

---

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mentouri - Constantine  
Faculté des Sciences de L'ingénieur  
Département d'Electronique

## DOCTORAT En SCIENCE

Thème

# ELABORATION D'ALGORITHMES DE MASQUAGE POUR LES SYSTÈMES DE COMMUNICATION CHAOTIQUE

Présenté Par:

**YAHIA Moussa**

---

Soutenu le 19 avril 2012 Devant le jury composé de :

<b>Président :</b>	Mme N. MANSOURI, Professeur,	Université Mentouri-Constantine.
<b>Rapporteur :</b>	Mr M. BENSLAMA, Professeur,	Université Mentouri-Constantine.
<b>Examineurs :</b>	Mr S. FILALI, Professeur,	Université Mentouri-Constantine.
	Mr N. HAMRI, Professeur,	Centre Universitaire de MILA.
	Mr A. BOUKABOU, Maître de conférence (A),	Université de Jijel.

*L'Année Universitaire 2011/2012*

# Table des Matières

Table des matières	iii
Liste des Tableaux	v
Table des Figures	vi
Remerciements	ix
Dedicace	x
Résumé	xi
Abstract	xiii
AbsArab	xv
Introduction	1
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction	4
1.2 <i>Systèmes dynamiques</i>	5
1.2.1 <i>Notions et définitions des systèmes dynamiques</i>	5
1.2.2 <i>Espace des phases</i>	5
1.2.3 <i>Exemples</i>	6
1.2.3.1 <i>Dynamique continue : L'étrange papillon de Lorenz</i>	6
1.2.3.2 <i>Dynamique discrète : La fonction logistique</i>	6
1.2.3.3 <i>caractérisation du comportement dynamique</i>	7
1.3 Synchronisation du chaos	10
1.3.1 <i>Synchronisation identique</i>	11
1.3.2 <i>Synchronisation par filtrage de Kalman étendu</i>	14
1.4 Système à étalement de spectre	17
1.4.1 <i>Etalement de spectre par séquence directe (DS-SS)</i>	19
1.4.2 <i>Etalement de spectre par sauts de fréquence</i>	20
1.5 Transmissions à porteuses chaotiques	20
1.5.1 <i>Masquage chaotique</i>	21
1.5.2 <i>Chaos Shift Keying (CSK)</i>	22
1.5.3 <i>Etalement de spectre par séquence chaotique directe</i>	26

1.6	Conclusion	29
<b>2</b>	<b>Synchronisation du chaos en présence du bruit</b>	<b>30</b>
2.1	Introduction	30
2.1.0.1	Modèle général de Kalman	31
2.2	Estimation non-linéaire	33
2.2.1	Filtre de Kalman étendu	33
2.2.1.1	Amélioration de l'estimation par le filtre IEKF	34
2.2.2	Filtre de Kalman via la transformation Unscented	35
2.2.2.1	Transformation <b>Unscented</b> UT et Choix du sigma points :SPs	36
2.2.2.2	Méthode des Sigma point Scaling	37
2.2.2.3	Le modèle d'estimation récursive UsKF	39
2.2.3	Filtre Unscented Augmenté : HOUF	40
2.2.3.1	Etude du Filtre :2- $\sigma$ HOUF	41
2.2.3.2	Comparaison de performance du UKF et du 2- $\sigma$ HOUF	43
2.2.4	Filtres CDKF et Divided Difference Filter	44
2.2.4.1	Formule d'interpolation polynomiale de Stirling	44
2.2.4.2	Estimation de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire transformée	45
2.3	Conclusion	47
<b>3</b>	<b>Synchronisation du chaos par le filtrage de Kalman polynomial exact</b>	<b>48</b>
3.1	Introduction	48
3.2	Approximation de Chebyshev	50
3.3	Calcul des statistiques à travers la transformation polynomiale	51
3.4	Estimation non-linéaire non polynomiale	58
3.5	Evaluation des performances de l'approximation proposée	59
3.5.1	Performance en terme de transformation non-linéaire	60
3.5.2	Performance en terme de l'erreur quadratique moyenne optimale	60
3.5.2.1	Application du Filtre de Kalman à la synchronisation chaotique	61
3.6	Conclusion	62
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>64</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>66</b>

# Liste des tableaux

1.1	Classification des régimes permanent en fonction des exposants de Lyapunov. . .	10
2.1	Performances des transformations EKF et Unscented pour différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité . . . . .	39
2.2	Solutions du Filtre Unscented d'ordre supérieur . . . . .	43
2.3	Moments de la variable transformée obtenues par les algorithmes : <i>MC, UF</i> et <i>HOUF</i> . . . . .	43
3.1	Moyenne et quelques moments d'ordre supérieurs calculées pour différents instants : $mc_{ik}$ est le $i^{eme}$ order moment central à $t = k$ . . . . .	57
3.2	Performances des transformations LT, Unscented et ChApp pour différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité . . . . .	59

# Table des figures

1.1	Exemple de l'attracteur étrange de Lorenz. . . . .	7
1.2	Etude du comportement dynamique pour la fonction logistique (eq :1.4) : Bifurcations et scénarios de transition vers le chaos par doublement de période . . . . .	8
1.3	Sensibilité aux CI :Comportement de la variable x en fonction du temps t bleu : $x_o = 10, y_o = 10, z_o = 10$ rouge : $x_o = 10, y_o = 10, 01, z_o = 10$ . . . . .	9
1.4	Synchronisation des systèmes identiques selon l'approch de Pecora-Carroll . . . . .	12
1.5	Evolution des états du système maître et de l'esclave avant et après synchronisation : a) $y = X_2$ ; b) $z = X_3$ ; c) Diagramme de synchronisation pour l'état $y = X_2$ ; d) Puissance de l'erreur de synchronisation. . . . .	13
1.6	Exemple de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman étendu : a) séquence initial vs séquence estimé; b) diagramme de synchronisation; c) évolution du gain de Kalman $K_k$ ; d) évolution de la covariance des erreurs $P_k$ par rapport à la variance du bruit d'observation $R$ . . . . .	16
1.7	Modèle d'un système de communication à étalement de spectre. . . . .	18
1.8	Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence directe. . . . .	19
1.9	Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par sauts de fréquence . . . . .	20
1.10	Modulation directe du signal informationnel par une porteuse haute fréquence chaotique. . . . .	21
1.11	Modulation en bande de base du signal informationnel par le signal chaotique, combinée avec une mise sur porteuse classique. . . . .	21
1.12	Modulation par masquage chaotique. . . . .	22
1.13	Système générique de communication CSK. . . . .	23
1.14	Récepteur cohérent CSK. . . . .	23
1.15	Récepteur non cohérent CSK/COOK. . . . .	25
1.16	Récepteur non-cohérent DCSK. . . . .	26
1.17	Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence chaotique directe. . . . .	27
1.18	Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence chaotique directe. . . . .	27

1.19	Exemple d'étalement de spectre par séquence chaotique directe : a) séquence périodique sur la durée symbole; b) séquence non périodique. . . . .	28
2.1	Algorithme récursive et Equations de filtre de Kalman étendu. . . . .	34
3.1	<i>EQM/R</i> Performances of ChApp, UsKF : $x_0 \sim \mathcal{G}(0.4, 0.25)$ . $Q = \frac{R}{10}$ , $10^3$ transition iterations, (Number of samples : $N_s = 10^6$ ) . . . . .	63

# Remerciements

*Je remercie tout d'abord M<sup>me</sup>. N. Mansouri, Professeur à l'université de Constantine, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse et pour m'avoir accepté de valoriser ce travail.*

*Je tiens à remercier également les membres du jury : M. Salim- Filali, Professeur à l'université de Constantine, M. Nasr-eddine-Hamri, Professeur au CU de Mila et M. Adelkarim-Boukabou, Maître de Conférence (MCA) à l'université de Jijel, qui ont voulu accepter de valoriser ce mémoire de thèse.*

*Je tiens à témoigner ma sincère reconnaissance à M. Malek-Benslama, Professeur à l'université de Constantine qui, en tant que Directeur de thèse, s'est toujours très disponible tout au long de la réalisation de ce travail du doctorat, ainsi pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.*

*Mes remerciements s'adressent également à M<sup>me</sup>. Danièle Fournier-Prunaret, Professeur et Directrice du département de Génie Electrique et Informatique de l'INSA de Toulouse pour m'avoir accueilli au sein de Laboratoire LESIA afin d'y effectuer ma période de stages, ainsi que la confiance dont elle a fait preuve.*

*Je remercie M. Pascal-Acco, Maître de Conférence à l'INSA de Toulouse, pour les discussions qu'on a entamé ensemble sur le sujet de la recherche et dont les conseils m'ont permis de m'engager rapidement dans une voie de recherche fructueuse et enrichissante.*

*J'ai apprécié l'esprit de joyeuse solidarité qui caractérise mon lieu de travail à **Toulouse** et j'en remercie M. Abk-Taha, M. Pascal-C, mes amis Karim-B, Guillaume-F, ainsi mes collègues de travail à **Jijel** : Mosbah, Fayçal, Ammar-K, Abderrahmane, Sadat, Kamel, Ismail, Ammar-S, qui ont animé les journées au bureau et particulièrement les lecteurs Abdella, Hani et Zoubir.*

*Enfin, je ne pourrais pas oublier ma famille, qui m'a toujours soutenu, encouragé au cours de la réalisation de cette thèse. Je lui remercie de tout coeur et particulièrement mon beau père Brahim. B, mon frère Ahcen et Ma femme **Samia**.*

**YAHIA Moussa .**

# Dedicace

A mes parents.

A ma femme et mes enfants.

Vous vous êtes dépensés pour moi sans compter.

En reconnaissance de tous les sacrifices consentis par tous et chacun pour me permettre d'atteindre cette étape de ma vie. Avec toute ma tendresse.

Je dédie ce travail.

*YAHIA Moussa*



# Résumé

**N**OUS présentons dans cette thèse une contribution à l'élaboration d'un Algorithme de masquage chaotique, en se basant sur une estimation polynomiale exacte via le filtre de Kalman considéré comme un observateur non-linéaire. Cet Algorithme est très utilisé dans le domaine de la télécommunication pour la qualité de son comportement en régime transitoire, plusieurs méthode de modélisations non-linéaires ont été proposées dans la littérature, les premiers travaux de recherche sur ce sujet de synchronisation chaotique n'ont pas pris en considération le bruit (bruits dynamique et de mesure). Quelques années plus tard l'idée d'utiliser deux oscillateurs chaotiques est introduite, et par conséquent le problème de la synchronisation en présence du bruit dans la théorie des systèmes de commandes peut être vu comme l'estimation de l'état , en premier temps le filtrage de Kalman peut être appelé pour pallier à ce problème, mais il est uniquement optimale pour les systèmes linéaires, pour le cas non-linéaire la majorité des méthodes font des approximations du modèle. Chronologiquement la première approche a été le Filtre de Kalman Étendu (EKF) qui repose sur un développement en série de Taylor des équations de processus et d'observation pour calculer les approximations linéaire de la moyenne et la covariance de l'état estimé. Cette solution demeure acceptable si le degré de la non linéarité est faible, ainsi on peut conclure que plus le système est fortement non-linéaire, comme la dynamique chaotique, les approximations présentent des erreurs importantes d'estimation qui limite l'utilisation du filtre (EKF). Une autre méthode plus correcte d'approximation a été développée par Julier à la fin des années 90 du dernier siècle (le filtre UKF) et qui est défini à l'aide d'une transformation non-linéaire de statistique appelée Unscented. Ainsi cette approche se base sur une constellation de points (sigma points), distribués dans l'espace d'état initiale pour approximer sa statistique. plus récemment une nouvelle méthode proposée par Luca (ExPKF), exploite toute la série de Taylor pour exprimer d'une façon exacte jusqu'à l'ordre deux, les statistiques de la variable aléatoire (v.a) résulte de cette transformation polynomiale, l'inconvénient de cette méthode et que d'un coté les expressions formant l'algorithme récursif de filtrage de Kalman sous une forme matricielle compacte. Notre contribution est basé sur l'emploi de la loi de *Triangle de Pascal de manière que nous avons pu réduire le coût de calcul en manipulant qu'un seul vecteur dite clef pour*

*tous les moments nécessaire à la simulation de l'algorithme de filtrage . En fait l'efficacité de L'algorithme ExPKF réside dans l'effet qu'il est estime d'une manière exacte les statistiques, pour ce faire nous avons élargi cette exactitude à l'approximation des modèles non linéaire non polynomial par l'approche de Tchebychev. Les performances de ce nouvelle méthode (algorithme) sont comparé avec des filtre classiques tels que le *EKF* et *UKF*.*

**Mots clés :** Masquage, Synchronisation, Estimation, Bruit, Filtre de Kalman, polynômes de Chebyshev.

# Abstract

THIS thesis presents a study of the masking chaotic Algorithm by an exact polynomial estimator through the Kalman filter KF which is considered as a nonlinear observer. Performances of the transient response of this observer explains its large use in chaotic telecommunication systems. For its application to chaotic synchronization, this non-linear model can be found in the literature, First theoretical works on chaos synchronization neglected noise considerations, a few years later, the idea to use coupled chaotic oscillators in telecommunication is introduced, consequently additive noise in the channel destroys synchronization properties and rises the problem of noise cleaning. As performances quickly decay in presence of noise others communication schemes, as non-coherent and impulse synchronization, were considered to avoid synchronization. The problem of synchronization takes roots in control system theory and can be seen as the state estimation of a stochastic nonlinear system. Especially Kalman filtering can be applied to solve this problem for linear estimation, yielding the minimum mean squared error (MMSE) solution in a recursive manner thanks to state-space modeling of the underlying dynamical system and then many techniques were developed to deal with the nonlinearity. Chronologically for nonlinear dynamics the Extended Kalman filter (EKF) which exploits the partial development in Taylor series and uses successive linear approximations of the mean and variance statistics to build its state estimates. Although the EKF can cope with weakly nonlinear systems, large errors in the true posterior mean and covariance can occur in presence of severe nonlinearities like chaotic dynamic as a consequence of successive linearizations. This problem can be mitigated by another method The unscented KF (UKF) introduced by Julier in the last few years, the UKF propagates the sigma points through the true nonlinear function and computes the posterior mean and covariance approximation. More recently, Luca et al have proposed a closed-form state estimator named Exact Polynomial Kalman Filter (ExPKF) for some polynomial nonlinear system. Exploiting full Taylor series expansion and then giving exact expression to compute mean, and covariance of any random variable distribution that has been transformed through a polynomial function. Our contribution offers two main results First we redraw equations, however, we obtained a Faster ExKPF using the key column vector which reduces the Algorithm complexity,

in the second point Chebyshev polynomials orthogonality property is used to fit a polynomial to a nonlinear function. This polynomial is the used in an exact polynomial Kalman Filter to run real time state estimation.

**Keywords :** Chebychev polynomials, estimation, Kalman filter, polynomial maps.

# Introduction

L'utilisation du chaos pour la sécurisation du signal informationnel est un sujet d'études depuis plusieurs années [L01]. Le chaos est généré à partir des systèmes non linéaires ; il a un comportement attractant, apériodique et éventuellement borné, ce qui le fait apparaître comme du bruit pseudo-aléatoire, sa grande sensibilité permet au même modèle de générer, en modifiant légèrement les valeurs de ses conditions initiales ou de ses paramètres, des trajectoires ou des suites de points non périodiques aux distributions identiques mais ne prendront jamais les mêmes allures ou valeurs. Il peut donc être utilisé pour masquer les informations dans une transmission sécurisée, en d'autre terme, il est considéré comme une solution très prometteuse pour augmenter les performances des systèmes de télécommunication. Ainsi grâce à ses caractéristiques quasi-stochastiques le chaos offre une solution qui permet d'assurer une faible probabilité de détection des symboles informationnels : il suffit de le mélanger au message à émettre [DV99, Bog06]. Malgré ces caractéristiques qui rendent le chaos attirant, la synchronisation entre deux systèmes dynamiques chaotiques est difficile à réaliser. Ceci est dû, d'une part de son caractère imprédictible et d'autre part, du fait que l'information transmise est affecté par le bruit du canal. Dans cette thèse nous nous sommes concentrés sur une solution de synchronisation à estimation d'état.

## Organisation de ce mémoire

Les travaux de thèse sont présentés en trois chapitres :

Le **premier chapitre** est un état de l'art destiné à la définition des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques en général et en particulier aux systèmes chaotiques aussi bien en temps continue qu'en discret, avec les notions d'espace des phases et de trajectoire. A partir de ces définitions une classification de comportements dynamiques sera établie, en les séparant en quatre catégories spécifiques : points d'équilibre, régime périodique, régime quasi-périodique et particulièrement le régime

chaotique [A.S04]. Généralement il y a plusieurs méthodes de classification mais on va se limiter à la présentation des exposants de Lyapunov, qui par leurs caractéristiques offrent une solution facile et très fiable. Un sujet qui a reçu beaucoup d'attention dans cette étude est la synchronisation parfaite puis, la synchronisation en présence du bruit dans les systèmes de télécommunication chaotiques en particulier le cas où le comportement du modèle dynamique est discret. Un deuxième point étudié est l'utilisation des systèmes chaotiques à la transmission du signal informationnel et en particulier aux systèmes à étalement de spectre. Les solutions courantes de transmission à porteuse chaotique sont présentées par la suite, en particulier les méthodes CSK cohérentes et non-cohérentes ainsi que l'étalement de spectre par séquence chaotique directe. Étant donné les performances et la généralité prouvées par les méthodes de synchronisation chaotiques à filtrage de Kalman, une présentation de ces estimateurs adaptés aux cas non-linéaire devient importante. Ainsi on observe que l'estimation d'état réalisée sur un modèle non-linéaire est totalement différente du cas linéaire, étant caractérisée surtout par une certaine sous-optimalité ceci conduit à considérer quelques hypothèses simplificatrices sur la propagation des distributions à travers le modèle ou même des hypothèses sur le modèle lui-même.

Le **deuxième chapitre** consacre à la présentation des différents type de filtrage de Kalman non-linéaire, on introduit d'abord le filtrage de Kalman étendu comme la plus simple solution de filtrage non-linéaire qui remplace le modèle classique par sa version exprimée par le premier terme dans le développement en série de Taylor. Afin d'augmenter sensiblement les performances d'estimation, en approximant le plus précisément que possible la statistique et en même temps minimisant le coût de calcul, plusieurs méthodes de filtrage de Kalman sont disponibles dans la littérature telle que l'approche du filtrage de Kalman Unscented [JU97] et sa version d'ordre supérieur le (**HOUF**) [DT03], qui propose la propagation d'un ensemble de points de dimension bien établie à travers le modèle non-linéaire. Cet ensemble de points permet l'estimation de la statistique jusqu'à l'ordre deux. Une solution similaire appelée filtrage de Kalman de type "Central Difference" [PNR00] qui peut être vue comme une généralisation du filtre Unscented, mais en utilisant la formule d'interpolation de Stirling.

Finalement, puisque le but de la recherche, c'est de faire optimiser le plus possible l'estimation d'état, le **dernier chapitre** va consacrer à l'étude d'une nouvelle méthode récemment proposée par Luca et al [LABS06], le point de départ pour ces auteurs représente le fait que la classe des fonctions polynomiales est largement utilisée pour

décrire le comportement des processus dont une estimation d'état est recherchée, tel le cas des dynamiques génératrices chaotiques appartenant à la classe très importante des polynômes de Chebyshev. Ainsi avec cette hypothèse du modèle polynomial, le calcul de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire (v.a) propagée via une transformation polynomiale, peut être exprimée analytiquement, et par conséquent à partir de ces expressions exactes de l'état prédit et de l'observation qui subit un bruit de canal la mise en forme d'un algorithme récursif polynomial de Kalman noté **ExPKF** devient immédiate. Etant donné les bonnes performances de l'ExPKF vis à vis les autres approches citées dans cette introduction, nous avons remarqué d'un côté que le chemin suivi pour obtenir les expressions de la statistique, est limité jusqu'au deuxième ordre (la moyenne et la covariance), ce qui indique que l'effet de la non-linéarité sur la distribution à priori n'est pas pris en considération, ainsi qu'en terme de la complexité algorithmique : L'usage de l'équation qui exprime la variance ne conduit pas à utiliser l'ExPKF pour des applications temps réel lors de l'estimation d'états. Pour cette raison nous voyons qu'une nouvelle reformulation de toute la statistique est indispensable pour simplifier beaucoup plus le mécanisme de l'ExPKF et ainsi d'obtenir un Faster ExPKF, (**FExPKF**) [YAB11]. Un deuxième concept étudié dans ce chapitre est la généralisation du **FExPKF** à l'estimation de l'état des systèmes non linéaires et en particulier non polynomiaux. Alors l'approximation de la fonction décrivant le modèle non linéaire par les polynômes orthogonaux de Chebyshev devient immédiate. Finalement on va appliquer ce nouveau filtre à la synchronisation chaotique pour examiner ses performances.

# Chapitre 1

## Etat de l'art

---

### 1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques non-linéaires étranges (chaotiques) sont depuis longtemps connus dans le domaine des mathématiques mais c'est seulement au cours de ces deux dernières décennies que les applications concrètes se sont multipliées[Bog06] . Dans ce contexte on va se focaliser sur l'usage du chaos dans la transmission et la sécurisation de l'information et dans cette perspective, ce chapitre est destiné à introduire quelques notions de base associés à ces deux mots clefs (Chaos et sécurisation de l'information). Avant d'aborder, par respect du droit des auteurs je signale que des paragraphes de ce chapitre sont inspirées de la thèse de Mr Mihai Bogdan Luca [Bog06]

Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier (étrange) d'un système dynamique déterministe non-linéaire. Du point de vue mathématique la notion générale de système dynamique est définie à son tour à partir d'un ensemble de variables qui forment le vecteur d'état  $x = \{x_i \in \mathbb{R}\}$ ,  $i = 1..n$  où  $n$  représente la dimension du vecteur. Ce jeu de variables a la propriété de caractériser complètement l'état instantané du système dynamique générique. En associant en plus un système de coordonnées on obtient l'espace d'état qui est appelé également l'espace de phase. Conjointement avec l'espace d'état un système dynamique est défini aussi par une loi dynamique qui caractérise l'évolution de l'état du système dans le domaine temporelle. Le système est déterministe lorsqu'il est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique. Après cette introduction, on présente dans la section (1.2) les aspects généraux des systèmes dynamiques et la transition vers le chaos par bifurcation puis, on établira les deux méthodes de synchronisation associées à ce type de systèmes dans la section



(1.3). Les aspects de communications numériques par méthodes à étalement de spectre seront introduits dans la troisième section (1.4) et dans la dernière section 1.5 des solutions " classiques " destinées aux systèmes de communications à porteuse chaotique sont évoquées.

## 1.2 *Systemes dynamiques*

### 1.2.1 *Notions et definitions des systemes dynamiques*

Un système dynamique est une structure qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- causale, où son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- déterministe, c'est-à-dire qu'à partir d'une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes [A.S04, Ken94, Ser00] :

- une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire,

$$\dot{x} = F(x(t), t), \quad (1.1)$$

- une évolution discrète dans le temps, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues, elle est représentée par le modèle général des équations aux différences finies,

$$x(k + 1) = G(x(k), k) \quad (1.2)$$

où  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désignent respectivement la dynamique du système en temps continu et discret

### 1.2.2 *Espace des phases*

L'espace des phases est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Pour un système possédant  $n$  degrés de liberté, par exemple, l'espace des phases  $\Gamma$  du système possède  $n$  dimensions, de telle sorte que

l'état complet  $x(t)$  resp  $(x_k) \in \Gamma$  du système à l'instant  $t$  resp  $(k)$  est en général un vecteur à  $n$  composantes.

### 1.2.3 Exemples

#### 1.2.3.1 Dynamique continue : L'étrange papillon de Lorenz

En 1963, Edward Lorenz [Lor63] a proposé un système différentiel possédant trois degrés de liberté, notés  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ , qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (1.3)$$

On constate qu'il s'agit d'équation non linéaire à cause des termes  $xy$  et  $xz$ . Ce système d'équation n'est pas intégrable dans le cas général. La détermination de ce système doit se faire à l'aide des méthodes d'approximation.

Lorsque les paramètres réels  $\sigma, \rho$  et  $b$  prennent les valeurs suivantes :  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  et  $b = 8 / 3$ , ce système présente un superbe attracteur étrange en forme d'ailes de papillon, représenté sur la figure 1.1. La trajectoire commençant par s'enrouler sur une aile, puis sautant pour commencer à s'enrouler sur l'autre aile, et ainsi de suite.

On observe que la dynamique du système de Lorenz donné par le système (1.3) est indépendante du temps  $t$ , par conséquent ce type de système est qualifié d'être autonome.

#### 1.2.3.2 Dynamique discrète : La fonction logistique

La fonction logistique très connu dans la théorie des systèmes non linéaire, est une application non bijective du domaine  $[0, 1]$  dans lui-même qui sert de récurrence à la suite :

$$x_{k+1} = f(x_k) = rx_k(1 - x_k) \quad (1.4)$$

où  $k = 0, 1, \dots$  dénote le temps discret,  $x$  la variable dynamique et  $r$  un paramètre réel.

La dynamique de cette application correspond à un comportement très différent, ainsi selon la valeur du paramètre  $r$ , une plus grande variété de régimes permanents se présente, parmi lesquelles on trouve, par ordre de complexité :

- Pour  $0 \leq r < 3$ , le système possède un point fixe attractif, qui devient instable lorsque  $r = 3$ ,

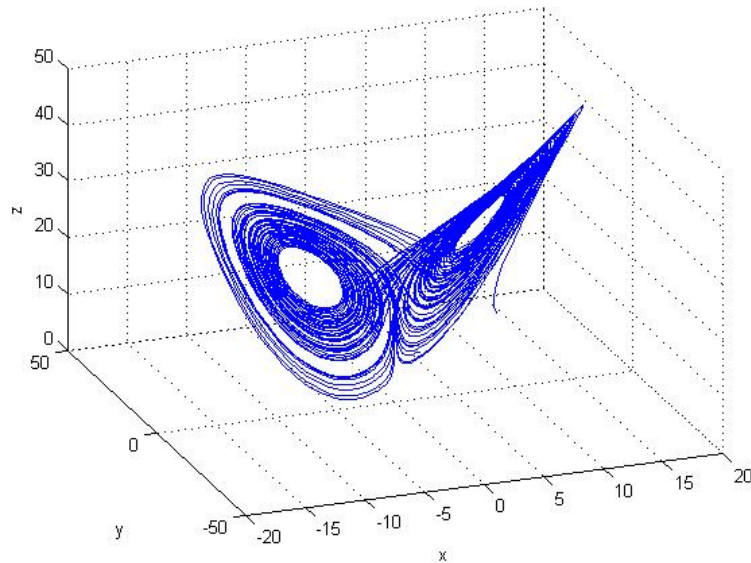


FIGURE 1.1 – Exemple de l'attracteur étrange de Lorenz.

- Pour  $3 \leq r < 3.57 \dots$ , le système évolue périodiquement de période  $2^n$ , avec  $n$  entier qui tend vers l'infini lorsque  $r$  tend vers  $3,57 \dots$ ,

On obtient donc sur la figure (Fig 1.2) une succession de bifurcations de la régularité vers le chaos lorsque le paramètre augmente.

### 1.2.3.3 caractérisation du comportement dynamique

Le comportement chaotique pour un système dynamique quelconque peut être remarqué par l'absence des comportements introduits auparavant : si son comportement asymptotique n'est pas un point fixe, périodique ou quasi-périodique on conclut qu'il est chaotique. Mais dans le cas où la dynamique employée pour générer la séquence observée n'est pas connue et si en plus un bruit affecte les observations une telle méthode n'est pas envisageable. Par conséquence, la communauté scientifique a proposée des solutions avec une approche statistique du problème comme le calcul de la dimension de corrélation [GP83a], l'entropie de Kolmogorov [GP83b] ou les exposants de Lyapunov [SSWV85, BAK91]. La dimension de corrélation est un outil qui offre la possibilité de déterminer la dimension de l'attracteur reconstruit à partir d'une série temporelle observée, tandis que l'entropie ou les exposants de Lyapunov sont employés pour l'évaluation de l'instabilité propre au phénomène chaotique. Dans la pratique ces exposants se sont imposé comme des outils performants, même dans le cas de séries temporelles courts,

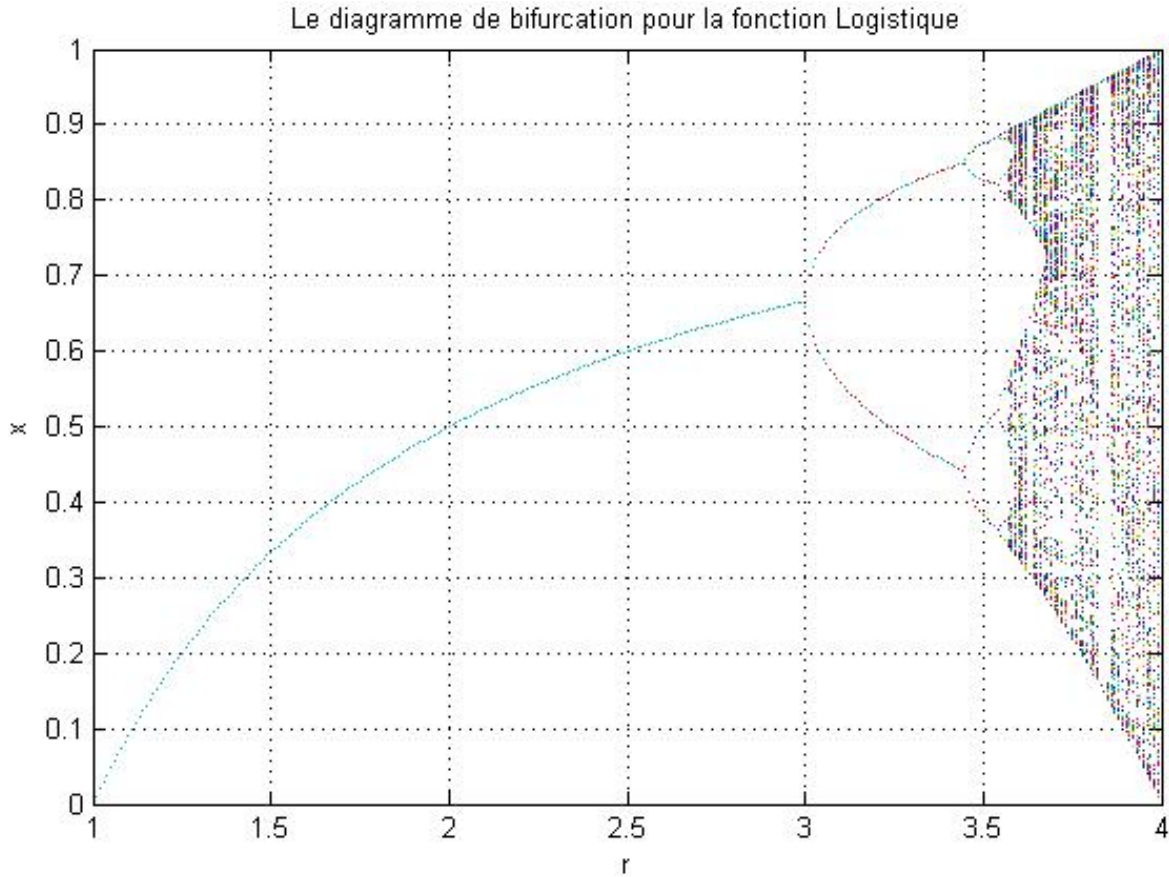


FIGURE 1.2 – Etude du comportement dynamique pour la fonction logistique (eq :1.4) : Bifurcations et scénarios de transition vers le chaos par doublement de période

avec un coût de calcul relativement réduit par rapport à la dimension de corrélation ou l'entropie de Kolmogorov. Afin de ne pas alourdir ce chapitre, seuls les exposants de Lyapunov vont caractériser le comportement qui se définit comme une mesure de deux trajectoires proches. Cette propriété est aussi qualifiée de sensibilité aux CI, mais elle se réfère généralement à la divergence de trajectoires à n'importe quel instant temporel [BAK91]. Ainsi dans le cas d'un attracteur chaotique, deux trajectoires initialement voisines vont diverger à une vitesse exponentielle quantifiée par l'exposant de Lyapunov. (tube, pipe)

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(0)} \right|, \quad i = 1 \dots n \quad (1.5)$$

L'ensemble  $\{\lambda_i\}_{i=1 \dots n}$ , constitue le spectre de Lyapunov dont les exposants sont classés par ordre décroissant :  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}, i = 1 \dots n - 1$ .

Graphiquement cela se traduit par le fait que le système (de Lorenz) bien que réduit au minimum est lui aussi sensible aux conditions initiales. Examinons par exemple la

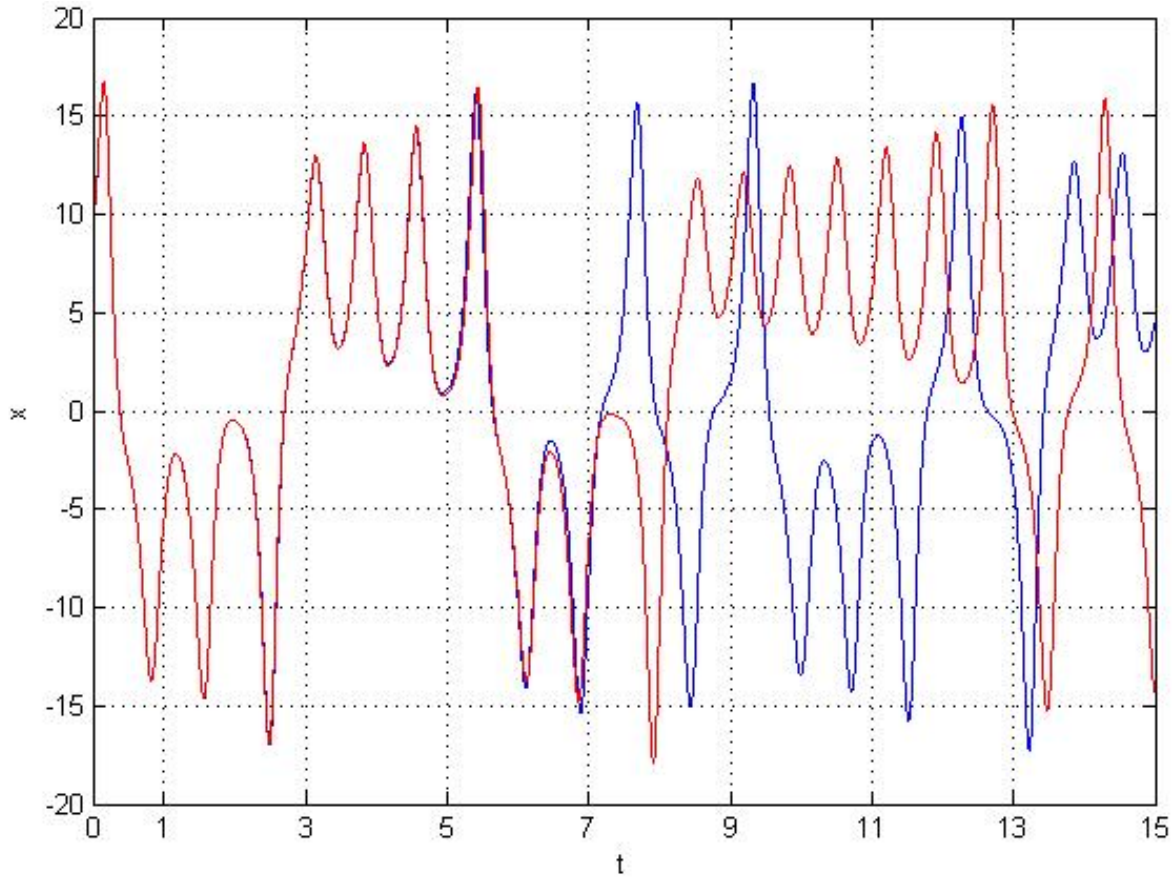


FIGURE 1.3 – Sensibilité aux CI : Comportement de la variable  $x$  en fonction du temps  $t$  bleu :  $x_o = 10, y_o = 10, z_o = 10$  rouge :  $x_o = 10, y_o = 10,01, z_o = 10$

trajectoire la variable  $x$  suite à une infime variation de la condition initiale du système ( $CI$ ), dans un premier temps en prenant comme condition initiale :  $CI_1 = (x_o, y_o, z_o) = (10, 10, 10)$  puis, une légère variation de  $\delta_{y_o} = 0.01$  sur la valeur de  $y_o$  soit  $y_o = 10.01$ .

Sous l'effet de la dynamique, on voit dans la figure (1.3) que cette légère variation  $\delta_{y_o}$  n'influence pratiquement pas les valeurs de la variable  $x$  sur l'intervalle de temps  $[0,7]$  mais pour  $t \geq 7$  les valeurs de  $x$  n'ont plus rien en commun avec celles obtenues en partant de  $CI_1$ , ceci conduit à la conclusion que suite à la forte sensibilité aux conditions initiales, il est impossible de pévoire d'une manière raisonnable les valeurs de  $x$  après l'instant  $t = 7$ .

Il faut noter que l'existence d'un attracteur nécessite que la dynamique de ce système soit globalement dissipative. Cela signifie que le système doit être caractérisé par une

Régimes permanents	Attracteur	Spectre	Exposants de Lyapunov
point d'équilibre	point	composante continue	$0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$
périodique	courbe fermée	fréq.fondamentale + harmoniques entières	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
quasi-périodique	tore	composantes fréquentielles en rapport irrationnel	$\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0$ $0 > \lambda_{i+1} \geq \dots \geq \lambda_n$
chaotique	fractale	spectre large	$\lambda_1 > 0$ $0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

TABLE 1.1 – Classification des régimes permanent en fonction des exposants de Lyapunov.

stabilité globale qui correspond à la condition suivante sur le spectre de Lyapunov :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \quad (1.6)$$

Le tableau 1.1 [Ken94] regroupe les critères caractérisant la dynamique d'un système quelconque.

### 1.3 Synchronisation du chaos

L'emploi du chaos dans le domaine des télécommunications pose directement le problème de synchronisation du récepteur avec l'émetteur afin de dupliquer le signal chaotique généré par ce dernier. A cause de la forte sensibilité aux **CI** des systèmes chaotiques, l'intervalle de **prévision** est très étroite autant que l'écart entre ces **CI** est considérable, de plus dans un milieu même à faible rapport signal sur bruit ou SNR en anglais, le terme **prévision** doit être oublié. Alors ce contexte rend la **synchronisation** difficile à réaliser.

Dans ces deux dernières décennies plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés tout d'abord avec les travaux de Yamada et Fujisaka [YF83a, YF83b] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique, dans la même année Afraimovich et al.[AVR83] ont défini la synchronisation identique, développée sur la base de circuits couplés et configurée en maître-esclave ; ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications. La synchronisation généralisée, initiée

par Rulkov et al. [RLH94, RSLH95, Rul96] et qui par la suite a été étudiée par Pecora et Carroll [PC00]. En parallèle avec ces études est apparue la notion de synchronisation de phase qui vise à établir une cohérence de phase entre les variables d'état considérés dans le système [RPK97, Vol97]. Plus récemment a été introduite une nouvelle technique où l'emploi des méthodes d'estimation non-linéaire par le filtre de Kalman, vues comme une généralisation du couplage des systèmes chaotiques, sont utilisées sous certaines conditions sur le bruit d'observation. Cette approche garantit un caractère optimal de synchronisation au sens de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) [LZD00, LZ01].

### 1.3.1 Synchronisation identique

Ce type de synchronisation avait été proposé par Pecora et Carroll [PC90]. Celle-ci a l'avantage de synchroniser **parfaitement** l'absence de bruit deux systèmes dynamiques identiques configurés en maître-esclave. Etant donné un système dynamique autonome, en temps continu, de dimension  $n$  :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad (1.7)$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ . Cette méthode consiste à diviser le système initial en deux sous-système  $\{S_1, S_2\}$  :

$$\begin{cases} S_1 : \dot{x}^{\{1\}} = F^{\{1\}}(x^{\{1\}}, x^{\{2\}}) \\ S_2 : \dot{x}^{\{2\}} = F^{\{2\}}(x^{\{1\}}, x^{\{2\}}) \end{cases} \quad (1.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} x &= [x^{\{1\}}, x^{\{2\}}]^T \\ x^{\{1\}} &= [x_1, \dots, x_m]^T \\ x^{\{2\}} &= [x_{m+1}, \dots, x_n]^T \end{aligned} \quad (1.9)$$

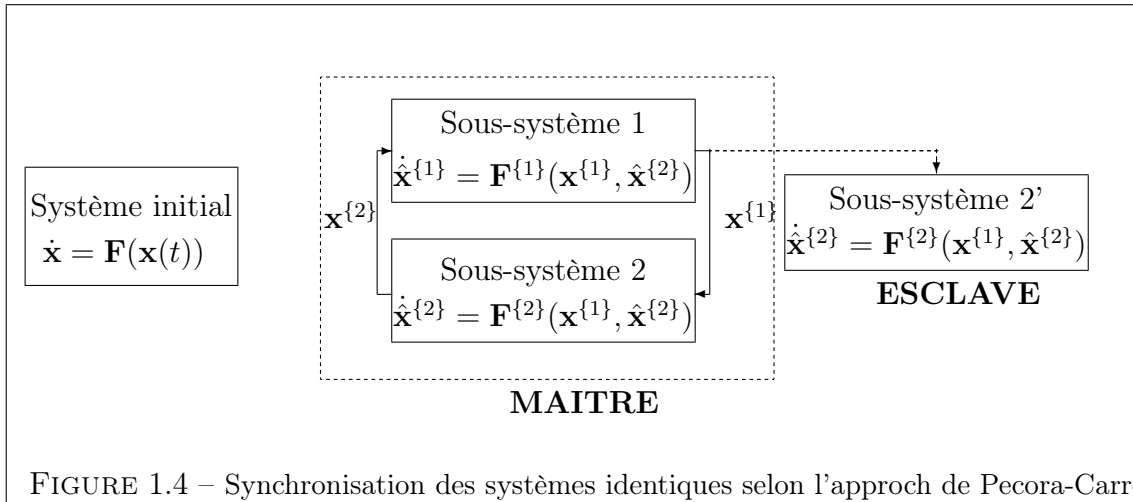
et

$$F(x) = [F^{\{1\}}(x); F^{\{2\}}(x)] \quad (1.10)$$

On considère maintenant un deuxième sous-système  $S_2'$  caractérisé par une dynamique identique  $F^2$ , et un vecteur d'état  $\hat{x}^{\{2\}}$  :

$$S_2' : \dot{\hat{x}}^{\{2\}} = F^{\{2\}}(x^{\{1\}}, x^{\{2\}}) \quad (1.11)$$

Ce sous-système réplique  $S_2'$ , est un candidat susceptible de se synchroniser asymptotiquement avec la dynamique complète initiale, si et seulement s'il est stable [PC90],



cela signifie que tous les coefficients de Lyapunov du  $S_2'$  soient négatifs. Une synchronisation parfaite peut alors être accomplie.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}^{\{2\}}(t) - x^{\{2\}}\| = 0 \quad (1.12)$$

Dans la figure 1.4 est représenté graphiquement le processus de décomposition en sous-système ; la sortie  $y = x + x^{\{1\}} + n_s$ , où  $n_s$  est un éventuel bruit additif associé au canal de communication. Dans le cas où la variance de ce bruit d’observation est significative, l’équation (1.12) qui traduit la convergence asymptotique ne reste plus valable, et pour palier à ce problème on doit utiliser une approche de synchronisation plus généralisée [RSLH95].

Pour illustrer ce mécanisme de synchronisation on considère de nouveau le système dynamique de Lorenz (1.3), dont les paramètres ont pour valeurs numériques  $\sigma = 10, \rho = 28, b = 8/3$ . L’émetteur et le récepteur sont initialisés avec des conditions initiales proches, et ils fonctionnent indépendamment pour une durée de 10 secondes, ainsi on observe que les trajectoires des deux systèmes deviennent assez vite divergentes. A l’instant  $t = 10s$  la composante  $x$  est supprimée du côté récepteur pour qu’elle soit remplacée par celle correspondant au côté émetteur ; cette démarche va forcer les états  $y$  et  $z$  du système esclave à converger asymptotiquement vers les états correspondants du système maître. Cette convergence est assurée par les valeurs négatives  $\lambda_2', \lambda_3' \leq 0$  des exposants de Lyapunov associés au système esclave.

Dans la figure 1.5, est illustré le diagramme de synchronisation pour l’état  $y = X_2$ . Le tracé de l’erreur nous confirme qu’après une période de transition, le système esclave



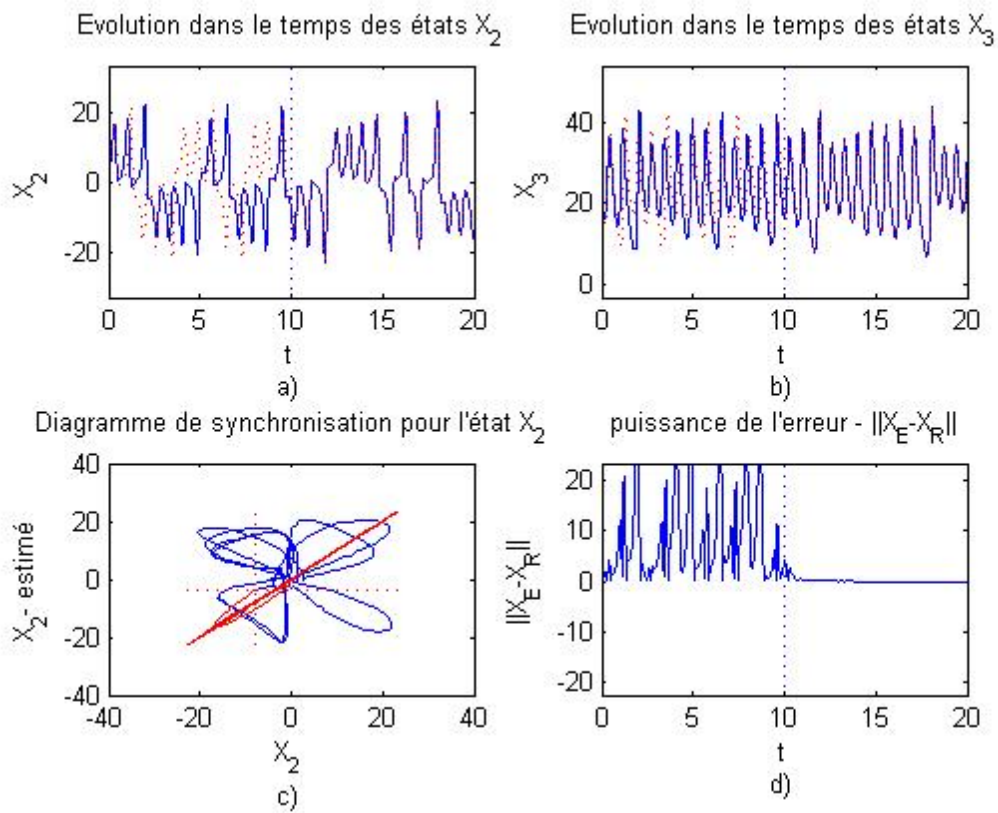


FIGURE 1.5 – Evolution des états du système maître et de l'esclave avant et après synchronisation : a)  $y = X_2$ ; b)  $z = X_3$ ; c) Diagramme de synchronisation pour l'état  $y = X_2$ ; d) Puissance de l'erreur de synchronisation.

converge asymptotiquement vers le système maître.

### 1.3.2 Synchronisation par filtrage de Kalman étendu

La méthode de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman étendu a été introduite comme une généralisation des méthodes de synchronisation à couplage unidirectionnel telles que la synchronisation identique. L'estimation récursive des états pour un système chaotique a été proposée pour la première fois par Fowler [Fow89], avec des aspects sur l'optimalité et la stabilité d'une telle synchronisation [LZD00, LZ01, LABS06]. Par la suite plusieurs applications ont été développées en faveur de la démodulation et même l'égalisation du canal de communication [LL01]. Pour illustrer l'étude des structures de filtrage non-linéaire innovantes, on considère par exemple un système en temps discret, autonome défini par l'équation générale du modèle de processus :

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (1.13)$$

où  $x_k \in R^n$  est le vecteur d'état et  $f(\cdot)$  est la dynamique non-linéaire associée. Pour une efficacité maximale, il est souhaitable de transmettre un nombre d'états le plus réduit possible, ces états servent de signal de contrôle donné par l'équation du modèle d'observation suivante :

$$y_k = h^T(x_k) + n_k \quad (1.14)$$

où  $h = [h_1, \dots, h_n]^T$  et  $n_k \sim \mathcal{N}(0, R)$  représente l'éventuel bruit supposé gaussien centré, de variance  $R$ , associé aux imperfections du canal de communication.

L'interprétation dans le cas générale d'un tel modèle est donnée dans la figure (Fig :1.6) comme une structure à rétroaction qui permet d'estimer l'état à partir des observations bruitées [LZ01]. On note que le modèle d'observation dans ce cas ne doit pas respecter forcément une fonction linéaire. Dans la partie gauche du schéma on effectue une projection de l'estimation courante  $\hat{x}$  pour obtenir la valeur a priori du nouvel état estimé  $\hat{x}_{k+1/k}$  ; Dans la partie droite ce nouveau état va incorporer l'information apportée par la nouvelle mesure  $y_{k+1}$  pour obtenir la valeur estimée a posteriori  $\hat{x}_{k+1}$ . Le coefficient de pondération  $K_{k+1}$ , appelé gain de Kalman est calculé par rapport à la dynamique du système, il donne une évaluation de la confiance accordée aux observations à chaque étape de filtrage.

Cette dualité présentée par l'algorithme de filtrage se retrouve dans le développement détaillé des équations dans le chapitre suivant.

- Equations de mise à jour temporelle, destinées à évaluer la statistique d'ordre deux de l'état prédit :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1/k} &= f(\hat{x}_k) \\ P_{k+1/k} &= F_k P_k F_k^T.\end{aligned}\quad (1.15)$$

où  $F_k \triangleq \nabla f|_{\hat{x}_k}$ , et  $P_{k+1}$  représente la covariance des erreurs prédites

- Equations de mise à jour par des observations, donnant la valeur estimée en utilisant la connaissance de l'état observé :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_k - h^T \hat{x}_{k+1/k}) \\ P_{k+1} &= (I - K_{k+1}h)P_{k+1/k}\end{aligned}\quad (1.16)$$

où  $I_n$  est la matrice unité,  $P_{k+1}$  représente la matrice covariance des erreurs, et  $K_{k+1}$  désigne le gain de Kalman s'exprimant comme :

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} h^T (h P_{k+1/k} h^T - R)^{-1}\quad (1.17)$$

Ainsi par l'unification des relations (1.15) et (1.16) on obtient la solution récursive suivante :

$$\hat{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k) + K_{k+1}(y_k - h^T f(\hat{x}_k))\quad (1.18)$$

comme en synchronisation identique, la dynamique du système peut être écrit sous la forme :

$$f(x_k) = \left[ f^{\{1\}}(x_k^{\{1\}}, x_k^{\{2\}}), f^{\{2\}}(x_k^{\{1\}}, x_k^{\{2\}}) \right]^T\quad (1.19)$$

Avec cette relation la synchronisation identique est immédiate en considérant le système esclave caractérisé par la dynamique  $f^{\{2\}}(y_k, \hat{x}_k^{\{2\}})$  où  $y_k = x_k^{\{1\}} + \eta_k$  est le signal de synchronisation, et avec  $h = [1, 0, \dots, 0]^T$ ,  $K_k = [1, 0, \dots, 0]^T$  nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1}^{\{1\}} &= y_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1}^{\{2\}} &= f^{\{2\}}(y_k, \hat{x}_k^{\{2\}})\end{aligned}\quad (1.20)$$

On conclut que la synchronisation par le filtre de Kalman étendu est pareille avec la méthode de synchronisation identique présentée antérieurement. Dans le cadre de la synchronisation chaotique en présence de bruit le filtre de Kalman est utilisé.

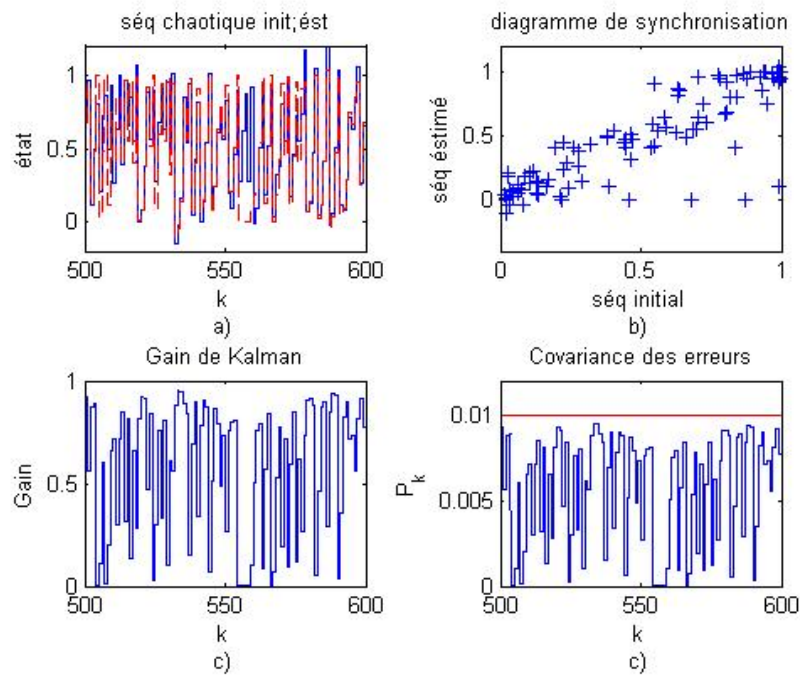


FIGURE 1.6 – Exemple de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman étendu : a) séquence initial vs séquence estimé ; b) diagramme de synchronisation ; c) évolution du gain de Kalman  $K_k$  ; d) évolution de la covariance des erreurs  $P_k$  par rapport à la variance du bruit d'observation  $R$ .

Dans la figure 1.6 on considère le cas de synchronisation chaotique appliquée à une dynamique non-linéaire mono-dimensionnelle représentée par la fonction logistique (1.4), avec le paramètre  $r = 4$ . Ainsi on a généré une séquence chaotique de 600 échantillons, affectée avec un bruit d'observation gaussien de variance  $R = 10^{-2}$ .

Du point de vue qualitative de performances de synchronisation, on observe que le bruit de mesure produit l'impossibilité d'obtenir une synchronisation parfaite. Cela signifie que l'erreur de synchronisation ne converge jamais vers le zéro. Une autre remarque peut être faite par rapport à l'évolution comparative entre le gain de Kalman et la covariance des erreurs qui suivent une relation de proportionnalité. Analytiquement et dans le cas mono-dimensionnel cette relation est valide [LZ01], avec un coefficient de proportionnalité égal à la variance du bruit d'observation considéré :

$$P_k = RK_k \quad (1.21)$$

Le modèle d'estimation employé reste assez sensible aux perturbations causé par le bruit du canal. Une solution généralement utilisée pour compenser ces approximations consiste à considérer la présence du bruit de processus associé au système dynamique chaotique mais un paramétrage optimal de la valeur de ce bruit reste difficile.

## 1.4 Système à étalement de spectre

L'étalement de spectre désigne un ensemble de techniques de transmission numérique de l'information caractérisées par une bande de fréquence  $W$  beaucoup plus importante que celle du signal informationnel en bande de base noté  $R$ . Ceci définit le gain d'étalement  $G_e = W/R$ . Un deuxième élément important qui intervient dans le développement d'un tel système est la caractéristique pseudo-aléatoire des signaux employés, qui fait que le signal transmis apparaisse comme une valeur stochastique rendant la démodulation plus difficile par des utilisateurs non-autorisés. Plus spécifiquement l'étalement de spectre est utilisé pour [Pro95] :

- combattre les effets néfastes de l'interférence produite par un brouillage, d'autre utilisateurs présents dans le canal ou la propagation par trajet multiple ;
- masquer le signal en utilisant une faible puissance d'émission et par conséquence le signal sera difficile à intercepter par un utilisateur non-autorisé ;
- garantir un niveau de confidentialité de la transmission étant donné le caractère aléatoire des signaux.

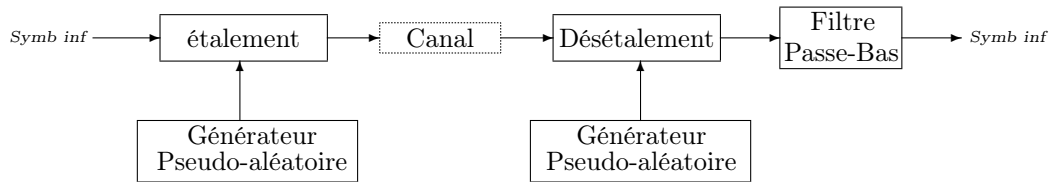


FIGURE 1.7 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre.

Les premières applications de l'étalement de spectre datent des années 50 du dernier siècle, essentiellement dans le domaine militaire, avec des systèmes anti-brouillage, des systèmes de guidage, ou encore des prototypes de systèmes de propagation à trajet multiple [Sch82, PSM82, Vit79]. Plus récemment on voit l'apparition de l'étalement de spectre couramment utilisé dans les applications militaires satellitaires avec le système GPS et c'est juste au début des années 90 que des solutions ont été employées dans le cadre de systèmes de communications civiles avec les normes IS-95 et CDMA200[LM98].

Le modèle donné dans la figure 1.7 représente la structure d'un système de communication à étalement de spectre dont le but est de transmettre la séquence informationnelle binaire caractérisée par la largeur de bande  $R$ . Le signal subit par la suite l'étalement à l'aide d'une séquence pseudo-aléatoire et il est transmis dans le canal informationnel. Le filtre passe bas est utilisé pour limiter la bande du signal obtenu à la bande informationnelle  $R$ .

Deux types de modulation sont employés dans l'étalement de spectre :

- modulation **PSK** (*Phase Shift Keying*) : employée dans le cas des applications où la cohérence de phase entre le signal transmis et le signal reçu peut être maintenue pour une durée assez longue par rapport à l'inverse de la bande utile. Dans ce cas la séquence pseudo-aléatoire est utilisée pour modifier la phase du signal transmis ; ce type de modulation a pour nom de (*séquence directe*) (DS - Direct Séquence).
- modulation **FSK** (*Frequency Shift Keying*) : employée dans le cas où cette cohérence de phase ne peut pas être maintenue à cause des variations rapides de la réponse impulsionnelle du canal. Cette fois le générateur est utilisé conjointement avec la modulation **M-FSK** pour sélectionner la fréquence d'émission. Ce type de modulation est connu sous le nom (étalement de spectre par *sauts de fréquence* : (**FH**- Frequency Hopping) [Sch82].

### 1.4.1 Étalement de spectre par séquence directe (DS-SS)

Pour illustrer le fonctionnement de cette méthode on considère le cas particulier où le signal informationnel subit une modulation **PSK** d'ordre 2 (BPSK). Dans cette configuration, pour obtenir le signal étalé, la séquence informationnelle (période symbole  $T_e = 1/R$ ) est multipliée directement par la séquence binaire pseudo-aléatoire évoluant au rythme  $W$ . Les éléments binaires de la fréquence d'étalement, appelés aussi "chips" auront pour période  $T_c = T_s/G_e = 1/W$ . Finalement, pour la transmission, le signal obtenu est modulé par une porteuse sinusoïdale. Coté récepteur la structure est symétrique : on effectue tout d'abord la récupération de la porteuse et puis le signal est désétalement par une réplique de la séquence pseudo-aléatoire utilisée à l'émission. On observe l'apparition d'un sous-système de synchronisation qui permet aux deux séquences d'étalement de rester en phase.

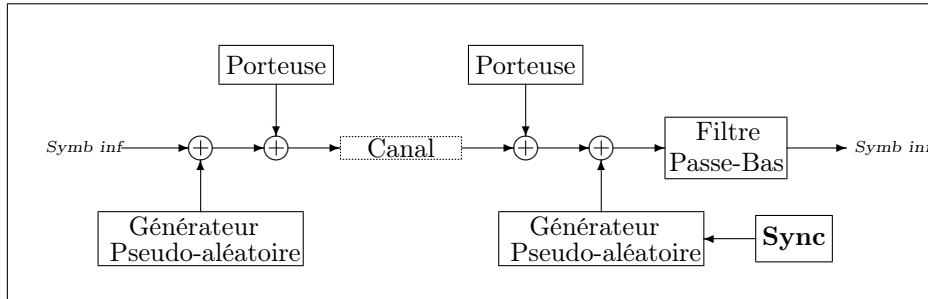


FIGURE 1.8 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence directe.

Le couple d'opérations (étalement et désétalement) est lié au gain de traitement défini antérieurement, ainsi on peut établir une relation entre le rapport signal-bruit à l'entrée du récepteur ( $SNR_{in}$ ) :

$$SNR_{out} = \frac{W}{R} SNR_{in} \quad (1.22)$$

dans les figures 1.8 on a choisi aussi une séquence d'étalement aléatoire, mais dans les applications réelles les séquences pseudo-aléatoires doivent respecter des propriétés de corrélation quasi-optimales pour réduire l'influence des interférences. Ainsi beaucoup d'études ont été réalisées pour choisir au mieux les séquences d'étalement, dont on va citer ici les séquences de longueur maximale de type Gold, générées par l'intermédiaire des registres à décalage [Sch82].

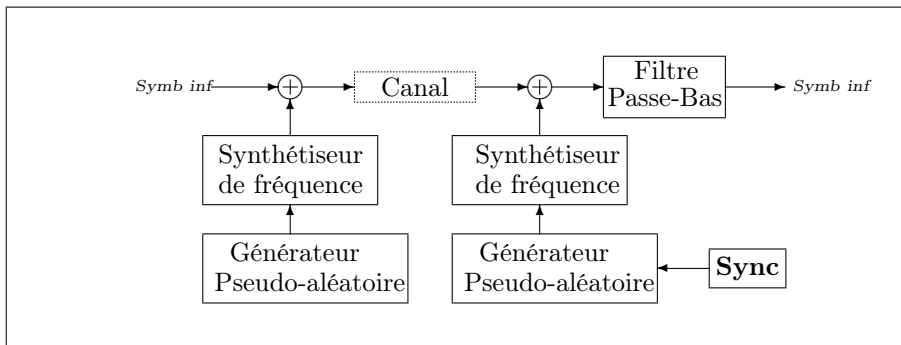


FIGURE 1.9 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par sauts de fréquence

### 1.4.2 *Etalement de spectre par sauts de fréquence*

La deuxième version de la structure à étalement de spectre consiste à utiliser la bande disponible  $W$  du canal en un nombre important de canaux sans recouvrement. Dans un intervalle temporel limité le signal informationnel occupe ainsi un ou plusieurs canaux disponibles, avec la sélection du canal associé à la séquence pseudo-aléatoire considérée. On peut interpréter ce fonctionnement comme un signal informationnel à bande étroite associé à une porteuse dont la fréquence effectue des sauts selon le code d'étalement. Ainsi on peut observer dans la partie b) un spectre très différent de celui obtenu par le système à séquence directe, en remplaçant l'enveloppe en  $[(\sin x)/x]^2$  par une *DSP* plate sur la bande de fréquence de largeur  $W$ .

Une méthode qui permet une telle implémentation est présentée dans la figure 1.9 dont le signal informationnel est déplacé en fréquence par l'intermédiaire du synthétiseur avec une valeur représenté par les  $m$  bits lus à la sortie du générateur pseudo-aléatoire. Par exemple les  $m$  bits obtenus peuvent spécifier un ensemble de  $2^m - 1$  translations possibles [Sch82]. Coté récepteur on a un générateur pseudo-aléatoire identique synchronisé, qui permet à l'aide d'un synthétiseur de fréquence similaire de démoduler le signal reçu.

## 1.5 Transmissions à porteuses chaotiques

Les signaux chaotiques peuvent être utilisés pour la transmission de l'information principalement dans deux objectifs. Le premier est de protéger l'information et dans ce cas les applications réalisées sont en compétition avec les méthodes de cryptographie classiques. Un deuxième objectif est d'étaler le signal informationnel avec tous les



avantages des techniques à étalement de spectre.

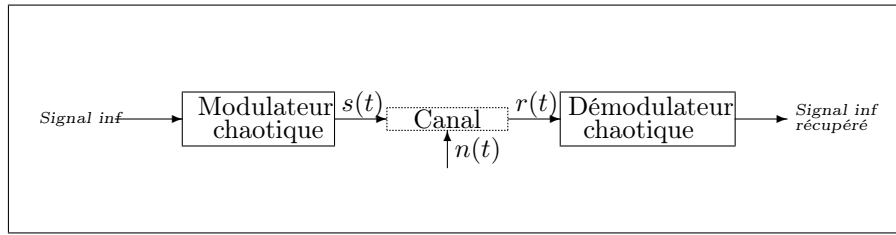


FIGURE 1.10 – Modulation directe du signal informationnel par une porteuse haute fréquence chaotique.

La structure d'un tel système de transmission peut être défini par deux approches. Dans la figure 1.10 le signal porteur sinusoïdal est remplacé par un modulateur chaotique contrôlé par le signal informationnel. Cette solution a l'avantage d'être très simple à implémenter mais par contre nécessite un système chaotique avec des contraintes fortes sur les paramètres intrinsèques. En pratique, il est difficile de trouver des circuits permettant un tel fonctionnement, en générale cette solution est surtout considérée dans un cadre théorique.

Une deuxième solution présentée dans la figure 1.11 consiste à moduler le signal informationnel par le signal chaotique en bande de base, suivi d'une transposition en haute fréquence par l'intermédiaire d'une porteuse sinusoïdale. Son avantage est que le modulateur chaotique est simplifié mais avec une complexité générale plus importante [HS01].

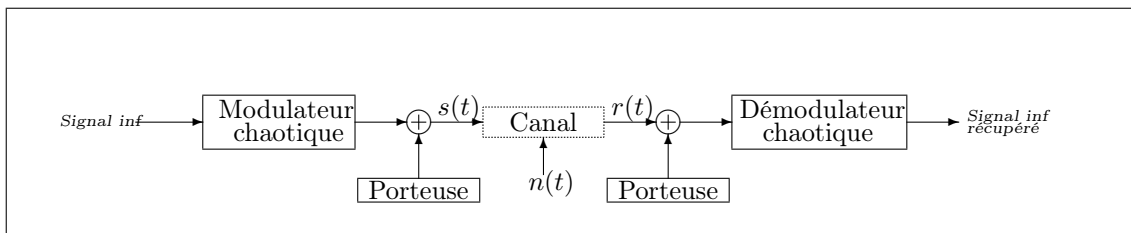


FIGURE 1.11 – Modulation en bande de base du signal informationnel par le signal chaotique, combinée avec une mise sur porteuse classique.

Dans le reste de ce chapitre nous passons en revue les principaux résultats recensés dans la littérature sur le sujet.

### 1.5.1 Masquage chaotique

La méthode de masquage chaotique a été la première solution proposée dans la littérature comme application du chaos aux communications [OWIC92, KHE<sup>+</sup>92]. L'idée

est d'ajouter directement le signal informationnel  $s(t)$  au signal chaotique  $y(t)$  et de le récupérer ensuite par synchronisation chaotique (1.12). Il est démontré [KHE<sup>+</sup>92] que grâce à la synchronisation chaotique, le signal sortie du système dynamique récepteur sera plus proche du signal chaotique original  $y(t)$  que de la somme  $y(t) + s(t)$ . Ainsi une approximation  $\hat{s}(t)$  du signal informationnel initial peut être obtenue.

Même si cette méthode n'a pas trouvé d'applications directes sur des canaux radio-fréquence, elle est envisagée comme solution de cryptage sur des canaux à fort  $SNR$ , comme c'est le cas dans la fibre optique [ASL<sup>+</sup>05].

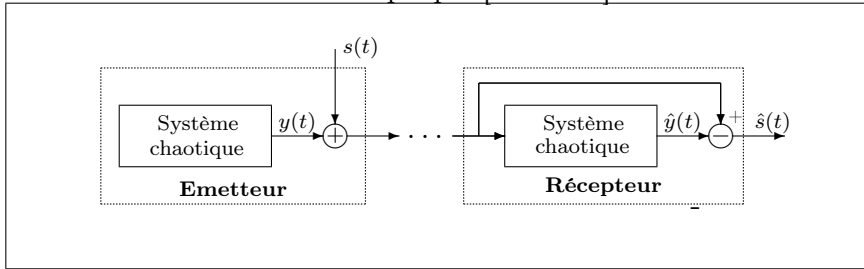


FIGURE 1.12 – Modulation par masquage chaotique.

### 1.5.2 Chaos Shift Keying (CSK)

La technique *CSK* introduite pour la première fois dans [DKH93, KD93], est une modulation numérique qui associe à chaque symbole informationnel un attracteur ou une somme d'attracteurs différents. En se plaçant dans une période de symbole de durée  $T$  cette définition générale peut être développée analytiquement avec la supposition que chaque attracteur va générer une fonction de base  $g_i$  et que l'ensemble des signaux porteurs de l'information s'exprime alors, sur l'intervalle  $t \in [iT, (i+1)T]$ , comme [KKC97, KKC98]

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} g_j(t), i = 1, 2, \dots, M \quad (1.23)$$

où  $N < M$  est le nombre de fonctions de base et  $M$  est la dimension de l'espace de symboles.

Dans la figure 1.13 est présenté le schéma générique d'un système de communication *CSK* en bande de base. Du côté de l'émetteur la construction de la forme d'onde courante, associée au symbole  $i$ , est défini par l'équation (1.23). ainsi on suppose une commutation des coefficients  $s_{ij}$  aux instants multiples de la durée symbole  $T$ . Si dans le cas d'un système de transmission classique les formes d'ondes des fonctions de base ont un caractère périodique, dans le cas du *CSK* cette condition ne reste plus valable à

cause du caractère chaotique des attracteurs utilisés pour la génération de ces fonctions de base.

A la réception on suppose que la forme du signal reçu  $r_i(t)$ , associé au symbole  $i$ , est donné par la version du signal émis  $s_i(t)$  affectée par un bruit additif  $n(t)$  :

$$r_i(t) = s_i(t) + n(t) \quad (1.24)$$

La structure usuelle d'un récepteur *CSK* repose sur une batterie de corrélateurs, en fonction du nombre de base  $N$  utilisées par l'émetteur. Les fonctions  $(y_i(t))_{j=1\dots N}$  forment l'ensemble des fonctions de base utilisées pour mettre en place le mécanisme de corrélation. Nous verrons par la suite que la choix de ces fonctions est fait par rapport à une structure particulière du récepteur. Après corrélation, le vecteur

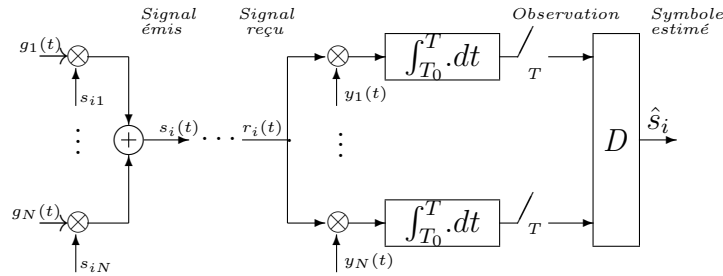


FIGURE 1.13 – Système générique de communication CSK.

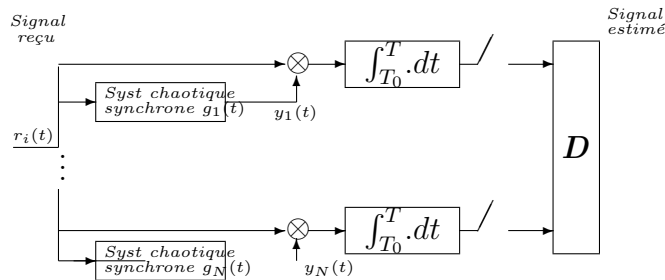


FIGURE 1.14 – Récepteur cohérent CSK.

d'observation  $z_i = [z_{i1}, \dots, z_{iN}]$  est utilisé pour faire la décision du symbole transmis  $s_i$ . Pour cette configuration de récepteur, on peut considérer les quatre cas suivants :

- *Rcepteur cohérent qui utilise une mthode de synchronisation chaotique* : Dans ce cas, les référence  $\{y_i(t)\}$  correspondent aux fonctions de base originales  $\{g_i(t)\}$  reconstruites à partir du signal reçu à l'aide d'une méthode de synchronisation chaotique (fig 1.14)

Dans cette structure le signal reçu contrôle la synchronisation de tous les système chaotiques, ainsi en supposant que le signal transmis est  $s_i(t) = g_j(t)$ , alors le signal

$y_i(t)$  à la sortie du *système* chaotique converge vers  $g_j(t)$   $T_s$  est le temps nécessaire pour que la synchronisation soit réalisée. En contraste avec la synchronisation de ce système, tous les autres vont avoir un caractère divergent par rapport au système attracteur. La prise de décision sera faite à partir de l'erreur de synchronisation, en sortie des corrélateurs; Ainsi on peut affirmer sans doute que la convergence de  $y_i(t)$  vers  $g_j(t)$  sur l'intervalle  $[T_s, T]$  nous donne une observation  $z_{ij} > z_{ik}$ , pour  $k = 1 \dots N, k \neq j$ .

Analytiquement on peut écrire la valeur du coefficient d'observation  $z_{ij}$  :

$$\begin{aligned} z_{ij} &= \int_{T_s}^T r_i(t) y_j(t) dt \\ &= \int_{T_s}^T [s_i(t) + n(t)] y_j(t) dt \\ &= \int_{T_s}^T g_j(t) y_j(t) dt + \int_{T_s}^T n(t) g_j(t) dt \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ceci montre que  $z_{ij}$  est une variable aléatoire, dont la valeur moyenne va dépendre de l'énergie par élément binaire et de la qualité de synchronisation.

L'inconvénient important présenté par cette méthode est que la synchronisation est perdue et ensuite récupérée chaque fois que le symbole informationnel change. Ainsi le temps nécessaire pour la transmission d'un seul symbole est donné par le temps de synchronisation plus le temps d'estimation dont le vecteur d'observation est calculé. Par conséquent le débit de transmission possible est limité par l'inverse du temps de synchronisation.

- *Récepteur cohérent de type filtre adapté* : si cette solution dans le cas de transmission classique est équivalente aux structures cohérentes de type corrélateur, dans le cas chaotique cette solution ne peut pas être utilisée. L'impossibilité vient du fait que les formes d'ondes employées dans la modulation doivent être connues en avance et dans le cas d'un système chaotiques ces formes d'ondes changent d'un symbole à l'autre [KKC98].
- *Récepteur non-cohérent* : dans le cas de la détection non-cohérente la référence coté récepteur ne sera plus obtenue par l'intermédiaire d'une synchronisation chaotique mais par contre elle correspond à une partie du signal reçu (fig 1.15).

Dans la littérature deux système *CSK* non-cohérents sont considérés

1. Système *Chaotic on-off Keying COOK* [KKC97] qui offre la plus simple solution; le signal informationnel binaire est directement multiplié par le signal chaotique. ce principe est équivalent à associer à l'élément binaire "1" le signal  $s_1(t) = g_1(t)$  et à l'élément "0" le signal  $s_2(t) = 0$ . Dans ce cas le récepteur présenté dans la

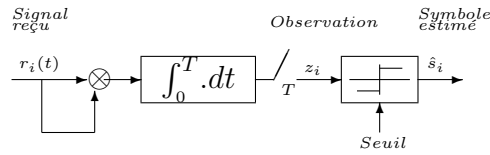


FIGURE 1.15 – Récepteur non cohérent CSK/COOK.

figure 1.15 évalue l'énergie par bit transmis puis prend la décision en utilisant un comparateur de seuil.

2. Système CSK non-cohérent, qui utilise des propriétés qui peuvent différencier les formes d'ondes associées aux symboles transmis, au niveau statistique par exemple. La structure présentée dans la figure (1.15) reste la même, seule la décision cette fois est effectuée sur les paramètres d'intérêt. Généralement ces solutions sont envisageables étant donné que les propriétés statistiques entre différents attracteurs chaotiques sont différentiables. par exemple dans [KKK97] les fonctions de base sont deux signaux chaotiques caractérisés par des fréquences moyennes différentes. Les signaux générés par le récepteurs peuvent être identifiés en mesurant la valeur moyenne de la fréquence quand le signal change de signe .

- *Récepteurs cohérents différentiel (DCSK- Differential Chaos Shift Keying)* : Dans le cas du récepteur cohérent  $\{CSK\}$  les fonctions de base  $g_i(t)$  doivent être récupérées avant que toute démodulation soit possible. Il existe des situations pour lesquelles cette approche est impossible à cause des mauvaises conditions de propagations. Dans ce cas la seule solution cohérente disponible est une solution différentielle, ainsi une référence se transmet sur une partie de la durée du symbole et le reste est associé à la transmission de l'information [KKC97]

Par exemple, pour la modulation DCSK binaire, le symbole "1" est représenté par un signal de référence, de durée  $T/2$ , suivi d'une réplique exacte de celui-ci retardé avec la même durée  $T/2$ . Pour le bit "0" on transmet le même signal référence suivi cette fois par sa copie inversée. On peut exprimer alors le signal produit par le modulateur pour le  $i^{me}$  symbole comme :

$$s_i(t) = \begin{cases} x(t) & t_i \leq t < t_i + \frac{T}{2} \\ b_i(t - \frac{T}{2}) & t_i + \frac{T}{2} \leq t < t_i + T \end{cases} \quad (1.26)$$

où  $x(t)$  désigne le signal issu d'une source chaotique et  $b_i \in \{-1, +1\}$  représente le  $i^{me}$  symbole informationnel à transmettre. Dans le Côté récepteur la modulation est

réalisée en utilisant une structure similaire au **CSK** non-cohérent. Ainsi on introduit dans ce cas une cellule à retard qui permet au signal de référence et à celui porteur de l'information d'être en phase (fig 1.16).

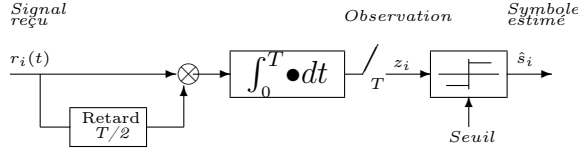


FIGURE 1.16 – Récepteur non-cohérent DCSK.

Analytiquement la valeur  $z_i$  observé est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 z_i &= \int_T / 2^T r_i(t) r_i \left( t - \frac{T}{2} \right) dt \\
 &= \int_{T/2}^T [s_i(t) + n(t)] \left[ s_i \left( t - \frac{T}{2} \right) + n \left( t - \frac{T}{2} \right) \right] dt \\
 &= \int_{T/2}^T [x(t) + n(t)] \left[ b_i x \left( t - \frac{T}{2} \right) + n \left( t - \frac{T}{2} \right) \right] dt \\
 &= b_i \int_{T/2}^T x^2(t) dt + \int_{T/2}^T x(t) n \left( t - \frac{T}{2} \right) + \\
 &\quad b_i \int_{T/2}^T x(t) n(t) dt + \int_{T/2}^T n(t) n \left( t - \frac{T}{2} \right) dt
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Avec l'hypothèse que le bruit présent dans le canal est blanc, le récepteur devient un estimateur non-biaisé, avec un seuil de décision nul, indépendant de la variance du bruit présent dans le canal.

### 1.5.3 Étalement de spectre par séquence chaotique directe

Dans la section 1.4 plusieurs systèmes d'étalement de spectre ont fait l'objet d'une présentation introductive. Ces méthodes ont aussi un équivalent dans le cas des systèmes de transmission chaotiques, de façon qu'on remplace le générateur de séquences pseudo-aléatoires par une dynamique chaotique. Bien sûr pour trouver un intérêt économique les séquences d'étalement doivent prouver qu'elles offrent de meilleures performances que les codes classiques (séquences de longueur maximale).

En général, l'étalement de spectre par séquence chaotique direct, revient à remplacer directement la séquence d'étalement binaire générée par des registres à décalage, par une séquence chaotique des valeurs réelles comprises dans un intervalle bien précisé (fig

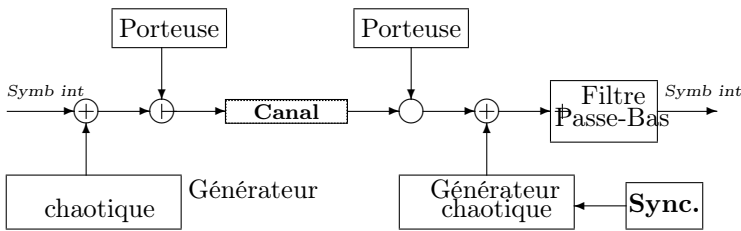


FIGURE 1.17 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence chaotique.

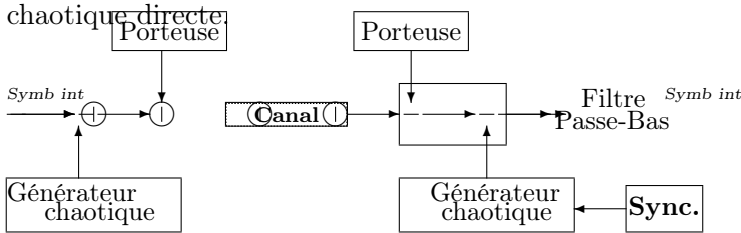


FIGURE 1.18 – Modèle d'un système de communication à étalement de spectre par séquence chaotique directe.

1.18). Les solutions proposées sont introduites surtout pour augmenter les capacités en accès multiple. Initialement les premières variantes envisagent l'emploi de séquences d'étalement analogiques [YC97, KJANC00] où le code d'étalement représente un état correspondant à une dynamique chaotique multi-dimensionnelle. L'avantage essentiel d'une telle solution réside dans la simplicité du système final, en ajoutant qu'en fonction de la dynamique, un système d'étalement du code auxiliaire doit être employé pour atteindre une largeur de bande désirée.

Un deuxième point a été représenté par l'introduction de code d'étalement en temps discret qui permet un contrôle beaucoup plus important des propriétés statistiques du code d'étalement. On peut ainsi envisager deux options : La première suppose un code d'étalement chaotique où le plus souvent la longueur du code chaotique est égale au gain d'étalement et aussi une deuxième solution non périodique où le code d'étalement est considéré de longueur infinie (fig 1.19). L'avantage de la solution périodique est donné par l'emploi des mêmes systèmes qui assurent la synchronisation au sein des systèmes à étalement de spectre classiques.

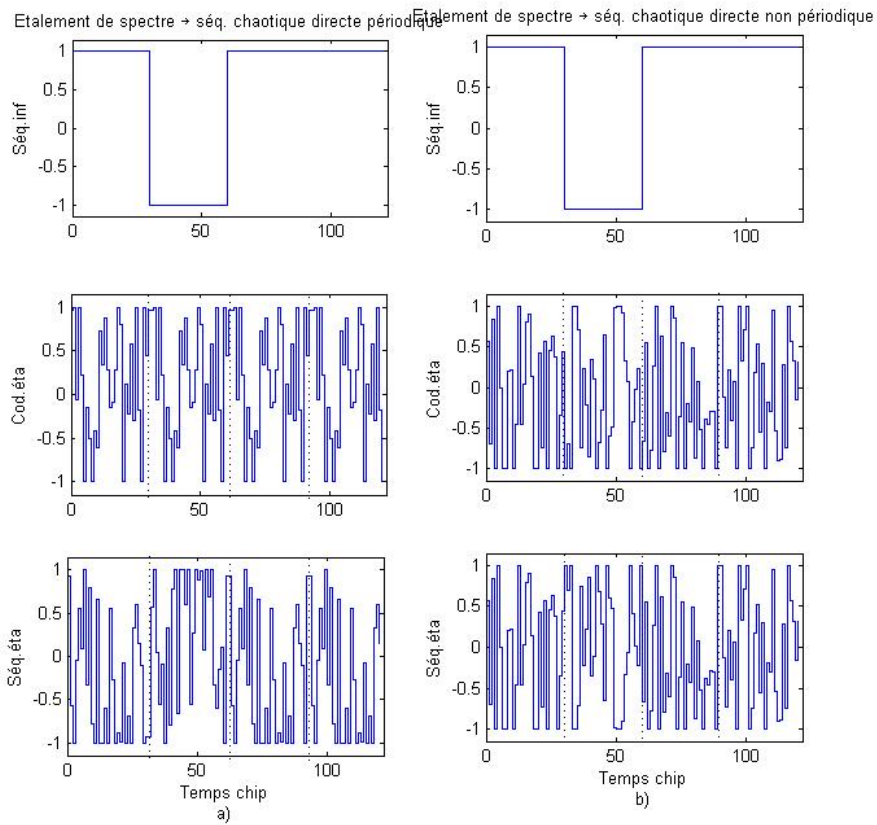


FIGURE 1.19 – Exemple d'étalement de spectre par séquence chaotique directe : a) séquence périodique sur la durée symbole ; b) séquence non périodique.



## 1.6 Conclusion

Ce chapitre avait comme objectif l'état de l'art sur les systèmes chaotiques dans le domaine de télécommunications. Dans la première section les définitions des systèmes dynamiques non-linéaires en temps continu et discret ont été données. Par la suite on a présenté les descriptions détaillées des méthodes envisageables pour établir éventuellement une synchronisation entre deux systèmes. La présentation des solutions classiques d'étalement de spectre a été donnée dans la troisième section et finalement on a introduit les méthodes les plus connues de transmission à porteuse chaotique.

Dans le chapitre suivant on va se consacrer à l'étude de la synchronisations en présence du bruit, la solution correspond à l'estimation non-linéaire.

# Chapitre 2

## Synchronisation du chaos en présence du bruit

---

### 2.1 Introduction

La synchronisation chaotique en présence du bruit a joué un rôle important durant cette dernière décennie, dans les systèmes de communication chaotiques. En générale les premiers travaux théoriques sur la synchronisation chaotique n'ont pas pris le terme bruit en considération [PC90, Has97, Has98]. Par la suite et vue l'intérêt du propriété du signal chaotique, l'idée d'utiliser un oscillateur chaotique couplé est introduite dans le domaine de télécommunication [Has98, COS93a]. Par conséquent, l'addition du bruit au canal de transmission est évidente, ceci va sans doute diminuer les performances du canal. Cependant ce problème de synchronisation prend sa place dans la théorie du contrôle des systèmes dynamiques et peut être vu comme l'estimation d'état d'un système stochastique, i.e. il faut penser à introduire la notion de filtrage pendant la phase de synchronisation. L'idée de base revient donc à utiliser le filtre de Kalman (KF - Kalman Filtre) qui 'est considéré comme une technique de référence, mais il est limité aux systèmes linéaires [Kal60, GSS93, BSL93]. Malheureusement, la plupart des systèmes d'ingénierie ne sont pas linéaires. Le filtre n'est donc optimal même sur une petite plage linéarisée des phénomènes réels.

Une grande variété de filtres de Kalman non-linéaire ont été, depuis, développés à partir de la formulation originale dite filtre de Kalman classique. Parmi les nombreuses solutions non- optimales disponibles, le filtre de Kalman étendu *EKF* (Extended Kalman Filter) reste une solution populaire car il évite le coût de calcul important habituellement exigé par d'autres approche telles que le filtre à particule [MW03]. Bien

que couramment utilisé,  $EKF$  n'est pas idéal car il propage la moyenne à travers les équations non linéaires, alors que la covariance est obtenue avec les matrices linéarisées. Ainsi, en cas de comportement fortement non linéaire durant le pas de temps d'intégration, ce type de filtre s'avère inexacte car une approximation par le développement en série de Taylor de premier ordre est effectuée. Dans ce cas, (Gelb et al)[GSS93] ont proposé le filtre de Kalman étendu itératif ( $IEKF$ ) dont l'objectif est de diminuer les erreurs introduites pendant la linéarisation. De plus, la linéarisation des modèles peut s'avérer complexe. C'est pourquoi, afin de pallier ces problèmes, le filtre de Kalman "Unscented"  $UKF$  a été développé par Julier et Uhlmann [JU97]. pour s'affranchir de la linéarisation du modèle dynamique et de mesures. En effet, il aborde l'approximation d'une manière différente du  $EKF$ . Ainsi, même s'il utilise une hypothèse gaussienne pour les états, la propagation des deux premiers statistiques est effectuée par le modèle de prédiction non linéarisé. Dans la même direction pour établir une forme plus canonique en cherchant une autre variante d'optimalité, Noorgan et *al.* [?] avaient suggéré via la relation de Stirling l'approximation polynomiale des fonctions décrivant le comportement du modèle et en fonction de l'ordre de l'approximation polynomiale, deux variantes de filtrage de Kalman ont été étudiées : La première (DD1- Divided Différence 1er ordre) qui utilise une approximation au premier ordre de la non-linéarité [Sch97], la deuxième solution (DD2) considérée une approximation au deuxième ordre dans la relation de Stirling et par conséquent offre de meilleures performances d'estimation.

Dans ce chapitre nous allons présenter synthétiquement ces divers solutions de filtrage de Kalman non-linéaire en commençant dans un premier temps par donner le principe de filtre de Kalman (KF).

### 2.1.0.1 *Modèle général de Kalman*

Le filtre de Kalman est basé sur un modèle d'état linéaire qui met en équation l'évolution du signal utile, et sa relation au signal mesuré ainsi que sur un critère d'optimisation qui exploite l'observation à l'instant courant. Le filtre obtenu par Kalman est récursif, sa réponse en chaque instant n'est en effet fonction que du signal observé en son entrée et de sa réponse à l'itération précédente. Ainsi, le filtre de Kalman ne nécessite pas toutes les données passées pour produire une estimation à l'instant courant. Il ne nécessite donc pas de mise en mémoire et de retraitement des données. Cet avantage rend possible l'implémentation du filtre de Kalman pour des applications en temps réel.

On considère le modèle d'estimation suivant :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Fx_k + \eta_k \\y_k &= Hy_k + \nu_k\end{aligned}\tag{2.1}$$

où  $F$  et  $H$  désignent des fonctions linéaires et les bruits additifs  $\eta_k$ ,  $\nu_k$  sont considérés centrés, gaussiens et non-corrélés.

Dans l'estimateur récursif de Kalman, seuls l'estimation de l'état précédent et les mesures actuelles sont nécessaires. L'historique des observations et des estimations n'est ainsi pas requis. L'état du filtre est représenté par :

1.  $\hat{x}_{k/k}$ , l'estimation de l'état à l'instant  $k$  ;
2.  $P_{k/k}$ , la matrice de covariance

Généralement l'estimation est récursivement obtenu dans deux phases :

1. **Phase de Prédiction** : Cette phase utilise l'état et la covariance estimés de l'instant précédent ( $k-1$ ) : ( $\hat{x}_{k-1/k-1}$ ) et  $P_{k-1/k-1}$  pour prédire l'état la covariance courantes :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k/k-1} &= F\hat{x}_{k-1/k-1} \\P_{k/k-1} &= FP_{k-1/k-1}F^T + Q\end{aligned}\tag{2.2}$$

avec

–  $Q$  : matrice de covariance du bruit dynamique  $\eta_k$

2. **Phase de correction** Dans cette étape de correction, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise.

$$\begin{aligned}\tilde{y}_k &= y_k - H\hat{x}_{k/k-1} \\P_{y_k} &= HP_{k/k-1}H^T + R \\K_k &= P_{k/k-1}H^T P_{y_k}^{-1} \\\hat{x}_{k/k} &= \hat{x}_{k/k-1} + K_k \tilde{y}_k \\P_{k/k} &= (I - K_k H)P_{k/k-1}\end{aligned}\tag{2.3}$$

–  $R$  : matrice de covariance du bruit de canal  $\nu_k$

## 2.2 Estimation non-linéaire

Comme nous avons mentionné ci dessus, le filtre de Kalman est limité aux systèmes linéaires. Cependant, la plupart des phénomènes physiques sont non linéaires, le filtre n'est donc pas optimal. Par conséquent l'estimation d'état d'un système non linéaire devient un sujet d'actualité qui a un intérêt croissant dans le développement des techniques d'approximation de la statistique du processus. Depuis, l'estimateur optimal d'état repose sur la fonction de densité de probabilité analytique *pdf* pour prédire les états, par la suite il utilise la règle de Bayes [BSF88] en tenant compte des observations pour les corriger. Bien qu'il permet d'aboutir à de meilleurs résultats, l'opération de stockage et l'intégration de la fonction *pdf*, rend souvent l'algorithme impraticable, Ce qui entraîne à mettre l'accent sur ce domaine de recherche pour élaborer d'autres algorithmes pouvant approximer plus précisément que possible la moyenne et la covariance de la variable transformée.

### 2.2.1 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu (*EKF*) est chronologiquement la première adaptation algorithmique du filtre de Kalman (*KF*) au problèmes non linéaire. il est très répandu en estimation recursive de variables d'état et de leur covariance. Dans cette approche, les modèles d'évolution et d'observation ne sont plus des fonctions linéaires mais peuvent à la place être des fonctions non linéaires (*différentiables*).

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k) + \eta_k \\ y_k &= h(x_k) + \nu_k\end{aligned}\tag{2.4}$$

La fonction  $f$  peut être utilisée pour calculer l'état prédit à partir de l'état estimé précédent et, semblablement, la fonction  $h$  peut être employée pour calculer l'observation prédite de l'état prédit. Cependant,  $f$  et  $h$  ne peuvent pas être appliqués directement au calcul de la covariance, c'est pour ça cette solution repose sur le principe d'approximer les fonctions non linéaires par linéarisation autour de l'estimation courante afin de pouvoir calculer une matrice des dérivées partielles : La Jacobienne, puis appliquer le filtre de Kalman classique. Le schéma général qui présente l'algorithme de filtre de Kalman étendu est donné sur la figure (Fig. 2.1)

Cet algorithme est écrit sous la forme de deux transformations successives, l'une pour implémenter les équations de mise à jour temporelle ou de prédiction et l'autre

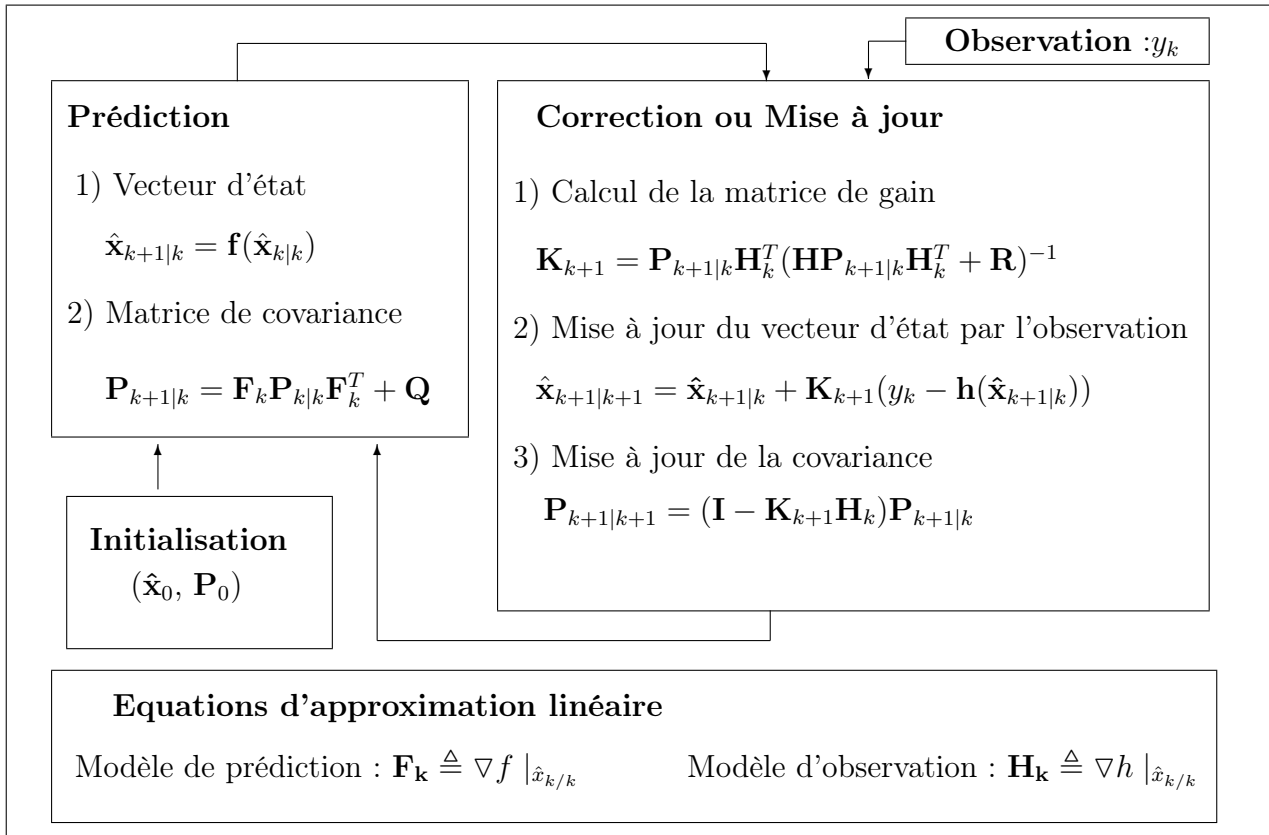


FIGURE 2.1 – Algorithme récursive et Equations de filtre de Kalman étendu.

pour la propagation de la statistique de l'état prédit à travers le modèle d'observation. En utilisant en même temps l'observation courante  $y_k$ .

A cause de l'effet de la non-linéarité du modèle dynamique et/ou de mesure le calcul successif des moyennes et covariances à chaque étape va dégrader ses performances. On ne va pas s'intéresser à l'étude des inconvénients de cet algorithme qui est déjà abordé dans des travaux ultérieurs et qui ont prouvé que même pour une "faible" non-linéarité la transformation basée sur la linéarisation au premier ordre peut présenter des erreurs importantes d'estimation, pour plus de détail le lecteur intéressé peut voir la référence [Bog06].

Pour cette raison le filtre de Kalman étendu itératif (ou en anglais *the iteret Extended Kalman Filter*) "IEKF" va être introduit dans le paragraphe suivant pour améliorer le processus d'estimation.

### 2.2.1.1 Amélioration de l'estimation par le filtre IEKF

Dans cette méthode [GSS93] le processus d'estimation correspond au calcul des états prédits  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$ ,  $\mathbf{K}_{k+1}$  et  $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$ , en effectuant à chaque fois une linéarisation

autour de l'état le plus récent. L'algorithme correspondant à cette méthode utilise les notations :

$\hat{x}_{k+1/k+1}^{\{i\}}$ ,  $K_{k+1}^{\{i\}}$  et  $P_{k+1/k+1}^{\{i\}}$  pour désigner les paramètres estimés à la  $i^{me}$  itération de chaque étape. En appliquant le même principe que celui de l'*EKF* les équations de récurrence pour le filtre *IEKF* sont :

1. Initialisation du filtre :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1/k+1}^{\{0\}} &= \hat{x}_{k+1/k} \\ P_{k+1/k+1}^{\{0\}} &= P_{k+1/k}\end{aligned}\quad (2.5)$$

2. Calcul récursif de  $\hat{x}_{k+1/k+1}^{\{i\}}$ ,  $K_{k+1}^{\{i\}}$  et  $P_{k+1/k+1}^{\{i\}}$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1/k+1}^{\{i+1\}} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}^{\{i\}} \left( y_k - h \left( \hat{x}_{k+1/k+1}^{\{i\}} \right) - H_{k+1,i} \left( \hat{x}_{k+1/k} - \hat{x}_{k+1/k+1}^{\{i\}} \right) \right) \\ K_{k+1}^{\{i\}} &= P_{k+1/k} H_{k+1,i}^T \left( H_{k+1,i} P_{k+1/k} H_{k+1,i}^T + R \right)^{-1} \\ P_{k+1/k+1}^{\{i\}} &= \left( I - K_{k+1}^{\{i\}} H_{k+1,i} \right) P_{k+1/k}\end{aligned}\quad (2.6)$$

3. Récupération des états estimés, après la  $i$ -ème itérations :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1/k+1} &= \hat{x}_{k+1/k+1}^i \\ P_{k+1/k+1} &= P_{k+1/k+1}^i\end{aligned}\quad (2.7)$$

Un critère d'optimisation est choisi selon le nombre des itérations " $i$ " à effectuer pour chaque étape d'estimation. En même temps il faudrait jouer sur le coût total de calcul nécessaire à la mise en oeuvre du filtre.

Dans la section suivante, une nouvelle transformation pour la moyenne et la covariance va être introduite pour s'affranchir de la linéarisation.

### 2.2.2 Filtre de Kalman via la transformation *Unscented*

Le filtre de Kalman *unscented* qui a été introduit par Julier [JU97] permet de s'affranchir de la linéarisation du modèle de prédiction et de mesures. En effet il repose sur une transformation non linéaire dite "Unscented transformation", dans laquelle la distribution de probabilité de l'état est représenté par un jeu de points (sigma points) choisi pour Paramétriser la moyenne et la covariance de la distribution. Cet ensemble de points sont ensuite propagé dans le modèle de prédiction non linéarisé, la moyenne ainsi que la covariance a posteriori sont approximées au deuxième ordre de l'expansion en série de Taylor.

### 2.2.2.1 Transformation Unscented UT et Choix du sigma points :SPs

Suite au constat de filtres *EKF* et *IEKF* et afin de représenter au mieux la distribution des erreurs, il convient de choisir adéquatement un ensemble de points  $X_i$  ainsi que les poids qui leur sont associés  $W_i$ . La construction des sigma points repose sur le principe de la transformation unscented.

On considère la fonction non linéaire  $h \rightarrow y = h(x)$  de la variable aléatoire  $x \in R^n$  de moyenne  $\bar{x}$  et covariance  $P_{xx}$ . Pour calculer la statistique de la variable  $y$  qui a été subi la transformation  $h$ , un jeu de  $(2n + 1)$  sigma points doit être formulée :

$$\begin{aligned}
 X_0 &= \bar{x} & W_0 &= \kappa/(n + \kappa) \quad i = 0 \\
 X_i &= \bar{x} + (\sqrt{(n + \kappa)P_{xx}})_i & W_i &= 1/2(n + \kappa) \quad i = 1, \dots, n \\
 X_i &= \bar{x} - (\sqrt{(n + \kappa)P_{xx}})_{i-n} & W_i &= 1/2(n + \kappa) \quad i = n + 1, \dots, 2n
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

où  $\kappa$  est un paramètre d'échelle utilisé pour limiter la dispersion des points dans l'espace d'état et  $(\sqrt{(n + \kappa)P_{xx}})_i$  représente la  $i^{me}$  ligne ou colonne de la matrice carrée, et  $W_{(i)}$  est le poids associé. Ces vecteurs de sigma points sont propagés sans linéarisation par :

$$Y_i = h(X_i) \quad i = 0, \dots, 2n \tag{2.9}$$

par conséquent la moyenne et la covariance estimées de  $y$  sont ensuite approximées respectivement en utilisant les sigma points déterminés précédemment :

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i Y_i \\
 P_{yy} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i (Y_i - \bar{y})(Y_i - \bar{y})^T
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dans la définition de l'ensemble des sigma points (2.8) par la transformation *UT* le choix du paramètre  $\kappa$  fournit un extra degré de liberté de tel sorte qu'il capture l'influence des moments supérieurs sur l'approximation, comme il permet aussi de limiter la dispersion des points dans l'espace d'état en cas où le modèle est fortement non linéaire. Ainsi la distance des sigma points  $X_i$  par rapport à  $\bar{x}$ ,  $|X_i - \bar{x}|$  est proportionnelle à la valeur  $\sqrt{(n + \kappa)}$ . Alors quand  $\kappa = 0$  la distance est proportionnelle à  $\sqrt{n}$ , tandis que si  $\kappa > 0$  les points s'éloignent de la moyenne  $\bar{x}$ , et avec une valeur strictement négative



de  $\kappa$ , on retrouve un effet de rapprochement vers  $\bar{x}$ . Quoique le paramètre  $\kappa$  peut être positif ou négatif, une valeur négative peut conduire à l'obtention d'une matrice de covariance semi-définie négative. Pour cette raison la transformation "*Sigma Point Scaling Methods*" introduite dans le paragraphe suivant va s'occuper à l'étude de la matrice de covariance non- positive.

### 2.2.2.2 Méthode des Sigma point Scaling

Cette transformation [JUDW00] qui porte aussi le nom de "*Scaled Unscented Transformation (SUT)*" est une généralisation de la transformation Unscented *UT* modifiée et non modifiée. La solution proposée repose sur l'idée qui consiste à remplacer le jeu original des sigma points avec un autre ensemble transformé qui pourrait satisfaire à la condition suivante :

$$X'_i = X_i + \alpha(X_i - X_0) \quad (2.11)$$

Le paramètre positif  $\alpha$  est un paramètre d'échelle qui normalise la répartition des sigma points autour de  $\bar{x}$  et qui peut prendre une valeur suffisamment petite ( $10^{-4} \leq \alpha \leq 1$ ) de sorte que les termes d'ordre supérieurs ne sont pas affectés par le filtre. Ainsi l'ensemble des sigma points  $S = \{W, X\}$  qui a été défini par l'équation (2.8) est transformé en un ensemble normalisé  $S' = \{W', X'\}$  donné par

$$W'_i = \begin{cases} W_0/\alpha^2 + (1 - 1/\alpha^2) & i = 0 \\ W_i/\alpha^2 & i \neq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

ensuit la statistique de la moyenne et de la covariance de  $y$  sont calculées analytiquement par :

$$Y'_i = h(X_i) \quad (2.13)$$

$$\bar{y}' = \sum_{i=0}^{2n} W'_i Y'_i \quad (2.14)$$

$$P'_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W'_i \{Y'_i - \bar{y}'\} \{Y'_i - \bar{y}'\}^T + (1 + \beta - \alpha^2) \{Y'_i - \bar{y}'\} \{Y'_i - \bar{y}'\}^T \quad (2.15)$$

où le paramètre  $\beta$  est choisi positif et qui contient de l'information sur la distribution des erreurs. une valeur de  $\beta = 2$  correspond à une distribution gaussienne. La formule

de sélection des sigma points et le paramètre de contrôle  $\alpha$  peuvent être combinés dans un unique paramètre  $\lambda$  par la mise en :

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n. \quad (2.16)$$

Alors, cet ensemble de sigma points qui mise à l'échelle par le nouveau paramètre  $\lambda$  s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} X_0 = \bar{x} & i = 0 \\ X_i = \bar{x} + \left( \sqrt{(n + \lambda) P_{xx}} \right)_i, & i = 1, \dots, n \\ X_i = \bar{x} - \left( \sqrt{(n + \lambda) P_{xx}} \right)_{i-n}, & i = 1 + 1, \dots, 2n \end{cases} \quad (2.17)$$

les poids  $W_i^{(m)}$  et  $W_i^{(c)}$  correspondants respectivement au calcul de la moyenne et de la covariance a posteriori, s'expriment par les deux équations suivantes :

$$W_i^{(m)} = \begin{cases} \lambda/n + \lambda & i = 0 \\ 1/\{2(n + \lambda)\} & i = 1, \dots, 2n \end{cases} \quad (2.18)$$

$$W_i^{(c)} = \begin{cases} \lambda/(n + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) & i = 0 \\ 1/\{2(n + \lambda)\} & i = 1, \dots, 2n \end{cases} \quad (2.19)$$

Même si la transformation scaled unscented offre les mêmes performances en terme du coût de calcul que le filtre du second ordre tronqué comme un filtre de Kalman étendu dans les applications temps-réel, cependant, il est essentiel que les coûts de calcul et de stockage sollicités doivent être minimisés. Julier dans son papier [Jul98] a proposé une solution de calcul plus efficace, ainsi ce principe avait permis de réduire le nombre de points de regression de  $2n + 1$  sigma points à  $n + 1$ . Ces nouveaux sigma points sont appelés *simpler sigma point*.

Pour illustrer les performances de cette nouvelle transformation définie par le choix de l'ensemble de ces paramètres :  $\{\kappa = 0, \alpha = 10^{-3}, \beta = 2\}$ , on va prendre la fonction non-linéaire  $f(x) = \cos x$ , avec  $x$  possédant pour paramètres de distribution initiale  $\mu = -0.5$ ,  $\sigma = 0.05$ . On peut observer sur la Table (2.1) que la transformation *Unscented* arrive à mieux estimer les deux premier moments, mais par contre avec l'augmentation de l'ordre de la non-linéarité cette transformation présente des erreurs. . Les résultats sont issus d'une simulation de type Monte-carlo avec la propagation d'une séquence aléatoire de  $10^6$  échantillons.

Fonction non-linéaire $f(x)c $	$x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$		$y = f(x) - \text{EKF}$		$y = f(x) - \text{UsKF}$		$y = f(x) - \text{MC}$	
	$\mu_x$	$\sigma_x^2$	$\mu_y$	$\sigma_y^2$	$\mu_y$	$\sigma_y^2$	$\mu_y$	$\sigma_y^2$
$f(x) = \cos x$	-0.7	0.0125	0.7648	0.0052	0.7601	0.0052	0.9704	0.0052
$f(x) = \cos x$	-0.6	0.025	0.8253	0.0080	0.8150	0.0082	0.8151	0.0090
$f(x) = \cos x$	-0.5	0.05	0.8776	0.0011	0.8556	0.0124	0.8560	0.01185
$f(x) = \frac{1}{2}(4x^2 - 3x + 1)$	-0.1	0.05	0.648	0.1037	0.6180	0.1055	0.6180	0.0697

TABLE 2.1 – Performances des transformations EKF et Unscented pour différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité

### 2.2.2.3 Le modèle d'estimation récursive UsKF

Dans cette section, la transformation Scaled unscented qui permet de paramétriser la moyenne et la covariance de l'état du système en question, est appelé comme une nouvelle stratégie directe dans l'estimation récursive des deux modèles de prédiction et de mesure, dans cette approche nommée aussi le filtre de Kalman Scaled Unscented [JUDW00, Mer04] le vecteur d'état original  $x_k \in R^n$  est augmenté en ajoutant les vecteurs associés aux bruits dynamique  $\eta_k \in R^r$  et de mesure  $\nu_k \in R^q$ , notons que ces bruits additifs  $\{\eta_k, \nu_k\}$  sont considérés centrés, gaussiens, non corrélés et associés aux covariances  $Q$  et  $R$  respectivement. Le vecteur final et la matrice de covariance sont écrits sous la forme suivante :

$$x_k^a = \begin{bmatrix} x_k \\ \nu_k \\ \eta_k \end{bmatrix}; P_{k/k}^a = \begin{bmatrix} P_{k/k} & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Etant données les nouvelles notations, le modèle d'estimation récursif peut être écrit sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} x_{k+1}^a &= f^a(x_k^a) \\ y_k &= h^a(x_k^a) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le jeu de  $\{2(n + q + r) + 1\}$  des sigma points de l'état augmenté est construit en implémentant la transformation nonlinéaire définie par l'équation (2.17) au système donné par (2.20). Alors le filtre de Kalman unscented peut maintenant être facilement déduit à partir d'étapes de prédiction-corréction de l'algorithme de *EKF* (Fig.2.1). Quant à la propagation de l'état, le vecteur d'état prédit  $\hat{x}_{k+1}^-$  et sa covariance  $P_{k+1}^-$  sont obtenues en appliquant l'une des transformations unscented proposées :

$$\begin{aligned}
X_{i,k+1}^a &= f^a(X_{i,k}^a) \\
\hat{x}_{k+1}^- &= \sum_{i=0}^{2(n+q+r)} W_i^{(m)} X_{i,k+1} \\
P_{k+1}^- &= \sum_{i=0}^{2(n+q+r)} W_i^{(c)} \{X_{i,k+1}^a - \hat{x}_{k+1}^-\} \{X_{i,k+1}^a - \hat{x}_{k+1}^-\}^T
\end{aligned} \tag{2.22}$$

et d'une façon similaire, le vecteur prédit d'observation  $\hat{y}_{k+1}^-$  et sa covariance prédite  $P_{k+1}^{yy}$  sont aussi calculés :

$$\begin{aligned}
Y_{i,k+1}^a &= h^a(X_{i,k+1}^a) \\
\hat{y}_{k+1}^- &= \sum_{i=0}^{2(n+q+r)} W_i^{(m)} Y_{i,k+1} \\
P_{k+1}^{yy} &= \sum_{i=0}^{2(n+q+r)} W_i^{(c)} \{Y_{i,k+1}^a - \hat{y}_{k+1}^-\} \{Y_{i,k+1}^a - \hat{y}_{k+1}^-\}^T
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Puisque le bruit d'observation est ajouter independement, la covariance d'innovation  $P_{k+1}^y$  s'exprime comme suit :

$$P_{k+1}^y = P_{k+1}^{yy} + R \tag{2.24}$$

et la matrice d'intercorrelation  $P_{k+1}^{xy}$  est exprimée par :

$$P_{k+1}^{xy} = \sum_{i=0}^{2(n+q+r)} W_i^{(c)} \{X_{i,k+1}^a - \hat{x}_{k+1}^-\} \{Y_{i,k+1}^a - \hat{y}_{k+1}^-\}^T \tag{2.25}$$

soit donc le gain  $K_{k+1}$  du filtre :

$$K_{k+1} = \{P_{k+1}^{xy}\} \{P_{k+1}^y\}^{-1} \tag{2.26}$$

finalement l'état estimé peut alors être corrigé par l'équation de mise à jour :

$$x_{k+1}^{\hat{+}} = x_{k+1}^{\hat{-}} + K_{k+1} \{y_{k+1}^- - \hat{y}_{k+1}^-\} \tag{2.27}$$

### 2.2.3 Filtre Unscented Augmenté : HOUF

La transformation Unscented étudié dans les paragraphes précédents est implicitement la structure de Kalman qui offert la même précision de l'estimation de la moyenne

et la covariance de la distribution transformée par un modèle non linéaire linéarisé jusqu'à deuxième ordre dans la série de Taylor. Tenne et Singh sont les premiers à s'interroger sur la possibilité d'améliorer l'approximation des moments supérieurs à l'aide d'un ensemble modifié de sigma points (*Sigma points*) en proposant le *Higher Order Unscented Filter : (HOUF)* [DT03].

Le nouvel ensemble de *Sigma points* se forme, avec les relations suivantes :

$$\zeta_0 = \bar{X} \quad (2.28)$$

$$\zeta_i = \zeta_0 + \sqrt{m + \kappa} \sigma_i \quad (2.29)$$

$$\text{pour } \sigma_i = \pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \dots, \pm\sigma_m,$$

où  $m = n + q$  est la dimension augmentée de l'espace d'état et  $q$  est le nombre de sigma point ajoutés. Les propriétés statistiques de cet ensemble de point  $\sigma$ -set sont définies par les sommes pondérées :

$$\bar{\zeta} = \sum_{i=0}^{2m} w_i \zeta_i \quad (2.30)$$

$$\mu_{\zeta}^j = \sum_{i=0}^{2m} w_i (\zeta_i - \bar{\zeta})^j \quad (2.31)$$

où  $\bar{\zeta}$  et  $\mu_{\zeta}^j$  représentent la moyenne et le  $j^{ime}$  moment et les statistiques  $\sigma_i = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  sont choisis d'une manière similaire à celle de *UT*.

### 2.2.3.1 Étude du Filtre :2- $\sigma$ HOUF

Dans cet exemple le filtre HOUF va être examiné avec deux  $\sigma$ 's,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Par allongement des équations 2.30 et 2.31 jusqu'au huitième moment, on obtient les relations suivantes :

$$1 = w_0 + 2w_1 + 2w_2 \quad (2.32)$$

$$P_x = 2(m + \kappa)(w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2) \quad (2.33)$$

$$\mu_x^3 = 0 \quad (2.34)$$

$$\mu_x^4 = 2(m + \kappa)^2(w_1\sigma_1^4 + w_2\sigma_2^4) \quad (2.35)$$

$$\mu_x^5 = 0 \quad (2.36)$$

$$\mu_x^6 = 2(m + \kappa)^3(w_1\sigma_1^6 + w_2\sigma_2^6) \quad (2.37)$$

$$\mu_x^7 = 0 \quad (2.38)$$

$$\mu_x^8 = 2(m + \kappa)^4(w_1\sigma_1^8 + w_2\sigma_2^8) \quad (2.39)$$

où  $\mu_x^i$  est le  $i^{me}$  moment central de la variable  $X$ . Par connaissance des moments a priori on est en mesure de résoudre les  $\sigma$ -points  $\sigma_i$ , les poids  $w_i$  et le paramètre  $\kappa$ . Mais une solution générale pour toute distribution initiale devient assez difficile à déterminer. La transformation suivante en combinaison avec la condition requise de la (*UTF*) :  $m + \kappa = 3$ , conduit à une solution prête dans le cas particulier des moments gaussiens.

$$w'_1 = 2(m + \kappa)w_1 \quad w'_2 = 2(m + \kappa)w_2$$

Les équations (2.32 à 2.39) peuvent donc être réécrites comme suit :

$$m + \kappa = (m + \kappa)w_0 + w'_1 + w'_2 \quad (2.40)$$

$$P_x = w'_1\sigma_1^2 + w'_2\sigma_2^2 \quad (2.41)$$

$$3P_x^2 = w'_1\sigma_1^4 + w'_2\sigma_2^4 \quad (2.42)$$

$$\frac{5}{3}P_x^3 = w'_1\sigma_1^6 + w'_2\sigma_2^6 \quad (2.43)$$

$$\frac{35}{9}P_x^4 = w'_1\sigma_1^8 + w'_2\sigma_2^8, \quad (2.44)$$

ce qui donne un système de 5 équations pour les 5 paramètres inconnus.

Contrairement au filtre *UKF*, qui considère la même pondération  $w_i$  pour tous  $\zeta_i$ , la résolution du système (2.40 à 2.44) nécessite deux indépendantes pondérations  $w_1$  et  $w_2$ . En supposant que  $w_1 = w_2$ , ainsi le système (2.32 à 2.39), devient :

$$\frac{15}{(m + \kappa)^2}P_x^3 = (\sigma_1^2)^3 + (\sigma_2^2)^3, \quad (2.45)$$

qui selon le théorème de Fermat [And95] n'a aucune solution entière non nulle  $P_x, \sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$ . Cependant, on obtient les relations suivantes pour le calcul des positions et des pondérations :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \left( \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{10}{9}} \right) P_x \\ \sigma_2^2 &= \frac{10}{3} P_x - \sigma_1^2 \\ w^{(1)} &= \frac{1}{60} \frac{21\sigma_1^2 - 55P_x}{3\sigma_1^2 - 5P_x} \\ w^{(2)} &= \frac{1}{3} \frac{3P_x(\sigma_1^2 - P_x)}{(3\sigma_1^2 - P_x)(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)} \\ w^{(0)} &= 1 - 2(w^{(1)} + w^{(2)}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\kappa$
1.6459	0.7827	0.5333	0.0113	0.2221	1
0.7827	1.6495	0.5333	0.2221	0.0113	1

TABLE 2.2 – Solutions du Filtre Unscented d'ordre superieur

$P_x = 1$	Moments							
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$	$m_8$
Variable $X$	0	1	0	3	0	15	0	105
Variable transformée : $Y =  X $								
<i>MC</i>	0.7980	1.0005	1.5971	3.0035	6.3926	15.0283	38.2514	104.8600
<i>UF</i>	0.5774	1.0000	1.7321	3.0000	5.1962	9.0000	15.5885	27.0000
<i>HOUF</i>	0.6667	1.0007	1.63351	3.0056	6.3351	15.0467	38.8505	105.3871

TABLE 2.3 – Moments de la variable transformée obtenues par les algorithmes :*MC*,*UF* et *HOUF*

### 2.2.3.2 Comparaison de performance du UKF et du 2- $\sigma$ HOUF

Afin de tester la performance du du Filtre :2- $\sigma$  *HOUF* avec un modèle à comportement non linéaire, on a implémenté l'algorithme dans le cas de la transformation non linéaire suivante :

$$Y = |X|, \quad (2.47)$$

sous l'hypothèse gaussienne de  $X$ , c'est un fait bien connu que la variable transformé  $Y$  n'étant pas guasien, ainsi on peut remarquer que ses moments d'ordre impaire sont tous non nuls. Des simulations Monte Carlo (MC) ont été réalisées sur 25 million échantillons et le résultat des moments obtenue est illustré sur le tableau 2.3. Pour  $\kappa = 1$  les paramètres associés au filtre **HOUF** sont dérivés à partir de l'équation 2.46 et ils sont rangés au tableau 2.2

Les résultats présentés sur le tableau 2.3 permettent de comparer le fonctionnement des deux filtres. Les moments d'ordre paire associés au **UF** s'accordent avec ceux de **MC** jusqu'à seulement l'orde quatre, tandis que les moments d'ordre impair diffèrent. Quant au filtre **HOUF**, même qu'il respecte plusieurs contraintes, les moments quoique paire ou impaire se rapprochent étroitement.

upposé respecter plusieurs contraintes pour une estimation correcte

### 2.2.4 Filtres CDKF et Divided Difference Filter

L'algorithme proposé dans ce paragraphe est une solution développée initialement par Norgaad et al [PNR00, ?] pour contourner le problème du calcul de dérivés partielles et de stabilité rencontrés dans le cas de filtre de Kalman étendu. Ainsi le *Divided Filter* proposé par Norgaad et al [PNR00, ?] et le *CDKF Central Difference Kalman Filter* proposé par Ito et Xiong [IX00] utilisent la formule d'interpolation polynomiale de Stirling pour approximer la non-linéarité du modèle. Comme le fait remarquer Van Der Merwe [Mer04], ces deux structures sont presque identiques et peuvent être désignées simplement sous le nom de (*CDKF*).

#### 2.2.4.1 Formule d'interpolation polynomiale de Stirling

Dans ce paragraphe une alternative de linéarisation par l'interpolation avec la formule de Stirling est présentée pour une approximation au deuxième ordre, avec une hypothèse de fonction mono-dimensionnelle, un développement en série Taylor est nécessaire :

$$f(x) = f(\bar{x}) + \tilde{D}_{\Delta_x} f + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 f \quad (2.48)$$

où  $f(\cdot)$  est la fonction non-linéaire et où  $\tilde{D}_{\Delta_x} f$ ,  $\tilde{D}_{\Delta_x}^2 f$  représentent les équations d'accroissement centré du premier et deuxième ordre respectivement, appliqués à la fonction  $f(\cdot)$ . Dans le cas scalaire, ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\Delta_x} f &= (x - \bar{x}) \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h} \\ \tilde{D}_{\Delta_x}^2 f &= (x - \bar{x})^2 \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h) - 2f(\bar{x})}{h^2} \end{aligned} \quad (2.49)$$

où  $h$  est la longueur de l'intervalle choisi, pour accomplir l'approximation. Pour le cas multi-dimensionnel, la solution proposée est de découpler statistiquement la (v.a)  $x$  initiale en utilisant la transformation linéaire suivante [Sch97] :

$$\begin{aligned} z &= S_x^{-1} x \\ f(\tilde{z}) &= f(S_x z) = f(x) \end{aligned} \quad (2.50)$$

où  $S_x$  représente la matrice obtenue par la factorisation Cholesky de la matrice de covariance  $P_x$  :

$$P_x = S_x S_x^T \quad (2.51)$$

Ces décompositions permettent l'application de l'approximation réalisée antérieurement, dans le cas multidimensionnel indépendamment pour chaque composante de la fonction  $\tilde{f}(z)$  [Mer04] :



$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{\Delta_x} \tilde{f} &= \left( \sum_{i=1}^{N_x} \Delta_{z_i} m_i d_i \right) \tilde{f}(\bar{z}) \\
\tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} &= \left( \sum_{i=1}^{N_x} \Delta_{z_i}^2 d_i^2 + \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{q=1, q \neq j}^{N_x} \Delta_{z_j} \Delta_{z_q} (m_i d_i) (m_q d_q) \right) \tilde{f}(\bar{z}) \quad (2.52)
\end{aligned}$$

où  $\Delta_{z_i} = (z - \bar{z})_i$  est la  $i$ -ième composante du vecteur  $z - \bar{z}$ ,  $N_x$  est la dimension de l'espace d'état et  $d_i$ ,  $m_i$ ,  $d_i^2$  représentent la différence partielle au premier ordre, la moyenne et la différence partielle au deuxième ordre, respectivement :

$$\begin{aligned}
d_i \tilde{f}(\bar{z}) &= \frac{1}{2h} \left[ \tilde{f}(\bar{z} + h e_i) - \tilde{f}(\bar{z} - h e_i) \right] \\
m_i \tilde{f}(\bar{z}) &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{f}(\bar{z} + h e_i) + \tilde{f}(\bar{z} - h e_i) \right] \\
d_i^2 \tilde{f}(\bar{z}) &= \frac{1}{2h^2} \left[ \tilde{f}(\bar{z} + h e_i) + \tilde{f}(\bar{z} - h e_i) - 2\tilde{f}(\bar{z}) \right] \quad (2.53)
\end{aligned}$$

$e_i$  étant le  $i^{me}$  vecteur unité.

La mise en forme de l'approximation ci-dessus, pour la fonction multidimensionnelle  $\tilde{f}(\cdot)$ , va permettre l'implémentation d'une solution similaire à la transformation Unscented pour le calcul de la statistique d'une variable aléatoire transformée :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\bar{z} \pm h e_i) &= f(S_x(\bar{z} \pm h e_i)) \\
&= f(S_x \bar{z} \pm h S_x e_i) \\
&= f(\bar{x} \pm h S_{x_i}) \quad (2.54)
\end{aligned}$$

où  $S_{x_i}$  représente la  $i^{me}$  colonne de la matrice de Cholesky obtenue par la décomposition de  $P_x$ .

#### 2.2.4.2 Estimation de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire transformée

On considère la propagation d'une v.a  $x$  de moyenne  $\bar{x}$  et de covariance  $P_x$  à travers une fonction non-linéaire (2.55). Norgaad [PNR00] a ainsi proposé deux solutions de filtrage basées sur une approximation d'ordre un et d'ordre deux. Comme le cas à l'ordre un peut être déduit directement de celui à l'ordre deux, seul le cas le plus général est donc présenté. En utilisant la même notation pour la v.a. transformée  $y = f(x)$ , on

obtient l'approximation suivante :

$$y = f(x) \quad (2.55)$$

$$\approx \tilde{f}(\bar{z}) + \tilde{D}_{\Delta_x} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} \quad (2.56)$$

où  $z = S_x^{-1}x$ , la matrice  $S_x$  étant définie antérieurement (2.51). En appliquant ce modèle d'approximation, on obtient les relations suivantes pour les deux moments de la statistique de la v.a. transformée :

– moyenne :  $\bar{y}$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= E[y] \\ &\approx E \left[ \tilde{f}(\bar{z}) + \tilde{D}_{\Delta_x} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} \right] \\ &\approx \frac{h^2 - N_x}{h^2} \tilde{f}(\bar{z}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{N_x} \left[ \tilde{f}(\bar{z} + he_i) + \tilde{f}(\bar{z} - he_i) \right] \\ &\approx \frac{h^2 - N_x}{h^2} \tilde{f}(\bar{z}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{N_x} \left[ \tilde{f}(\bar{x} + hS_{x_i}) + \tilde{f}(\bar{x} - hS_{x_i}) \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

– variance :  $P_{yy}$

$$\begin{aligned} P_{yy} &= E \left[ (y - \bar{y})(y - \bar{y})^T \right] \\ &= E \left[ (y - f(\bar{x}))(y - f(\bar{x}))^T \right] - E[y - f(\bar{x})] E[y - f(\bar{x})]^T \\ &\approx E \left[ \left( \tilde{D}_{\Delta_x} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} \right) \left( \tilde{D}_{\Delta_x} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} \right)^T \right] \\ &\quad - E \left[ \tilde{D}_{\Delta_x} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} \right] E \left[ \tilde{D}_{\Delta_x} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} \right]^T \end{aligned} \quad (2.58)$$

et par développement des espérances mathématiques apparu dans cette dernière équation (2.58), la variance  $P_{yy}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_{yy} &\approx \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^{N_x} \left[ \tilde{f}(\bar{x} + hS_{x_i}) + \tilde{f}(\bar{x} - hS_{x_i}) \right] \left[ \tilde{f}(\bar{x} + hS_{x_i}) + \tilde{f}(\bar{x} - hS_{x_i}) \right]^T \\ &\quad + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{i=1}^{N_x} \left[ \tilde{f}(\bar{x} + hS_{x_i}) + \tilde{f}(\bar{x} - hS_{x_i}) - 2f(\bar{x}) \right] X \\ &\quad \left[ \tilde{f}(\bar{x} + hS_{x_i}) + \tilde{f}(\bar{x} - hS_{x_i}) - 2f(\bar{x}) \right]^T \end{aligned} \quad (2.59)$$

– cross-covariance :  $P_{xy}$

$$\begin{aligned}
P_{xy} &= E \left[ (x - \bar{x})(y - \bar{y})^T \right] \\
&\approx E \left[ (S_x(z - \bar{z})) \left( \tilde{D}_{\Delta_x} \tilde{f} + \frac{1}{2} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} - E \left[ \frac{1}{2} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} \right] \right)^T \right] \\
&\approx \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{N_x} S_{x_i} [f(\bar{x} + hS_{x_i}) - f(\bar{x} - hS_{x_i})]^T
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Après ce calcul, l'implémentation de l'algorithme de filtrage est immédiat, et on peut montrer qu'avec ce type de relations le filtrage *CDKF* peut offrir une solution plus générale que le *UKF* mais avec un coût de calcul plus important.

## 2.3 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude des plus populaires méthodes d'estimation récursives non-linéaires . Ainsi les premières solutions *EKF* et *IEKF* basées sur une linéarisation au premier ordre du modèle ont l'avantage d'un coût de calcul réduit, mais ils présentent une précision non idéal lorsque les modèles sont fortement non-linéaire. De plus, la linéarisation peut s'avérer complexe. C'est pour cette raison, afin de s'affranchir de la linéarisation, deux autres solutions avaient été développée, la transformation unscented *UT* et *HOUT* . Dans la troisième section a été présenté une structure générale du filtre *CDKF* construite à partir d'une approximation polynomiale du modèle par la relation de Stirling. Ces différent types de filtrage n'ont pas fait l'objet d'une implémentation dans notre étude.

Le chapitre suivant va être consacré à l'étude d'une nouvelle méthode de transformation non-linéaire applicable à des fonctions non-linéaires approximées par des polynômes de Chebyshev. Comme nous allons le voir plus loin, notre travail consistera en une reformulation des expresions de la statistique dans cette méthode, reformulation qui générera l'expression exacte *non seulement pour la moyenne et la covariance* mais pour tout *autre moments d'ordre supérieur*, en plus de ça elle offert un gain de calcul permettant une application temps- réel de cet algorithme.

# Chapitre 3

## Synchronisation du chaos par le filtrage de Kalman polynomial exact

---

### 3.1 Introduction

L'estimation non linéaire joue un rôle important dans les systèmes de contrôle, la fiabilité d'ingénierie et les communications [YF83a, BJR94, YL99]. Nous nous intéressons aux systèmes de télécommunications chaotiques et leur clé : la synchronisation en présence du bruit. C'est clairement le problème général de la construction d'un estimateur non linéaire stochastique. Cette introduction donne un bref aperçu sur l'algorithme d'estimation, en particulier utilisé dans la synchronisation du chaos. Dans la section 2, nous présentons la méthode d'approximation de Chebyshev *ChApp* où les polynômes de Chebyshev sont utilisés comme une base orthogonale pour exprimer d'une manière approximative toute fonction non-linéaire. Un aperçu de la transformation polynomiale ainsi que des améliorations sont présentées dans la section 3. La section 4 montre comment les approximations de Chebychev peuvent être appliquées au sein de la transformation polynomiale exacte, et enfin, la dernière section traite des performances et tire des conclusions.

Les premiers travaux de recherches sur la synchronisation sont axés sur l'étude de la stabilité de l'observateur non linéaire, sans tenir compte du phénomène de bruit dans le canal [CO92, Has98, PC00]. Ce type de synchronisation est d'abord introduit par le bruit de mesure d'un filtre de Kalman étendu (EKF) dans [COS93b]. D'autres approches pour obtenir un estimateur sont également disponibles dans la littérature [Sch97, AMP07, CU02, AMP05]. L'avantage de EKF est d'éviter les calculs

importants requis par des approches presque optimales tel que le filtre à particules [GSS93, ASMC02]. En connaissant les informations de mesures au niveau du récepteur, l'EKF qui maintient la structure du filtre de Kalman (KF) peut être utilisé pour calculer de manière récursive, les approximations linéaires des statistiques jusqu'au deuxième ordre et de construire l'état estimé [GKN, JUDW00]. Malgré que l'EKF réponde parfaitement à certains besoins de filtrage exprimés par les utilisateurs, d'autres applications sont, en fait, plus exigeantes et requièrent une précision ponctuelle, tel est le cas de notre travail, là où le besoin de synchroniser le système chaotique coté récepteur est impératif pour que le signal informationnel à en récupérer soit adéquat. Pour ce faire le filtre de Kalman Unscented (UKF) a été développé [NPR00b, BSL01] en fournissant un mécanisme plus direct et explicite, l'état aléatoire gaussien est représenté par un jeu de points appelés sigma points (SPs) paramétrisant la moyenne et la variance. Le nombre de points créés dépend de la taille du vecteur d'état. A chaque itération, l'UKF propage ce jeu de points dans le modèle de prédiction non linéarisé et calcule la moyenne ainsi que la covariance a posteriori. Avec cette méthode, la moyenne et la covariance sont approximées au deuxième ordre. Cette solution est avantageuse car la propagation des SPs à travers le système non linéaire permet en effet de mieux modéliser l'évolution de la covariance. L'implémentation de ce filtre semble également plus rapide car aucune linéarisation de modèle n'est nécessaire. Ceci est très utile pour des tests, particulièrement lorsque les modèles en jeu sont complexes.

Norgaard et al [NPR00b] ont utilisé l'interpolation polynomiale de la fonction du modèle dynamique en combinaison avec la formule de Stirling pour obtenir la moyenne et la covariance de la distribution de l'état. Cette transformation non linéaire est ensuite exploitée de manière récursive et similaire à la structure de l'KF.

Récemment, un estimateur d'état nommé filtre de Kalman polynomiale exacte (ExPKF) pour les systèmes non linéaires polynomiaux est proposée dans [LABS06]. Les auteurs exploitent tous les termes de la série de Taylor de la fonction polynomiale et ont prouvé que leur méthode donne des estimations plus précises en comparant avec les méthodes classiques. Cependant, le phénomène qui produit le bruit dynamique n'est pas représenté, ni discuté, en effet, l'état du système modélisé par un polynôme itératif est placé dans un bassin d'attraction chaotique noté  $U$ , tel que  $U = ]a, b[$ , (avec  $a, b$  : réels), cependant la propriété chaotique garantie l'attraction du modèle, c'est à dire, l'orbite des points du générateur reste stable ; les problème de stabilité survient lorsque le bruit dynamique  $\eta$  est ajouté à l'état ; ce bruit peut donc pousser l'état stable en dehors du

bassin attractif ce qui crée une trajectoire divergente. En fait ce ExPKF est juste fiable dans le cas de l'absence de bruit dynamique ou pour une simple adaptation du modèle itératif que nous avons montré dans [YAB09].

Bien que le ExPKF, permet d'obtenir de meilleurs approximations des variables d'état et de leur covariance, la mise en oeuvre en terme des applications commerciales en temps réel reste non optimal, suite à la complexité des calculs qui est d'ordre  $O(n^4)$ . Pour cette raison, notre idée consiste à reformuler les calculs à fin d'aboutir à une seule forme compact d'équation avec une complexité réduite [YAB11], et d'exploiter les avantages du plus grand moment pour compenser les autres.

## 3.2 Approximation de Chebyshev

Le polynôme de Chebyshev de degré  $n$ ; est donnée par la formule explicite suivante :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x); n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Cependant, pour tout degré  $n$ , l'équation (3.1) peut être combinée avec des identités trigonométriques pour produire des expressions explicites pour  $T_n(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ \dots\dots\dots \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Les polynômes de Chebyshev sont orthogonaux dans l'intervalle  $[-1,1]$  avec un poids  $(1 - x^2)^{-1/2}$ . En particulier,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pi/2 & i = j \neq 0 \\ \pi & i = j = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Cette propriété rend le polynômes Chebyshev utile dans l' approximation polynomiale des fonctions. Le polynôme possède  $n$  zéros dans l'intervalle  $[-1,1]$ qui sont localisés au point

$$x = \cos\left(\frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{n}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

Dans ce même intervalle, il y a  $(n + 1)$  extremum (maximum et minimum), situés à

$$x = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.5)$$

Dans tous les maximums, comme les minimums; cette propriété rend les Polynômes de Chebyshev si utile dans l'approximation de fonctions. Les polynômes de Chebyshev satisfaisant le principe d'orthogonalité discrète aussi que celui en continu (3.3) : Si  $x_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ), sont les  $m$  zéros de  $T_m(x)$  donnée par (3.4), et si  $i, j < m$ , alors

$$\sum_{k=1}^m T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m/2 & i = j \neq 0 \\ m & i = j = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Comme il est facile de combiner les équations (3.1),(3.4),et (3.6) alors si  $f(x)$  est une fonction arbitraire définie dans le intervalle  $[-1,1]$ , et si les  $N$  coefficients  $c_j, j = 1, 2, \dots, N$ , sont définis comme suit :

$$c_j = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)T_{j-1}(x_k) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f \left[ \cos \left( \frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{N} \right) \right] \cdot \cos \left( \frac{\pi(j - 1)(k - \frac{1}{2})}{N} \right) \quad (3.7)$$

la formule d'approximation donnée par :

$$f(x) \approx \left[ \sum_{k=1}^N c_k T_{k-1}(x) \right] - \frac{1}{2}c_1 \quad (3.8)$$

est exacte pour  $x$  égal à l'ensemble des zéros de  $T_N(x)$  et peut être tronqué à un polynôme de degré inférieur  $m \leq N$

### 3.3 Calcul des statistiques à travers la transformation polynomiale

On considère le cas des fonctions non-linéaires polynomiales mon-dimensionnelles :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \quad (3.9)$$

Soit  $y$  la variable aléatoire qui résulte de la propagation de la v.a  $x$  via la fonction non-linéaire  $f$ .

$$y = f(x) \quad (3.10)$$

la distribution initiale peut être écrite sous la forme suivante :

$$x = \bar{x} + \Delta x \quad (3.11)$$

où  $\Delta x$  est une v.a centrée. En utilisant le développement en série de Taylor, on obtient :

$$y = f(\bar{x}) + \sum_{n=1}^N \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=\bar{x}} \quad (3.12)$$

et on peut calculer la moyenne de  $y$

$$\bar{y} = E[y] = f(\bar{x}) + \sum_{n=2}^N \frac{m_n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=\bar{x}} \quad (3.13)$$

où  $m_n$  désigne le moment d'ordre  $n$  pour la v.a  $\delta x$ . Et comme la fonction  $f(\cdot)$  a une forme polynomiale, ses dérivées peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_{i=n}^N a_i \frac{i!}{(i-n)!} x^{i-n} \quad (3.14)$$

Comme  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = 0$  et en utilisant les coefficients binomiaux  $C_i^n = \frac{i!}{n!(i-n)!}$ , le calcul de la moyenne devient :

$$\bar{y} = \sum_{n=0}^N m_n \sum_{i=n}^N C_i^n \bar{x}^{i-n} \quad (3.15)$$

Pour faciliter l'implémentation algorithmique cette expression peut être écrite sous une forme matricielle compacte :

$$\bar{y} = a_{0:N}^T \mathbf{C}_{0:N}^{\bar{x}} m_{0:N}^x \quad (3.16)$$

où  $a_{i:j}$  dénote  $[a_i, a_{i+1}, \dots, a_j]^T$ ,  $m_{i:j}^x = [m_i, m_{i+1}, \dots, m_j]^T$  et  $\mathbf{C}_{i:j}^{\bar{x}}$  est une matrice triangulaire dont les éléments sont fonction de la puissance de  $\bar{x}$  :

$$\mathbf{C}_{i:j}^{\bar{x}} = \begin{bmatrix} C_i^0 \bar{x}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_{i+1}^0 \bar{x}^1 & C_{i+1}^1 \bar{x}^0 & 0 & \dots & 0 \\ C_{i+2}^0 \bar{x}^2 & C_{i+2}^1 \bar{x}^1 & C_{i+2}^2 \bar{x}^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_j^0 \bar{x}^j & C_j^1 \bar{x}^{j-1} & C_j^2 \bar{x}^{j-2} & \dots & C_j^j \bar{x}^0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

de la même manière l'auteur [LABS06] a considéré une deuxième fois le développement en série de Taylor, et après une longue manipulation algébrique l'expression générale de la variance  $\sigma_y^2 = E[(y - \bar{y})^2]$  prend la forme matricielle suivante :

$$\sigma_y^2 = 1_N^T (\mathcal{M}^x \square C^{\bar{x}}) 1_N - m_{1:N}^x{}^T C^{\bar{x}} m_{1:N} \quad (3.18)$$



où les matrices  $C^{\bar{x}}$  et  $\mathcal{M}^x$  sont données par :

$$C^{\bar{x}} = \begin{bmatrix} a_{1:N}^T \mathbf{C}_{1,1}^{\bar{x}} a_{1:N} & a_{1:N}^T \mathbf{C}_{1,2}^{\bar{x}} a_{1:N} & \dots & a_{1:N}^T \mathbf{C}_{1,N}^{\bar{x}} a_{1:N} \\ a_{1:N}^T \mathbf{C}_{2,1}^{\bar{x}} a_{1:N} & a_{1:N}^T \mathbf{C}_{2,2}^{\bar{x}} a_{1:N} & \dots & a_{1:N}^T \mathbf{C}_{N,2}^{\bar{x}} a_{1:N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1:N}^T \mathbf{C}_{N,1}^{\bar{x}} a_{1:N} & a_{1:N}^T \mathbf{C}_{N,2}^{\bar{x}} a_{1:N} & \dots & a_{1:N}^T \mathbf{C}_{N,N}^{\bar{x}} a_{1:N} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

avec l'élément  $\mathbf{C}_{n,k}^{\bar{x}}$  est une matrice dont la forme est donnée par :

$$\mathbf{C}_{n,k}^{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0_{(n-1)(k-1)} & & 0_{(n-1)(N-k+1)} & & \\ & C_n^n C_k^k \bar{x}^0 & C_n^n C_{k+1}^k \bar{x}^1 & \dots & C_n^n C_N^k \bar{x}^{N-k} \\ & C_{n+1}^n C_k^k \bar{x}^1 & C_{n+1}^n C_{k+1}^k \bar{x}^2 & \dots & C_{n+1}^n C_N^k \bar{x}^{N-k+1} \\ 0_{(N-n+1)(k-1)} & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & C_N^n C_k^k \bar{x}^{N-n} & C_N^n C_{k+1}^k \bar{x}^{N-n+1} & \dots & C_N^n C_N^k \bar{x}^{2N-n-k} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathcal{M}^x = \begin{bmatrix} m_2 & m_3 & \dots & m_{N+1} \\ m_3 & m_4 & \dots & m_{N+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N+1} & m_{N+2} & \dots & m_{2N} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

□ représente le produit de Hadamard et  $1_N$  un vecteur colonne de longueur  $N$  avec tous les éléments unité. Une variante de filtrage de Kalman nécessite aussi le calcul de la covariance de transition  $P_{xy}$  :

$$\begin{aligned} P_{xy} &= E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] = E[\Delta x \cdot y] - E[\Delta x \cdot \bar{y}] \\ &= \sum_{n=1}^N m_{n+1} \sum_{n=1}^N a_i C_i^m \bar{x}^{i-n} \end{aligned} \quad (3.22)$$

cette covariance peut aussi être mis sous une forme matricielle :

$$P_{xy} = a_{0:N}^T \mathbf{C}^{\bar{x}} m_{1:N+1}^x. \quad (3.23)$$

*Il faut noter qu'au moment où ces relations ont été introduites l'auteur s'est volontairement limité à un développement analytique concis pour éviter d'alourdir son troisième chapitre, en faisant l'analyse détaillé dans l'annex C de sa thèse [Bog06]. Si ce développement analytique de la variance (3.18) (moment d'ordre deux) nécessite en tout trois pages, combien de pages donc faudrait il pour obtenir le moment d'ordre  $n$ ?!. De plus, comme ces deux relations générales ne sont pas optimisées, la moyenne et la covariance*

de la variable transformée par quelques polynômes de Chebychev ont été analytiquement dérivés dans un tableau (page 67) [Bog06] qui serait utilisé lors de la phase d'évaluation. Nous voyons alors que l'algorithme **ExPKF** est inutilement développé.

Comme nous avons mentionné à l'introduction de ce chapitre, cette approche [LABS06] est, limitée uniquement au calcul exact des statistiques jusqu'au deuxième ordre d'une variable aléatoire propagé à travers une transformation polynomiale, la deguassianisation par l'effet de la nonlinéarité à travers la fonction polynomiale n'a pas été pris en compte, ainsi nous avons pu remarquer que l'équation décrivant la variance (3.18) présente un inconvénient en terme de la complexité algorithmique, nous allons refaire le calcul des statistiques pour améliorer les performances pendant la mise en oeuvre du filtre de Kalman.

Donc sans passer par le développement en série de Taylor, en utilisant que le critère du triangle de Pascal [Kat92]; le calcul des statistiques de la v.a transformée peut être déduit directement et d'une façon simple :

Soit  $x = \bar{x} + \Delta x$  une distribution initiale; selon le triangle de Pascal on obtient :

$$x^n = (\bar{x} + \Delta x)^n = \sum_{i=0}^n C_i^n \bar{x}^{n-i} (\Delta x)^i \quad (3.24)$$

Par conséquent la moyenne  $\bar{y} = E[y]$  s'exprime directement comme suit :

$$\bar{y} = \sum_{n=0}^N a_n \sum_{i=0}^n C_i^n m_i \bar{x}^{i-n} \quad (3.25)$$

ce qui conduit à la même forme matricielle que celle développée dans [LABS06]

$$\bar{y} = a_{0:N}^T \mathbf{C}_N^{\bar{x}} m_{0:N}^x \quad (3.26)$$

- Au cours de la simulation pour estimer l'état du système en question, la matrice  $\mathbf{C}_N^{\bar{x}}$  (3.26) est appelée récursivement, alors afin de réduire le coût de calcul, il faudrait qu'elle prenne la forme de produit de Hadamard suivant :

$$\mathbf{C}_N^{\bar{x}} = \mathbf{M}_N^c \square \mathbf{M}_N^{\bar{x}} \quad (3.27)$$

où les matrices  $\mathbf{M}_N^c$  et  $\mathbf{M}_N^{\bar{x}}$  sont définis par (3.28). On peut observer que  $\mathbf{M}_N^c$  est une matrice constante, de sorte qu'elle est calculée une fois pour toutes; et pour  $\mathbf{M}_N^{\bar{x}}$  nous nous occupons seulement de construire sa  $N^{ime}$  ligne :

$R_N = [\bar{x}^N, \bar{x}^{N-1}, \bar{x}^{N-2}, \dots, \bar{x}^0]$ , puis il suffit de tronquer ce principal élément pour obtenir les autres lignes.

$$\mathbf{M}_N^c = \begin{bmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_N^0 & C_N^1 & C_N^2 & C_N^3 & \cdots & C_N^N \end{bmatrix}; \mathbf{M}_N^{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}^0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{x}^1 & \bar{x}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{x}^2 & \bar{x}^1 & \bar{x}^0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{x}^3 & \bar{x}^2 & \bar{x}^1 & \bar{x}^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{x}^N & \bar{x}^{N-1} & \bar{x}^{N-2} & \bar{x}^{N-3} & \cdots & \bar{x}^0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} KV_{0:q} &= [e_0, e_1, \dots, e_q]^T = (\mathbf{M}_q^c \square \mathbf{M}_q^{\bar{x}}) m_{0:q}^x \\ &= \left( \begin{bmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_q^0 & C_q^1 & C_q^2 & C_q^3 & \cdots & C_q^q \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} \bar{x}^0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{x}^1 & \bar{x}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{x}^2 & \bar{x}^1 & \bar{x}^0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{x}^3 & \bar{x}^2 & \bar{x}^1 & \bar{x}^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{x}^q & \bar{x}^{q-1} & \bar{x}^{q-2} & \bar{x}^{q-3} & \cdots & \bar{x}^0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_q \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Simplement le terme  $(y - \bar{y})$  est un polynôme défini par le vecteur de coefficients suivant :

$$b_{0:N} = [a_0 - \bar{y}, a_1, a_2, \dots, a_N]^T, \quad (3.30)$$

il en résulte que l'expression  $(y - \bar{y})^n$  représente une transformation polynomiale d'ordre  $nN$  de la variable indépendante  $x$ , par conséquent, le moment central d'ordre  $n$  :  $E[(y - \bar{y})^n]$  a la même expression que celle de l'espérance mathématique de la fonction polynomiale  $(y - \bar{y})^n$ , et en utilisant l'algorithme (1) pour calculer le vecteur de coefficients  $V_{0:nN}$

$$E[(y - \bar{y})^n] = V_{0:nN}^T \mathbf{C}_{nN}^{\bar{x}} m_{0:nN}^x = V_{0:nN}^T (\mathbf{M}_{nN}^c \square \mathbf{M}_{nN}^{\bar{x}}) m_{0:nN}^x. \quad (3.31)$$

---

### Algorithm 1

---

```

V0:nN ← b0:N
for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
  V0:nN ← Conv(V0:nN, b0:N)
end for

```

---

où *Conv*<sup>1</sup> désigne la convolution et la multiplication polynomiales.

---

1.  $C = \text{Conv}(A, B)$  convole les vecteurs  $A$  et  $B$ . Le vecteur résultant est de *longueur* = *longueur*( $A$ ) + *longueur*( $B$ ) - 1. Si  $A$  et  $B$  sont deux vecteurs de coefficients polynomiaux, la convolution entre eux équivaut à multiplier les deux polynômes.

L'objectif étant d'obtenir une variante du filtre de Kalman basée sur le calcul exact des statistiques, il devrait calculer la variance  $P_{yy}$  et la covariance  $P_{xy}$  entre  $x$  et  $y$ , alors, à partir de (3.31) on a :

$$P_{yy} = V_{0:2N}^T (\mathbf{M}_{2N}^c \square \mathbf{M}_{2N}^{\bar{x}}) m_{0:2N}^x, \quad (3.32)$$

et comme il est facile d'observer que le terme  $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$  est un polynôme d'ordre  $(N + 1)$ , à cet effet, il est nécessaire de trouver le vecteur de coefficients pour calculer la covariance  $P_{xy}$ .

- Bien qu'il y ait des similitudes avec la référence [LABS06], notre analyse en diffère de façon que toutes les statistiques (moyenne, covariance, ou tout autre moment central) de la variable transformée gardent la même forme compacte, ce qui permet d'exploiter à chaque itération, le vecteur colonne Cléf donné par (Eq :3.29) pour chacun d'eux. Quoi qu'il en soit, pour chaque deux entiers différents  $p$  et  $q$  tel que  $1 < p < q$ , le vecteur  $KV_{0:p}$  est un sous-ensemble du vecteur colonne  $KV_{0:q}$ , dans le sens où, les  $(p + 1)$  premiers éléments de  $KV_{0:q}$  sont partagés entre eux. Ainsi, pour obtenir un estimé de l'état, il serait préférable de construire le vecteur  $KV_{0:q}$  qui correspond au plus grand moment central, et puis sélectionner le sous vecteur avec la même taille que le vecteur de coefficients. Par exemple, pour calculer la moyenne  $\bar{y}$ , la variance  $P_{yy}$  et le moment central d'ordre 3  $E[(y - \bar{y})^3]$  de la variable transformée  $y$  via le polynôme de Chebyshev d'ordre 4 : " $y = T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ", on construit le vecteur  $KV_{0:q}$ , avec  $q = 12$  et à partir duquel les deux sous vecteurs  $KV_{0:p}$ , ( $p = 4, 8$ ) seront choisis pour trouver respectivement, la moyenne, la variance et finalement le moment central d'ordre 3 :

$$\bar{y} = [1, 0, -8, 0, 8]KV_{0:4} = [1, 0, -8, 0, 8][e_0, e_1, e_2, e_3, e_4]^T, \quad (3.33)$$

donc,  $b_{0:4} = [1 - \bar{y}, 0, -8, 0, 8]^T$  et,

$$P_{yy} = V_{0:8}^T KV_{0:8} = V_{0:8}^T [e_0, e_1, \dots, e_8]^T, \quad (3.34)$$

$$E[(y - \bar{y})^3] = V_{0:12}^T KV_{0:12} = V_{0:12}^T [e_0, e_1, \dots, e_{12}]^T \quad (3.35)$$

où  $V_{0:8}, V_{0:12}$  sont calculés conformément à l'algorithme (1).

- Par comparaison avec les méthodes déjà mentionnées dans l'introduction de ce chapitre, notre approche montre au moins du point de vue analytique, qu'il est possible d'avoir une idée sur la distribution transformée. Le Tableau 3.1 montre la moyenne ainsi que quelques statistiques d'ordre supérieur. En effet, selon les

TABLE 3.1 – Moyenne et quelques moments d'ordre supérieurs calculées pour différents instants :  $mc_{ik}$  est le  $i^{eme}$  order moment central à  $t = k$ .

Fonction Non-linéaire	Moyenne et moments à t=k			Moyenne et moments à t=k+1			Moyenne et moments à t=k+2		
$x_{k+1} = 2x_k^2 - 1$ $= T_2(x_k)$	$\bar{x}_k$	=	0.300	$\bar{x}_{k+1}$	=	-0.695	$\bar{x}_{k+2}$	=	0.208
	$mc_{2k}$	=	0.0625	$mc_{2(k+1)}$	=	0.121	$mc_{2(k+2)}$	=	0.447
	$mc_{3k}$	=	0	$mc_{3(k+1)}$	=	0.083	$mc_{3(k+2)}$	=	0.074
	$mc_{4k}$	=	0.011	$mc_{4(k+1)}$	=	0.123	$mc_{4(k+2)}$	=	2.716
	$mc_{5k}$	=	0	$mc_{5(k+1)}$	=	0.197	$mc_{5(k+2)}$	=	429.2
	$mc_{6k}$	=	0.003	$mc_{6(k+1)}$	=	0.381	...	=	...
	$mc_{7k}$	=	0	$mc_{7(k+1)}$	=	0.846	...	=	...
	$mc_{8k}$	=	0.002	$mc_{8(k+1)}$	=	2.129	...	=	...
	$mc_{9k}$	=	0	$mc_{9(k+1)}$	=	0.597	...	=	...
	$mc_{10k}$	=	0.001	$mc_{10(k+1)}$	=	1.844	...	=	...
	$mc_{11k}$	=	0	...	=	...	...	=	...
	$mc_{12k}$	=	$6.19e - 4$	...	=	...	...	=	...
	$mc_{13k}$	=	0	...	=	...	...	=	...
	$mc_{14k}$	=	$5.03e - 4$	...	=	...	...	=	...
	$mc_{15k}$	=	0	...	=	...	...	=	...
	$mc_{16k}$	=	$4.72e - 4$	...	=	...	...	=	...
	$mc_{17k}$	=	0	...	=	...	...	=	...
	$mc_{18k}$	=	$5.01e - 4$	...	=	...	...	=	...
	$mc_{19k}$	=	0	...	=	...	...	=	...
	$mc_{20k}$	=	$5.95e - 4$	...	=	...	...	=	...

statistiques disponibles à  $t = k$  (la distribution initiale est supposée Gaussienne), l'équation (3.31) est utilisée simultanément avec l'algorithme (1) pour calculer exactement à l'instant ( $t = k + 1$ ) un nombre moins important de quelques nouvelles statistiques qu'à l'instant  $t = k$ . En se basant sur ces résultats, il serait facile de sauter à la conclusion que l'effet degaussianization des distributions à travers le système dynamiques non linéaires a été alors considéré en fonction de la disponibilité des moments à priori.

La section suivante s'occupe de l'estimation non-linéaire via l'ExPKF.

### 3.4 Estimation non-linéaire non polynomiale

Considérons le cas général d'une fonction non linéaire qui peut être approximée par des polynômes de Chebychev :

$$z = g(x) \approx \sum_{i=1}^K c_i T_{i-1}(x) - \frac{1}{2}c_1 \quad (3.36)$$

où  $T_i(x)$  désigne le polynôme de Chebyshev d'ordre  $i$ ,  $c_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) sont les coefficients définis par l'équation (3.7) et  $g(x)$ , est une fonction non-linéaire non-polynomiale. Par conséquent, pour déterminer la moyenne  $\bar{z} = E[g(x)]$ , nous avons seulement besoin de chercher le vecteur de coefficients de longueur  $K$  noté  $(Vg)_K$ . Étant donné que les polynômes de Chebyshev respectent l'expression récurrente (3.2), ainsi grâce à cette formule et en connaissant les deux premiers polynômes de Chebyshev correspondants respectivement aux deux vecteurs suivants :  $(Vc0)_K$  et  $(Vc1)_K$  :

$$\begin{cases} (Vc0)_K = [1, 0, 0, \dots, 0] \\ (Vc1)_K = [0, 1, 0, \dots, 0] \end{cases} \quad (3.37)$$

telles que la longueur de  $(Vc0)_K = \text{longueur de } (Vc1)_K = K$ , on peut par conséquent déterminer le vecteur des coefficients pour tout degrés,

$$(Vg)_K = \sum_{i=1}^K c_i Vc(i-1)_K - \frac{1}{2}c_1 (Vc0)_K, \quad (3.38)$$

la moyenne  $\bar{z} = E[g(x)]$  peut être exprimé comme :

$$\bar{z} = (Vg)_K (\mathbf{M}_{K-1}^c \square \mathbf{M}_{K-1}^{\bar{x}}) m_{0:K-1}^x, \quad (3.39)$$

Une fois l'approximation de la fonction non-linéaire complètement représentée par un polynôme d'ordre  $K - 1$ , il convient de remplacer le vecteur  $b_{0:N}$  par  $b_{x_{0:K}} = (Vg)_K -$

TABLE 3.2 – Performances des transformations LT, Unscented et ChApp pour différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité

<i>Nonlinear</i>	Initial Dist		LT		UT		ChApp		True Trans Dist	
	$\bar{x}$	$P_{xx}$	$\bar{y}$	$P_{yy}$	$\bar{y}$	$P_{yy}$	$\bar{y}$	$P_{yy}$	$\bar{y}$	$P_{yy}$
$y = f(x)$										
$y = \cos x$	-0.700	0.012	0.765	0.005	0.760	0.005	0.760	0.005	0.760	0.005
$y = x \cos x$	-0.600	0.025	-0.495	0.006	-0.475	0.006	-0.475	0.006	-0.475	0.006
$y = x^2 \cos x$	-0.500	0.050	0.219	0.028	0.230	0.017	0.231	0.020	0.231	0.020
$y = T_4(x) \cos x$	-0.500	0.050	-0.438	0.534	-0.188	0.168	-0.181	0.295	-0.181	0.293

$\bar{z}[1, 0, 0, \dots, 0]$ . On utilisera la formule (3.31) pour calculer le moment central d'ordre  $n$   $E[(z - \bar{z})^n]$ .

### 3.5 Evaluation des performances de l'approximation proposée

Nous allons considérer dans ce paragraphe trois directions pour l'évaluation des performances de l'estimation non-linéaire proposée (**ChAPKF**). Nous proposerons dans la première d'examiner le résultat de propagation d'une distribution initiale gaussienne à travers certaines fonctions non-linéaire comme  $\cos x$ ,  $x \cos x$ ,  $x^2 \cos x$  et  $T_4(x) \cos x$ , et dans un souci de comparaison, deux versions classiques de transformations (la linéarisation de premier ordre (LT) et la transformation **Unscented** (UT)) sont adoptées; dans un 2<sup>ème</sup> temps une étude comparative entre différentes variantes du filtre de Kalman sera établie en utilisant l'erreur quadratique moyenne comme critère pour évaluer le phénomène de synchronisation chaotique.

Dans la linéarisation par série de Taylor (LT), la moyenne et la covariance de la distribution transformé sont donnés par :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= g(\bar{x}) \\ P_{yy} &= \nabla g^t P_{xx} \nabla g\end{aligned}\tag{3.40}$$

Dans la seconde approche, nous considérons la deuxième implémentation **UsKF** qui emploie la version développé par Julier et al [JUDW00]. cette méthode a été présenté dans le chapitre précédent.

### 3.5.1 Performance en terme de transformation non-linéaire

A partir des résultats reflétées numériquement dans le tableau 3.2, la simulation extensive de Monte Carlo (MC) a confirmé que la méthode de linéarisation présente une mauvaise estimation autant que le degré de la non-linéarité augmente, la transformation Uncented paramétrée par les valeurs  $(\alpha = 10^{-3}), \kappa = 0, \beta = 2$  et  $\lambda = \alpha^2(3 + \kappa) - 3$  produit une statistique plus proche des statistiques réelle, dans le cas des trois fonctions non-linéaires :  $\cos x$ ,  $x \cos x$ , and  $x^2 \cos x$ . Cependant, pour une sévère non-linéarité comme  $T_4(x) \cos x$ , cette solution ne parvient pas à fournir les statistiques. Nous observons alors que seule la méthode d'approximation de Chebyshev (**ChApp**) fournit la vraie moyenne et covariance.

### 3.5.2 Performance en terme de l'erreur quadratique moyenne optimale

Considérons le modèle non linéaire et non polynomiale :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= g(x_k) + \eta_k = \gamma T_4(x_k) \cos(x_k) + \eta_k \\ y_k &= h(x_k) + \mu_k = x_k + \mu_k, \end{cases} \quad (3.41)$$

Les bruits dynamique et de mesure :  $\eta_k$  and  $\mu_k$ , sont indépendants et gaussiennes, avec respectivement leurs fonctions de densité de probabilité (pdf),  $P_\eta(Q)$  et  $P_\mu(R)$ . Le terme non-linéaire  $\cos x$  est approximativement représenté avec les trois premiers spolynômes de Chebyshev  $(T_0, T_1, T_2)$  comme il est montré dans la section 3.2. En général, pour la sécurité des communications à large bande, l'émetteur itératif  $x_{k+1} = T_4(x_k) \cos x_k$  est placé dans un bassin attractif chaotique, quand le bruit dynamique  $\eta_k$  est ajouté à la récurrence chaotique, il est possible de produire une séquence en dehors du bassin attractif, notamment si l'état est très proche de la frontière. Une simple solution proposée dans [YAB09] consiste à saturer l'état à posteriori. La contrepartie est que la nouvelle (pdf) du bruit dynamique n'étant plus gaussien et non plus corrélée avec l'état, pour cela nous allons multiplier le terme  $T_4(x_k) \cos x_k$  par le paramètre  $\gamma$  tel que  $\gamma \in [-1, 1]$ , par conséquent, le bruit dynamique est encore gaussien et il n'y aura pas de divergence.



### 3.5.2.1 Application du Filtre de Kalman à la synchronisation chaotique

Ainsi de façon similaire au filtre de Kalman classique, le mécanisme d'estimation de l'état  $x_k$  du système est basé sur l'étape de la mise à jour temporelle, qui réalise l'évaluation de la statistique d'ordre deux de l'état prédit, et l'étape de mise à jour par des observations qui donne la valeur estimée en connaissant l'état observé. Donc selon le modèle polynomial (3.41), les équations décrivant le comportement de l'observateur sont dérivés comme :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} &= \tilde{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (y_{k+1} - \tilde{y}_{k+1/k}) \\ P_{k+1} &= P_{k+1/k} - K_{k+1}^2 P_{y_{k+1/k} y_{k+1/k}} \\ K_{k+1} &= \frac{P_{x_{k+1/k} y_{k+1/k}}}{P_{y_{k+1/k} y_{k+1/k}}} \end{cases} \quad (3.42)$$

où,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1/k} &= E[\gamma T_4(x_k) \cos(x_k) + \eta_k] \\ &= \gamma CV_{0:6} KV_{0:6}, \end{aligned}$$

avec,  $CV_{0:6} = Conv([1, 0, -8, 0, 8], (Vg)_2)$ ,  $\tilde{y}_{k+1/k} = E[x_{k+1/k} + \mu_k] = \tilde{x}_{k+1/k}$ ,

$$P_{k+1/k} = E[(x_{k+1/k} - \tilde{x}_{k+1/k})^2] = Conv(b_{0:6}, b_{0:6}) KV_{0:11} + Q,$$

tel que,  $b_{0:6} = CV_{0:6} - \tilde{x}_{k+1/k} [1, 0, 0, 0, 0, 0]$ ,

$$P_{x_{k+1/k} y_{k+1/k}} = E[(x_{k+1/k} - \tilde{x}_{k+1/k})(y_{k+1/k} - \tilde{y}_{k+1/k})] = P_{k+1/k},$$

$P_{y_{k+1/k} y_{k+1/k}} = E[(y_{k+1/k} - \tilde{y}_{k+1/k})^2] = P_{k+1/k} + RL$  l'examen de la capacité de la méthode proposée **ChAPKF** via l'ExpKF consiste à synchroniser des séquences chaotiques générées par des fonctions non-linéaires. L'EQM de synchronisation définie par l'expression suivante sera utilisée comme critère d'évaluation :

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (x_k - \hat{x}_k)^2 \quad (3.43)$$

Des simulations Monte Carlo ont été menées pour obtenir l'EQM par l'approximation de Chebychev via ExpKF, entre le signal chaotique original et celui synchronisé, sous différentes conditions de bruit. On a dressé un comparatif des résultats que nous avons obtenus avec ceux résultant d'une application **UsKF**. Pour ces deux méthodes nous avons considéré des séquences de longueur  $10^6$  échantillons avec une période de transition de  $10^3$  échantillons. L'état estimé a été initialisé à  $x_0 = 0.5$  avec une covariance de  $P_0 = 0.25$ , et on a pris les mêmes séquences de bruit.

Pour mettre en évidence les possibilités de débruitage des filtres, on présente dans la figure (fig.3.1), l'évolution de  $EQM$  normalisée par rapport à la variance du bruit d'observation  $R$ . Comme il a été démontré que tous les polynômes de Chebychev génèrent du chaos, et qu'ils sont caractérisés par un exposant de Lyapunov  $lnp$  [BAK91], où  $p$  est l'ordre du polynôme  $T_p(x)$ , la fonction génératrice de la séquence chaotique que l'on considère pour cette simulation est  $T_4(x).cox(x)$ . Nous avons remarqué sur la figure (fig.3.1) que pour des variances du bruit d'observation allant jusqu'à  $10^{-2}$  l'erreur correspondant à l'implémentation UsKF, est très proche de celle obtenue par la méthode proposée (**ChAPKF**), mais elle reste toujours inférieures. Alors que pour des conditions plus bruitées, ses performances se dégradent rapidement.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une alternative d'approximation de Chebyshev est proposé pour représenter toute fonction non linéaire par une combinaison linéaire des polynomes orthogonaux de Chebyshev. En utilisant la présentation des coefficients binomiaux dans le triangle de Pascal nous avons obtenu des expressions compactes et originales donnant toute la statistique exacte de n'importe quelle variable stochastique ayant subie une transformation non-linéaire. Ces expressions nous permettent ainsi de formuler un algorithme de filtrage de Kalman avec une exécution rapide. Comme application, nous avons considéré la synchronisation de séquences chaotiques générées par une récurrence non-linéaire. L'EQM a été évaluée dans diverses conditions de bruit pour montrer l'efficacité du filtre proposé.

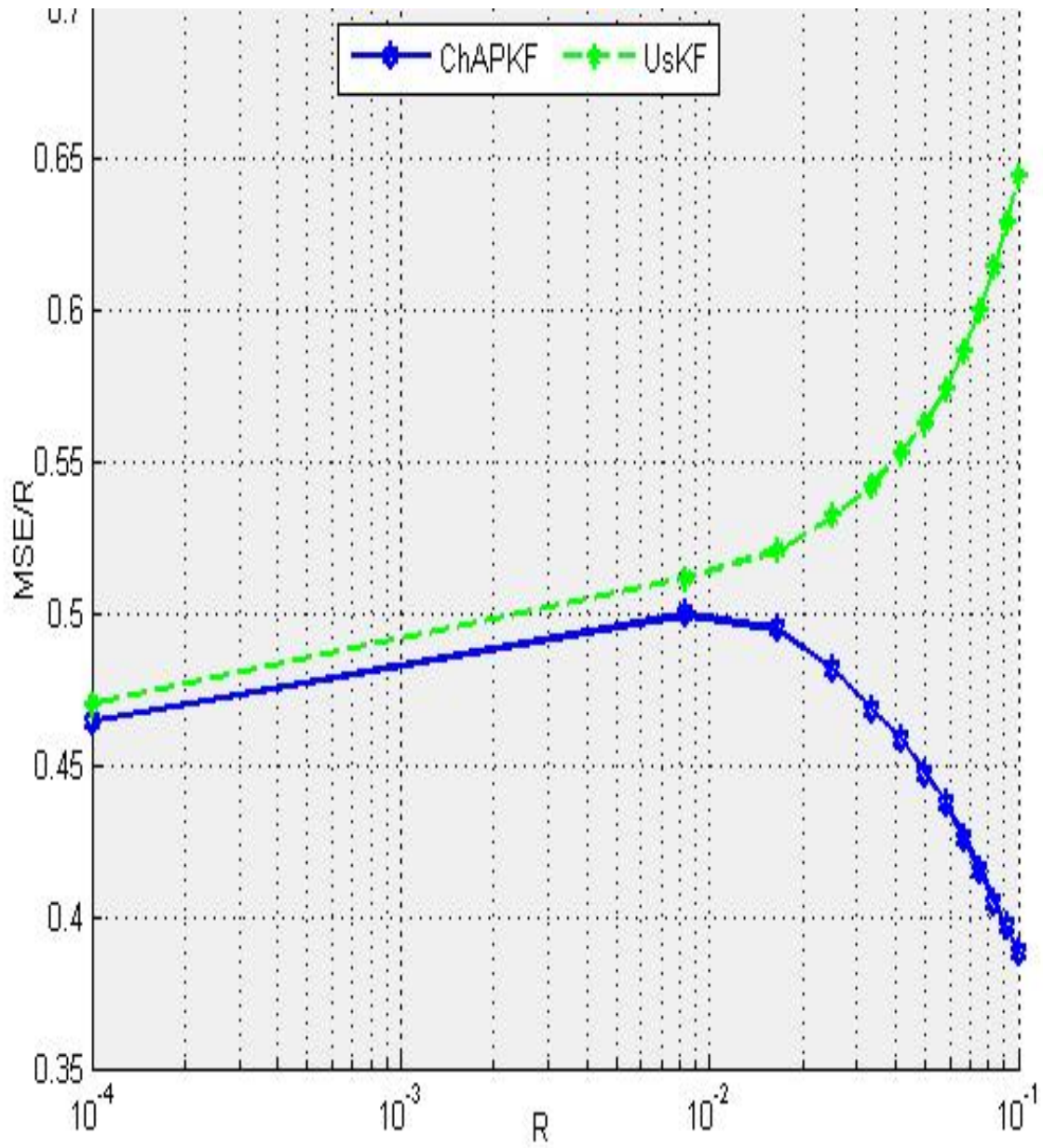


FIGURE 3.1 –  $EQM/R$  Performances of ChApp, UsKF :  $x_0 \sim \mathcal{G}(0.4, 0.25)$ .  $Q = \frac{R}{10}$ ,  $10^3$  transition iterations, (Number of samples :  $N_s = 10^6$ )

# Conclusions et Perspectives

A la lumière de la théorie du chaos, l'étude de la synchronisation entre les systèmes non-linéaires étranges (Chaotiques) s'est révélée fructueuse. Notre travail a contribué à la mise en place, d'une structure d'un récepteur basé sur le principe du filtrage de Kalman non linéaire.

Dans le premier chapitre de ce document a été aussi étudié les systèmes dynamiques continus que discrets, ainsi ont été présentés plusieurs modèles de communications à l'aide des systèmes dynamiques chaotiques. Dans un système de communication à porteuse chaotique, la synchronisation est l'élément le plus important qui doit être pris en compte pour assurer les meilleures performances de transmission, mais en présence du bruit dynamique et/ou de mesure, la synchronisation peut être vue comme un processus de l'estimation d'état et l'appelle au filtre de Kalman devient immédiat.

Le deuxième chapitre a traité avec détail l'aspect de l'estimation non linéaire. Ce sujet qui a un intérêt croissant dans le développement des techniques d'approximation a été initié par le principe de base du filtre de Kalman qui sert de prélude pour présenter et examiner les performances des différentes méthodes de filtrage de Kalman non-linéaire. Une linéarisation du modèle est donc nécessaire pour réaliser le filtre de Kalman étendu (EKF), ses performances se dégradent d'autant que le modèle en question est fortement non linéaire. Suite à ce constat, *Julie et Uhlmann (1997)* ont développé la transformation Unscented à base d'un ensemble de quelques points afin d'avoir une meilleure estimation de la variable et de sa variance, ce nombre de points est par la suite modifié par *Tenne et Singh (2003)* pour améliorer les moments supérieurs, les performances de cette nouvelle méthode dite (**HOUF**) est ensuite comparée à l'aide d'un exemple de simulation dans le paragraphe (2.2.3.2).

On a présenté dans le troisième chapitre, une approche de filtrage optimale et on a montré que pour un modèle polynomial mono dimensionnel, la statistique jusqu'à l'ordre deux d'une variable aléatoire( v.a) résultant de cette transformation peut être

calculer d'une manière exacte.

Nos contributions concernent principalement :

Dans une première partie, nous avons reformulé le calcul de la statistique de la variable transformée dans le but de trouver une expression exacte qui peut être généralisée sur tous les moments supérieurs, ce qui permet d'élargir la classe de distributions qui peuvent aussi être non gaussien, comme il est montré dans le tableau (3.4) du chapitre (3). Cet **seul** expression permet de rendre ainsi les exemples de simulations très facile à implémenter. Puis, dans une deuxième partie on a montré qu'il est possible de généraliser cette nouvelle approche au cas où la non linéarité ne se présente pas sous la forme polynomiale. Ainsi en se basant sur l'approximation du comportement du modèle en question par les polynômes orthogonaux de Chabyshev, un nouveau filtre récursif de Kalman optimal est développé rendant possible son application à tout problème d'estimation non linéaire. Quant à son application à la synchronisation du chaos cet expression qui suit une forme analytique matricielle permet aussi d'obtenir un gain de calcul très réduit.

Les performances de ce nouveau filtre ont été évaluées, dans le paragraphe (3.5), en le comparant à d'autres solutions de filtrages de Kalman : analyse de la non linéarité pour plusieurs configuration de la transformation non polynomiale et évaluation de l'erreur quadratique moyenne (*EQM*) de synchronisation par mécanisme de filtrage.

Une des perspectives de cet algorithme les plus importantes concerne l'application de la méthode d'approximation via le filtrage de Kalman exacte développé dans cette travail de thèse à la synchronisation des systèmes de communication à accès multiple.

# Bibliographie

- [AMP05] A. Germani, C. Manes, and P. Palumbo. Polynomial extended kalman filter. *IEEE Trans. Aut Control*, 50(12) :2059–2064, Dec 2005.
- [AMP07] A. Germani, C. Manes, and P. Palumbo. Filtering of stochastic nonlinear differential systems via a carleman approximation approach. *IEEE Trans. Aut Control*, 52(11) :2166–2172, Nov 2007.
- [And95] Andrew.W. Modular elliptic curves and fermat’s last theorem. *The Annals of Mathematics*, 141(3) :443–551, 1995.
- [A.S04] A.Serbanescu. Ed. ATM, 2004.
- [ASL<sup>+</sup>05] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. Garcia-Ojalvo, C. Mirasso, L. Pesquera, and K. Alan Shore. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. *Nature*, 437(17) :343–346, Nov 2005.
- [ASMC02] M. Arulampalam, N. Gordon S. Maskell, and T. Clapp. Tutorial on particle filter for online nonlinear/nongaussian bayesian tracking. *IEEE trans. Signal Processing*, 50(2) :1174–1188, Feb 2002.
- [AVR83] V. Afraimovich, N. Verochev, and M. Rabinovich. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems. *Radio Phys and Quantum Electron*, 29 :795–803, 1983.
- [BAK91] R. Brown, H. D. I. Abarbanel, and M. B. Kennel. Lyapunov exponents in chaotic sytems : their importance and their evaluation using observed data. *J. of Modern Physics B*, 5(9) :1347–1375, 1991.
- [BJR94] G. Box, G. Jenkins, and G. Reinsel. *Time series Analysis, Forecasting and Control, Englewood Cliffs*. Prentice-Hall, 1994.

- [Bog06] M.L. Bogdan. *Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information*. PhD thesis, Université de Bretagne occidentale, 2006.
- [BSF88] Yaakov Bar-Shalom and Thomas E. Fortmann. *Tracking Data and Association*. Academic Press, Inc. Academic Press, Inc, 1988.
- [BSL93] Y. Bar-Shalom and Xiao-Rong Li. *Estimation and Tracking - Principles, Techniques and Software*. Artech House, 1993.
- [BSL01] Y. Bar-Shalom and X.-R. Li. *Kalman Filtering and Neural Networks, chap. 7 : The Unscented Kalman Filter*. Wiley Publishing, s. haykin edition, 2001.
- [CO92] K. Cuomo and A. Oppenheim. *Synchronized chaotic circuits and systems for communications*. MIT Res. Lab. Electron, Nov 1992.
- [COS93a] K. Cuomo, A. Oppenheim, and S. Strogatz. Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with application to communication. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 40(10) :626–633, 1993.
- [COS93b] K. Cuomo, A. Oppenheim, and S. Strogatz. Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with application to communication. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 40(10) :626–633, 1993.
- [CU02] G. Chen and T. Ueta. Chaos synchronization in noisy environments using kalman filters. *Chaos in Circuits and Systems*, 52(11) :2166–2172, 2002.
- [DKH93] H. Dedieu, M. P. Kennedy, and M. Hassler. Chaos shift keying : Modulation and demodulation of chaotic carrier using self-synchronizing chua circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 40 :634–642, Oct 1993.
- [DT03] D.Tenne and T.Singh. The higher order unscented filter. In *Proc. Amer. Control Conf*, volume 3, pages 2441–2446, 2003.
- [DV99] Fournier-Prunaret D and Guglielmi V. Bifurcation and attractors in two-dimensional maps of cubic type. In *Proc. NOLTA99*, Hawaii, USA, Dec 1999.
- [Fow89] T. Fowler. Application of stochastic control techniques to chaotic nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 34 :202–205, Feb 1989.
- [GKN] A. Gelb, J.F Kasper, and Jr. Nash. *Applied Optimal Estimation*. MIT Press.

- [GP83a] P. Grassberger and I. Procaccia. "characterization of strange attractors". *Phys. Rev. Lett*, 50(4) :346–349, 1983.
- [GP83b] P. Grassberger and I. Procaccia. Estimation of the kolmogorov entropy from a chaotic signal. *Phys. Rev. A*, 28(6) :2591–2593, 1983.
- [GSS93] N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. M. Smith. Novel approach to nonlinear/nongaussian bayesian state estimation. *IEE Proc*, 140(2) :107–113, 1993.
- [Has97] M. Hassler. Current problems for the transmission of information using a chaotic signal. In *In 1st Int. Conf. on Control of Oscillations and Chaos*, 1997.
- [Has98] M. Hassler. Synchronization of chaotic systems and transmission of information. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 8(4) :647–659, 1998.
- [HS01] M. Hassler and Thomas Schimming. Communications using chaos. In *In Int. Conf. on Signals and Electronic Systems*, 2001.
- [IX00] K. Ito and K. Xiong. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45(5) :910–927, May 2000.
- [JU97] S.J. Julier and J. K. Uhlmann. In *In Proceedings of SPIE-Int*, 1997.
- [JUDW00] S. Julier, J. Uhlmann, and H. Durrant-Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45(3) :477–482, 2000.
- [Jul98] A.J Julie. A skewed approach for filtering. In *The 12th International Symposium on Aerospace Defense Sensing, Simulation and Controls, Orlando*, 1998.
- [Kal60] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *asme. Journal of Basic Engineering*, 82 :35–45, 1960.
- [Kat92] V. J. Katz. *d'après Binomial Theorem and the Pascal Triangle*. UniSA, 1992.
- [KD93] M. P. Kennedy and H. Dedieu. Experimental demonstration of binary chaos shift keying using self-synchronizing chua circuit. In *IEEE Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, 1993.
- [Ken94] M. P. Kennedy. Basic concepts of nonlinear dynamics and chaos. In *Tutorials IEEE*, 1994.



- [KHE<sup>+</sup>92] L. Kocarev, K. Halle, K. Eckert, L. Chua, and U. Parlitz. Experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 17(2) :709–713, 1992.
- [KJANC00] J. A. Kraus, T. Yang J. A. Nossek, and L. O. Chua. Evaluation of a continuous valued chaotic spreader used in a chaotic digital code-division multiple access cdma system. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 10(8) :1933–1950, 2000.
- [KKC97] G. Kolumban, M. Kennedy, and L. Chua. The role of synchronization in digital communications using chaos - part i : Fundamentals of digital communications. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10) :927–936, Oct 1997.
- [KKC98] G. Kolumban, M. Kennedy, and L. O. Chua. The role of synchronization in digital communications using chaos - part ii : Chaotic modulation and chaotic synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 45(11) :1129–1140, Nov 1998.
- [KKK97] G. Kolumban, M. Kennedy, and G. Kis. Performance improvement of chaotic communications systems. In *In Proc. European Conf. on Circuit Theory and Design*, 1997.
- [L01] Kocarev L. a brief overview. *IEEE, Circuits and Systems Magazine*, 1(3), 2001.
- [LABS06] M. B. Luca, S. Azou, G. Burel, and A. Serbanescu. On exact kalman filtering of polynomial systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 53(6) :1329–1340, 2006.
- [LL01] H. Leung and J. Lam. Adaptive blind equalization for chaotic communication systems using extended kalman filter. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48 :979–989, Aug 2001.
- [LM98] J. Lee and L. Miller. *CDMA systems engineering handbook*. Artech House, 1998.
- [Lor63] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci*, 20 :130–141, 1963.
- [LZ01] H. Leung and Z. Zhu. Performance evaluation of ekf-based chaotic synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48(9) :1118–1125, Sept 2001.

- [LZD00] H. Leung, Z. Zhu, and Z. Ding. An aperiodic phenomenon of the extended kalman filter in filtering noisy chaotic signals. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48(6) :1807–1810, 2000.
- [Mer04] R. Van Merwe. *Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models*. PhD thesis, OGI School of Science & Engineering, 2004.
- [MW03] R. Van Merwe and E. Wan. Gaussian mixture sigma-point particle filters for sequential probabilistic inference in dynamic state-space models. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, pages 701–704, April 2003.
- [NPR00b] M. Norgaard, N. Poulsen, and O. Ravn. New developments in state estimation for nonlinear systems. *Automatica*, 36 :1627–1638, 2000.
- [OWIC92] A. Openheim, G. Wornell, S. Isabelle, and K. Cuomo. Signal processing in the context of chaotic signals. In *In IEEE ICASP*, 1992.
- [PC90] L. Pecora and T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett*, 64 :821–823, 1990.
- [PC00] L. Pecora and T. Carroll. Detecting chaotic drive-response geometry in generalized synchronization. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 10(4) :875–889, 2000.
- [PNR00] N. Poulsen, M. Norgaard, and O. Ravn. "Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems". Technical report, Dept. of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark., April 2000.
- [Pro95] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, 3 edition, 1995.
- [PSM82] R. Pickholtz, D. Schilling, and L. Milstein. Theory of spread-spectrum communications : A tutorial. *IEEE Trans. on Communications*, COM-30(5) :855–870, May 1982.
- [RLH94] N. Rulkov, L. Tsimring, and H. Abarbanel. Tracking unstable orbits in chaos using dissipative feedback control. *Phys. Rev. E*, 50(1) :314–324, jul 1994.
- [RPK97] M. Rosenblum, A. Pikovsky, and J. Kurths. Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10) :874–881, 1997.

- [RSLH95] N. Rulkov, M. Sushchik, L. Tsimring, and H. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 51(2) :980–993, feb 1995.
- [Rul96] N. F. Rulkov. Images of synchronized chaos : Experiments with circuits. *Chaos*, 6(3) :262–279, Sept 1996.
- [Sch82] R. A. Scholtz. The origins of spread-spectrum communications. *IEEE Trans. on Communications*, COM-30(5) :822–854, May 1982.
- [Sch97] T. Schei. A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms. *Automatica*, 33(11) :2053–2058, Nov 1997.
- [Ser00] A. Serbanescu. *Sisteme de transmisiuni integrate-Comunicatii de banda larga folosind sisteme dinamice haotice*. Ed. ATM, 2000.
- [SSWV85] H. Swinney, J. Swift, A. Wolf, and J. A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16(1) :285–317, jul 1985.
- [Vit79] A. J. Viterbi. Spread spectrum communications : Myths and realities. *IEEE Commun. Mag*, 17(3) :11–18, May 1979.
- [Vol97] A. Volkovskii. Synchronization of chaotic systems using phase control. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10) :913–917, 1997.
- [YAB09] M. Yahia, P. Acco, and M. Benslama. Particle filter applied to polynomial chaotic maps. In *European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*, pages 535–538, Antalya, Turkey, Aug 2009.
- [YAB11] M. Yahia, P. Acco, and M. Benslama. Estimation of nonlinear systems via a chebyshev approximation approach. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 9(6) :1–7, 2011.
- [YC97] T. Yang and L. O. Chua. Chaotic digital code-division multiple access (cdma) communication systems. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 7(12) :2789–2805, 1997.
- [YF83a] T. Yamada and H. Fujisaka. *Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. ii*. *Prog. Theor. Phys*, 1983.
- [YF83b] T. Yamada and H. Fujisaka. *Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. iii*. *Prog. Theor. Phys*, 1983.
- [YL99] S. Yang and T. Liu. State estimation for predictive maintenance using kalman filter. *Reliab. Eng. Syst. Safety*, 66 :29–39, 1999.