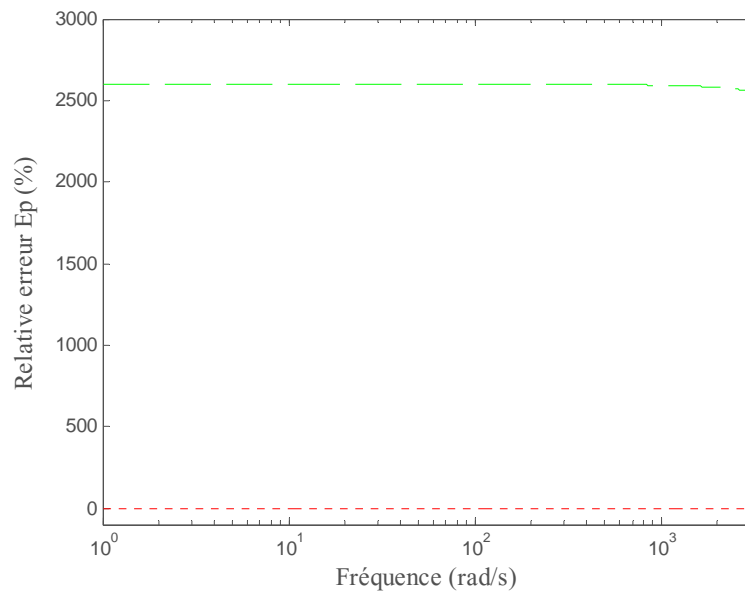


**Figure (3.27)** : Tracés de Bode (retard de groupe) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

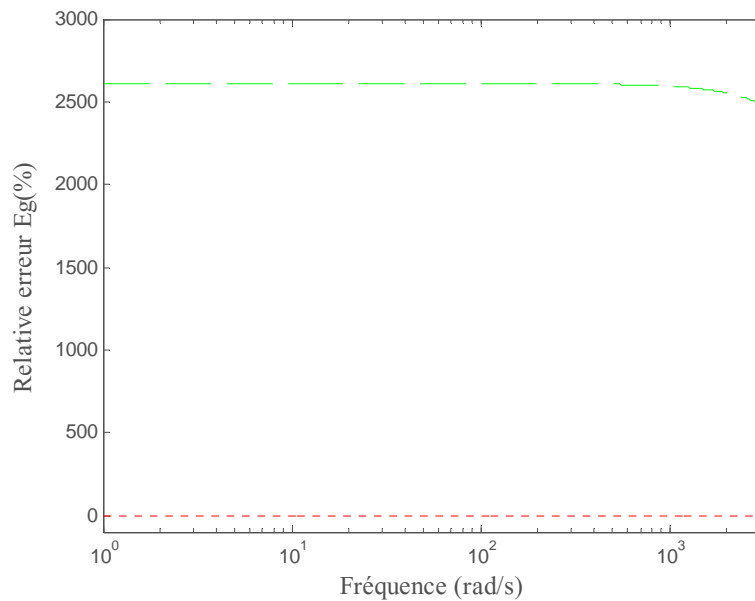
Les figures (3.28), (3.29) et (3.30) présentent les tracés de Bode des erreurs relatives de l'amplitude  $E_a$ , de la phase  $E_p$  et du retard de groupe  $E_g$ , entre le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposé, et entre ce même retard et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.



**Figure (3.28)** : Tracés de Bode des erreurs relatives  $E_a$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

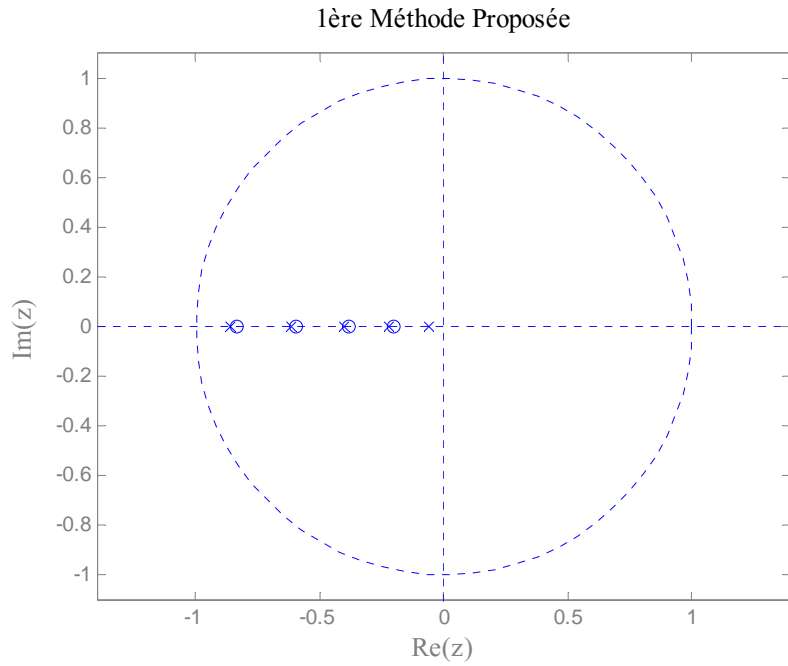


**Figure (3.29)** :Tracés de Bode des erreurs relatives  $E_p$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

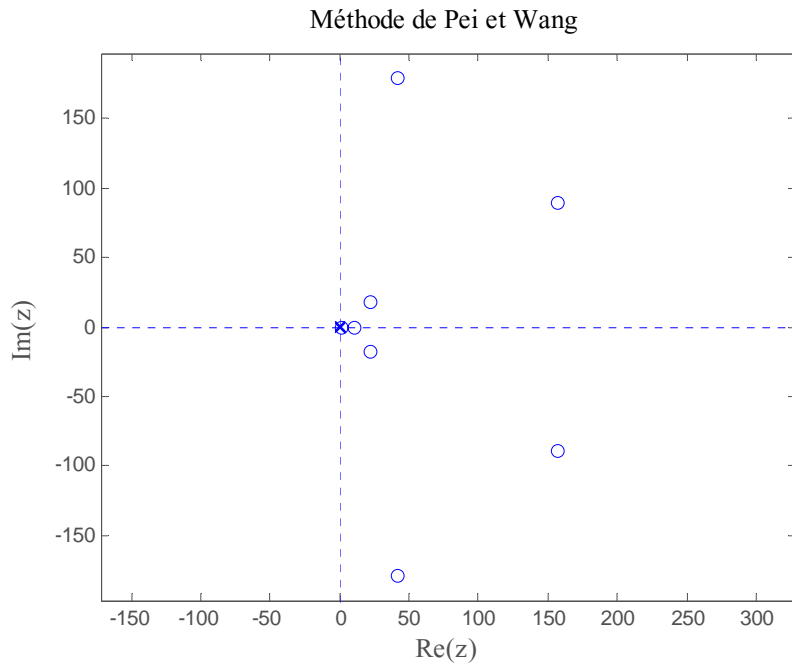


**Figure (3.30)** :Tracés de Bode des erreurs relatives  $E_g$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

Figures (3.31) et (3.32) montrent les tracés des positions des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_F(z)$  et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$ .



**Figure (3.31)** :Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_F(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$



**Figure (3.32)** :Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$



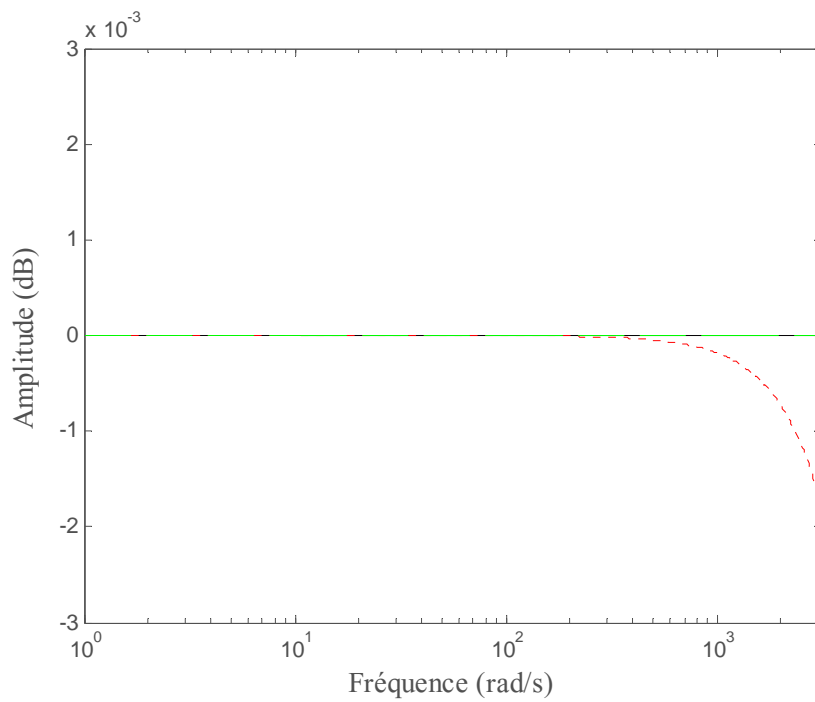
**Commentaires :**

A partir des résultats obtenus, nous avons constaté que :

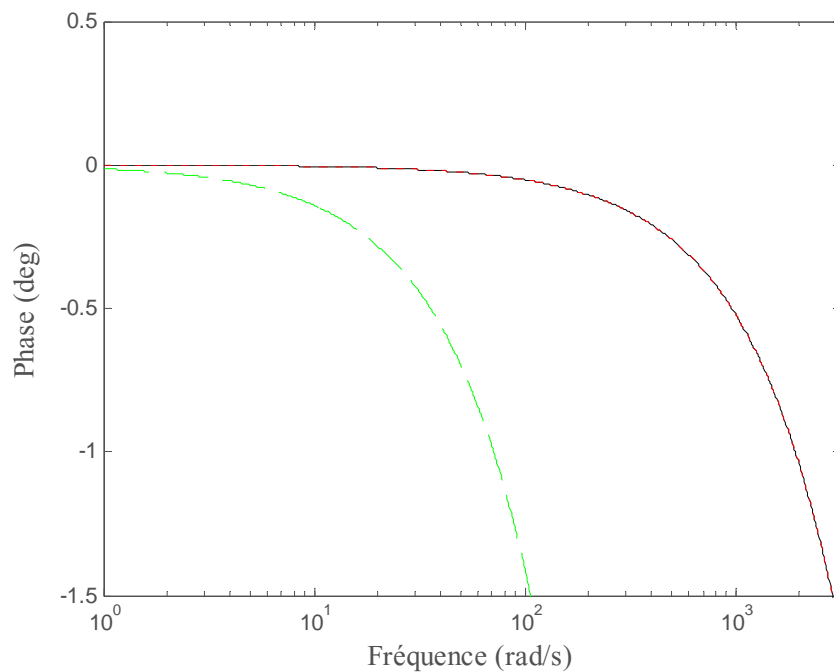
- L'erreur relative d'amplitude  $E_a$  de la figure (3.28) a montré que l'approche proposée donne de très bon résultat, mais il n'est pas comparable au résultat parfait obtenu par la méthode de Pei et Wang [74] parce que le filtre numérique RII d'approximation utilisé est un filtre passe-tout dont l'amplitude est exactement égale à 0 dB.
- Des figures (3.29) et (3.30) on peut constater que les erreurs relatives de phase  $E_p$  et de retard de groupe  $E_g$  de la méthode de Pei et Wang [74] sont plus importantes que celles obtenues par la méthode proposée. Donc, la méthode de Pei et Wang a échoué d'approximer la phase du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$ .
- La méthode proposée d'approximation du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  permet de réaliser un filtre numérique stable et à phase minimale, mais la méthode de Pei et Wang [74] donne réalise un filtre numérique stable et à phase non-minimale.
- La méthode proposée réalise un filtre numérique approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  d'ordre 5 par contre le filtre numérique réalisé par Pei et Wang [74] est d'ordre 8. Donc on peut dire que le filtre proposé est moins complexe que le filtre de Pei et Wang.

**3.5.1.2 Transformation bilinéaire**

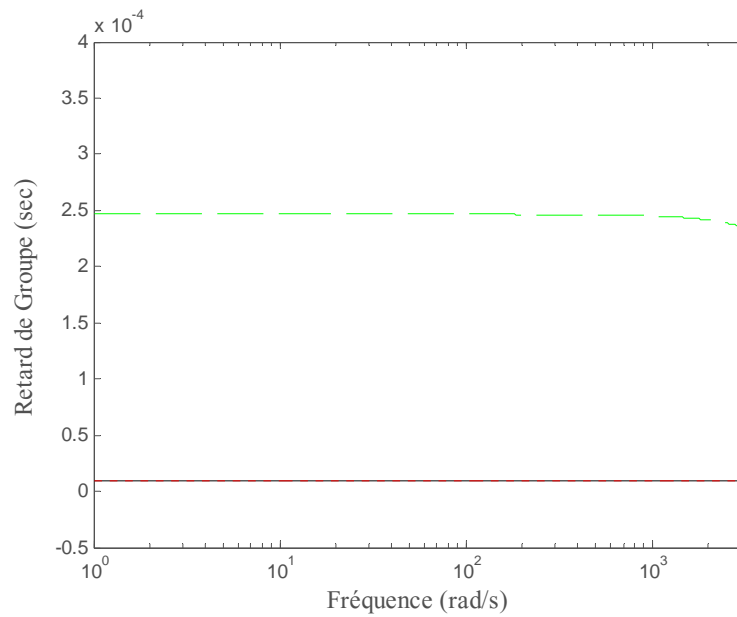
Les figures (3.33), (3.34) et (3.35) montrent les tracés de Bode de l'amplitude, de la phase et du retard de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-0.91}$  ainsi que le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.



**Figure (3.33) :** Tracés de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert)

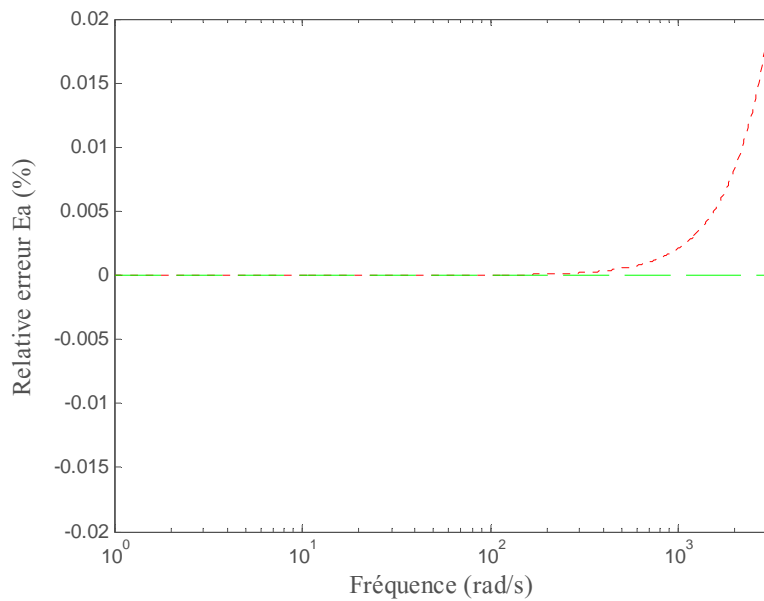


**Figure (3.34) :** Tracés de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert)

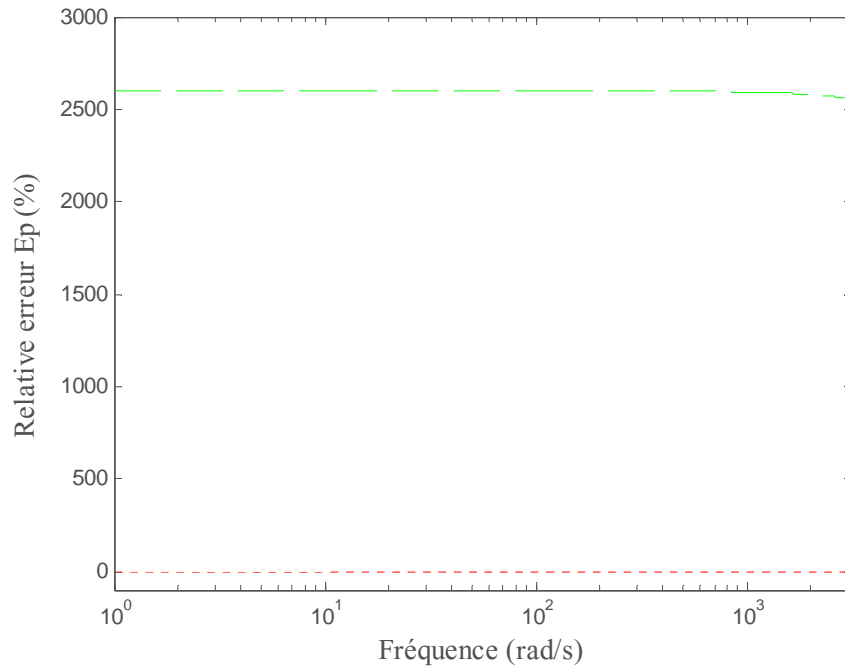


**Figure (3.35)** :Tracés de Bode (retard de groupe) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

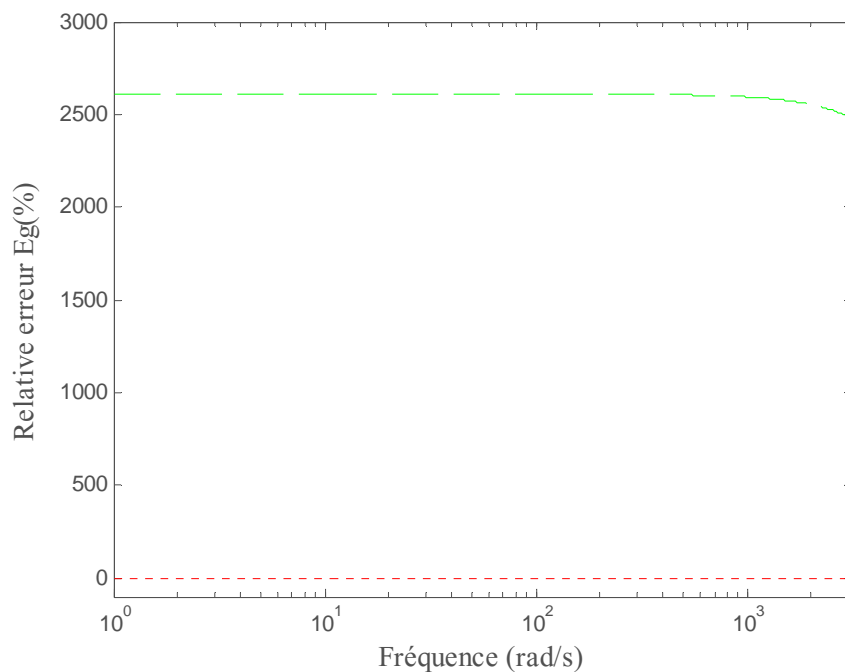
Les tracés de Bode des erreurs relatives de l’amplitude  $E_a$ , de la phase  $E_p$  et du retard de groupe  $E_g$ , entre le retard numérique d’ordre fractionnaire idéale  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposé, et entre ce même retard et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang, sont présentés dans les figures (3.36), (3.37) et (3.38).



**Figure (3.36)** :Tracés de Bode des erreurs relatives  $E_a$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert)

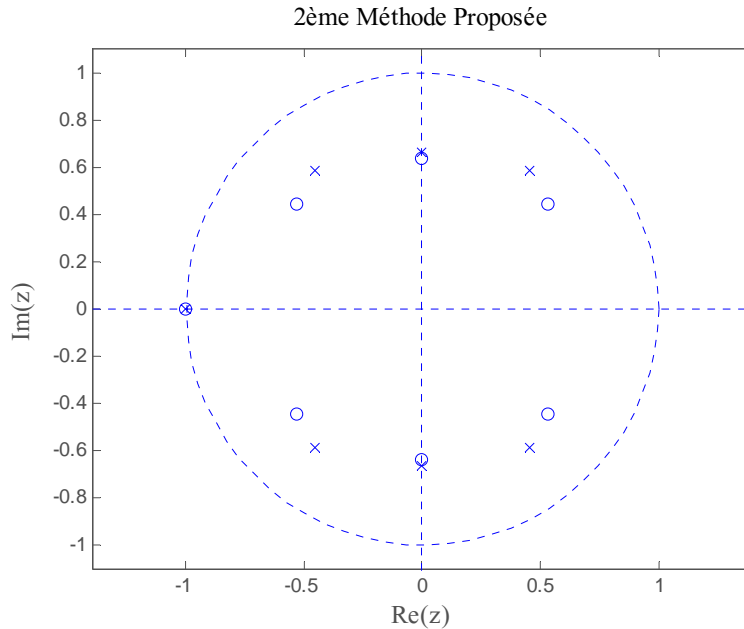


**Figure (3.37)** :Tracés de Bode des erreurs relatives  $E_p$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

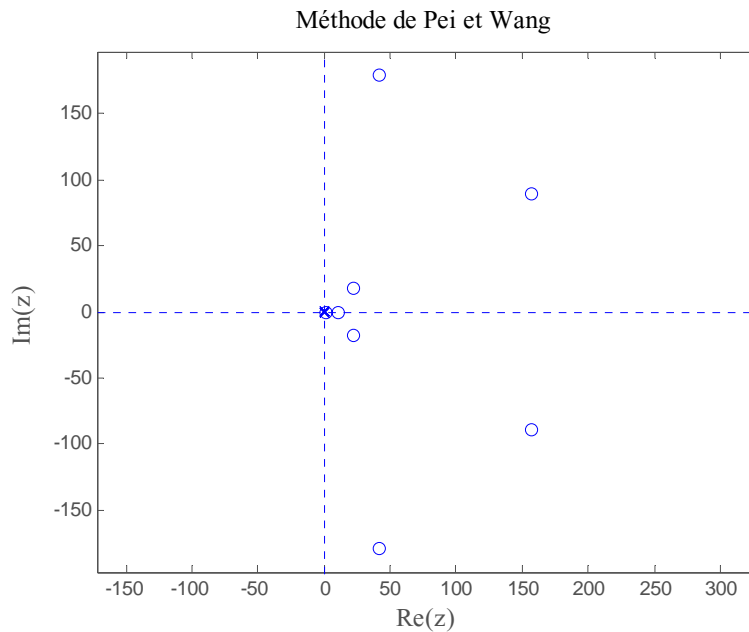


**Figure (3.38)** :Tracés de Bode des erreurs relatives  $E_g$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

Les figures (3.39) et (3.40) montrent les tracés des positions des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_T(z)$  et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$ .



**Figure (3.39)** : Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_T(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$



**Figure (3.40)** : Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$

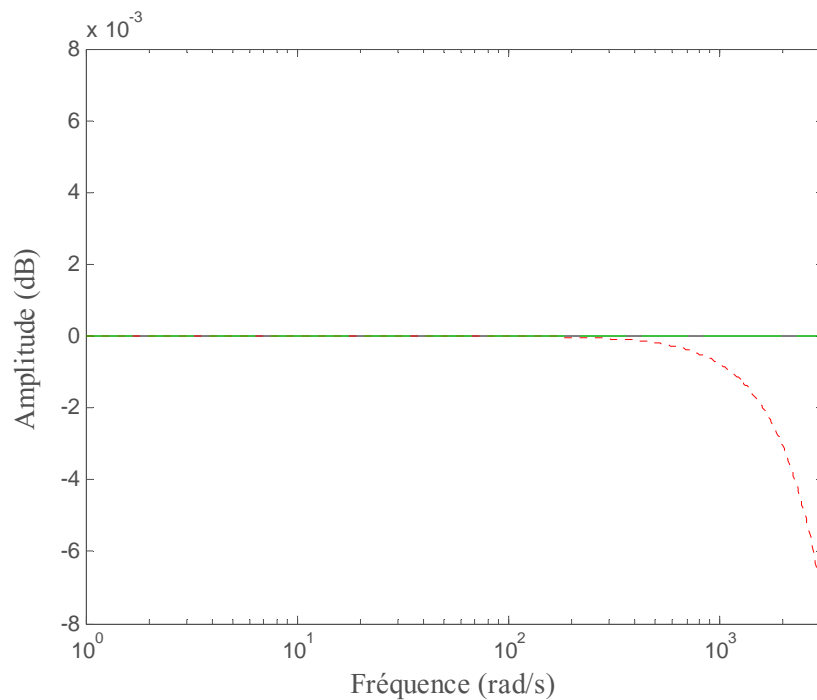
**Commentaires :**

A partir des résultats obtenus, nous avons constaté que :

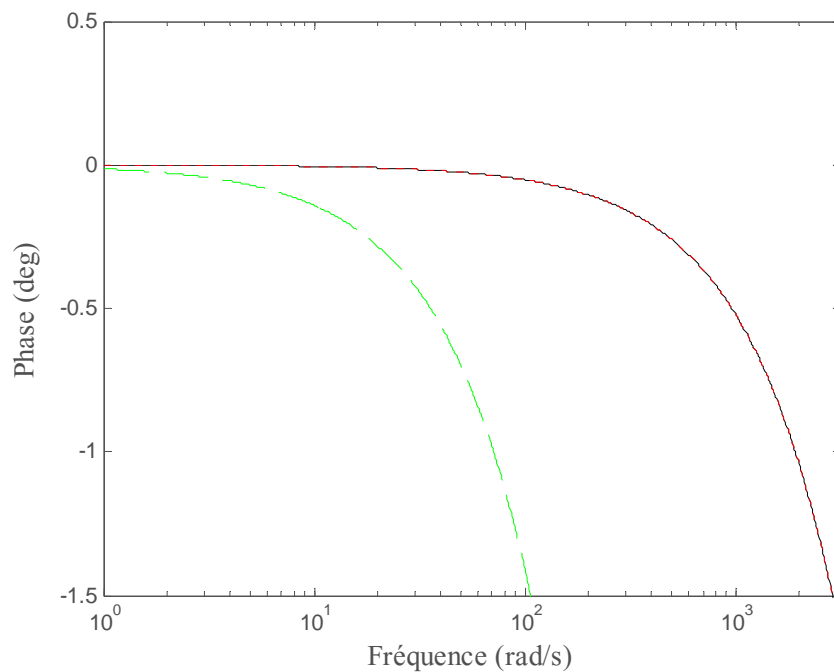
- L'erreur relative d'amplitude  $E_a$  de la figure (3.36) a montré que l'approche proposée donne de très bon résultat, mais il n'est pas comparable au résultat parfait obtenu par la méthode de Pei et Wang [74] parce que le filtre numérique RII d'approximation utilisé est un filtre passe-tout dont l'amplitude est exactement égale à 0 dB.
- Des figures (3.37) et (3.38) on peut constater que les erreurs relatives de phase  $E_p$  et de retard de groupe  $E_g$  de la méthode de Pei et Wang [74] sont plus importantes que celles obtenues par la méthode proposée. Donc, la méthode de Pei et Wang a échoué d'approximer la phase du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$ .
- La méthode proposée d'approximation du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  permet de réaliser un filtre numérique stable et à phase minimale, mais la méthode de Pei et Wang [74] donne réalise un filtre numérique stable et à phase non-minimale.
- La méthode proposée réalise un filtre numérique approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  d'ordre 7 par contre le filtre numérique réalisé par Pei et Wang [74] est d'ordre 8. Donc on peut dire que le filtre proposé est moins complexe que le filtre de Pei et Wang.

**3.5.1.3 Transformation d'Euler**

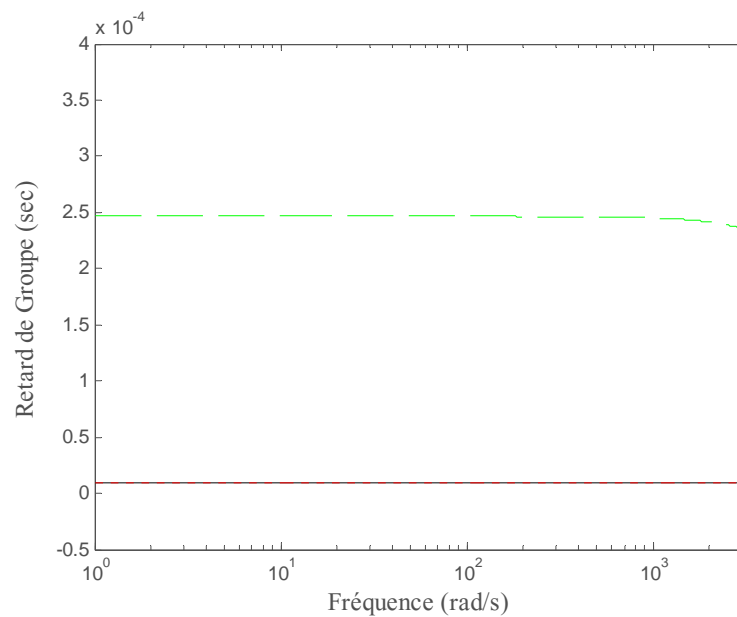
Les figures (3.41), (3.42) et (3.43) montrent les tracés de Bode de l'amplitude, de la phase et du retard de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-0.91}$  ainsi que le filtre numérique RII  $G_E(z)$  proposée et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang.



**Figure (3.41) :** Tracés de Bode (Amplitude) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_E(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

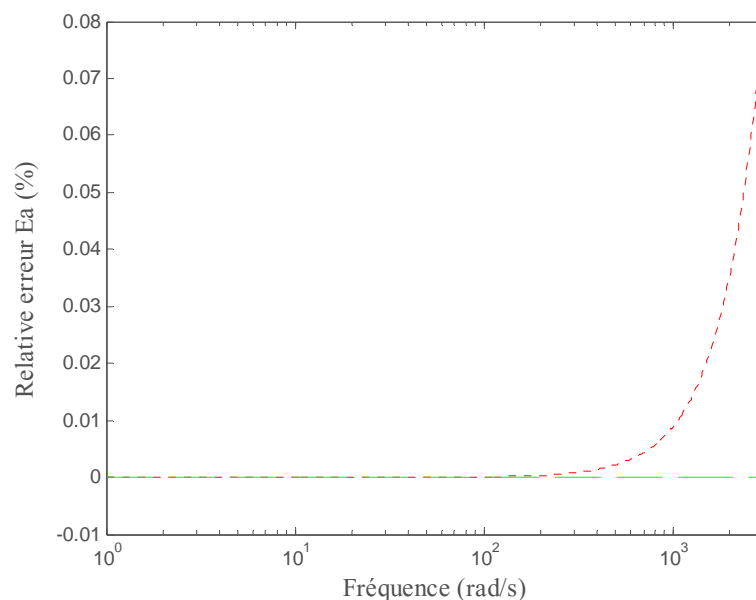


**Figure (3.42) :** Tracés de Bode (Phase) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_E(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).



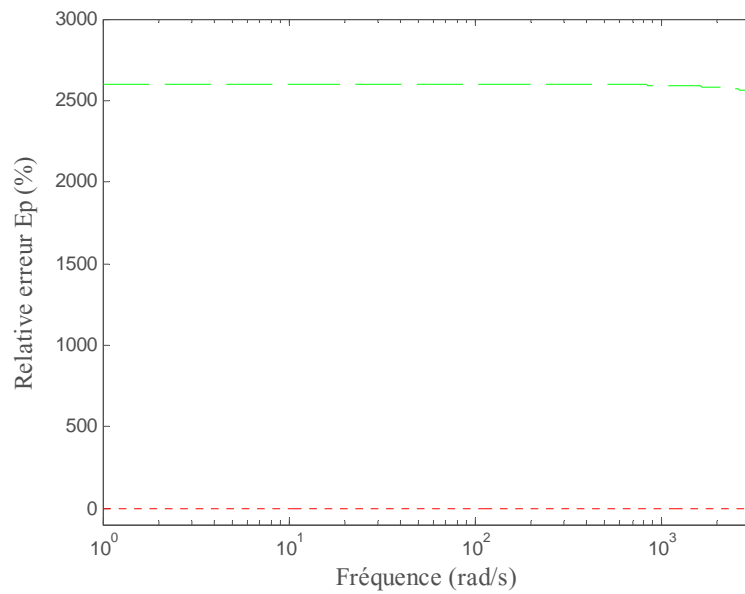
**Figure (3.43)** : Tracés de Bode (retard de groupe) du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_E(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

Les tracés de Bode des erreurs relatives de l'amplitude  $E_a$ , de la phase  $E_p$  et du retard de groupe  $E_g$  entre le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-0.91}$  et les filtres numériques RII  $G_E(z)$  proposée et RII passe-tout de Pei et Wang sont donnés dans les figures (3.44), (3.45) et (3.46).

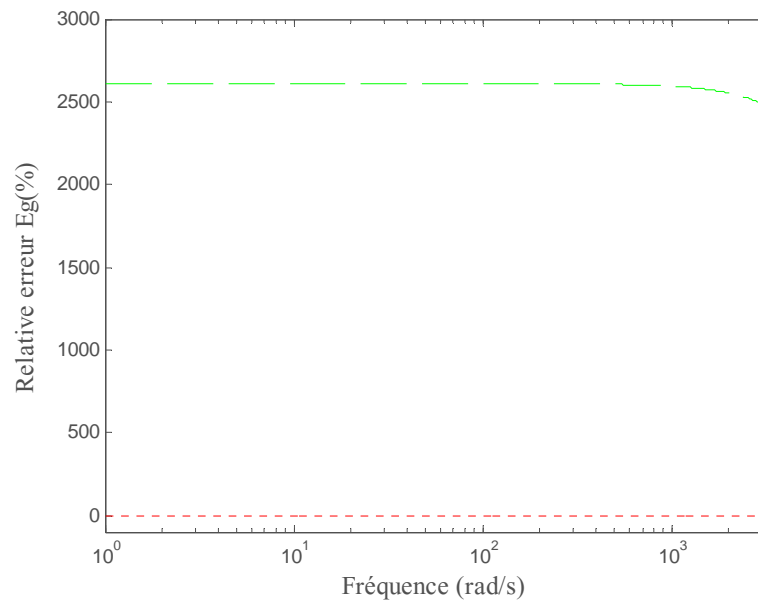


**Figure (3.44)** : Tracés de Bode des erreurs relatives  $E_a$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).



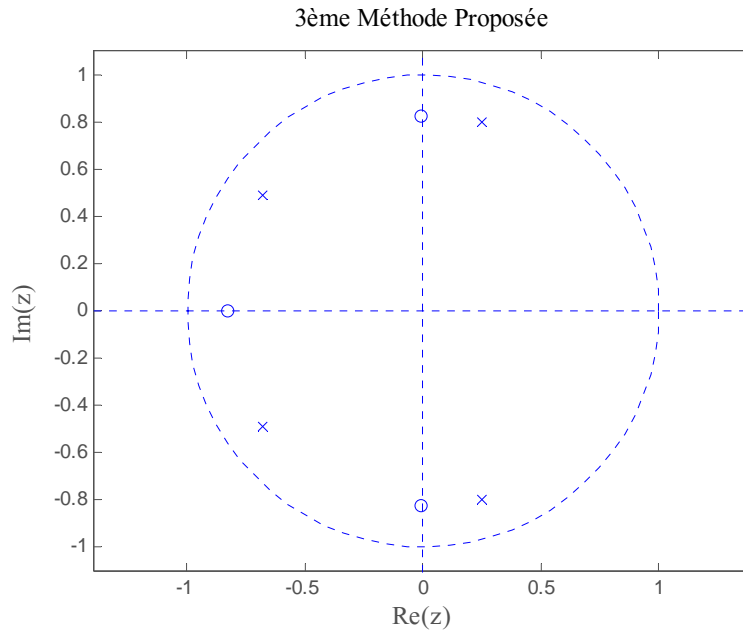


**Figure (3.45)** :Tracés de Bode des erreurs relatives  $E_p$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_E(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

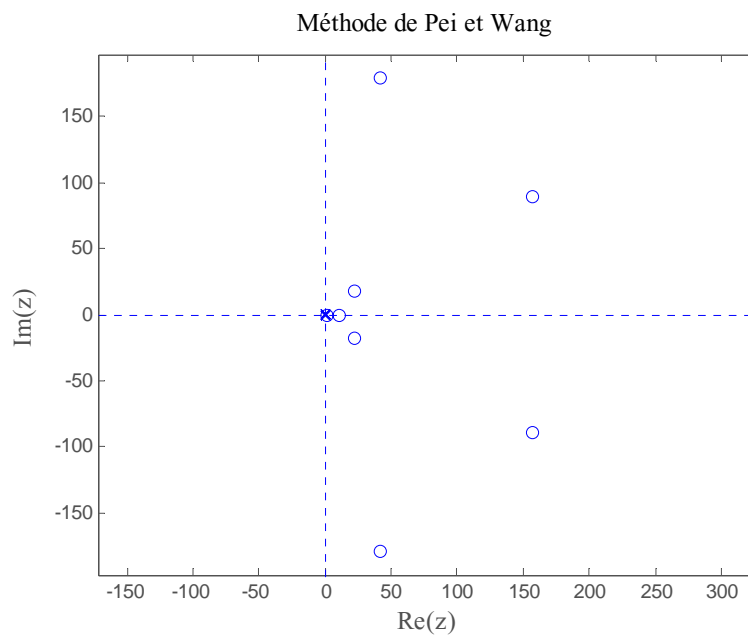


**Figure (3.46)** :Tracés de Bode des erreurs relatives  $E_g$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et le filtre numérique RII  $G_E(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang (trait discontinu vert).

Figures (3.47) et (3.48) montrent les tracés des positions des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_E(z)$  et du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$ .



**Figure (3.47) :**Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_E(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$



**Figure (3.48) :**Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII passe-tout de Pei et Wang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$

**Commentaires :**

A partir des résultats obtenus, nous avons constaté que :

- L'erreur relative d'amplitude  $E_a$  de la figure (3.44) a montré que l'approche proposée donne de très bon résultat, mais il n'est pas comparable au résultat parfait obtenu par la méthode de Pei et Wang [74] parce que le filtre numérique RII d'approximation utilisé est un filtre passe-tout dont l'amplitude est exactement égale à 0 dB.
- Des figures (3.45) et (3.46) on peut constater que les erreurs relatives de phase  $E_p$  et de retard de groupe  $E_g$  de la méthode de Pei et Wang [74] sont plus importantes que celles obtenues par la méthode proposée. Donc, la méthode de Pei et Wang a échoué d'approximer la phase du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$ .
- La méthode proposée d'approximation du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  permet de réaliser un filtre numérique stable et à phase minimale, mais la méthode de Pei et Wang [74] donne réalise un filtre numérique stable et à phase non-minimale.
- La méthode proposée réalise un filtre numérique approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  d'ordre 4 par contre le filtre numérique réalisé par Pei et Wang [74] est d'ordre 8. Donc on peut dire que le filtre proposé est moins complexe que le filtre de Pei et Wang.

Pour affiner la comparaison entre les trois méthodes proposées approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-0.91}$  et la méthode de Pei et Wang [74], on a récapitulé dans le tableau (3.3) les performances de ces différentes méthodes.

**Tableau 3.3:** Comparaison entre les différentes méthodes proposées et la méthode in [74]

Méthode	N	Plus grande erreur $E_a$ %	Plus grande erreur $E_p$ %	Plus grande erreur $E_g$ %	Système obtenu
méthode de Pei et	8	$6.7 \times 10^{-13}$ %	$\infty$	$\infty$	Stable et à phase non-minimale
1 <sup>ère</sup> méthode proposée	5	0,00325 %	$7.13 \times 10^{-4}$ %	0.00214 %	Stable et à phase minimale
2 <sup>ème</sup> méthode proposée	7	0.0200 %	0.0172 %	0.0181 %	Stable et à phase minimale
3 <sup>ème</sup> méthode proposée	4	0.0800 %	0.0475 %	0.2000 %	Stable et à phase minimale

### 3.5.2 Comparaison avec la méthode de Zhang [75]

Comme seconde comparaison, on a considéré le travail de Zhang [75] qui a proposé d'appliquer le critère de platitude maximale pour approximer le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-D}$ ,  $D = (D_{\text{ent}}+m)$  avec  $D_{\text{ent}}$  un nombre entier et  $-0.5 < m < 0.5$ , par un filtre numérique RII à phase non-minimale. Ce filtre est représenté par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{1 + \sum_{r=1}^M b_r z^{-r}}$$

où les coefficients  $a_n$  et  $b_r$  sont donnés par :

$$\begin{cases} a_n = (-1)^{n+1} \frac{M!}{n!(N-n)!} \frac{\prod_{i=0}^N (i - D_{\text{ent}} - m)}{\prod_{i=0}^M (i - n + D_{\text{ent}} + m)} \\ b_r = (-1)^r \frac{M!}{r!(M-r)!} \prod_{i=0}^M \frac{(i - D_{\text{ent}} - m)}{(i - r + D_{\text{ent}} + m)} \end{cases}$$

Ce filtre a la particularité d'avoir une réponse en fréquence avec une platitude maximale autour de  $\omega = 0$  et  $\omega = \pi$ . Dans [75], l'auteur a déclaré que pour certaines valeurs du paramètre de retard  $D$  des pôles de  $H(z)$  pourraient être situés à l'extérieur du cercle d'unité. Donc, quand la stabilité et la causalité de  $H(z)$  sont nécessaires dans des applications de traitement en temps réel, le paramètre de retard  $D = (D_{\text{ent}}+m)$  doit être soigneusement choisi. Alors, on peut dire que la méthode de Zhang est une conception limitée du filtre numérique RII approxinant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale.

#### 3.5.2.1 Transformation Avant

Dans cette première comparaison avec la méthode de Zhang, on a conçu un filtre numérique RII équivalent au retard numérique d'ordre fractionnaire idéal suivant :

$$D(z) = z^{-5.9}$$

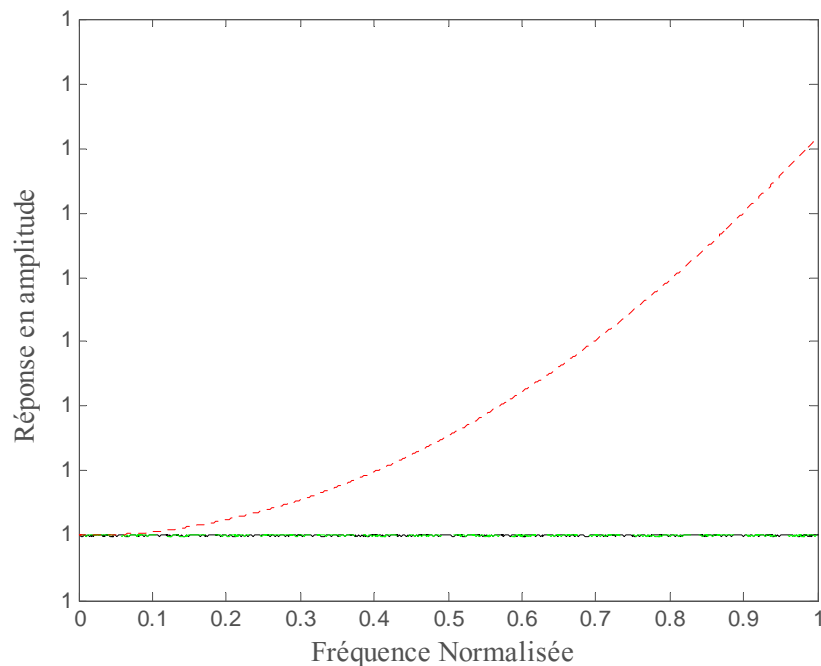
Pour la conception du filtre numérique RII équivalent au retard numérique  $D(z) = z^{-5.9}$ , nous avons adopté pour les deux méthodes la même période d'échantillonnage  $T = 0.1$  s et la même bande de fréquence d'approximation  $[0 \text{ rad/s}, \pi \text{ rad/s}]$ . Dans ce cas, la réponse en amplitude et le retard de groupe du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.9}$  sont donnés par:

$$\text{Amplitude} = |D(e^{-j5.9\omega T})| = 1$$

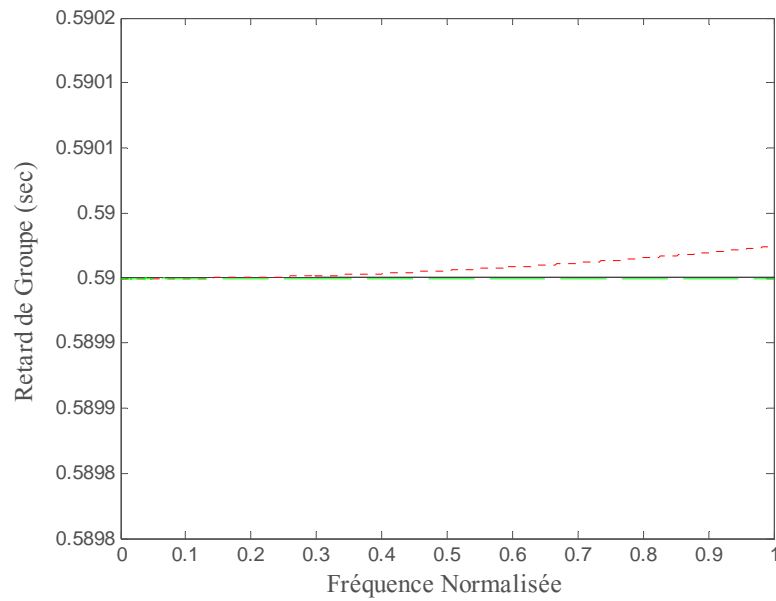
$$\text{Retard de Groupe (sec)} = [(5.9)T] = 0.59$$

Les paramètres de conception  $N$ ,  $M$ ,  $m$ , et  $D_{\text{ent}}$  du filtre numérique RII de la méthode de Zhang sont  $N = 7$ ,  $M = 3$ ,  $m = -0,1$  et  $D_{\text{ent}} = 6$ . Pour la méthode proposée le retard numérique fractionnaire idéal  $D(z)$  est partagé en deux retards numériques  $D_1(z) = z^{-5}$  et  $D_2(z) = z^{-0.9}$ . Alors, l'ordre du filtre numérique RII équivalent au retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $D_2(z) = z^{-0.9}$  de la méthode proposée est  $N_2 = 2$ . Donc, l'ordre total du filtre numérique RII équivalent au retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $D(z) = z^{-5.9}$  est  $N = 7$ .

Les figures (3.49) et (3.50) montrent les réponses de l'amplitude et du retard de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-5.9}$  ainsi que le filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée et le filtre numérique RII de Zhang.

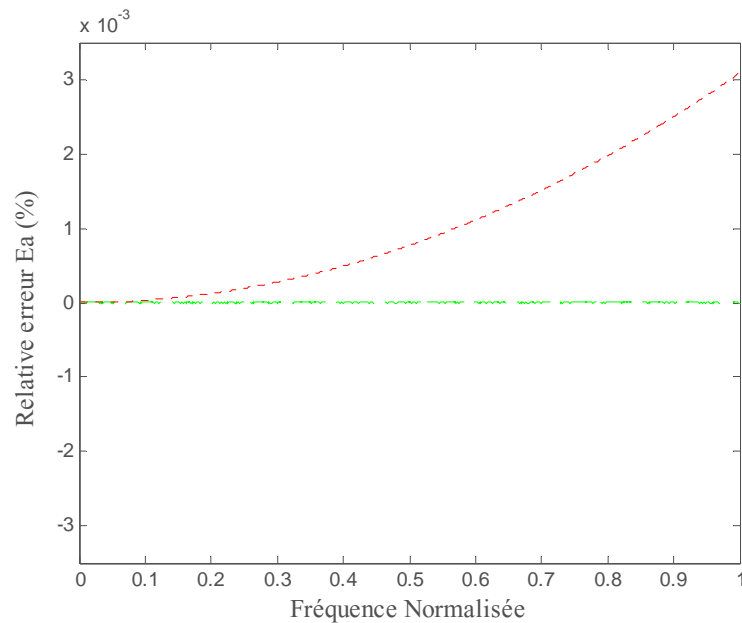


**Figure (3.49) :** Réponse de l'amplitude du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.9}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII de Zhang (trait discontinu vert).

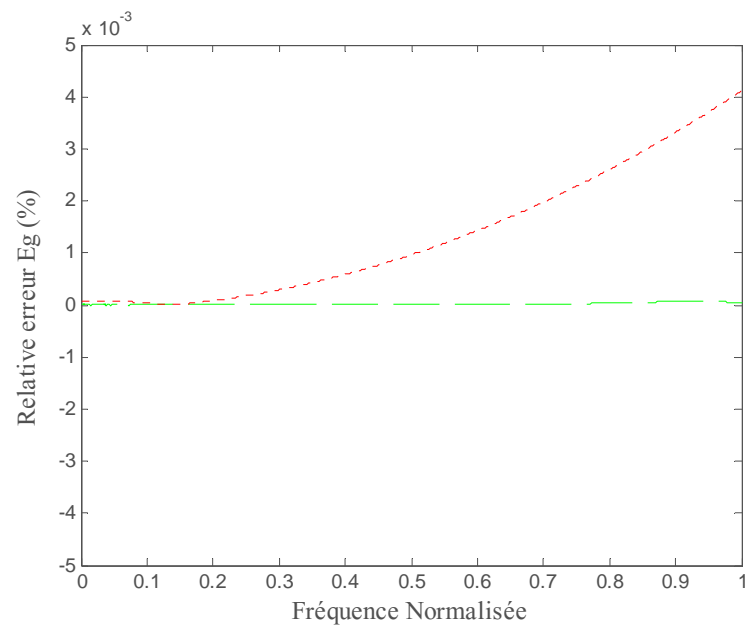


**Figure (3.50)** : Réponse du retard de groupe du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.9}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII de Zhang (trait discontinu vert).

Les tracés des erreurs relatives de l'amplitude  $E_a$  et du retard de groupe  $E_g$  entre le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-5.9}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposé et le filtre numérique RII de Zhang sont donnés dans les figures (3.51) et (3.52)

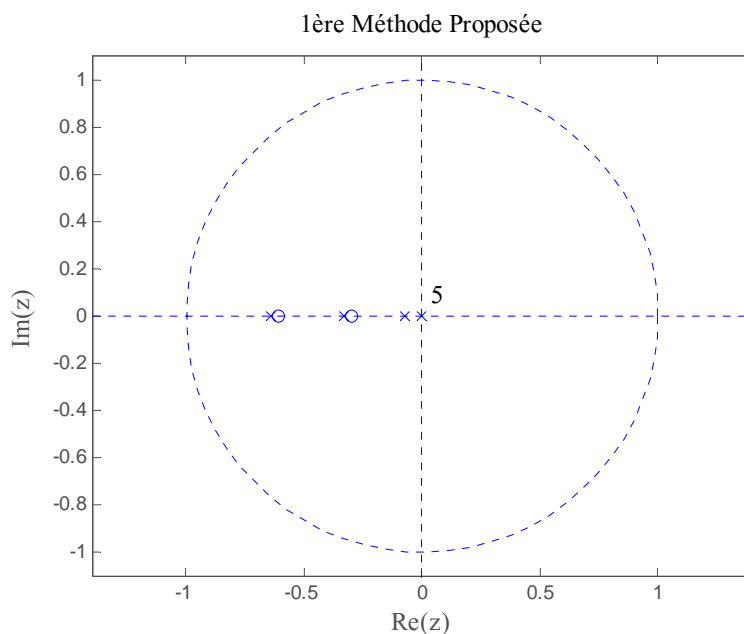


**Figure (3.51)** : Tracés des erreurs relatives  $E_a$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.9}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII de Zhang (trait discontinu vert).

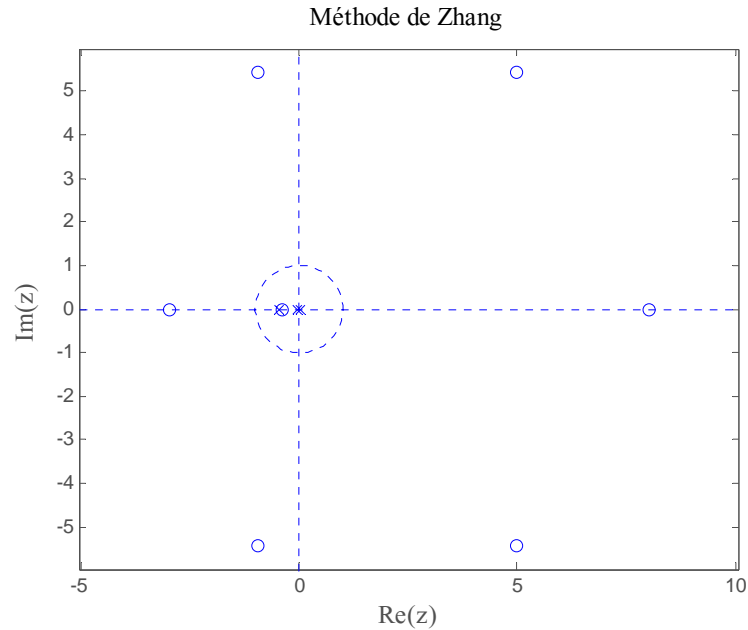


**Figure (3.52)** :Tracés des erreurs relatives  $E_g$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.9}$  et le filtre numérique RII  $G_F(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII de Zhang (trait discontinu vert).

Les figures (3.53) et (3.54) présentent les tracés des positions des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_F(z)$  et du filtre numérique RII de Zhang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.9}$ .



**Figure (3.53)** :Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_F(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.9}$



**Figure (3.54)** : Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII de Zhang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.9}$

#### Commentaires :

A partir des résultats obtenus, on a constaté que :

- Les erreurs relatives d'amplitude  $E_a$  et de retard de groupe  $E_g$  obtenues par la méthode proposée dans les figures (3.51) et (3.52), respectivement, montrent que notre approche donne des très bons résultats, mais ils ne sont pas mieux que les résultats obtenus par la méthode de Zhang [75] donnés aussi dans les figures (3.51) et (3.52).
- La méthode d'approximation du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.9}$  proposée permet de réaliser un filtre numérique stable et à phase minimale, par contre la méthode de Zhang [75] conduit à un filtre numérique stable et à phase non-minimale.

#### 3.5.2.2 Transformation bilinéaire

Dans cette seconde comparaison avec la méthode de Zhang, on a conçu un filtre numérique RII équivalent au retard numérique d'ordre fractionnaire idéal suivant :

$$D(z) = z^{-5.1}$$

Pour la conception du filtre numérique RII équivalent au retard numérique  $D(z) = z^{-5.1}$ , nous avons adopté pour les deux méthodes la même période d'échantillonnage  $T = 1$  s et la même bande de fréquence d'approximation  $[0 \text{ rad/s}, \pi \text{ rad/s}]$ . Dans ce cas, la réponse en amplitude et le retard de groupe du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.1}$  sont donnés par :

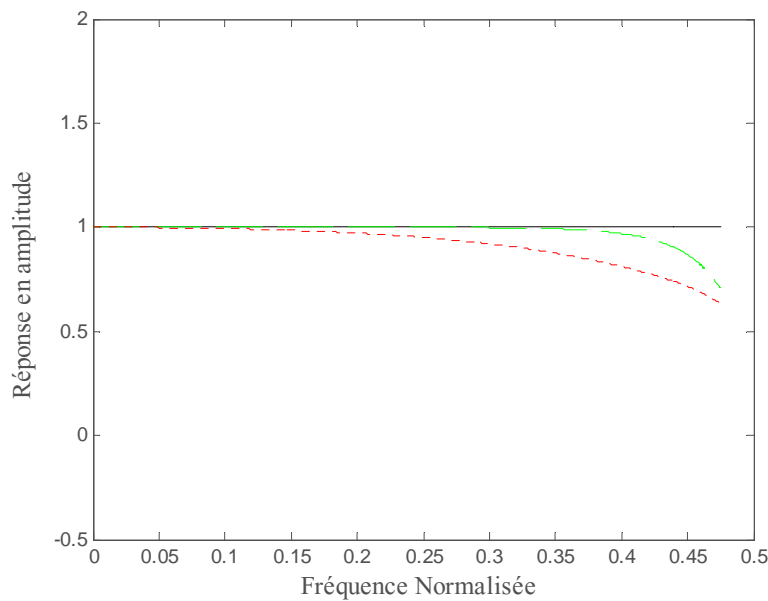


$$\text{Amplitude} = |D(e^{-j5.1\omega T})| = 1$$

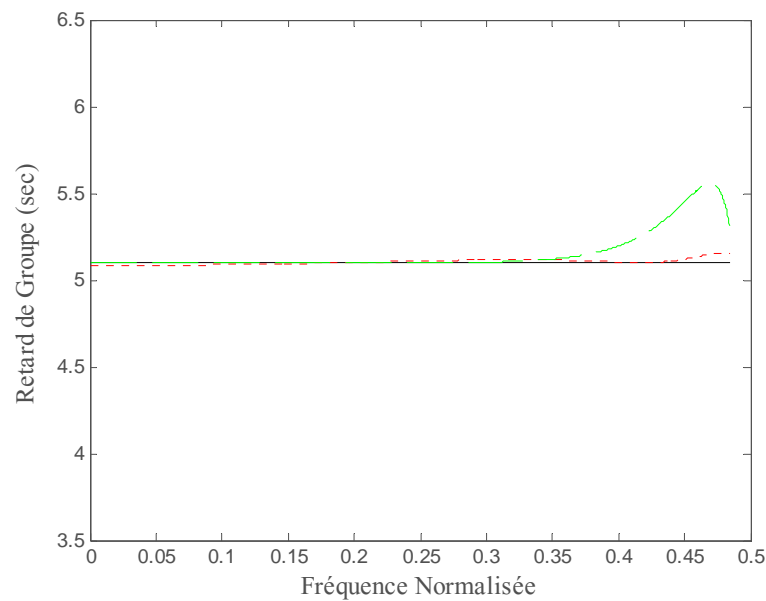
$$\text{Retard de Groupe (sec)} = [(5.1)T]=5.1$$

Les paramètres de conception  $N$ ,  $M$ ,  $m$ ,  $D_{\text{ent}}$  et  $D$  du filtre numérique RII de la méthode de Zhang sont  $N = 7$ ,  $M = 3$ ,  $m = 0,1$  et  $D_{\text{ent}} = 5$ . Pour la méthode proposée le retard numérique fractionnaire idéal  $D(z)$  est partagé en deux retards numériques  $D_1(z) = z^{-5}$  et  $D_2(z) = z^{-0.1}$ . Alors, l'ordre du filtre numérique RII équivalent au retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $D_2(z) = z^{-0.1}$  de la méthode proposée est  $N_2 = 2$ . Donc, l'ordre total du filtre numérique RII équivalent au retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $D(z) = z^{-5.1}$  est  $N = 7$ .

Les figures (3.55) et (3.56) montrent les réponses de l'amplitude et du retard de groupe du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-5.1}$  ainsi que le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée et le filtre numérique RII de Zhang.

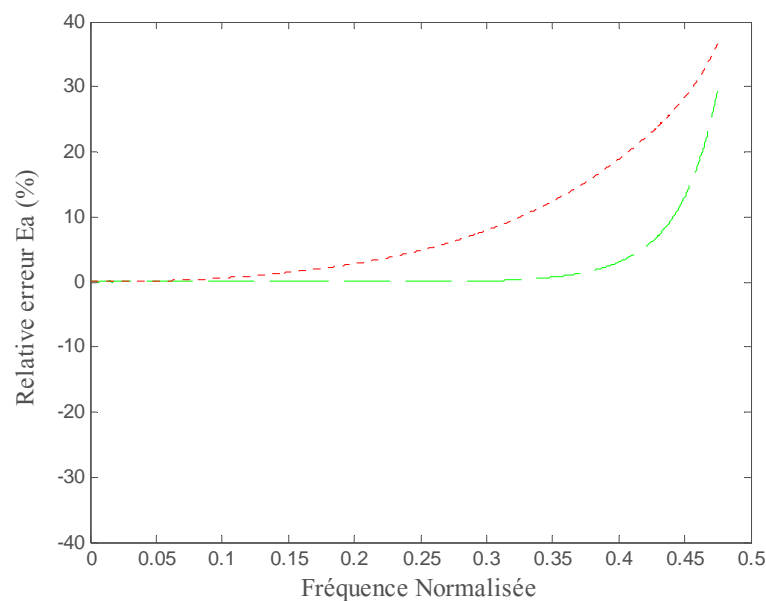


**Figure (3.55) :** Réponse en amplitude du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.1}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII de Zhang (trait discontinu vert).

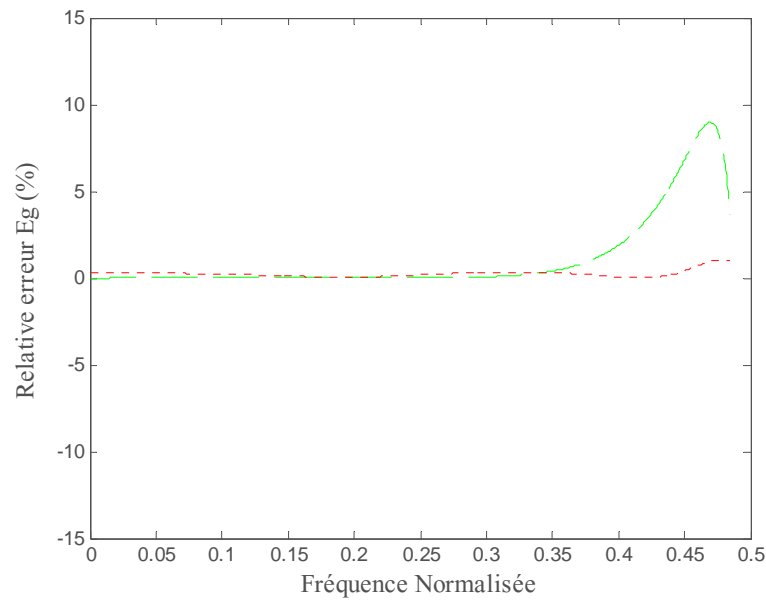


**Figure (3.56)** : Réponse en retard de groupe du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.1}$  (trait plein), du filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et du filtre numérique RII de Zhang (trait discontinu vert).

Les tracés des erreurs relatives de l'amplitude  $E_a$  et du retard de groupe  $E_g$  entre le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-5.1}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée et le filtre numérique RII de Zhang sont donnés dans les figures (3.57) et (3.58).

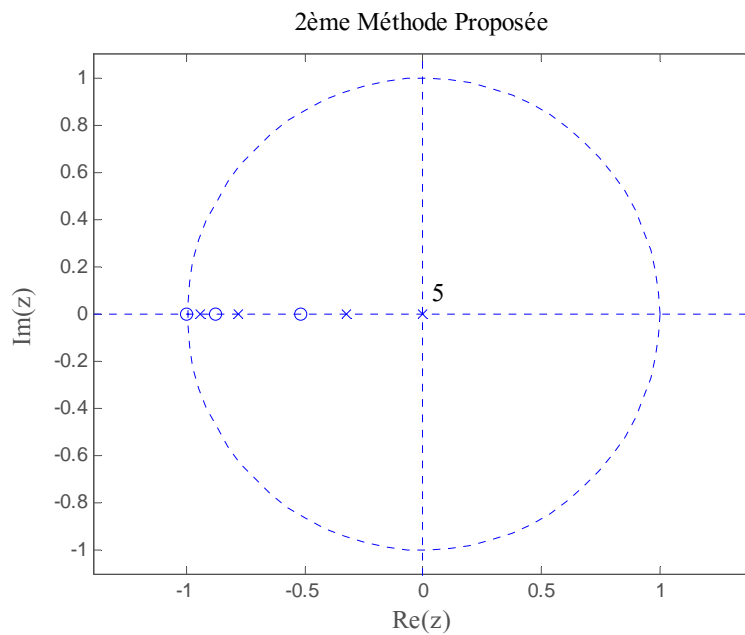


**Figure (3.57)** : Tracés des erreurs relatives  $E_a$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.1}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII de Zhang (trait discontinu vert).

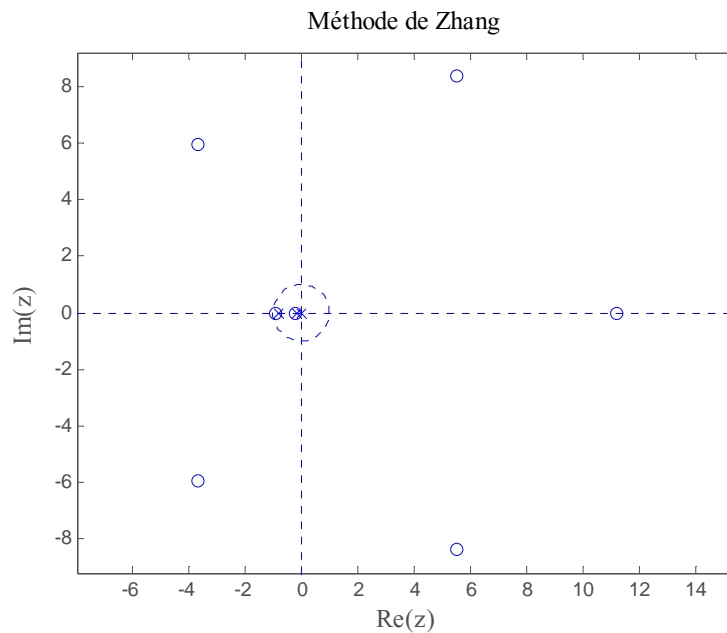


**Figure (3.58)** :Tracés des erreurs relatives  $E_g$  entre le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.1}$  et le filtre numérique RII  $G_T(z)$  proposée (trait en pointillé rouge) et le filtre numérique RII de Zhang (trait discontinu vert).

Figures (3.59) et (3.60) montrent les tracés des positions des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_T(z)$  et du filtre numérique RII de Zhang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.1}$ .



**Figure (3.59)** : Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII  $G_T(z)$  approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.1}$



**Figure (3.60) :** Tracé de la position des pôles et des zéros du filtre numérique RII de Zhang approximant le retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.1}$

#### Commentaires :

A partir des résultats obtenus, nous avons constaté que :

- Les erreurs relatives d'amplitude  $E_a$  et de retard de groupe  $E_g$  obtenues par la méthode proposée dans les figures (3.57) et (3.58), respectivement, montrent que notre approche donne des très bons résultats. Dans ce cas, on constate que l'amplitude obtenue par la méthode de Zhang [75] est mieux que la notre mais notre retard de groupe est mieux que celui obtenu par la méthode de Zhang [75].
- La méthode d'approximation du retard numérique fractionnaire idéal  $z^{-5.1}$  proposée permet de réaliser un filtre numérique stable et à phase minimale, mais la méthode de Zhang [75] conduit à un filtre numérique stable et à phase non-minimale.
- En plus, la méthode de Zhang [75] est limitée dans le choix du retard fractionnaire  $D$  qui devrait être choisi soigneusement pour garantir que la conception du filtre numérique RII approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-D}$  soit stable et causal. Par contre nos méthodes proposées n'ont aucune restriction concernant le choix du retard fractionnaire  $D$ .

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre des méthodes d'implémentation de filtres numériques RII approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , ont été présentées. Les filtres proposés sont des systèmes à phase minimale obtenus en se basant sur les systèmes d'ordre fractionnaire. Des simulations ont été faites et les résultats d'approximation obtenus ont été très satisfaisants. Des comparaisons des résultats obtenus par les méthodes proposées avec ceux de deux méthodes très récentes à savoir la méthode de Pei et Wang [74] et la méthode de Zhang [75] ont été aussi faites.

Dans la littérature la majorité de ces techniques de conception conduites à des filtres numériques RIF et à des filtres numériques RII passe-tout ou à phase non minimale et des fois très limitées dans le choix du retard fractionnaire ; mais chaque méthode proposée permet de réaliser un filtre numérique stable et à phase minimale sans aucune restriction concernant le choix du retard fractionnaire.

Pour valider les conclusions obtenues ici, nous allons réaliser des systèmes numériques basant sur ces méthodes. Ceci fera l'objectif du chapitre suivant, où des applications de nos méthodes à la conception du dérivateur numérique et le filtre en peigne seront présentées.

---

# Chapitre 4

---

## *Applications de la méthode de conception*

---

4.1 Introduction .....	93
4.2 Transformation d'Euler fractionnaire .....	93
4.2.1 Motivation .....	93
4.2.2 Conception de la transformation d'Euler fractionnaire .....	94
4.2.2.1 Utilisation de la transformation bilinéaire .....	94
4.2.2.2 Utilisation de la transformation avant .....	97
4.2.3 Exemples et comparaisons .....	100
4.2.3.1 Exemples .....	100
4.2.3.2 Comparaisons .....	105
4.3 Conception de filtre peigne .....	109
4.3.1 Introduction .....	109
4.3.2 Conception de filtre peigne .....	110
4.3.3 Exemples de conception .....	112
4.4 Conclusion .....	116

---

## 4.1. Introduction

Le retard numérique d'ordre fractionnaire est utilisé dans une variété d'applications comprenant l'orientation du faisceau de réseau d'antennes, l'ajustement du temps des récepteurs numériques, l'estimation du temps de retard, la modélisation des instruments musicales, le codage et la synthétisation de la parole, la conception de filtre en peigne et la conversion analogique numérique. Dans ce chapitre et comme une première application, on a proposé une nouvelle technique de transformation du domaine analogique au domaine discret. Cette technique est basée sur le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) dite transformation d'Euler d'ordre fractionnaire définie par :

$$F(z) = \frac{1 - z^{-\alpha}}{\alpha T} \quad (4.1)$$

Cette transformation est développée pour améliorer l'exactitude de la transformation analogique numérique dans la zone des hautes fréquences par rapport aux méthodes existantes. Donc la discrétisation d'une fonction analogique  $G(s)$  en utilisant la transformation d'Euler d'ordre fractionnaire sera proposée  $H(z) = G\left(s = F(z) = \frac{1 - z^{-\alpha}}{\alpha T}\right)$ , où  $T$  est la période d'échantillonnage. La conception de cette transformation d'Euler d'ordre fractionnaire est obtenue en utilisant l'implémentation par un filtre numérique RII du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale. La seconde application qui sera présentée dans ce chapitre est la conception d'un filtre numérique peigne proposée dans [35]. La conception de ce filtre numérique est basée sur l'implémentation par un filtre numérique RII du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale.

## 4.2 Transformation d'Euler fractionnaire

### 4.2.1 Motivation

La fonction idéale de la transformation d'Euler fractionnaire proposée est définie par [79]:

$$F(z) = \frac{1 - z^{-\alpha}}{\alpha T} \quad (4.2)$$

Où  $T$  est la période d'échantillonnage et  $0 < \alpha < 1$ . Pour  $z = e^{j\omega T}$ , l'équation (4.2) devient:

$$F(e^{j\omega T}) = \frac{1 - e^{-j\omega T\alpha}}{\alpha T} \quad (4.3)$$

Le développement en série de Taylor de la fonction exponentielle  $e^{-j\omega T\alpha}$  est donné par:

$$e^{-j\omega T\alpha} = 1 - j\omega T\alpha + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-j\omega T)^k}{k!} \alpha^k \quad (4.4)$$

Quand  $\alpha$  est petite, l'équation précédente sera donc:

$$e^{-j\omega T\alpha} \cong 1 - j\omega T\alpha \quad (4.5)$$

Alors l'équation (4.5) conduit à l'expression suivante:

$$F(e^{j\omega T}) \cong j\omega \quad (4.6)$$

De l'équation (4.6), on peut dire que  $F(z)$  est un différentiateur numérique approximant le différentiateur analogique  $s = j\omega$ . Alors,  $F(z)$  peut être utilisé comme transformation du domaine analogique au domaine numérique. Cette transformation sera développée pour améliorer l'exactitude de la transformation analogique numérique dans la zone des hautes fréquences par rapport aux méthodes existantes.

## 4.2.2 Conception de la transformation d'Euler fractionnaire

Dans cette partie nous présenterons deux méthodes d'approximation de la transformation d'Euler fractionnaire idéal  $F(z)$ . La première est basée sur la seconde technique proposée dans le paragraphe 3.3.2 (équation 3.34) pour approximer l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-\alpha}$  pour  $0 < \alpha < 0,5$  de  $F(z)$  par un filtre numérique RII [79]. La seconde méthode utilise la première technique proposée dans le paragraphe 3.3.1 (équation 3.26) pour approximer l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-\alpha}$  pour  $0 < \alpha < 1$  de  $F(z)$  par un filtre numérique RII [76].

### 4.2.2.1 Utilisation de la transformation bilinéaire

Dans ce cas, l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-\alpha}$  de la transformation d'Euler d'ordre fractionnaire définie par l'équation (4.2) est approximé en utilisant la transformation bilinéaire. De l'équation (3.34), pour  $0 < \alpha < 0,5$ , on a :

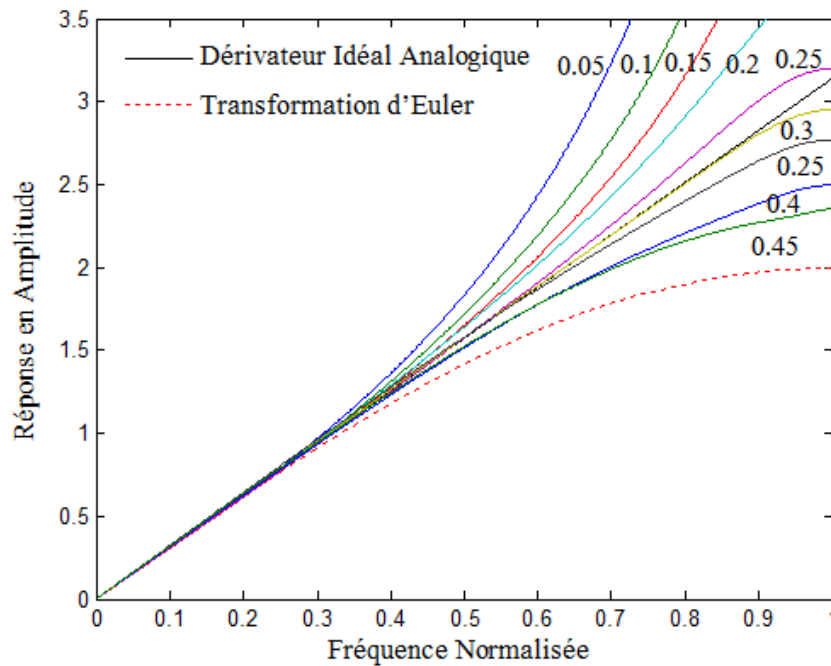
$$z^{-\alpha} = (z+1) \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{2}{Tz_0(ab)^i} \right) (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{2}{Tp_0(ab)^i} \right) (z + \bar{p}_i)} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i (1+z^{-1})}{(1+\bar{p}_i z^{-1})} \quad (4.7)$$



En remplaçant l'équation (4.7) dans l'équation (4.2), l'approximation de la transformation d'Euler fractionnaire idéal par un filtre numérique RII est alors donnée comme :

$$\frac{(1-z^{-\alpha})}{\alpha T} \cong F_1(z) = \frac{1}{\alpha T} \left[ \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{2}{Tz_0(ab)^i} \right) (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{2}{Tp_0(ab)^i} \right) (z + \bar{p}_i)} \right] = \frac{1}{\alpha T} \left[ 1 - \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i (1+z^{-1})}{(1+\bar{p}_i z^{-1})} \right] \quad (4.8)$$

Premièrement, le paramètre  $\alpha$ , pour  $0 < \alpha < 0.5$ , doit être choisi pour que l'erreur relative entre le dérivateur analogique  $s = j\omega$  et l'approximation de la transformation d'Euler fractionnaire  $F_1(z = e^{-j\omega T})$  soit minimale. Figure (4.1) montre les réponses en amplitude de  $s = j\omega$  et  $F_1(z = e^{-j\omega T})$  de l'équation (4.8) pour  $T = 1s$ ,  $N = 1$  et différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ . On note que la transformation d'Euler fractionnaire  $F_1(z)$  a été multipliée par un facteur  $F_0$  pour éliminer le peu de biais qui existait.



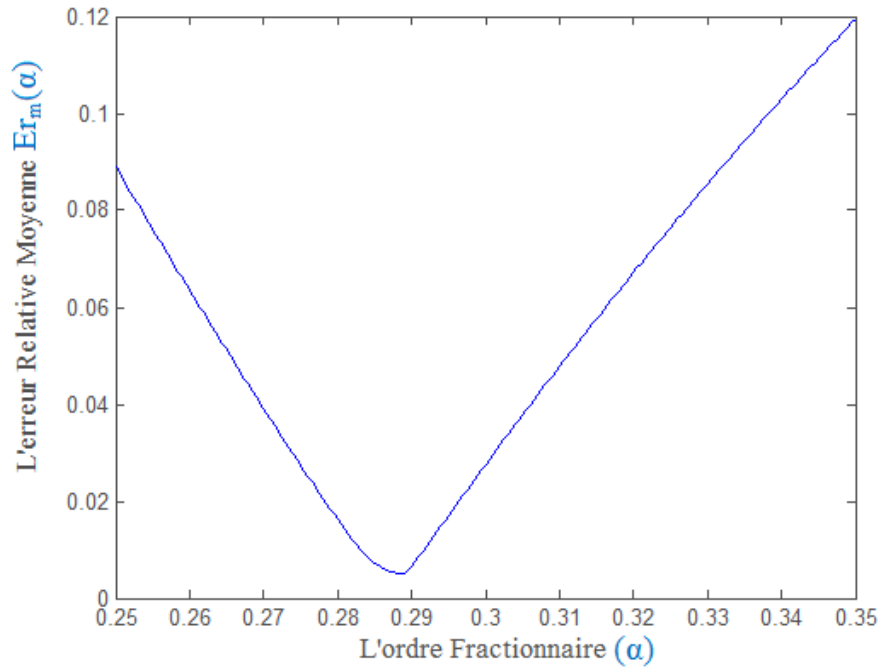
**Figure (4.1) :** Réponse en amplitude du dérivateur analogique  $s = j\omega$ , de la Transformation d'Euler  $\frac{(1-z)}{T}$  et la transformation d'Euler fractionnaire  $F_1(z)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$

Comme nous pouvons voir de la Figure (4.1) que la transformation d'Euler fractionnaire  $F_1(z)$  approxime mieux le dérivateur analogique  $s = j\omega$  quand le paramètre  $\alpha$  est compris entre

0,25 et 0,35. Donc, le meilleur paramètre  $\alpha$  est obtenu quand l'erreur relative moyenne  $Er_m(\alpha)$  définie par l'équation suivante sera minimale.

$$Er_m(\alpha) = \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \left| \frac{|j\omega_i| - |F_1(z = e^{-j\omega_i T})|}{|j\omega_i|} \right| \quad (4.9)$$

Figure (4.2) montre l'erreur  $Er_m(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$ , pour  $0,25 < \alpha < 0,35$ , avec un pas de 0,001,  $Ne$  est le nombre de points  $\omega_i$  dans la bande de fréquence  $[0, \pi]$  et  $T = 1s$ ,  $N = 1$ .



**Figure (4.2) :** L'erreur relative moyenne  $Er_m(\alpha)$  en fonction du paramètre  $\alpha$

Comme on peut le voir de la Figure (4.2) que l'erreur relative moyenne  $Er_m(\alpha)$  a une valeur minimale de 0,005 se produisant à  $\alpha_{min} = 0,2885$ . Nous notons que le facteur multiplicatif  $F_0$  utilisé pour éliminé le biais est  $F_0 = 0,8631$ . Par conséquent, la transformation d'Euler fractionnaire  $F_1(z)$  qui approxime le dérivateur analogique  $s = j\omega$  est donnée par:

$$F_1(z) = \frac{0.8631}{0.2885} \left[ 1 - \frac{(z+1) \prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{2}{Tz_0(ab)^i} \right) (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{2}{Tp_0(ab)^i} \right) (z + \bar{p}_i)} \right] = 3 \left[ 1 - \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i (1+z^{-1})}{(1+\bar{p}_i z^{-1})} \right] \quad (4.10)$$

Pour  $m = 2\alpha = 0.577$ ,  $T = 1s$  et une erreur d'approximation  $y = 1dB$ , les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $N$  sont  $a=1.7235$ ,  $b=1.4904$ ,  $p_0=2.4417$  rad/s,  $z_0 = 4.2082$  rad/s et  $N = 1$ . Puis, les pôles, les zéros et les résidus sont donnés, pour  $i = 0$  et  $1$ , comme:

$$\bar{p}_i = \frac{\left( \frac{2}{2.4417(2.5687)^i} - 1 \right)}{\left( \frac{2}{2.4417(2.5687)^i} + 1 \right)}, \quad \bar{z}_i = \frac{\left( \frac{2}{4.2082(2.5687)^i} - 1 \right)}{\left( \frac{2}{4.2082(2.5687)^i} + 1 \right)},$$

$$\bar{k}_i = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left[ 1 - \frac{(2.5687)^{(i-j)}}{1.7235} \right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N \left[ 1 - (2.5687)^{(i-j)} \right]} \frac{1}{\left( \frac{2}{2.4417(2.5687)^i} + 1 \right)}$$
(4.11)

Donc, le dérivateur numérique conçu à partir de la transformation d'Euler fractionnaire est donné par  $N=1$  :

$$F_1(z) = 3 \left[ 1 - \frac{(z+1) \prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{2}{4.2082(2.5687)^i} \right) (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{2}{2.4417(2.5687)^i} \right) (z + \bar{p}_i)} \right]$$
(4.12)

#### 4.2.2.2 Utilisation de la transformation avant

Dans le même contexte, la transformation avant a été utilisée pour l'approximation de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-\alpha}$  de la transformation d'Euler d'ordre fractionnaire définie par l'équation (4.2). De l'équation (3.26), pour  $0 < \alpha < 1$ , on a :

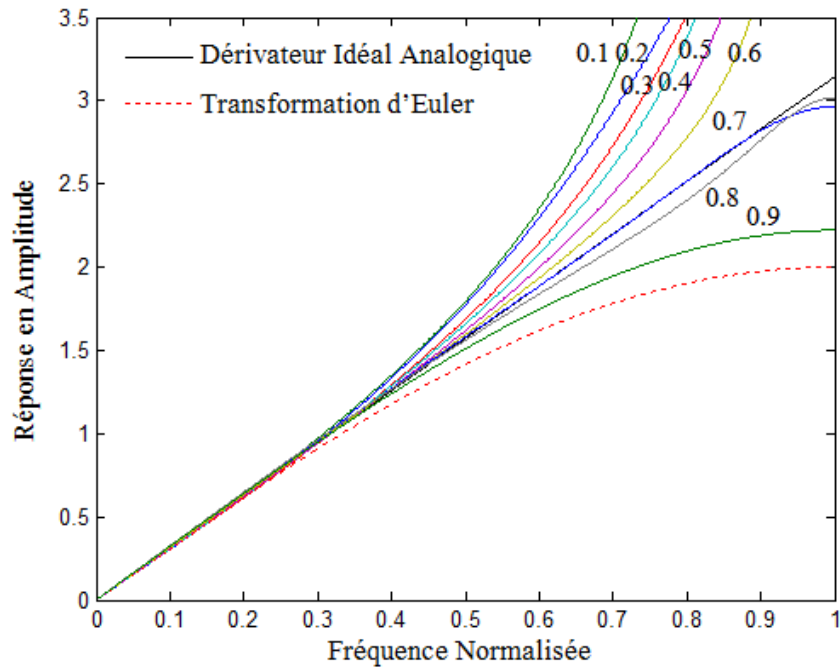
$$z^{-\alpha} = [b^N \sqrt{b}] \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N (z + \bar{p}_i)} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)}, \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1$$
(4.13)

En remplaçant l'équation (4.13) dans l'équation (4.2), l'approximation de la transformation d'Euler fractionnaire idéal par un filtre numérique RII est alors donnée, dans ce cas, comme :

$$\frac{(1 - z^{-\alpha})}{\alpha T} \cong F_2(z) = \frac{1}{\alpha T} \left[ 1 - [b^N \sqrt{b}] \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N (z + \bar{p}_i)} \right] = \frac{1}{\alpha T} \left[ 1 - \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)} \right]$$
(4.14)

Dans ce cas aussi, l'objectif est de déterminer la valeur de  $\alpha$  pour que l'erreur relative moyenne  $Er_m(\alpha)$  entre le dérivateur analogique  $s = j\omega$  et l'approximation de la transformation

d'Euler fractionnaire  $F_2(z = e^{-j\omega T})$  soit minimale. Le tracé des réponses en amplitude de  $F_2(z)$  de l'équation (4.14) et  $s = j\omega$  sont donnés dans la figure (4.3), pour  $T = 1s$ ,  $N = 1$  et différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ . On note que la transformation d'Euler fractionnaire  $F_2(z)$  a été multipliée par un facteur  $F_0$  pour éliminer le biais qui existait.

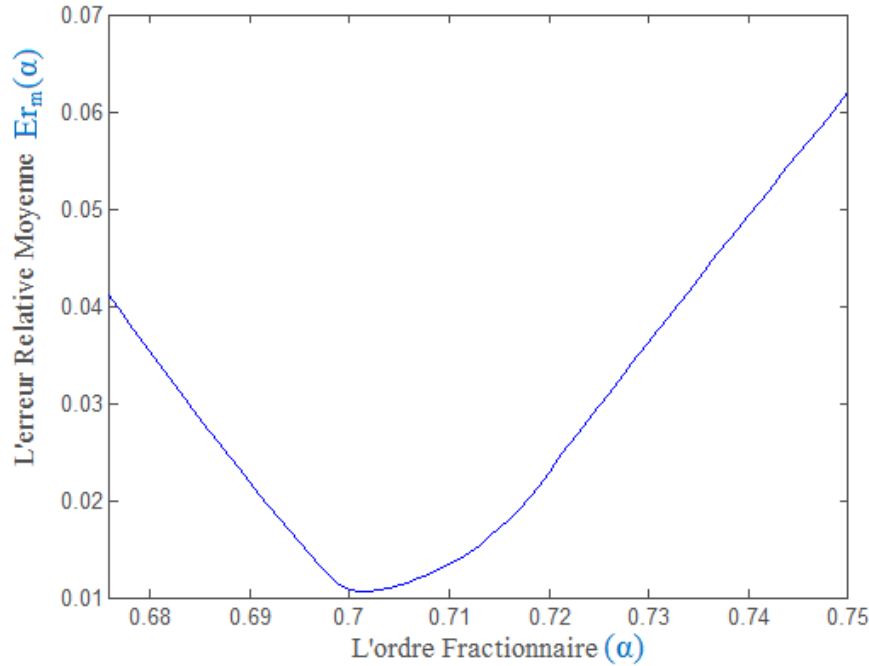


**Figure (4.3) :** Réponse en amplitude du dérivateur analogique  $s = j\omega$ , de la Transformation d'Euler  $\frac{(1-z^{-1})}{T}$  et la transformation d'Euler fractionnaire  $F_2(z)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$

De la figure (4.3), on remarque que la transformation  $F_2(z)$  approxime mieux le dérivateur analogique  $s = j\omega$  quand le paramètre  $\alpha$  est compris entre 0,6 et 0,8. Donc, le meilleur paramètre  $\alpha$  est obtenu quand l'erreur relative moyenne  $Er_m(\alpha)$  définie par l'équation suivante sera minimale.

$$Er_m(\alpha) = \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \left| \frac{|j\omega_i| - |F_2(z = e^{-j\omega_i T})|}{|j\omega_i|} \right| \quad (4.15)$$

Figure (4.4) montre l'erreur  $Er_m(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$ , pour  $0,67 < \alpha < 0,75$ , avec un pas de 0,001,  $Ne$  est le nombre de points  $\omega_i$  dans la bande de fréquence  $[0, \pi]$ ,  $T = 1s$  et  $N=1$ .



**Figure (4.4) :** L'erreur relative moyenne  $Er_m(\alpha)$  en fonction du paramètre  $\alpha$

Comme on peut le voir de la Figure (4.4) que l'erreur relative moyenne  $Er_m(\alpha)$  a une valeur minimale de 0,0106 se produisant à  $\alpha_{\min} = 0,701$ . Nous notons que le facteur multiplicatif  $F_0$  utilisé pour éliminé le biais est  $F_0 = 0,815$ . Par conséquent, la transformation d'Euler fractionnaire  $F_2(z)$  qui approxime le dérivateur analogique  $s = j\omega$  est donnée par:

$$F_2(z) = \frac{0.815}{0.701} \left[ 1 - [b^N \sqrt{b}] \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N (z + \bar{p}_i)} \right] = 1.1626 \left[ 1 - \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)} \right] \quad (4.16)$$

Pour  $m = \alpha = 0.701$ ,  $T = 1s$  et une erreur d'approximation  $y = 0.305$  dB, les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $N$  sont  $a=1.2648$ ,  $b=1.1045$ ,  $p_0=1.0514$  rad/s,  $z_0 = 1.3297$  rad/s et  $N=1$ . Puis, les pôles, les zéros et les résidus sont donnés, pour  $i= 0$  et  $1$ , comme:

$$\bar{p}_i = 1.0514(1.3980)^i - 1, \quad \bar{z}_i = 1.3297(1.3980)^i - 1$$

$$\bar{k}_i = \left\{ 1.0514(1.3980)^{i-1} \right\} \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left[ 1 - \frac{(1.3980)^{(i-j)}}{1.2648} \right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N \left[ 1 - (2.5687)^{(i-j)} \right]} \quad (4.17)$$

Donc, le dérivateur numérique conçu à partir de la transformation d'Euler fractionnaire est donné par  $N=1$ :

$$F_2(z) = 1.1626 \left[ 1 - \left[ (1.1045)^N \sqrt{1.1045} \right] \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (z + \bar{z}_i)}{\prod_{i=0}^N (z + \bar{p}_i)} \right] \quad (4.18)$$

### 4.2.3 Exemples et comparaisons

Dans cette section, on présentera quelques exemples illustratifs pour démontrer l'efficacité de l'approche proposé pour la conception de la transformation d'Euler fractionnaire par un filtre numérique RII, cela pour approximer numériquement le différentiateur analogique  $s = j\omega$ . On présentera aussi des comparaisons de cette transformation du domaine analogique au domaine discret avec des techniques très récentes.

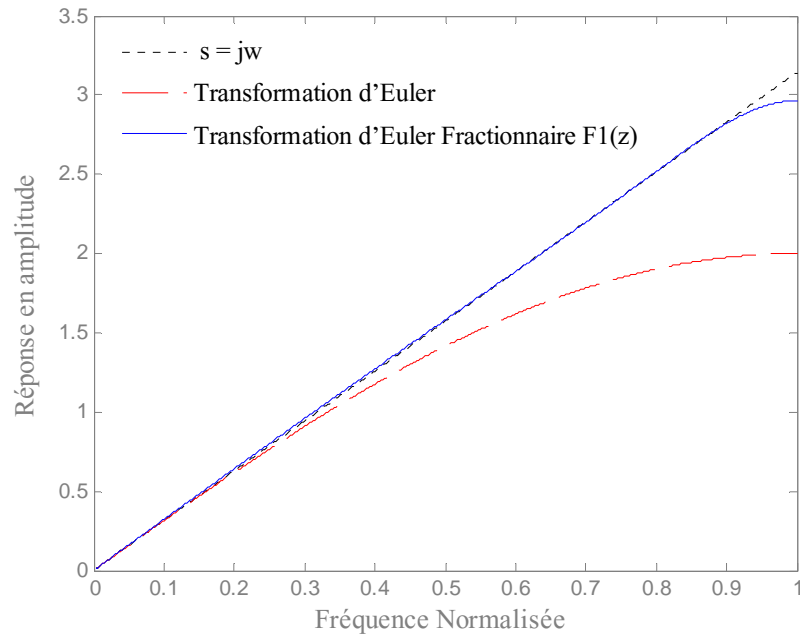
#### 4.2.3.1 Exemples:

Dans la section (4.2.2), les filtres numériques RII obtenus pour la conception de la transformation d'Euler fractionnaire sont donnés par les équations (4.12) et (4.18). Cependant, des implémentations d'ordre réduit pour  $N=1$  de la transformation d'Euler fractionnaire sont conçues à partir de ces équations comme :

$$F_1(z) = \frac{1.15 - 0.6503z^{-1} - 0.4997z^{-2}}{1 + 0.6158z^{-1} + 0.05133z^{-2}} \quad (4.19)$$

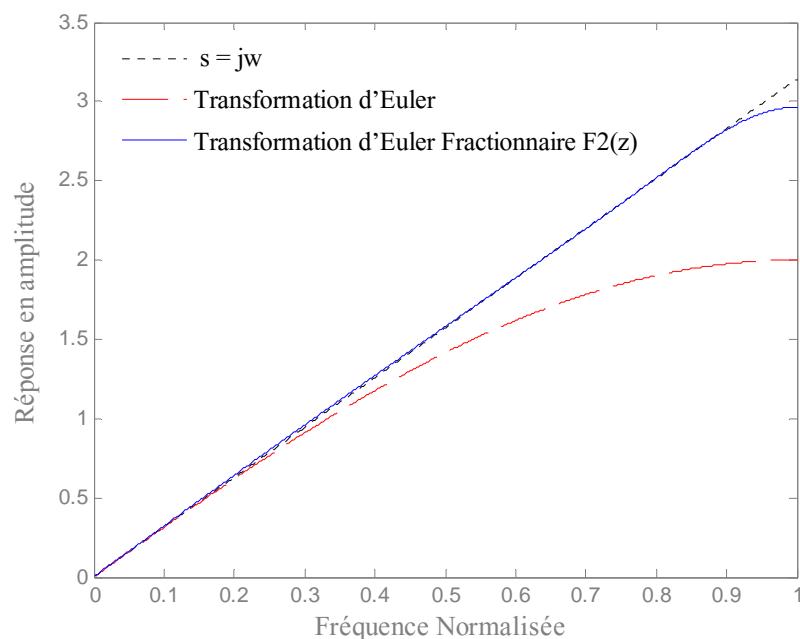
$$F_2(z) = \frac{1.163 - 0.7452z^{-1} - 0.4174z^{-2}}{1 + 0.5212z^{-1} + 0.02413z^{-2}} \quad (4.20)$$

Figure (4.5) montre les réponses en amplitude du dérivateur analogique  $s = j\omega$ , de la transformation d'Euler régulière  $(1-z^{-1})$  et de la transformation d'Euler fractionnaire proposée  $F_1(z)$  de l'équation (4.19).



**Figure (4.5) :** Réponse en amplitude de dérivateur analogique  $s = j\omega$ , de la transformation d'Euler  $(1 - z^{-1})$  et de la transformation d'Euler fractionnaire  $F_1(z)$

Figure (4.6) montre les réponses en amplitude du dérivateur analogique  $s = j\omega$ , de la transformation d'Euler régulière  $(1 - z^{-1})$  et de la transformation d'Euler fractionnaire proposée  $F_2(z)$  de l'équation (4.20).



**Figure (4.6) :** Réponse en amplitude de dérivateur analogique  $s = j\omega$ , de la transformation d'Euler  $(1 - z^{-1})$  et de la transformation d'Euler fractionnaire  $F_2(z)$

Des figures (4.5) et (4.6), on peut très clairement voir que la transformation d'Euler fractionnaire proposée par les deux techniques améliore nettement l'exactitude de la transformation analogique numérique dans les hautes fréquences par rapport à la transformation d'Euler conventionnelle  $(1 - z^{-1})$ .

Comme second exemple, on a considéré la conception numérique du dérivateur analogique du second ordre  $s^2 = (j\omega)^2$ . Alors, les fonctions de transfert des dérivateurs numériques équivalents au dérivateur analogique  $s^2 = (j\omega)^2$  obtenus en utilisant la transformation d'Euler régulière  $(1 - z^{-1})$  et de la transformation d'Euler fractionnaire proposée  $F_1(z)$  et  $F_2(z)$  des équations (4.19) et (4.20), respectivement, sont données comme suit :

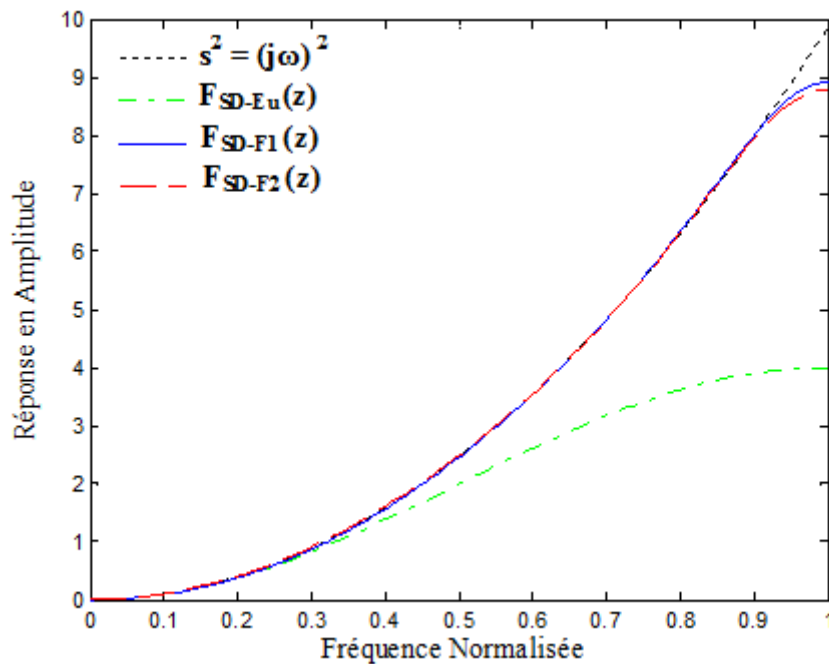
$$F_{SD-Eu}(z) = (1 - z^{-1})^2 = (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} F_{SD-F1}(z) &= \left( \frac{1.15 - 0.6503z^{-1} - 0.4997z^{-2}}{1 + 0.6158z^{-1} + 0.05133z^{-2}} \right)^2 \\ &= \frac{1.322 - 1.496z^{-1} - 0.7264z^{-2} + 0.6499z^{-3} + 0.2497z^{-4}}{1 + 1.232z^{-1} + 0.4819z^{-2} + 0.06322z^{-3} + 0.002635z^{-4}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} F_{SD-F2}(z) &= \left( \frac{1.163 - 0.7452z^{-1} - 0.4174z^{-2}}{1 + 0.5212z^{-1} + 0.02413z^{-2}} \right)^2 \\ &= \frac{1.353 - 1.733z^{-1} - 0.4155z^{-2} + 0.6221z^{-3} + 0.1742z^{-4}}{1 + 1.042z^{-1} + 0.3199z^{-2} + 0.02515z^{-3} + 0.0005823z^{-4}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Figure (4.7) montre les réponses en amplitude des dérivateurs analogique  $s^2 = (j\omega)^2$ , numérique  $F_{SD-Eu}(z)$ , numérique  $F_{SD-F1}(z)$  et numérique  $F_{SD-F2}(z)$ .





**Figure (4.7) :** Réponses en amplitude des dérivateurs analogique  $s^2 = (j\omega)^2$ , numérique  $F_{SD-Eu}(z)$ , numérique  $F_{SD-F1}(z)$  et numérique  $F_{SD-F2}(z)$

De la figure (4.7), on peut aussi très clairement voir que les dérivateurs numériques  $F_{SD-F1}(z)$  et  $F_{SD-F2}(z)$  équivalents au dérivateur analogique  $s^2 = (j\omega)^2$  obtenus en utilisant la transformation d'Euler fractionnaire proposée sont très performants par rapport au dérivateur numérique  $F_{SD-Eu}(z)$  obtenu en utilisant la transformation d'Euler régulière  $(1 - z^{-1})$ .

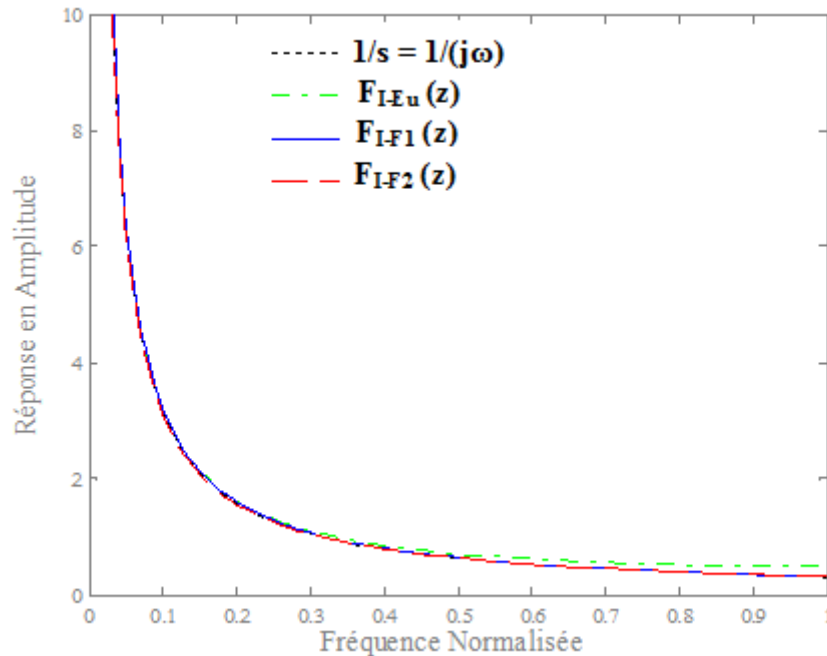
Le troisième exemple concerne la conception numérique de l'intégrateur analogique  $1/s = 1/(j\omega)$ . Les fonctions de transfert des intégrateurs numériques équivalents à l'intégrateur analogique  $1/s = 1/(j\omega)$  obtenus en utilisant la transformation d'Euler régulière  $(1 - z^{-1})$  et de la transformation d'Euler fractionnaire proposée  $F_1(z)$  et  $F_2(z)$  des équations (4.19) et (4.20), respectivement, sont données comme suit :

$$F_{I-Eu}(z) = (1 - z^{-1})^{-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (4.24)$$

$$F_{I-F1}(z) = [F_1(z)]^{-1} = \frac{1 + 0.6158z^{-1} + 0.05133z^{-2}}{1.15 - 0.6503z^{-1} - 0.4997z^{-2}} \quad (4.25)$$

$$F_{I-F2}(z) = [F_2(z)]^{-1} = \frac{1 + 0.5212z^{-1} + 0.02413z^{-2}}{1.163 - 0.7452z^{-1} - 0.4174z^{-2}} \quad (4.26)$$

Figure (4.8) montre les réponses en amplitude de l'intégrateur analogique  $1/s = 1/(j\omega)$ , numérique  $F_{I-Eu}(z)$ , numérique  $F_{I-F1}(z)$  et numérique  $F_{I-F2}(z)$ .



**Figure (4.8) :** Réponses en amplitude des intégrateurs analogique  $1/s = 1/(j\omega)$ , numérique  $F_{I-Eu}(z)$ , numérique  $F_{I-F1}(z)$  et numérique  $F_{I-F2}(z)$ .

De la figure (4.8), on peut aussi remarquer que les intégrateurs numériques  $F_{SD-F1}(z)$  et  $F_{SD-F2}(z)$  équivalents à l'intégrateur analogique  $1/s = 1/(j\omega)$  obtenus en utilisant la transformation d'Euler fractionnaire proposée sont plus performants que l'intégrateur numérique  $F_{SD-Eu}(z)$  obtenu en utilisant la transformation d'Euler régulière  $(1 - z^{-1})$ .

Dans le quatrième exemple la transformation d'Euler fractionnaire proposée est appliquée au

filtre passe-haut de Butterworth analogique du second ordre  $H_B(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1.4142s + 1}$ , cela

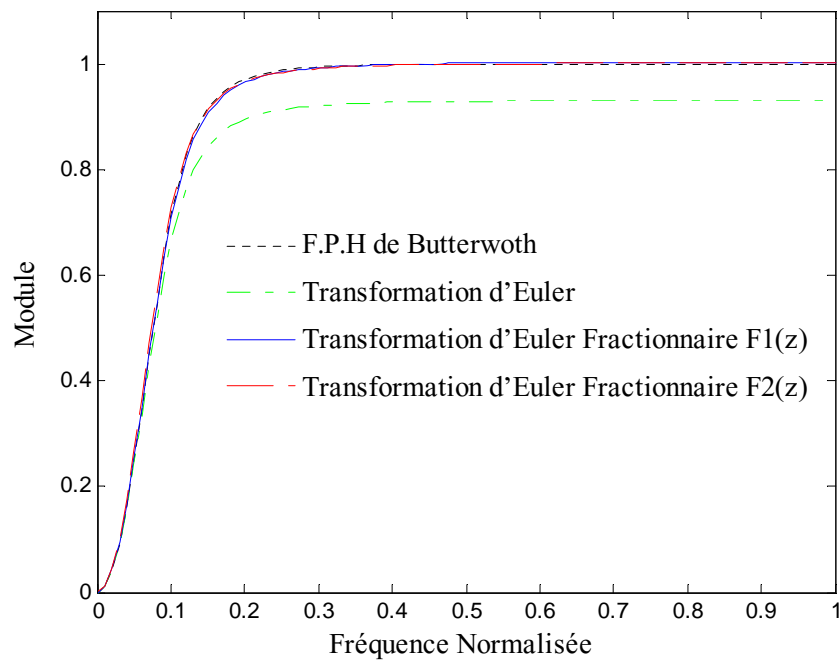
pour le calcul de son équivalent numérique RII. Pour  $T = 0.1s$  et  $N = 1$ , les fonctions de transfert des filtres numériques RII équivalents à  $H_B(s)$  obtenus en utilisant la transformation d'Euler régulière  $10(1 - z^{-1})$  et de la transformation d'Euler fractionnaire proposée  $F_1(z)$  et  $F_2(z)$  des équations (4.19) et (4.20), respectivement, sont données par :

$$H_{B-Eu}(z) = H_B(s) \Big|_{s=10(1-z^{-1})} = \frac{z^2 - 2z + 1}{1.151z^2 - 2.141z + 1} \quad (4.27)$$

$$H_{B-F1}(z) = H_B(s) \Big|_{s=F_1(z)} = \frac{1.399 z^4 - 1.582 z^3 - 0.7686 z^2 + 0.6876 z + 0.2642}{1.495 z^4 - 1.475 z^3 - 0.8406 z^2 + 0.6023 z + 0.2461} \quad (4.28)$$

$$H_{B-F2}(z) = H_B(s) \Big|_{s=F_2(z)} = \frac{1.431 z^4 - 1.834 z^3 - 0.4397 z^2 + 0.6582 z + 0.1843}{1.527 z^4 - 1.743 z^3 - 0.5223 z^2 + 0.589 z + 0.1728} \quad (4.29)$$

Figure (4.9) montre les réponses en amplitude du filtre passe-haut de Butterworth analogique du second ordre  $H_B(s)$ , des filtres numériques  $H_{B-Eu}(z)$ ,  $H_{B-F1}(z)$  et  $H_{B-F2}(z)$ .



**Figure (4.9) :** Réponses en amplitude des filtres  $H_B(s)$ , numérique  $H_{B-Eu}(z)$ , numérique  $H_{B-F1}(z)$  et numérique  $H_{B-F2}(z)$ .

De la figure (4.9), on peut aussi très clairement voir que les filtres numériques  $H_{B-F1}(z)$  et  $H_{B-F2}(z)$  équivalents au filtre passe-haut de Butterworth analogique  $H_B(s)$  obtenus en utilisant la transformation d'Euler fractionnaire proposée sont très performants par rapport au filtre numérique  $H_{B-Eu}(z)$  obtenu en utilisant la transformation d'Euler régulière  $10(1-z^{-1})$ .

#### 4.2.3.2 Comparaisons

Dans cette section, on présente une étude comparative des deux techniques de la transformation d'Euler fractionnaire proposée pour la transformation du domaine analogique au domaine discret  $F_1(z)$  et  $F_2(z)$  des équations (4.19) et (4.20) données par :

$$F_1(z) = \frac{1.15 - 0.6503z^{-1} - 0.4997z^{-2}}{1 + 0.6158z^{-1} + 0.05133z^{-2}} \quad F_2(z) = \frac{1.163 - 0.7452z^{-1} - 0.4174z^{-2}}{1 + 0.5212z^{-1} + 0.02413z^{-2}}$$

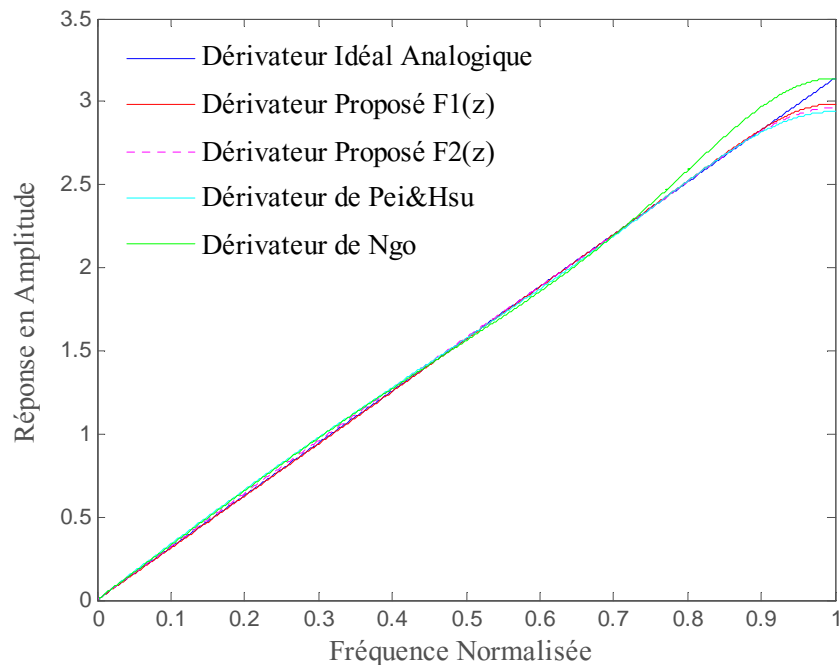
avec les méthodes de transformation proposées par Ngo [80] et par Pei & Hsu [40] qui sont, respectivement, données par les fonctions suivantes:

$$F_{\text{Ngo}}(z) = \frac{2.7925}{2.3658} \frac{(1-z^{-1})}{(1+1/2.3658z^{-1})(1-0.2167e^{j0.9427}z^{-1})(1-0.2167e^{-j0.9427}z^{-1})} \quad (4.30)$$

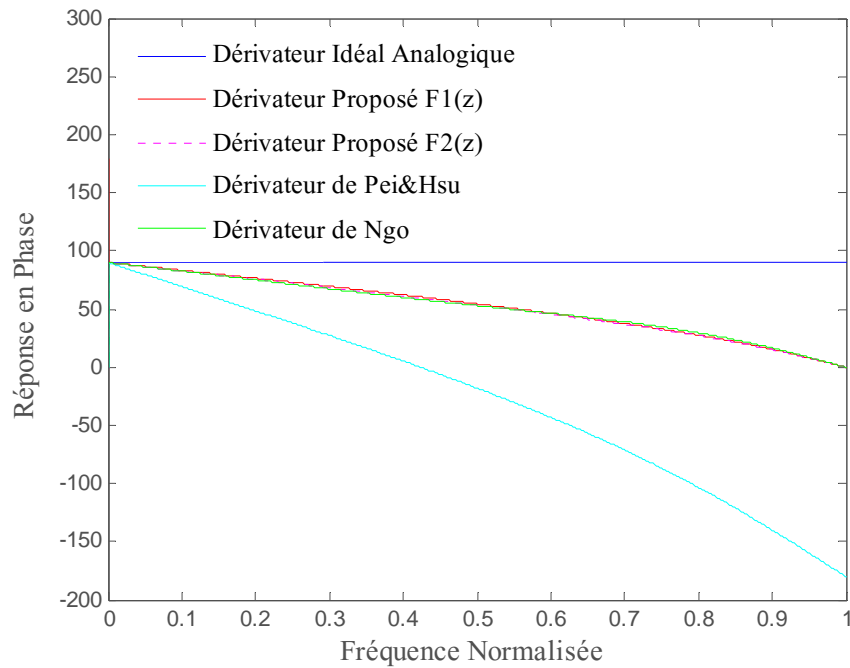
$$F_{\text{Pei \& Hsu}}(z) = \left( \frac{3.0572}{-14.7467} \right) \times \frac{0.1050 + 0.4900z^{-1} - 0.5950z^{-2}}{-0.1050 - 0.0332z^{-1} + 0.0027z^{-2}} \quad (4.31)$$

A partir de ces équations, on note que le degré de complexité de la méthode de la transformation du domaine analogique au domaine discret proposée est inférieur ou égal au degré de complexité des deux méthodes de transformation utilisées pour la comparaison.

Figures (4.10) et (4.11) montrent, respectivement, les réponses en amplitude et en phase du dérivateur analogique  $s = j\omega$ , des transformations d'Euler fractionnaire proposées  $F_1(z)$  et  $F_2(z)$ , de la transformation de Ngo  $F_{\text{Ngo}}(z)$  et de la transformation de Pei & Hsu  $F_{\text{Pei \& Hsu}}(z)$ .



**Figure (4.10) :** Réponses en amplitude du dérivateur analogique  $s = j\omega$ , des transformations proposées  $F_1(z)$  et  $F_2(z)$ , de Ngo  $F_{\text{Ngo}}(z)$  et de Pei & Hsu  $F_{\text{Pei \& Hsu}}(z)$ .

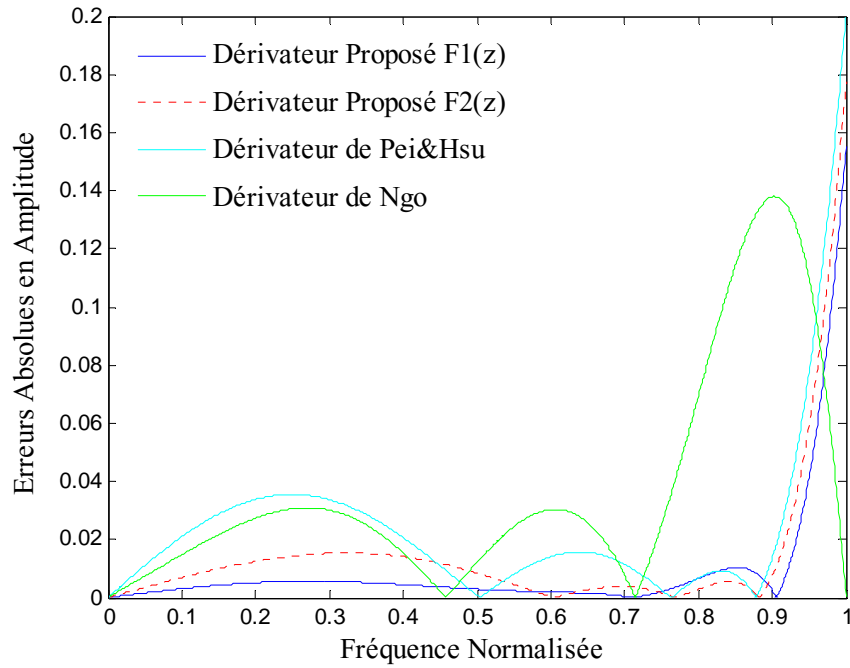


**Figure (4.11) :** Réponses en phase du dérivateur analogique  $s = j\omega$ , des transformations proposées  $F_1(z)$  et  $F_2(z)$ , de Ngo  $F_{Ngo}(z)$  et de Pei & Hsu  $F_{Pei\&Hsu}(z)$ .

Pour évaluer les performances et l'efficacité de la méthode de transformation analogique numérique proposée comparée aux méthodes de transformation de Ngo [80] et de Pei & Hsu [40], on utilise la fonction erreur absolue d'amplitude définie par:

$$E_{ab} = \left| \left| F(e^{j\omega}) \right| - \left| j\omega \right| \right| \quad (4.32)$$

Ainsi, en substituant  $F(e^{j\omega})$  par une des quatre fonctions  $F_1(e^{j\omega})$ ,  $F_2(e^{j\omega})$ ,  $F_{Ngo}(e^{j\omega})$  et  $F_{Pei\&Hsu}(e^{j\omega})$  des équations (4.19), (4.20), (4.30) et (4.31) on obtient les quatre fonctions erreur absolue d'amplitude qui sont montrées dans la Figure (4.12).



**Figure (4.12) :** Fonctions erreur absolue en amplitude  $E_{ab}$  des méthodes de transformation proposées  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ , de Ngo  $F_{Ngo}(z)$  et de Pei & Hsu  $F_{Pei\&Hsu}(z)$

De la Figure (4.12), on peut clairement voir que l'erreur absolue de la transformation d'Euler fractionnaire proposée et représentée par les deux fonctions  $F_1(z)$  ou  $F_2(z)$  est plus petite que l'erreur des transformations de Ngo  $F_{Ngo}(z)$  et de Pei & Hsu  $F_{Pei\&Hsu}(z)$ . De la Figure (4.11), on note aussi que la phase du dérivateur analogique  $s = j\omega$  a une phase constante égale à  $90^\circ$ . Par contre, les phases des quatre fonctions de transformation  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $F_{Ngo}(z)$  et  $F_{Pei\&Hsu}(z)$  ont des phases approximativement linéaires. Les phases de la transformation d'Euler fractionnaire représentée par les fonctions  $F_1(z)$  et  $F_2(z)$  et celle de Ngo  $F_{Ngo}(z)$  sont presque égaux et nettement meilleures que ceux de Pei & Hsu  $F_{Pei\&Hsu}(z)$ .

Pour quantifier la mesure de l'erreur, on calcule l'intégrale de l'erreur absolue IEA comme suite :

$$IEA = \int_0^\pi \left| \left| F(e^{j\omega}) \right| - |j\omega| \right| d\omega \quad (4.33)$$

Les résultats obtenus pour la transformation d'Euler fractionnaire proposée représentée par les fonctions  $F_1(z)$  ou  $F_2(z)$  et les transformations de Ngo  $F_{Ngo}(z)$  et de Pei & Hsu  $F_{Pei\&Hsu}(z)$  sont résumés dans la Table (4.1).

Table (4.1): IEA des méthodes de transformation proposées  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ , de Ngo  $F_{\text{Ngo}}(z)$  et de Pei & Hsu  $F_{\text{Pei\&Hsu}}(z)$

Méthode	$F_1(z)$	$F_2(z)$	$F_{\text{Ngo}}(z)$	$F_{\text{Pei\&Hsu}}(z)$
IEA	0,0278	0,0432	0,0732	0,1170

Les résultats de la table (4.1) montrent que la transformation d'Euler fractionnaire proposée est plus performante que celles proposées par Ngo [80] et Pei & Hsu [40]. Par conséquent, on peut dire que la transformation d'Euler fractionnaire proposée, avec un degré de complexité au plus égal, est mieux que les deux autres méthodes de transformation de Ngo  $F_{\text{Ngo}}(z)$  et de Pei & Hsu  $F_{\text{Pei\&Hsu}}(z)$ .

### 4.3 Conception du filtre peigne

#### 4.3.1 Introduction [35]

Dans plusieurs applications du traitement du signal il est nécessaire d'enlever des harmoniques d'interférence d'un signal à large bande sans le changer. Par exemple, la principale source d'interférence dans le signal électrocardiographique (ECG) est le secteur avec une fréquence fondamentale de 50 ou 60 Hz. Dans ce cas, le signal à traiter est généralement donné sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(n) &= s(n) + \sum_{k=0}^M A_k \sin(k\omega_0 n + \phi_k) \\ &= s(n) + I(n) \end{aligned} \quad (4.34)$$

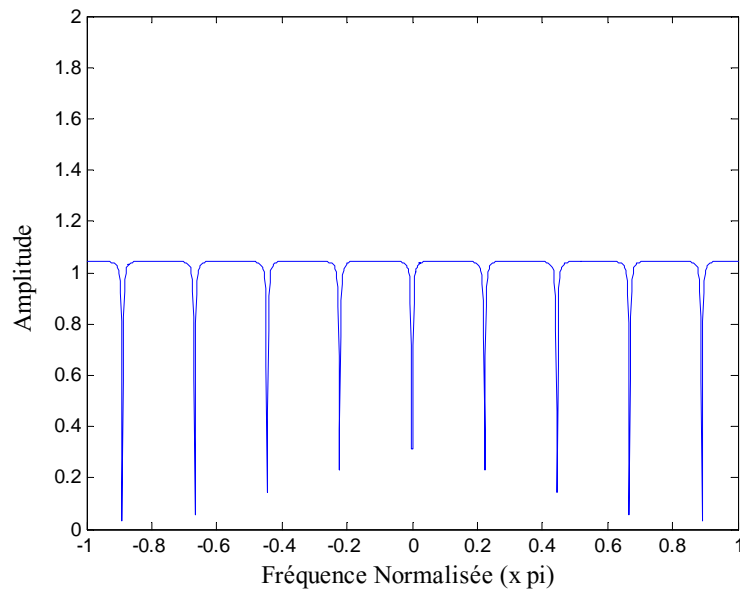
où  $s(n)$  est le signal désiré et  $I(n)$  est le signal des harmoniques de l'interférence de fréquence fondamentale  $\omega_0$ . La méthode d'extraction du signal  $s(n)$  à partir du signal corrompu  $x(n)$  sans distorsion est le filtrage de  $x(n)$  par un filtre numérique dit filtre peigne idéal défini par :

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = k\omega_0 \text{ pour } k = 0, 1, \dots, M \\ 1, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.35)$$

avec  $M$  est généralement choisi comme la partie entière de la valeur de  $(\pi/\omega_0)$ . La fonction de transfert numérique qui approxime  $H(\omega)$  aussi bien que possible est donnée par [35]:

$$H_C(z) = \frac{1 - z^{-D}}{1 - \rho^{-D} z^{-D}} \quad (4.36)$$

où  $D = (2\pi/\omega_0)$  est la longueur du retard (en échantillon) et  $0 < \rho < 1$  est le facteur de gain appliqué au signal retardé. La réponse en fréquence de l'amplitude du filtre peigne est représentée dans la figure (4.13) pour  $\omega_0 = 0.2225\pi$  et  $\rho = 0.99$ .



**Figure (4.13) :** La réponse en fréquence de l'amplitude du filtre peigne

Comme le montre la figure (4.13), le filtre peigne se présente sous la forme de pics régulièrement espacés, d'où la nomination de filtre peigne. L'espacement des pics et la largeur du filtre dépend de la fréquence  $\omega_0$  et donc du retard  $D$ .

### 4.3.2 Conception du filtre peigne

Le but de cette section est d'approximer le filtre peigne par un filtre numérique RII en se basant sur les approximations du retard numérique d'ordre fractionnaire proposées dans les chapitres précédents. Le retard  $D$  peut s'écrire sous la forme :

$$D = d + m \quad (4.37)$$

où  $d$  est la partie entière du retard et  $m$  est la partie fractionnaire du retard tel que  $0 < m < 1$ . Ainsi, le retard fractionnaire  $z^{-D}$  pour  $D > 1$  peut être implémenté comme suit :

$$z^{-D} = (z^{-d})(z^{-m}) \quad (4.38)$$

Les trois filtres numériques proposés pour la conception du retard numérique d'ordre fractionnaire  $z^{-m}$  obtenus par discrétisation d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant les



fonctions génératrices la transformation Avant, la transformation d'Euler et la transformation bilinéaire ou de Tustin sont donnés à partir des équations (3.26), (3.33) et (3.36) comme:

$$D_F(z) = z^{-m} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)} \quad \text{avec} \quad \bar{p}_i = T p_0(ab)^i - 1 \quad \text{et} \quad \bar{k}_i = k_i T p_0(ab)^i \quad (4.39)$$

$$D_T(z) = z^{\frac{m}{2}} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i(z+1)}{(z + \bar{p}_i)} \quad \text{avec} \quad \bar{p}_i = \frac{\left(1 - \frac{2}{T p_0(ab)^i}\right)}{\left(1 + \frac{2}{T p_0(ab)^i}\right)} \quad \text{et} \quad \bar{k}_i = \frac{k_i}{\left(\frac{2}{T p_0(ab)^i} + 1\right)} \quad (4.40)$$

$$D_E(z) = z^{-m} = \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i z}{\left(z - \frac{1}{\bar{p}_i}\right)} \quad \text{avec} \quad \bar{p}_i = T p_0(ab)^i + 1 \quad \text{et} \quad \bar{k}_i = \frac{k_i T p_0(ab)^i}{\bar{p}_i} \quad (4.41)$$

Ces différents filtres RII vont être utilisés pour approximer le filtre peigne de l'équation (4.36) par des filtre numérique RII comme suit :

-En utilisant  $D_F(z)$  de (4.39)

$$H_C(z) \cong H_C^F(z) = \frac{1 - z^{-d} \left[ \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)} \right]}{1 - z^{-d} \left[ \rho^{-D} \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i}{(z + \bar{p}_i)} \right]} \quad (4.42)$$

-En utilisant  $D_T(z)$  de (4.40)

$$H_C(z) \cong H_C^T(z) = \frac{1 - z^{-d} \left[ \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i(z+1)}{(z + \bar{p}_i)} \right]}{1 - z^{-d} \left[ \rho^{-D} \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i(z+1)}{(z + \bar{p}_i)} \right]} \quad (4.43)$$

-En utilisant  $D_E(z)$  de (4.41)

$$H_C(z) \cong H_C^E(z) = \frac{1 - z^{-d} \left[ \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i z}{z - \frac{1}{\bar{p}_i}} \right]}{1 - z^{-d} \left[ \rho^{-D} \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i z}{z - \frac{1}{\bar{p}_i}} \right]} \quad (4.44)$$

### 4.3.3 Exemples de conception

Le premier exemple de conception du filtre peigne est obtenu en utilisant la fonction  $H_C^F(z)$  de l'équation (4.42) où l'approximation du retard numérique d'ordre fractionnaire  $z^{-m}$ ,  $0 < m < 1$ , par un filtre numérique RII est faite en utilisant la transformation Avant. Donc, pour  $\omega_0 = 0.2225\pi$  le retard  $D$  est  $D = (2\pi/\omega_0) = 8,9888$  et pour  $\rho = 0.99$ , la fonction de transfert  $H_C(z)$  du filtre peigne est donnée par :

$$H_C(z) = \frac{1 - z^{-8.9888}}{1 - (.99)^{-8.9888} z^{-8.9888}} = \frac{1 - z^{-8} z^{-0.9888}}{1 - (.99)^{-8.9888} z^{-8} z^{-0.9888}}$$

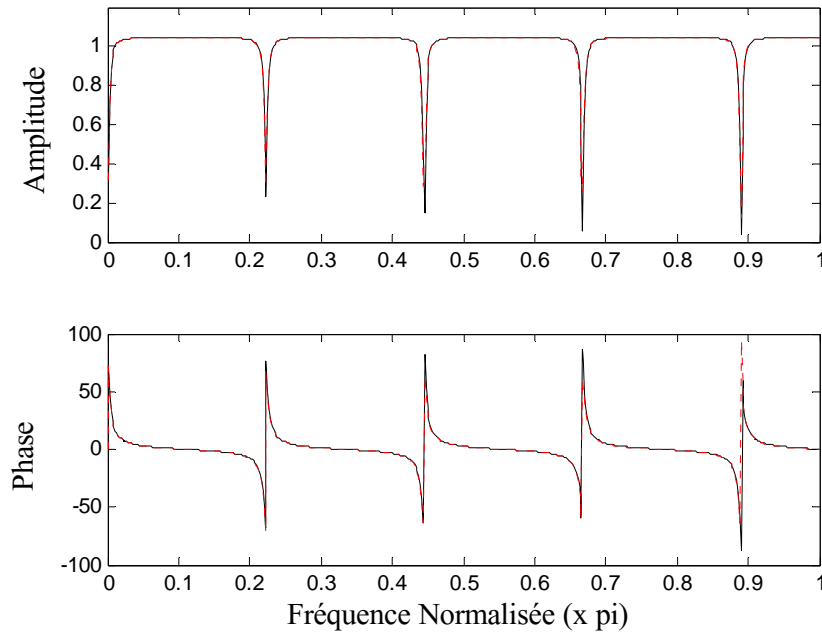
$$H_C(z) \cong H_C^F(z) = \frac{1 - z^{-8} \left[ \sum_{i=0}^2 \frac{\bar{k}_i}{z + \bar{p}_i} \right]}{1 - z^{-8} \left[ (.99)^{8.9888} \sum_{i=0}^2 \frac{\bar{k}_i}{z + \bar{p}_i} \right]}$$

Pour une erreur d'approximation du PPF  $y = 0.015$  et une période d'échantillonnage  $T = 1s$ , les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $N$ , les pôles  $\bar{p}_i$  et les résidus  $\bar{k}_i$  sont obtenus comme :

$$a = 1.3612 \quad , \quad b = 1.0035 \quad , \quad p_0 = 30.2187 \text{ rad/s} \quad , \quad N = 2$$

$$\bar{p}_i = 0.9917 (1.3660)^i - 1 \quad \text{et} \quad \bar{k}_i = 0.9917 (1.3660)^i \frac{\prod_{j=0}^1 \left[ 1 - \frac{(1.3660)^{i-j}}{1.3612} \right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \left[ 1 - (1.3660)^{i-j} \right]}$$

Figure (4.14) montre les réponses en fréquence d'amplitude et de phase du filtre peigne idéal  $H_C(z)$  et son approximation par un filtre numérique RII  $H_C^F(z)$ .



**Figure (4.14) :** Les réponses en fréquence du filtre peigne idéal  $H_C(z)$  (trait plein) et de son approximation par un filtre numérique RII  $H_C^F(z)$  (trait discontinu)

De cette figure, on peut facilement voir que les réponses en fréquence du filtre peigne idéal  $H_C(z)$  et du filtre numérique RII  $H_C^F(z)$  sont superposées.

Comme second exemple, on a considéré l'approximation du filtre peigne  $H_C(z)$  par le filtre  $H_C^T(z)$  de l'équation (4.43) où l'approximation du retard numérique d'ordre fractionnaire  $z^{-m}$ ,  $0 < m < 0.5$ , par un filtre numérique RII est obtenue par la transformation bilinéaire. Pour le but d'illustration on a pris  $\omega_0 = 0.2217\pi$ , alors le retard  $D$  est  $D = (2\pi/\omega_0) = 9.0212$  et  $\rho = 0.99$ , la fonction de transfert  $H_C(z)$  du filtre peigne est donnée par :

$$H_C(z) = \frac{1 - z^{-9.0212}}{1 - (.99)^{-9.0212} z^{-9.0212}} = \frac{1 - z^{-9} z^{-0.0212}}{1 - (.99)^{-9.0212} z^{-9} z^{-0.0212}}$$

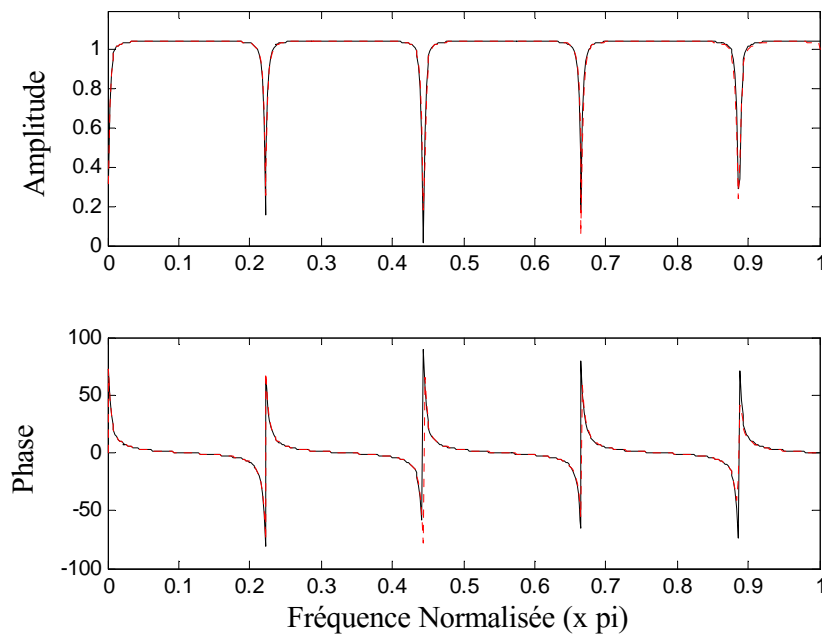
$$H_C(z) \cong H_C^T(z) = \frac{1 - z^{-9} \left[ \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i (z+1)}{(z + \bar{p}_i)} \right]}{1 - z^{-9} \left[ (.99)^{-9.0212} \sum_{i=0}^N \frac{\bar{k}_i (z+1)}{(z + \bar{p}_i)} \right]}$$

Pour une erreur d'approximation du PPF  $y = 1\text{dB}$  et une période d'échantillonnage  $T = 1\text{s}$ , les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $N$ , les pôles  $\bar{p}_i$  et les résidus  $\bar{k}_i$  sont obtenus comme :

$$a = 1.2718 \quad , \quad b = 228.2919 \quad , \quad p_0 = 30.2187 \text{ rad/s} \quad , \quad N = 1$$

$$\bar{p}_i = \frac{\left( \frac{2}{30.2187 (290.3476)^i} - 1 \right)}{\left( \frac{2}{30.2187 (290.3476)^i} + 1 \right)} \quad \text{et} \quad \bar{k}_i = \frac{1}{\left( \frac{2}{30.2187 (290.3476)^i} + 1 \right)} \frac{\left[ 1 - \frac{(290.3476)^i}{1.2718} \right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^1 \left[ 1 - (290.3476)^j \right]}$$

Figure (4.15) montre les réponses en fréquence d'amplitude et de phase du filtre peigne idéal  $H_C(z)$  et son approximation par un filtre numérique RII  $H_C^T(z)$ .



**Figure (4.15) :** Les réponses en fréquence du filtre peigne idéal  $H_C(z)$  (trait plein) et de son approximation par un filtre numérique RII  $H_C^T(z)$  (trait discontinu)

La superposition des deux réponses en fréquence, dans la Figure (4.15), montre l'exactitude de la méthode d'approximation.

Le troisième exemple concerne la conception numérique du filtre peigne  $H_C(z)$  en utilisant la fonction  $H_C^E(z)$  de l'équation (4.44) où l'approximation de  $z^{-m}$ ,  $0 < m < 1$ , par un filtre numérique RII est faite en utilisant la transformation d'Euler. Donc, pour  $\omega_0 = 0.221\pi$ , le retard  $D$  est  $D = (2\pi/\omega_0) = 9.05$  et pour  $\rho = 0.99$ , la fonction de transfert  $H_C(z)$  du filtre peigne est donnée par :

$$H_C(z) = \frac{1 - z^{-9.05}}{1 - (.99)^{-9.05} z^{-9.05}} = \frac{1 - z^{-9} z^{-0.05}}{1 - (.99)^{-9.05} z^{-9} z^{-0.05}}$$

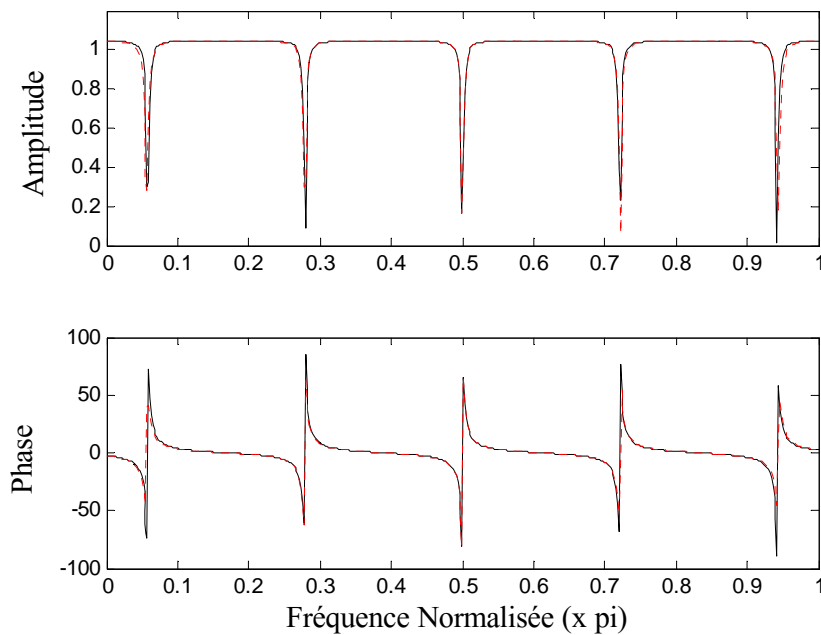
$$H_C(z) \cong H_C^E(z) = \frac{1 - z^{-9} \left[ \sum_{i=0}^1 \frac{\bar{k}_i z}{\left( z - \frac{1}{\bar{p}_i} \right)} \right]}{1 - z^{-9} \left[ (.99)^{9.05} \sum_{i=0}^1 \frac{\bar{k}_i z}{\left( z - \frac{1}{\bar{p}_i} \right)} \right]}$$

Pour une erreur d'approximation du PPF  $y = 1$  dB et une période d'échantillonnage  $T = 1$ s, les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $N$ , les pôles  $\bar{p}_i$  et les résidus  $\bar{k}_i$  sont obtenus comme :

$$a = 1.2743 \quad , \quad b = 100 \quad , \quad p_0 = 10 \text{ rad/s} \quad , \quad N = 1$$

$$\bar{p}_i = 10 (127.43)^i + 1 \quad \text{et} \quad \bar{k}_i = \frac{10 (127.43)^i \left[ 1 - \frac{(127.43)^{i-j}}{1.2743} \right]}{\bar{p}_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^1 [1 - (127.43)^{i-j}]}$$

Figure (4.16) montre les réponses en fréquence d'amplitude et de phase du filtre peigne idéal  $H_C(z)$  et son approximation par un filtre numérique RII  $H_C^E(z)$ .



**Figure (4.16) :** Les réponses en fréquence du filtre peigne idéal  $H_C(z)$  (trait plein) et de son approximation par un filtre numérique RII  $H_C^E(z)$  (trait discontinu)

Les réponses en fréquence représentées en Figure (4.16) montrent que le filtre numérique RII  $H_C^E(z)$  est une très bonne approximation du filtre peigne idéal  $H_C(z)$ .

En conclusion, ces simulations valident l'efficacité de la méthode de conception du retard numérique d'ordre fractionnaire dans la réalisation des systèmes numériques.

#### 4.4. Conclusion

L'objectif de ce chapitre est la validation des méthodes d'approximation du retard numérique d'ordre fractionnaire dans la réalisation des systèmes numériques.

Dans la première partie de ce chapitre, une nouvelle technique de transformation du domaine analogique au domaine discret basée sur le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) dite transformation d'Euler d'ordre fractionnaire a été proposée. Elle est similaire à la transformation d'Euler ordinaire, où l'opérateur de retard numérique  $z^{-1}$  est remplacé par l'opérateur de retard fractionnaire numérique  $z^{-m}$ . La conception de cette transformation d'Euler d'ordre fractionnaire a été obtenue en utilisant l'implémentation par un filtre numérique RII du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale. Les simulations réalisées ont montrés une nette amélioration de la transformation analogique-numérique proposée dans les hautes fréquences par rapport à la transformée d'Euler classique. Des comparaisons avec des méthodes très récentes dans la littérature ont été aussi faites et les résultats obtenus étaient très satisfaisants. Les implémentations numériques du retard d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) proposées ont été utilisés, par la suite, dans la conception d'un filtre peigne numérique RII. Des simulations ont été faites et les résultats obtenus ont été excellents.

# *Conclusion Générale*

---

1. Conclusion .....	117
2. Perspectives et suggestions .....	118

---

## 1. Conclusion

L'objectif de ce travail porte essentiellement sur le développement de techniques d'implémentation du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , ainsi que son application. À cause de sa représentation par une fonction irrationnelle, le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , ne peut pas être exactement implémenté, seulement une implémentation limitée peut être accomplie en utilisant les techniques d'approximation. Plusieurs techniques de conception ont été proposées pour l'approximation du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal par des filtres numériques. Mais la majorité de ces techniques de conception conduisent à des filtres numériques RIF et à des filtres numériques RII passe-tout ou à phase non minimale. Ces raisons nous ont motivés pour proposer de nouvelles méthodes d'implémentation numérique du retard idéale  $z^{-m}$  en utilisant des filtres numérique RII stables, causales et à phase minimale.

Alors, notre contribution a porté sur l'application des concepts des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire dans la conception et l'implémentation du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) par des filtres RII stables, causales et à phase minimale ; ainsi que son analyse et applications dans certains types de systèmes numériques. Dans la première partie de notre contribution, on a démontré que pour des conditions bien précises l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , peut être obtenu par discrétisation d'un système d'ordre fractionnaire analogique en utilisant les fonctions génératrices suivantes :

- la transformation Avant.
- la transformation d'Euler.
- la transformation bilinéaire ou de Tustin.

Donc, trois différentes implémentations de l'opérateur de retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$  pour  $0 < m < 1$ , par des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie (RII) ont été obtenues par discrétisation de la fonction rationnelle analogique approximant la fonction de transfert irrationnelle analogique du système d'ordre fractionnaire, en utilisant les fonctions génératrices précédentes. Pour justifier l'efficacité et la précision des méthodes proposées pour concevoir un filtre numérique RII stable, causale et à phase minimale approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$ , pour  $0 < m < 1$ , des simulations et des comparaisons avec deux méthodes très récentes ont été faites et les résultats obtenus ont été très satisfaisants.



Dans la seconde partie de notre contribution, en premier lieu, une technique de transformation du domaine analogique au domaine discret basée sur le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) dite transformation d'Euler d'ordre fractionnaire a été proposée. La conception de cette transformation a été obtenue en utilisant l'implémentation par un filtre numérique RII du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal. Les simulations réalisées ont montrés une nette amélioration de la transformation analogique/numérique proposée dans les hautes fréquences par rapport à la transformée d'Euler classique. Des comparaisons avec des méthodes très récentes dans la littérature ont été aussi faites et les résultats obtenus étaient très satisfaisants. Ensuite, les implémentations numériques du retard d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) proposées ont été utilisés dans la conception d'un filtre peigne numérique RII. Des simulations ont été faites et les résultats obtenus ont été excellents.

## 2. Perspectives et suggestions

Dans la continuité des travaux de cette thèse, les perspectives et les suggestions des travaux de recherche que l'on peut envisager sont cités au dessous comme:

- Amélioration des techniques d'approximation proposées par optimisation des erreurs entre le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) et son implémentation par des filtres numériques RII.
- Extension des résultats obtenus pour l'implémentation du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) par des filtres numériques RIF.
- Applications des résultats obtenus dans d'autres systèmes numériques contenant des retards numériques d'ordre fractionnaire idéal.
- Extension des travaux à l'implémentation numérique du retard numérique idéal  $z^{-m}$  d'ordre fractionnaire variable pour  $0 < m < 1$ .
- Extension des résultats obtenus pour l'implémentation de l'avance numérique d'ordre fractionnaire idéal  $z^m$  ( $0 < m < 1$ ) par des filtres numériques RII.

## *Références*

---

- [1] A. Oustaloup, “ La commande CRONE, ” Edition Hermès, Paris, 1991
- [2] R. Hilfer, (Ed) , “ Applications of calculus in physics, ” World Scientific, Singapore, 2000
- [3] I. Petras, I. Podlubny, P. O’Leary, L. Dorcak, and B. M. Vinagre, “ Analogue Realization of Fractional Order Controllers, ” Fakulta Berg , TU Kosice, 2002
- [4] R.L. Magin, “ Fractional calculus in bioengineering, ” Begell House, Redding, CT, USA, 2006.
- [5] J. Sabatier, et al. (eds.) , “ Advances in Fractional Calculus: Theoretical Development and Applications in Physics and Engineering, ” Springer, the Netherlands, 2007
- [6] S. Das, “ Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, ” Springer, New York, 2008
- [7] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, “ Fractional-Order Systems and Controls Fundamentals and Applications, ” Springer-Verlag, England, UK, 2010
- [8] M. Ichise, Y. Nagayanagi, and T. Kojima, “ An Analog Simulation of Non-Integer Order Transfer Functions for Analysis of Electrode Processes”, J. Electro anal. Chem., Vol.33, 1971, pp. 253-256.
- [9] H. H. Sun, and B. Onaral, “ A Unified Approach to Represent Metal Electrode Polarization”, IEEE Trans. Biomed. Eng, Vol.30, 1983, pp. 399-406.
- [10] P. J. Torvik, and R. L. Bagley, “ On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials”, ASME Journal of Applied Mech., Vol.51, 1984, pp. 294-298.
- [11] T. Hartley, C. F. Lorenzo, H. K. Qammer, “Chaos in a fractional order Chua system”, IEEE Transactions on Circuit & Systems – I: Fundamental Theory & Applications, Vol. 42, N° 8, 1995, pp. 485-90.
- [12] Y. Ferdi, J. P. Herbeuval, A. Charef, B. Boucheham, “ R wave detection using fractional digital differentiation ”, ITBM-RBM Innovation et Technologie en Biologie et Médecine, Vol. 24, N° 5, 2003, pp. 273-280.
- [13] A. Charef, “ Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation”, Nonlinear Dynamics, Vol. 46, 2006, pp. 195-210.
- [14] Y. Ferdi, J. P. Herbeuval, and A. Charef, “ Variance reduction of prediction error using fractional digital differentiation: application to ECG signal processing”, Proceeding of the 23<sup>rd</sup> IEEE/EMBS Annual Conf., Istanbul, Turkey, 2001, pp. 25-28.

- [15] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, and Ch. Ceyral, “ Fractional differentiation for edge detection,” *Signal Processing* , Vol.83, 2003, pp. 2421-2432.
- [16] A. Goutas, Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, M. Boudraa, and B. Boucheham, “ Digital fractional order differentiation-based algorithm for P and T-waves detection and delineation,” *ITBM-RBM* , Vol.26, 2005,pp.127-132.
- [17] D. Sierociuk, and A. Dzielinski, “ Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation,” *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci*, Vol.16, N° 1, 2006, pp. 129-140.
- [18] M. Benmalek and A. Charef, “ Digital fractional ordre operators for R-wave detection in ECG signal”, *IET proceedings on Signal Processing*, 2009, Vol. 3, N° 5, pp. 381-391.
- [19] I. Podlubny, “ Fractional Order Systems and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Controllers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, N°1, 1999, pp. 208-214.
- [20] I. Petras, B.M. Vinagre. “ Practical Application of Digital Fractional-Order Controller to Temperature Control,” *Acta Montanistica Slovaca*, Vol.7, N° 2, 2002, pp. 131-137.
- [21] A. Djouambi, A. Charef and T. Bouktir, “ Fractional Order Robust Control and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Controllers,” *wseas transactions on circuits and systems*, Vol.4, N°8, 2005, pp. 850-857.
- [22] S. Ladaci and A. Charef, “ On Fractional Adaptive Control,” *Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 43, N° 4, pp. 365-378.
- [23] C.A. Monje, B.M. Vinagre, V. Feliu, Y.Q. Chen, “ Tuning and Autotuning of Fractional Order Controllers for Industry Applications,” *Control Engineering Practice* Vol.16, 2008, pp. 798-812.
- [24] C. C. Tseng, “ Design of fractional order digital FIR differentiators,” *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 8, N°3, 2001, pp. 77-79.
- [25] Y. Q. Chen and K. L. Moore, “ Discrete schemes for fractional-order differentiators and integrators,” *IEEE Trans. Circuits and Systems-I*, Vol. 49, N°3, 2002, pp. 363-367.
- [26] Y.Q. Chen and B.M. Vinagre, “A new IIR-type digital fractional order differentiator,” *Signal Processing*, Vol. 83, N°11, 2003, pp. 2359-2365.
- [27] Y. Q. Chen, B. M. Vinagre and I. Podlubny, “ Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives-an expository review,” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 38, N°(1-2), 2004, pp. 155–170.

- [28] Y. Ferdi, “ Computation of Fractional Order Derivative and Integral via Power Series Expansion and Signal Modelling,” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 46, N°(1-2), 2006, pp. 1-15.
- [29] C. C. Tseng, “ Design of FIR and IIR fractional order Simpson digital integrators,” *Signal Processing*, Vol. 87, N° 5, May. 2007, pp. 1045-1057.
- [30] K. Hamdaoui and A. Charef, “ A New Discretization Method for Fractional Order Differentiators via Bilinear Transformation,” *Proc. 15th Int. Conference on Digital Signal Processing*, Cardiff, UK, July 1-4, 2007, pp. 280-283.
- [31] R. E. Crochiere, L. R. Rabiner and R. R. Shively, “A novel implementation of digital phase shifters,” *BellSyst. Tech.J.*, Vol.54, No.8, Oct. 1975, pp.1497-1502
- [32] T. I. Laakso, V. Valimaki, M. Karjalainen and U.K. Laine, “ Splitting the unit delay: tool for fractional delay filter design,” *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol.13, N° 1, Jan. 1996, pp. 30-60.
- [33] P. Murphy, A. Krukowski and A. Tarczynski, “ An efficient fractional sampler delayer for digital beam steering,” *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'97*, Munich, Germany , 21-24 April, 1997, pp. 2245-2248.
- [34] A.J.R.M. Coenen, “ Novel generalized optimal fractional delay filter design for navigational purposes,” *Proceedings of the 9th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, Boston, MA, USA, 8-11 Sep, 1998, pp. 481-485.
- [35] S. C. Pei and C. C. Tseng, “ A comb filter design using fractional sample delay,” *IEEE Trans. Circuits Systems II, Analog Digital Signal Processing*, Vol. 45, June 1998, pp. 649-653.
- [36] J. Vesma and T. Saramiki, “ Interpolation filters with arbitrary frequency response for all-digital receivers,” in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, Atlanta, GA, May 12-15, 1996, pp. 568-571.
- [37] M. Olsson, H. Johansson and P. Lowenborg, “ Delay Estimation Using Adjustable Fractional Delay All-Pass Filters,” *Proceedings of the 7th Nordic Signal Processing Symposium, NORSIG 2006*, Reykjavik, Iceland, June 2006, pp. 346-349.
- [38] M. Wang, S. Yang and S. Wu, “ Beamforming of UWB pulse array and its implementation,” *Digital Signal Processing*, Vol. 16, N° 4, 2006, pp. 333-342.

- [39] V. Välimäki, H-M. Lehtonen and T. I. Laakso, “ Musical signal analysis using fractional delay inverse comb filters,” Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Digital Audio Effects, Bordeaux, France, 10-15 Sep 2007, pp 261-268.
- [40] S. C. Pei, H. J. Hsu, “ Fractional Bilinear transform for Analog-to-Digital Conversion, IEEE Trans. on Signal processing,” Vol. 56, N°5, 2008, pp .2122-2127.
- [41] S.C. Pei, P.H. Wang and H.S. Lin, “ Closed-form design of maximally flat FIR fractional delay filter,” IEEE Signal Processing Letters, Vol.13, 2006, pp 405-408.
- [42] V. Valimaki and A. Haghparast, “ Fractional delay filter design based on truncated Lagrange interpolation,” IEEE Signal Processing Letters, Vol. 14, 2007, pp 816-819.
- [43] C. C. Tseng, “ Designs of fractional delay filter, Nyquist filter, lowpass filter and diamond-shaped filter,” Signal Processing, Vol. 87, 2007, pp 584-601.
- [44] J.T. Olkkonen and H. Olkkonen, “ Fractional delay filter based on the B-spline transform,” IEEE Signal Processing Letters, Vol. 14, N° 2, 2007, pp 97-100.
- [45] M. Mahdian Jayani Yekta, “ Fast design of relatively wide band fractional delay all-pass filters,” Signal Processing, Vol. 88, N° 3, 2008, pp 612-623.
- [46] C. C. Tseng and S. L. Lee, “Design of fractional delay FIR filter using discrete Fourier transform interpolation method,” IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS 2008, Seattle, Washington, USA, 18-21 May, 2008, pp 1156-1159.
- [47] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications, 3<sup>rd</sup> edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [48] M.D. Ortigueira, C. Matos, and M.S. Piedade, Fractional Discrete-Time Signal Processing: Scale Conversion and Linear Prediction,” Nonlinear Dynamics, vol. 29, 2002, pp. 173–190
- [49] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral. Fractal system as represented by singularity function. IEEE Trans. On Automatic Control, vol.37, N° 9, 1992, pp.1465-1470.
- [50] C.H. Lubich, “ Discretized fractional calculus,” SIAM Journal of Mathematical Analysis, vol.17, N° 9, 1986, pp.704-719.
- [51] B.M. Vinagre, Y.Q. Chen, and I. Petráš, “ Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator,” Journal of the Franklin Institute, vol.340, 2003 pp. 349-362.
- [52] K. Ogata, “ Discrete-time control systems,” Prentice Hall, Englewood, Cliffs, USA, 1987.

- [53] M.A. Al-Alaoui, “ Novel digital integrator and differentiator,” *Electronics Letters*, Vol.29, No.4, 1993, pp. 376-378.
- [54] **T. Bensouici** and A. Charef, “ Design of fractional order digital FIR integrator and differentiator,” *Proc. de la 1<sup>ère</sup> Conférence Internationale en Génie Electrique, CIGET’09, Tébessa, Algérie, 25-26 Octobre, 2009.*
- [55] A. Charef, and **T. Bensouici**, “ Design of Digital FIR Variable Fractional Order Integrator and Differentiator,” to appear in the *Signal Image and Video Processing Journal*
- [56] A. M. De Paor, and M.J. O’Malley, “ The zero-order hold equivalent transfer function for a time-delayed process,” *International Journal of Control*, Vol. 61, No.3, 1995, pp. 657-665.
- [57] E. I. Jury, “ Theory and application of the Z-Transform Method,” Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, New York, 1973.
- [58] W.S. Lu and T.B. Deng, “ An improved weighted least-squares design for variable fractional delay FIR filters,” *IEEE Trans. on Circuits and Systems-II*, Vol. 46, 1999, pp. 1035-1040.
- [59] C.C. Tseng, “ Design of 1-D and 2-D variable fractional delay allpass filters using weighted least-squares method,” *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I*, Vol. 49, 2002, pp. 1413-1422.
- [60] S. C. Pei and C. C. Tseng, “ An efficient Design of a variable fractional delay filter using a first order differentiator,” *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 10, N° 10, 2003, pp. 307-310.
- [61] T. B. Deng and Y. Lian, “ Weighted-least-squares design of variable fractional-delay FIR filters using coefficient symmetry,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 54, 2006, pp 3023-3038.
- [62] H. Zhao and H. K. Kwan, “ Design of 1-D stable variable fractional delay IIR filters,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems – II: Express Briefs*, Vol. 54, N° 1, 2007, pp. 86-90
- [63] J-C. Liu and S-J. You, “ Weighted least squares near-equiripple approximation of variable fractional delay FIR filters,” *IET Signal Processing*, Vol. 1, N° 2, 2007, pp. 66-72.

- [64] K. M. Tsui, S. C. Chan and H. K. Kwan, “ A new Method for designing causal stable IIR variable fractional delay digital filters,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems – II: Express Briefs*, Vol. 54, N° 11, 2007, pp. 999-1003
- [65] J. J. Shyu and S. C. Pei, “ A generalized approach to the design of variable fractional delay FIR digital Filters,” *Signal Processing*, Vol 88, N° 6, 2008, pp. 1428-1435.
- [66] R. E. Crochiere, and K. R. Rabiner, “ *Multirate Digital Signal Processing*,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983
- [67] G. D. Cain, N. P. Murphy, and A. Tarczynski, “ Evaluation of several FIR fractional-sample delay filters,” *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing (ICASSP’94)*, Adelaide, Australia, Vol. 3, April 19–22, 1994, pp. 621-624.
- [68] G. D. Cain, A. Yardim, and P. Henry, “ Offset windowing for FIR fractional-sample delay. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP’95)*, Detroit, Michigan, Vol. 2, May 9–12, 1995, pp. 1276-1279.
- [69] V. Välimäki, “ *Discrete-Time Modeling of Acoustic Tubes Using Fractional Delay Filters*,” Dissertation for the degree of Doctor, Helsinki, Finland, 1995
- [70] J.P. Thiran, “ Recursive digital filters with maximally flat group delay,” *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. 8, N° 6, 1971, pp. 659-664.
- [71] J. N. Mourjopoulos, E. D. Kyriakis-Bitzaros, and C. E. Goutis, “ Theory and real-time implementation of time-varying digital audio filters,” *Journal of Audio Engineering Society*, Vol. 38, 7-8, 1990, pp. 523-536.
- [72] R. Ranbenstein, “ Minimization of transient signal in recursive time-varying digital filters,” *Circuits, Systems and Signal Processing*, Vol. 7, N° 3, 1988 , pp. 345-359
- [73] L. H. Zetterberg, and Q. Zhang, “ Elimination of transients in adaptative filters with application to speech coding,” *Signal Processing*, Vol. 15, N° 4, 1988, pp. 419-428.
- [74] S. C. Pei and P. H. Wang, “ Closed-form Design of All-Pass Fractional Delay Filters,” *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, N°10, 2004, pp. 788-791.
- [75] X. Zhang, “ Maxflat Fractional Delay IIR Filter Design,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, N°8, 2009, pp. 2950-2956.
- [76] A. Charef, **T. Bensouici**,” *Digital Fractional Delay Implementation Based On Fractional Order System*,” *IET Proceedings on Signal Processing*, Vol. 5, N° 6, 2011, pp 547-556



- [77] **T. Bensouici**, A. Charef and F. Abdelliche, “ Digital IIR Filter Approximation of the Fractional Delay Operator,” 7th IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD'2010) , Amman, Jordan, June 27-29, 2010
- [78] **T. Bensouici**, A. Charef, “ Implementation of the Digital Fractional Delay Operator using Digital IIR filter Via Fractional Order System Approximation,” 1ère conf. national sur les systèmes d’ordre fractionnaire et leurs Applications, SOFA’10, Skikda, Algérie, 18-19 Mai, 2010
- [79] **T. Bensouici**, A. Charef, “Digital IIR Fractional Delay Filter Used in Analog-to-Digital Conversion,” 4th IFAC workshop on fractional differentiation and its applications (FDA’10), Badajoz, Spain, October 18-20, 2010
- [80] N. Q. Ngo, A new approach for the design of wideband digital integrator and differentiator, IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs, Vol.53, N° 9, 2006, pp 936-940

## Résumé

Dans les dernières décennies, le concept du retard numérique d'ordre fractionnaire a été trouvé utile dans plusieurs problèmes pratiques dans différents domaines de l'ingénierie. La fonction de transfert de ce retard numérique d'ordre fractionnaire idéale est donnée par :

$$D(z) = z^{-m} \quad , \quad \text{avec } 0 < m < 1$$

A cause de sa représentation par une fonction irrationnelle, le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal ne peut pas être exactement implémenté, seulement une implémentation limitée peut être accomplie en utilisant les méthodes d'approximation.

Dans cette thèse des méthodes de conception de filtres numériques RII stable, causale et à phase minimale, en se basant sur les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire, approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire idéale  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) sont présentées. Des exemples illustratifs et des applications ont été présentés pour démontrer l'efficacité et l'exactitude des méthodes de conception du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale proposées. Les résultats des simulations obtenus ont été discutés et comparés avec des méthodes d'implémentation du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale très récentes dans la littérature.

### Mots Clés :

Approximation de Charef, Filtre numérique RII, Pôle à puissance fractionnaire, Retard numérique d'ordre fractionnaire, Transformation analogique numérique

## **Abstract**

In the recent years, the fractional order digital delay concept has been found to be useful in several practical problems in different fields of engineering. The transfer function of this ideal fractional order digital delay is given by:

$$D(z) = z^{-m}, \text{ with } 0 < m < 1$$

Because of its representation by an irrational transfer function, the ideal fractional order digital delay cannot be exactly implemented; only a limited implementation may be accomplished using approximation methods.

In this thesis design methods of stable, causal and minimum phase digital IIR filter, based on fractional order systems and operators, approximating the ideal fractional order digital delay  $z^{-m}$  ( $0 < m < 1$ ) are presented. Illustrative examples and applications have been presented to demonstrate the effectiveness and the exactitude of the proposed fractional delay digital filter design methods. The simulation results obtained have been discussed and compared to the most recent implementation methods of the ideal fractional order delay in the literature.

### **Key Words:**

Analog to digital transform, Charef's approximation, Fractional order digital delay, Fractional power pole, IIR digital filter

## ملخص

لوحظ في العقود الأخيرة أن مفهوم التأخير الرقمي ذو الدرجة الناطقة مفيد في العديد من المسائل التطبيقية في مختلف مجالات الهندسة. دالة التحويل لهذا التأخير الرقمي المثالي ذو الدرجة الناطقة تكون كما يلي:

$$D(z) = z^{-m} \quad , \quad 0 < m < 1$$

لأن هذا التأخير الرقمي المثالي ذو الدرجة الناطقة يمثل بواسطة دالة تحويل غير منطقة، لذلك لا يمكن إنجازه علي نحو دقيق، بل إنشاء محدود فقط يمكن إنجازه باستخدام الطرق التقريبية.

في هذه الأطروحة قمنا بعرض طرق لتصميم مرشحات IIR رقمية مستقرة، سببية و ذات طور ذي الحد الأدنى، وذلك بالاستناد إلى أنظمة وعوامل ذات درجة ناطقة تقرب التأخير الرقمي المثالي ذو الدرجة الناطقة ( $0 < m < 1$ ).

و لقد قدمنا أمثلة توضيحية و تطبيقات للتدليل على فعالية ودقة الأساليب المقترحة لتصميم التأخير الرقمي المثالي ذو الدرجة الناطقة. ونوقشت نتائج المحاكاة التي تم الحصول عليها ومقارنتها مع أساليب تنفيذ التأخير الرقمي المثالي ذو الدرجة الناطقة الموجودة في المنشير العلمية الحديثة جدا.

### كلمات المفاتيح:

مقاربة شارف، مرشح IIR الرقمي، قطب ذو درجة ناطقة، التأخير الرقمي ذو الدرجة الناطقة، التحويل التماثلي الرقمي