

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mentouri de Constantine
Faculté des sciences de l'ingénieur
Département d'électronique

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences
en Electronique

Option : Contrôle

Synchronisation, Chaotification et Hyperchaotification des
Systemes Non-linéaires : Méthodes et Applications

Par : IKHLEF Ameur

Devant le jury :

<u>Président :</u>	A. Bennia	Prof	Université Mentouri Constantine
<u>Rapporteur :</u>	N. Mansouri	Prof	Université Mentouri Constantine
<u>Examineurs :</u>	S. Boughaba	M.C	Université Mentouri Constantine
	A. Boukabou	M.C	Université de Jijel
	S. Ladaci	M.C	Université de Skikda

2010 - 2011

Remerciement

Je pense en premier lieu à M^{me} NORA MANSOURI, professeur au département d'électronique, université de Constantine, que je remercie énormément pour avoir encadré ce travail de thèse avec précieux conseils et beaucoup de compétence et de disponibilité.

Merci madame pour la qualité du sujet, merci pour vos conseils et la confiance que vous m'avez accordée au cours des quatre ans.

Je remercie énormément Professeur A. BENNIA de m'avoir fait l'honneur de présider ma soutenance et également les examinateurs : Madame S. BOUGHABA (MC), monsieur A. BOUKABOU (MC), monsieur S. LADACI (MC), de m'avoir fait l'honneur en acceptant d'embellir ce travail avec leurs remarques et conseils.

Je remercie vivement monsieur A. BOUKABOU du département d'électronique, université de Jijel, pour ses compétences scientifiques qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont bien entendu à toutes les personnes des départements d'électronique et des mathématiques.

Ces remerciements ne seraient pas complets si je ne mentionner pas mes parents, mes frères, mes sœurs et mes amis dont les encouragements m'ont accompagné durant cette thèse.

Finalement, je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail soit par un conseil ou même un mot d'encouragement parmi mes camarades de magistère, mes amis, mes étudiants et collègues.

Résumé

La contribution à travers le travail développé dans cette thèse concerne la proposition et le développement de différentes approches pour la synchronisation de systèmes non linéaires sur des trajectoires stables ou instables ainsi que pour la chaotification et l'hyperchaotification des systèmes non linéaires. Plusieurs approches sont proposées ; elles correspondent aux points suivants :

- L'utilisation de l'algorithme backstepping pour le contrôle des systèmes chaotiques continus. L'efficacité de cette méthode récursive que ce soit pour la stabilisation du système sur son point fixe ou pour la poursuite d'une référence prédéterminée est montrée avec un exemple d'application. La méthode offre une stabilité asymptotique garantie car les lois de contrôle qui sont tirées directement de la fonction de Lyapunov, en satisfont les conditions de stabilité.
- L'utilisation d'une méthode de contrôle qui se base sur une combinaison intéressante de la logique floue et le contrôle prédictif basé sur un régulateur classique PID ; notre objectif est d'étudier les performances de la méthode pour le contrôle des systèmes chaotiques discrets. La méthode est très efficace surtout lorsque la prédiction est faite par un modèle non linéaire.
- L'application des méthodes de contrôle pour la synchronisation des systèmes chaotiques. Des méthodes basées sur les méthodes de contrôle actif, hybride à rétroaction, backstepping et mode glissant ont été ainsi développées et testées sur des systèmes discrets et continus. Le cas des systèmes avec des paramètres incertains a été particulièrement abordé et représente une part importante de notre contribution. Ces méthodes sont appliquées pour la synchronisation des systèmes identiques, systèmes différents, systèmes hyperchaotiques et les systèmes incertains.
- L'anti-contrôle ou chaotification des systèmes. Cette partie consiste à générer le chaos dans des systèmes n'ayant aucun comportement chaotique dans leur dynamique. Les approches développées se basent sur une amélioration de la méthode d'anti contrôle impulsif et la méthode par retour d'état développée dans le mémoire de magister d'une part, et la proposition de techniques telles que l'introduction d'une perturbation périodique avec une fréquence d'oscillation différente sur l'une des variables, d'autre part.
- La dernière partie est consacrée à l'hyperchaotification des systèmes chaotiques. Deux méthodes ont été présentées : le contrôle par retour d'état et le contrôle par perturbation paramétrique du système. Les deux méthodes sont appliquées sur des exemples de systèmes chaotiques et les résultats obtenus sont très satisfaisants.

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les systèmes chaotiques	5
I.1 Introduction	5
I.2 Le chaos.....	5
I.3 Quelques définitions	5
I.3.1 Systèmes dynamiques	5
I.3.2 Systèmes dynamiques discrets	6
I.3.3 Systèmes dynamiques continus	6
I.3.4 Systèmes autonomes et non autonomes	7
I.3.5 Système déterministe.....	7
I.4 Techniques de caractérisation du comportement chaotique	7
I.4.1 La section de Poincaré.....	7
I.4.2 L'espace de phases	8
I.4.3 Les exposants de Lyapunov	12
I.4.4 Le diagramme de bifurcation	13
I.5 Exemples de systèmes chaotiques.....	15
I.5.1 Exemple de systèmes discrets	15
I.5.2 Exemple de systèmes Continus	17
Chapitre II : Contrôle des systèmes chaotiques	21
II.1 Introduction	21
II.2 Contrôle par stabilisation et suppression du chaos	21
II.3 Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques.....	25
II.3.1 La méthode OGY	25
II.3.2 La méthode Backstepping	31
II.3.3 Le contrôle prédictif flou PD+I	36
Chapitre III : Synchronisation des systèmes chaotiques	42
III. 1 Introduction	42
III. 2 Méthodes de synchronisation	43
III.2.1 Le contrôle actif	43
III.2.2 Le contrôle hybride à rétroaction	44
III.2.3 La méthode du Backstepping.....	45
III.2.4 la méthode du mode glissant.....	47

III.3	Les types de synchronisation	49
III.3.1	La synchronisation identique (PC).....	49
III.3.2	La synchronisation complète (CS).....	53
III.3.3	La synchronisation généralisée (GS)	54
III.3.4	La synchronisation Lag.....	54
III.3.5	La synchronisation anticipée.....	54
III.3.7	L'anti-synchronisation	54
III.4	Résultats de simulation.....	55
III.4.1	Synchronisation des systèmes chaotiques identiques	55
a-	Synchronisation par la méthode du contrôle actif	55
b-	Synchronisation par le contrôle non-linéaire.....	60
c-	Synchronisation par le contrôle hybride à rétroaction.....	63
d-	Synchronisation par la méthode du backstepping	66
III.4.2	Synchronisation de systèmes chaotiques différents	69
III.5	Synchronisation des systèmes incertains	71
III.5.1	Synchronisation des systèmes incertains par le contrôle Backstepping adaptatif... 71	
III.5.2	Synchronisation des systèmes incertains par le contrôle actif adaptatif	80
Chapitre IV : Chaotification ou anti-contrôle des systèmes non linéaires		85
IV.1	Introduction	85
IV.2	Les méthodes de chaotification	86
IV.2.1	La méthode de Chen-Lai.....	86
IV.2.2	La méthode Delay Feedback.....	88
IV.2.3	La méthode de l'anti-contrôle impulsif.....	89
IV.3	Chaotification des systèmes discrets.....	93
IV.4	Chaotification des systèmes continus	104
IV.4.1	Chaotification des systèmes continus par la méthode DCF	104
IV.4.2	Exemple de chaotification.....	104
IV.4.2	Suppression et génération du chaos par perturbation paramétrique.....	113
IV.4.4	Chaotification des Oscillations harmoniques :.....	118
IV.4.5	Génération du chaos à partir de systèmes stables :	120
Chapitre V : Hyperchaotification des systèmes chaotiques.....		123
V.1	Introduction	123
V.2	Hyper-chaotification des systèmes chaotiques par le contrôle par retour d'état	124
V.2.1	Hyper-chaotification par la commande $\mathbf{u}(t) = \mathbf{d}\mathbf{y}(t - 1)\mathbf{z}(t - 1)$	124
V.2.2	Hyper-chaotification par $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{x}(t - 1)\mathbf{z}(t - 1) + \mathbf{d}\mathbf{u}(t - 1)$	129

V.3 Hyperchaotification par perturbation paramétrique	133
Conclusion générale	140
Bibliographie	141

Introduction générale

L'invention des ordinateurs dans les années 50 a été un tournant dans l'histoire des systèmes dynamiques. L'ordinateur a rendu possible ce qui ne l'était pas avant, c'est-à-dire les calculs rapides et les simulations numériques des équations. C'est d'ailleurs ce qui a permis le développement important des travaux sur les systèmes non linéaires et a conduit à la découverte de la dynamique chaotique, par Lorenz en 1963 [1]. Ce dernier a été le premier à mettre en évidence l'extrême sensibilité aux perturbations d'un simple modèle de calcul de la convection atmosphérique.

Le travail de Lorenz n'a eu que peu d'impact à ce moment là et ce n'est qu'au début des années 1970, que les recherches sur le chaos ont véritablement démarré. En 1971, Ruelle et Takens ont proposé une nouvelle théorie concernant l'initialisation de la turbulence dans les fluides, basée sur la considération d'attracteurs étranges [2]. En 1975, Li et York ont été les premiers à utiliser le terme "chaos" pour exprimer un comportement plus compliqué que l'équilibre, le périodique et le quasi-périodique [3]. Un an après, May a trouvé des exemples de chaos dans les applications itératives modélisant des interactions de populations en biologie et il a écrit un article important décrivant comment un simple système non linéaire peut avoir un comportement complexe et chaotique [4]. Ensuite, le physicien Feigenbaum a découvert qu'il y a des lois universelles qui gouvernent la transition d'un comportement régulier vers un comportement chaotique [5]. Ses travaux ont permis d'établir une relation entre ce qui est appelé "cascade de doublements de période" et le chaos et cela a conduit les physiciens à s'intéresser à l'étude des systèmes dynamiques.

Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre notion a été développée dans le domaine des systèmes dynamiques dans les années 1970, c'est celle des fractales. Mandelbrot a produit sur ordinateur des graphiques de ces fractales et a montré comment cette notion peut être utilisée dans différents domaines [6]. En particulier, en biologie mathématique, Arthur Winfree a appliqué des méthodes géométriques aux oscillations biologiques, entre autres les rythmes biologiques et les rythmes cardiaques pour caractériser des fractales [7].

Les effets chaotiques dans les circuits électroniques ont été constatés pour la première fois par Van der Pol en 1927 [8]. En 1983, Chua et Matsumoto ont synthétisé le premier circuit électronique, autonome et chaotique, l'oscillateur double spiral, maintenant connu sous la

dénomination "circuit de Chua". Il est maintenant étudié comme un circuit électronique chaotique modèle [9].

Depuis sa découverte, le chaos a été considéré comme un comportement incontrôlable et imprédictible : Incontrôlable parce que une petite perturbation peut conduire le système à un état totalement différent du premier ; Imprédictible parce que une petite différence dans les conditions initiales ou dans les paramètres du système, provoque une évolution différente dans la trajectoire du système. Le premier pas dans le domaine de contrôle du chaos a été fait en 1989 [10], mais c'est Ott, Grebogi et York en 1990 qui publient le premier article sur le contrôle du chaos [11]. Ils ont montré qu'une telle dynamique complexe pouvait être stabilisée par une méthode simple et efficace, ce qui a vraiment intéressé les chercheurs du domaine. Pendant le même temps Pecora et Carroll ont travaillé sur la synchronisation du chaos. Ils ont montré que malgré la dynamique très complexe des systèmes chaotiques, il était possible de les synchroniser, même s'ils évoluaient initialement de deux états différents [12].

En 1996, Chen et Lai ont proposé une méthode de génération du chaos à partir d'un système non chaotique. Le principe consiste à appliquer sur le système, une loi de commande tirée de la condition de stabilité de Lyapunov pour déstabiliser le système de sa position d'équilibre sans divergence [13].

A partir de là, beaucoup de recherche ont été développées sur le contrôle, la synchronisation, la chaotification ou anti-contrôle des systèmes dynamiques non linéaires.

Un certains nombre de ces recherches concerne l'application de la synchronisation du chaos, dans les communications sécurisées où le signal chaotique est utilisé pour masquer les messages à transmettre. Perez et Cerderia [14] ont prouvé que le masquage des messages par un système chaotique normal (possédant un seul exposant de Lyapunov positif) n'était pas toujours efficace. Puis Pecora a montré que ce problème pouvait être résolu en utilisant un système chaotique de dimension élevée c'est-à-dire avec plusieurs exposants de Lyapunov positifs. Ceci a conduit aux travaux sur l'hyperchaotification. Le comportement dynamique des systèmes hyperchaotiques est plus compliqué que celui d'un simple système chaotique. C'est pour cette raison que ces systèmes offrent plus de sécurité dans le domaine de la communication.

Notre contribution à travers le travail développé dans le cadre de cette thèse concerne la proposition et le développement de nouvelles approches pour le contrôle, la synchronisation

des systèmes chaotiques ainsi que la chaotification et l'hyperchaotification. Notre contribution porte sur les points suivants :

- L'application de l'algorithme backstepping pour le contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé.
- L'application du contrôle prédictif flou pour le contrôle des systèmes discrets
- L'étude des différents problèmes de synchronisation des systèmes chaotiques.
- Le développement d'une méthode adaptative basé sur l'algorithme backstepping pour la synchronisation des systèmes chaotiques à paramètres incertains.
- L'amélioration de la méthode du contrôle actif en intégrant une action adaptative pour la synchronisation des systèmes continus d'ordre supérieur.
- La génération de la dynamique chaotique par des méthodes à retour d'état et l'illustration de leurs efficacités pour la génération du comportement hyperchaotique.

Le travail est présenté en cinq chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques en général et aux systèmes chaotiques en particulier. Ainsi les modèles généraux qui définissent les systèmes dynamiques en temps continu et en temps discret sont présentés en même temps que les notions d'espace de phase et de trajectoire. Les outils d'analyse des systèmes chaotiques sont abordés, en particulier les exposants de Lyapunov et les diagrammes de bifurcation qui par leurs caractéristiques offrent une solution facile et très fiable.

Nous présentons dans le deuxième chapitre le principe de contrôle des systèmes chaotiques. Trois méthodes de contrôle sont développées. Une description complète de la méthode de contrôle OGY est faite. La méthode est appliquée pour le contrôle du système discret de Hénon où un choix judicieux de la loi de contrôle permet de supprimer le chaos le plus rapidement possible. L'algorithme backstepping est utilisé pour le contrôle des systèmes chaotiques continus, et nous montrons grâce à un exemple d'application, l'efficacité de la méthode récursive que ce soit pour la stabilisation du système sur son point fixe ou pour la poursuite d'une référence prédéterminée. La méthode offre une stabilité asymptotique garantie car les lois de contrôle qui sont tirées directement de la fonction de Lyapunov satisfont les conditions de stabilité. Le chapitre se termine par la présentation d'une méthode de contrôle qui se base sur une combinaison intéressante de la logique floue et du contrôle prédictif basé sur un régulateur classique PID ; notre objectif est d'étudier les performances

de la méthode pour le contrôle des systèmes chaotique discrets. La méthode est très efficace surtout lorsque la prédiction est faite par un modèle non linéaire.

Nous consacrons le troisième chapitre à la synchronisation des systèmes chaotiques continus et discrets. Nous présentons quelques méthodes telles que le contrôle actif, le backstepping, le mode glissant, le contrôle non linéaire et le contrôle hybride. Ces méthodes sont appliquées pour la synchronisation des systèmes identiques, différents, hyperchaotiques et incertains.

La chaotification des systèmes non linéaires est abordée dans le chapitre quatre. Dans le cas discret, une description de la méthode d'anti-contrôle proposée par Chen, basée sur le choix des valeurs des exposants de Lyapunov est détaillée. La méthode est appliquée sur des systèmes chaotiques d'ordre élevé et sur des systèmes qui n'admettent aucun comportement chaotique. Dans le cas continu, Plusieurs méthodes ont été appliquées, en particulier: la méthode Delay Feedback Control, la méthode basée sur la perturbation d'un paramètre du système, l'anti-contrôle impulsif et autre extension de l'algorithme d'anti-contrôle.

Le dernier chapitre est consacré à la théorie de l'hyperchaotification des systèmes chaotiques. Des méthodes de contrôle par retour d'état sont appliquées afin d'augmenter la dimension du système qui devient ainsi hyper chaotique, grâce à un bon choix du paramètre de contrôle.

Enfin, on termine par une conclusion générale ainsi que quelques perspectives qui peuvent être abordées ultérieurement.

Chapitre I : Généralités sur les systèmes chaotiques

I.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de mieux faire connaître les conditions nécessaires pour qu'un système ait un comportement chaotique. Nous partirons de quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques. L'étude rigoureuse de ce type de système étant en général délicate, nous nous limiterons à une étude qualitative purement graphique. Pour cela, nous introduisons le diagramme de phase, le diagramme de bifurcation, l'exposant de Lyapunov, la section de Poincaré, afin de formuler les critères permettant de caractériser les mouvements réguliers et les mouvements chaotiques.

I.2 Le chaos

Il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Cependant, le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut:

- La non-linéarité. Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- Le déterminisme. Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
- La sensibilité aux conditions initiales. De très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- L'imprévisible. En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- L'irrégularité. Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques

Pratiquement, une dynamique chaotique peut être identifiée, en première analyse, par la reconnaissance de propriétés caractéristiques : attracteur étrange, spectre, sensibilité aux conditions initiales ... etc.

I.3 Quelques définitions

I.3.1 Systèmes dynamiques

Du point de vue mathématique, un système dynamique est défini à partir d'un ensemble de variables qui forment le vecteur d'état $X = \{x_i \in \mathbb{R}\}, i = 1, \dots, n$ où n représente la dimension du vecteur.

Ces variables caractérisent complètement l'état instantané du système dynamique. En associant en plus un système de coordonnées, on obtient l'espace d'état qui est également appelé *l'espace de phase*.

En plus de l'espace d'état, un système dynamique est défini par une loi d'évolution, généralement désignée par *dynamique*, qui caractérise l'évolution de l'état du système au cours du temps.

La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique.

Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- Systèmes dynamiques discrets,
- Systèmes dynamiques continus.

I.3.2 Systèmes dynamiques discrets

Un système dynamique discret est représenté par des équations aux différences de la forme [15], [16] :

$$x(k + 1) = G(x(k), k) \tag{I.1}$$

Où $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système en temps discret.

Si on associe à cette dynamique un état initial $x_0 = x(k_0)$, alors pour chaque couple (x_0, k_0) donné, on peut identifier une solution unique

$$\Phi_G(\cdot; x_0, k_0): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{I.2}$$

Telle que :

$$\Phi_G(k_0; x_0, k_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{\Phi}_G(k + 1; x_0, k_0) = G(\Phi_G(k; x_0, k_0), k) \tag{I.3}$$

En temps discret on définit également le système autonome comme une dynamique qui ne dépend pas de l'instant k :

$$x(k + 1) = G(x(k)) \tag{I.4}$$

I.3.3 Systèmes dynamiques continus

Un système dynamique continu est décrit par un système d'équations différentielles de la forme [17]:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t) \tag{I.5}$$

Où $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente la dynamique du système.

Si on associe à cette dynamique un état initial $x_0 = x(t_0)$, alors pour chaque couple (x_0, t_0) on peut identifier une solution unique $\Phi(\cdot; x_0, t_0): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{aligned}\Phi_F(t_0; x_0, t_0) &= x_0 \\ \dot{\Phi}_F(t; x_0, t_0) &= F(\Phi_F(t; x_0, t_0), t)\end{aligned}\tag{I.6}$$

L'évolution des ensembles d'états successifs occupés par le système à chaque instant t représente la trajectoire du système.

I.3.4 Systèmes autonomes et non autonomes

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x, t)\tag{I.7}$$

Lorsque le champ de vecteurs f ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome. Dans le cas contraire il est non autonome.

Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système dynamique non autonome de dimension n en un système dynamique autonome équivalent de dimension $n+1$.

I.3.5 Système déterministe

Soit U l'ensemble des conditions initiales et soit $x_0 \in U$, Alors, si pour tout x_0 , $x(t, x_0)$ existe et est unique, le système est dit déterministe. Lorsque le chaos se développe dans un tel système, on parle alors de chaos déterministe.

I.4 Techniques de caractérisation du comportement chaotique

L'identification des caractéristiques des systèmes non linéaires à partir d'observations peut se faire grâce à des outils issus du domaine des dynamiques non linéaires tels que : la section de Poincaré, l'espace des phases, le diagramme de bifurcation, les exposants de Lyapunov [18], [19].

I.4.1 La section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système.

Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension n et une surface de dimension $(n-1)$ définie dans cet espace. L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface.

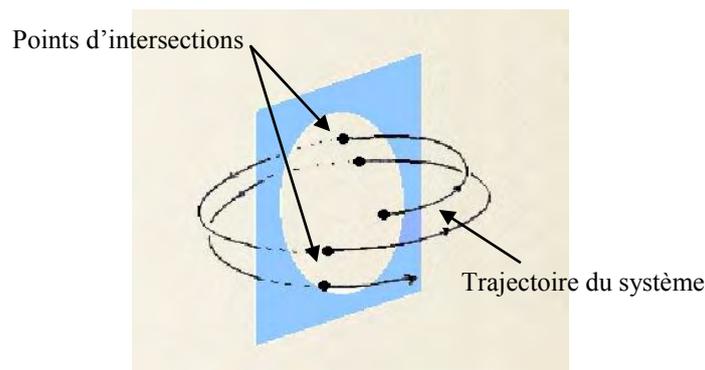


Fig. I.1. La section de Poincaré

L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface représente la section de Poincaré.

Dans un espace euclidien, le plan de la section doit être choisi de manière à garantir l'existence d'intersections avec la trajectoire Φ et de telle sorte que celle-ci le traverse alternativement dans un sens puis dans l'autre.

On peut définir trois applications différentes de Poincaré.

p^+ décrit les points où Φ traverse le plan dans le sens du vecteur normal,

p^- dans le sens contraire

p^\pm décrit la suite des points d'intersection quel que soit le sens de traversée.

Si Φ est *bornée* sans tendre asymptotiquement vers un équilibre et définie sur un espace euclidien, alors il existe toujours une surface pour laquelle les trois applications de Poincaré sont définies.

I.4.2 L'espace de phases

A partir d'un état initial x_0 et après un régime transitoire, la trajectoire d'un système dynamique atteint une région limitée de l'espace de phase. Ce comportement asymptotique obtenu pour $t, k \rightarrow \infty$ est une des caractéristiques les plus importantes à étudier pour tout système dynamique. Si dans le cas d'un système linéaire la solution asymptotique est unique et indépendante de la condition initiale, en présence de non-linéarités, il existe une plus grande variété de régimes permanents, parmi lesquels:

- Les points fixes ou points d'équilibre
- Les solutions périodiques
- Les solutions quasi-périodiques
- Le chaos

- **Point fixe ou point d'équilibre**

Un point fixe ou point d'équilibre est une solution constante du système. Il est obtenu en résolvant le système d'équations :

- *Cas discret* :

$$X = G(X) \tag{I.8}$$

- *Cas continu* :

$$X = F(X) \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 \tag{I.9}$$

Dans l'espace de phase, le point fixe se représente par un point. Sa valeur est déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibre. De même, ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre-elles.

- **Solution périodique**

Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles $nT, n \in \mathbb{N}^+$ et T la période de la solution.

Dans l'espace de phase, l'ensemble limite correspondant à cette solution est une courbe fermée. Si l'espace de phase est de dimension 2, la solution périodique sera un cercle, une ellipse, ou toute autre forme géométrique fermée. Pour revenir à son état précédent, le système met exactement une période.

Si on travaille dans un espace de phase de dimension supérieur à 2, il faut tenir compte de certaines subtilités. En effet, dans un tel espace, une trajectoire périodique ne se situe pas nécessairement dans un même plan et elle peut se développer dans différentes formes fermées, il est parfois impossible d'étudier la trajectoire générée par le système dans l'espace de phase. Pour éviter ce problème on utilise la *section de Poincaré*.

- **Solution quasi-périodique**

Une solution quasi-périodique correspond à une somme de solutions périodiques dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique est représenté dans l'espace d'état par un tore.

- **Solution chaotique**

Une telle solution a une trajectoire asymptotique bornée avec une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leur proximité initiale.

La moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale peut mener à un comportement très différent ce qui ne permet pas de faire une prédiction sur le comportement à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est impossible de prévoir à long terme leurs comportements.

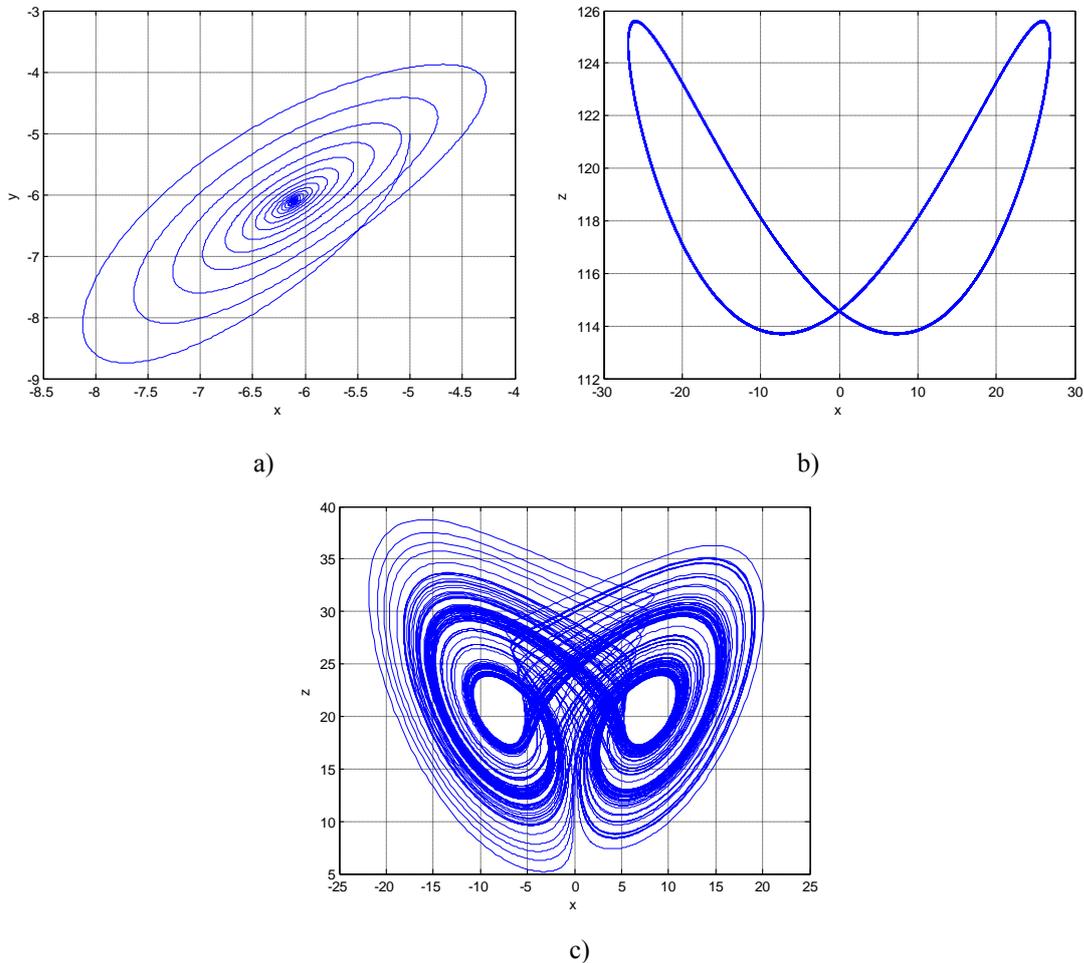


Fig. I.2 Comportement dynamique : a) point fixe, b) orbite périodique, c) attracteur chaotique

L'espace de phases est un outil qui permet d'avoir une évaluation qualitative de la solution obtenue. La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants montre que la solution générale est obtenue à partir des valeurs propres de l'équation caractéristique déduite de la matrice des dérivées partielles du système. Ainsi, la méthode de l'espace de phase qui est une technique qualitative simple et efficace permet la détermination du type de stabilité du point d'équilibre, à partir de la nature des valeurs propres de la matrice Jacobienne de la fonction f linéarisée au tour du point d'équilibre x_{eq} .

La linéarisation revient à poser :

$$x = x_{eq} + \delta x \tag{I.10}$$

Ce qui donne

$$\dot{x} = \dot{x}_{eq} + \delta \dot{x} \tag{I.11}$$

On obtient donc :

$$\dot{x}_{eq} + \delta \dot{x} = f(x_{eq} + \delta x) \tag{I.12}$$

Par le développement de Taylor du premier ordre de $f(x)$, on obtient

$$f(x_{eq} + \delta x) = f(x_{eq}) + f'(x_{eq})(x - x_{eq}) \tag{I.13}$$

D'où

$$\delta \dot{x} = Df(x_{eq})\delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0 \tag{I.14}$$

$Df(x)$ représente la matrice jacobienne de $f(x)$ par rapport à x , tel que

$$Df = \left\{ \frac{df_i}{dx_j} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n \tag{I.15}$$

Cette équation montre l'évolution dans le temps d'une perturbation δx_0 au voisinage du point d'équilibre. Il a été démontré que les parties réelles des valeurs propres de $Df(x_{eq})$ représentent la vitesse d'expansion $[\text{Re}(\lambda_i) > 0]$, ou de contraction $[\text{Re}(\lambda_i) < 0]$ d'une spirale alors que les parties imaginaires indiquent la fréquence de rotation [20].

Combinant les résultats démontrés pour des valeurs propres réelles et ceux correspondant à des valeurs propres complexes, il a été établi que quelle que soit la nature des valeurs propres, le type de stabilité est déterminé comme suit :

- Si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, pour toutes les valeurs propres, alors, toute perturbation suffisamment petite tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. On dit que le point x_{eq} est asymptotiquement stable. Toute les trajectoires tendent vers ce point quelque soient les conditions initiales.
- Si $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, pour toutes les valeurs propres, alors n'importe quelle perturbation peut augmenter quand $t \rightarrow \infty$. On dit que le point x_{eq} est instable ; Les trajectoires de phase s'éloignent du point considéré.
- S'il existe i et j tel que $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \text{Re}(\lambda_j) > 0$, alors il s'agit d'un point d'équilibre non stable.

I.4.3 Les exposants de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système sensible à de très petites variations de la condition initiale aura un exposant positif (système chaotique). En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à des petites variations des conditions initiales, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Un système de dimension n possède n exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase. L'apparition du chaos exige l'existence d'un exposant positif selon au moins un axe [21], tout en rendant compte que la somme des exposants est négative (respectivement nulle) pour les systèmes dissipatifs (respectivement conservatifs).

Un exposant de Lyapunov positif (respectivement négatif) selon une direction, indique que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente (respectivement diminue) exponentiellement avec le temps [22]. C'est une caractéristique d'un attracteur.

A titre d'exemple, les types d'attracteurs d'un système tridimensionnel en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont donnés dans le tableau suivant.

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	- - -
Cycle limite	0 - -
Attracteur étrange	+ 0 -

Tableau I.1: Caractérisation des attracteurs.

▪ **Calcul des exposants de Lyapunov**

Les exposants de Lyapunov sont généralement calculés par l'algorithme de Wolf [23].

On considère un système discret à n dimensions

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{I.16}$$

Le i -ème exposant de Lyapunov est défini en fonction du taux de croissance du $i^{\text{ème}}$ axe principale v_i par la formule [24]

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|v_i(N)\|}{\|v_i(0)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{I.17}$$

Les vecteurs $v_i(k)$ se transforment d'après la formule

$$v_i(k+1) = J(k)v_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{I.18}$$

Où $J(k)$ est la jacobienne de f au point x_k

A $k = 0$ les vecteurs $v_i, i = 1, 2, \dots, n$ sont définis par :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ v_n &= (0, 0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \tag{I.19}$$

Pour éviter la divergence, à chaque itération les vecteurs $v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)$ seront orthonormés par le procédé de Gram Schmidt :

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|}, \\ v'_2 &= \frac{v_2 - (v_2, v'_1)v'_1}{\|v_2 - (v_2, v'_1)v'_1\|}, \\ &\vdots \\ v'_n &= \frac{v_n - (v_n, v'_{n-1})v'_{n-1} - \dots - (v_n, v'_1)v'_1}{\|v_n - (v_n, v'_{n-1})v'_{n-1} - \dots - (v_n, v'_1)v'_1\|}. \end{aligned} \tag{I.20}$$

Le calcul des exposants de Lyapunov d'un système d'équations différentielles de la forme:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f : R^n \rightarrow R^n \tag{I.21}$$

Se fait de façon analogue. Seulement, les équations (I.17) et (I.18) seront remplacées par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|v_i(t)\|}{\|v_i(t_0)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{I.22}$$

$$\dot{v}_i(t) = J(x)v_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{I.23}$$

I.4.4 Le diagramme de bifurcation

▪ Stabilité structurelle et bifurcation

Un système est dit structurellement stable sur une portion de l'espace des paramètres si une petite perturbation du système ne modifie pas le comportement global de la dynamique sur cette portion.

Tant que le système est structurellement stable, les variations de paramètres produisent des changements quantitatifs de la solution: coordonnées d'un point fixe, amplitude ou fréquence d'une solution périodique. Cependant, on peut aussi avoir qu'une infime variation de paramètres produise un changement qualitatif de la solution : changement de stabilité d'un ensemble limite.

A la valeur particulière du paramètre où la solution change subitement de nature, le système est structurellement instable ce qui autorise un brusque changement de type de la solution. Ce phénomène est appelé bifurcation et les points où il se produit sont les points de bifurcation.

▪ Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime asymptotique est atteint.

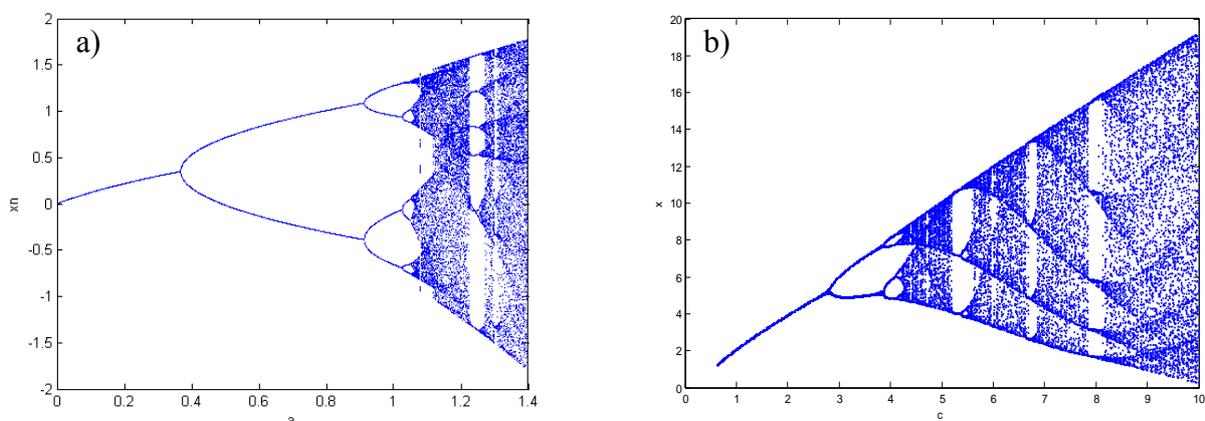


Fig. I. 3 Diagramme de bifurcation: a) système de Hénon pour $\mathbf{b} = \mathbf{0.3}$, b) Système de Rössler pour $\mathbf{a} = \mathbf{0.2}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{0.2}$.

- Dans le cas d'un système autonome ces valeurs particulières peuvent être obtenues en travaillant avec une section de Poincaré. Pour un système excité par une fonction périodique, on les obtient en échantillonnant la variable à la fréquence d'excitation. On obtient ainsi pour chaque valeur du paramètre la suite des états discrets de la variable lorsque le régime asymptotique est atteint.
- Un seul point sur une verticale indique un fonctionnement périodique fondamental. En effet, si pour une valeur donnée du paramètre le régime est périodique, la variable échantillonnée à la fréquence fondamentale f prend une valeur unique. Les n points de même abscisse se superposent donc exactement.
- Lorsque les points se répartissent densément sur un segment de la verticale, on peut en déduire que la solution est apériodique mais il n'est pas possible de préciser si elle est quasi périodique ou chaotique.

I.5 Exemples de systèmes chaotiques

Pour illustrer les comportements évoqués ci-dessus, nous présentons deux exemples de systèmes chaotiques ; l'un discret et l'autre continu.

I.5.1 Exemple de systèmes discrets

On considère l'équation logistique définie par l'expression suivante [25]:

$$x(k + 1) = p x(k)(1 - x(k)) \quad (\text{I.24})$$

L'équation logistique admet des points fixes obtenus par la résolution de l'équation

$$x = px(1 - x) \quad (\text{I.25})$$

Cette équation admet une solution $x_{f_1} = 0$, et d'autres solutions qui dépendent de la valeur du paramètre p : $x_{f_2} = 1 - \frac{1}{p}$.

La figure (I.4) montre la dynamique de l'équation logistique ainsi que certains modes asymptotiques particuliers.

La figure (I.4.c) nous donne un aperçu de la nature de la trajectoire pour différentes valeurs du paramètre p appelé paramètre de bifurcation. On remarque que pour toute valeur de $p \in [1,3]$, le régime permanent est formé par un point limite stable. Ainsi pour $p = 2$, on observe qu'après une période de transition relativement courte la séquence se stabilise autour du point fixe $x_f = 0.5$. Pour $p = 3.3$ et $p = 3.55$, le diagramme de bifurcation fait ressortir des comportements différents. Pour le premier cas, l'ensemble des états limites est une solution périodique formé par deux points (figure I.4.b). Pour le deuxième cas, on observe une augmentation de la dimension de l'ensemble des états limites et la période de répétition à 8 (figure I.4. e). Par contre, pour $p = 4$ le système est dans état chaotique (figure I.4.f). Ce comportement est justifié par la valeur positive de l'exposant de Lyapunov représenté par la figure (I.4.d)

Le phénomène de sensibilité aux conditions initiales est illustré par la figure (I.5). Pour des conditions initiales très proches (une différence de l'ordre de 10^{-4}), les deux systèmes évoluent de la même manière dans un premier temps; mais très vite, leur comportement devient différent.

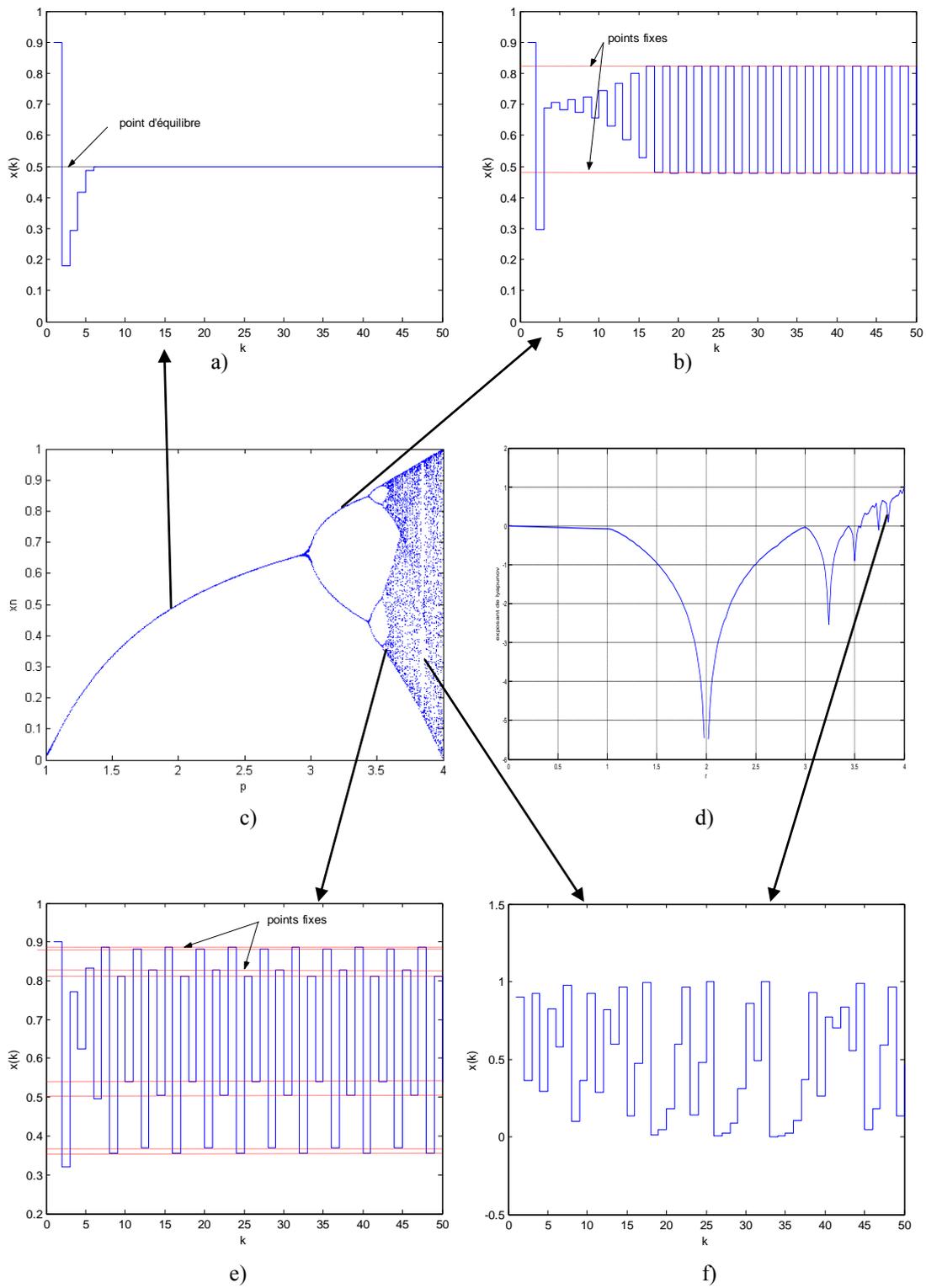


Fig. I. 4 Comportement dynamique de l'équation logistique : c) diagramme de bifurcation. d) exposant de Lyapunov. a, b, e, f) : évolution du système pour $p = 2, p = 3.3, p = 3.55, p = 4$.

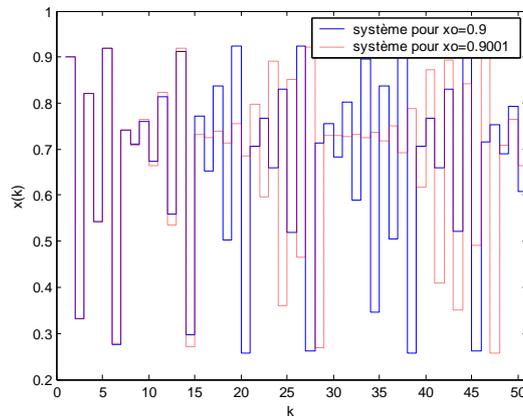


Fig. I. 5 Sensibilité aux conditions initiales de la fonction logistique pour $p = 4$

I.5.2 Exemple de systèmes Continus

On considère l'exemple du célèbre système de Lorenz donné par les équations suivantes [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= (r - z)x - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{I.26}$$

Les paramètres pour l'exemple dont la trajectoire est donnée dans la figure suivante sont les suivants : $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ avec la condition $(x_0, y_0, z_0) = (-5, -5, 10)$.

Généralement, ce type de système est qualifié d'autonome, puisque la dynamique est de la forme:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \tag{I.27}$$

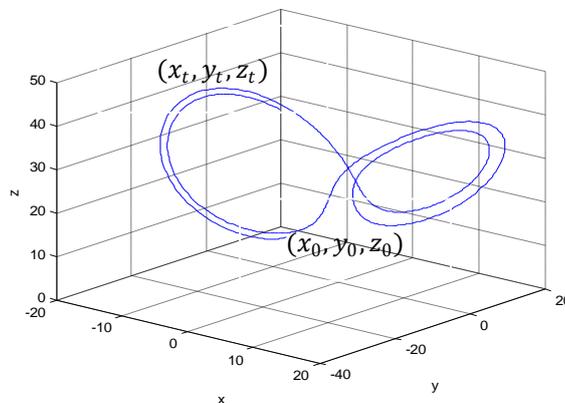


Fig. I. 6 Trajectoire du système de Lorenz dans l'espace de phase

Les points fixes sont la solution de l'équation :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \\ (r - z)x - y = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = (r - 1) \\ y^2 = bz \end{cases} \quad (I.28)$$

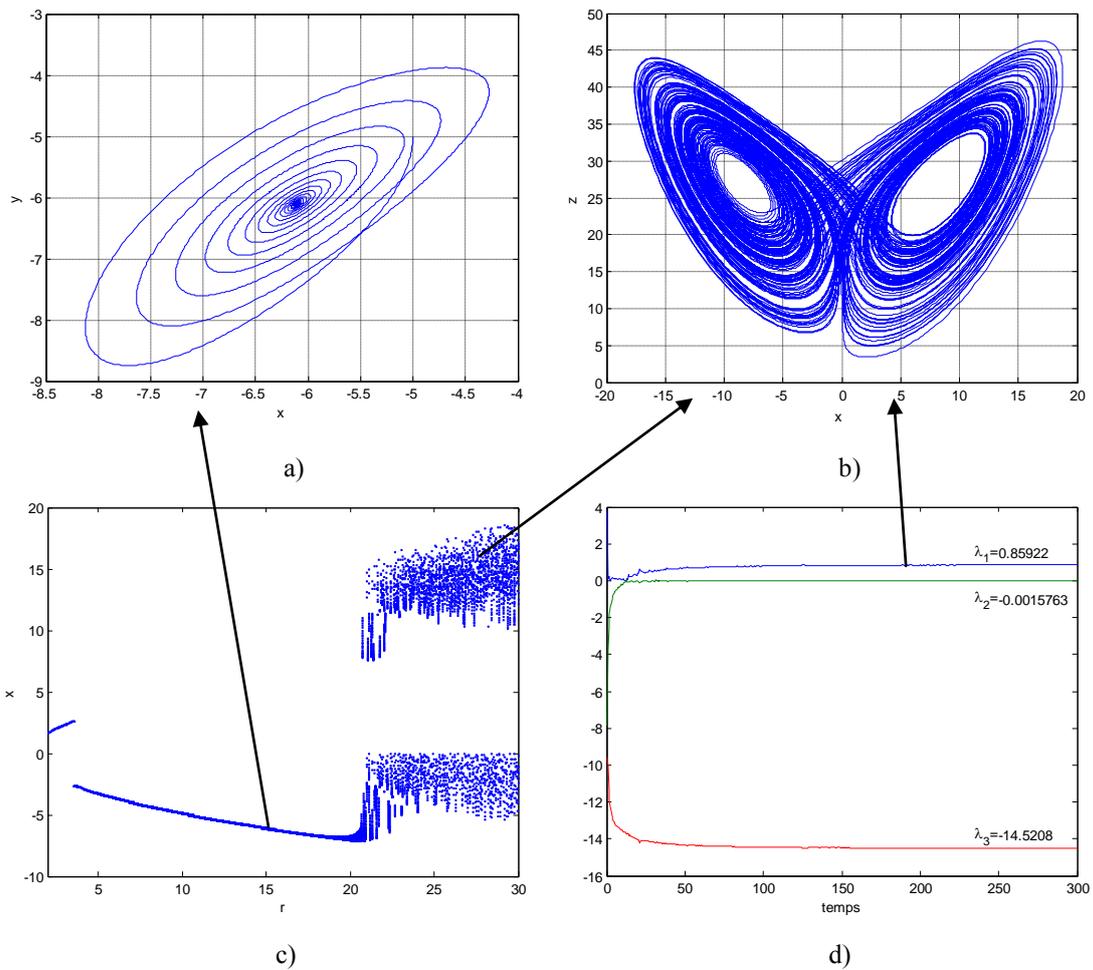
Pour $r = 1$ on a le point fixe $x_{f_1} = (0,0,0)$

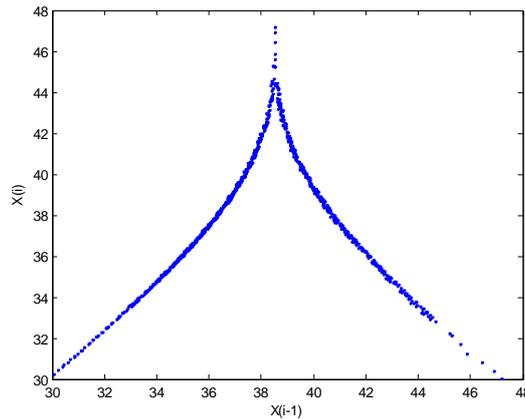
Dans le cas général:

$$\begin{cases} x = y \\ z = (r - 1) \\ y^2 = bz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = (r - 1) \\ y = \pm\sqrt{b(r - 1)} \end{cases} \quad (I.29)$$

Donc le système admet en général trois points fixes :

$$x_{f_1} = (0,0,0), x_{f_2} = (\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1), x_{f_3} = (-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1),$$





e)

Fig. I. 7 Comportement dynamique du système de Lorenz : c) diagramme de bifurcation. d) exposant de Lyapunov pour $r = 28$. e) section de Poincaré. a, b) : évolution du système pour $r = 15, r = 28$.

Pour $r = 10, b = 8/3$, le diagramme de bifurcation est celui de la figure (1.7.c). Il fait ressortir deux types de comportement : Ainsi pour $r = 15$, le plus grand exposant du système est nul, donc il converge dans ce cas vers une orbite périodique alors que pour $r = 28$, le système est en plein chaos ; il a un exposant positif. La solution périodique et l'attracteur chaotique sont représentés respectivement par les figure (I.7.a) et (I.7.b). La figure (I.7.e) représente les points d'intersection de l'attracteur chaotique avec la section du Poincaré.

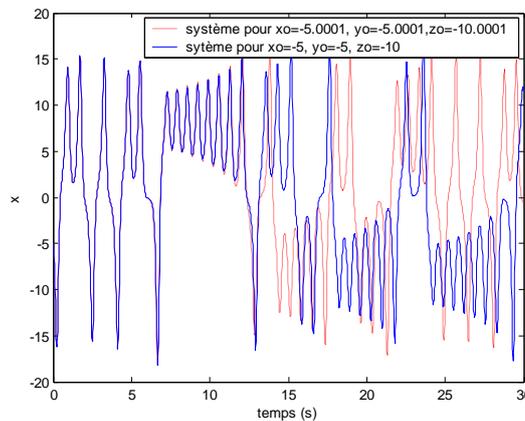


Fig. I. 8 Sensibilité aux conditions initiales du système de Lorenz

La figure (I.8) illustre la sensibilité aux conditions initiales. Cependant, une autre caractéristique des systèmes chaotiques peut être observée sur les courbes précédentes.

En effet, un système chaotique évolue d'une manière qui semble aléatoire. La figure (I.9) permet de comparer une évolution simple, périodique et donc prédictible d'un système classique avec l'évolution plus complexe, non périodique et non prédictible d'un système chaotique. Notons que les systèmes chaotiques obéissent tout de même aux lois de la

physique. Si on se place dans l'approximation de la physique classique, on peut affirmer que le système est totalement déterministe.

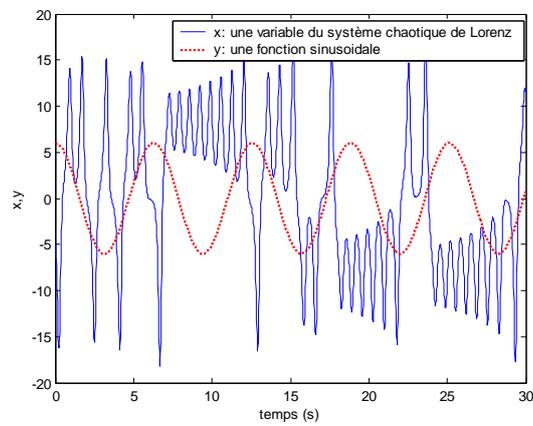


Fig. I. 9 Comparaison de l'évolution d'un système non chaotique et un système chaotique

Chapitre II : Contrôle des systèmes chaotiques

II.1 Introduction

Depuis les travaux de Ott, Grebogi et York en 1990, beaucoup d'intérêt a été manifesté pour le contrôle des systèmes chaotiques. Les différents travaux publiés sur le sujet, montrent qu'un système chaotique peut être contrôlé de deux manières:

- Par perturbation d'un des paramètres du système. Cette perturbation doit être bornée et très petite par rapport au paramètre perturbé
- Par stabilisation d'une des orbites périodiques instables du système en appliquant une méthode de contrôle par retour d'état. C'est une méthode simple à mettre en œuvre, mais qui nécessite un choix judicieux du gain et du retard, dans la boucle de retour.

Ce chapitre aborde l'aspect contrôle des systèmes chaotiques par stabilisation et suppression du chaos. Il sera consacré à la présentation des principaux travaux publiés sur ce sujet. Trois méthodes seront présentées dans le détail : la méthode de Ott-Grebogi-Yorke [11], la méthode Backstepping [26] ainsi qu'une méthode de contrôle prédictif flou PD+I que nous avons développée. Le problème d'optimisation relatif à la manière d'amener la trajectoire au voisinage de l'endroit désiré ainsi que le temps qui doit s'écouler avant le déclenchement du contrôle seront discutés.

II.2 Contrôle par stabilisation et suppression du chaos

L'objectif de la stabilisation du chaos est d'éliminer le mouvement chaotique. Une des caractéristiques qui distingue les systèmes chaotiques d'autres systèmes non linéaires est la notion d'attracteur chaotique. L'idée du contrôle est donc d'exploiter cette notion pour concevoir un contrôleur. De plus, l'instabilité d'un système chaotique se traduit en général par la divergence de trajectoires voisines, quelle que soit la nature de l'état en question. Pour contrer cette instabilité, il suffit donc d'appliquer au système une perturbation afin de l'y ramener de nouveau toutes les fois où le système s'écarte de l'état considéré.

La méthode OGY est une méthode de stabilisation qui se base sur l'idée suivante : pour un point qui appartient à un attracteur chaotique, il existe une orbite périodique stable ou instable qui passe sûrement au voisinage de ce point. Ainsi, si un paramètre du système est légèrement perturbé, les trajectoires du système vont se réunir sur la même orbite périodique, et à long terme la trajectoire du système devient une orbite périodique et le système devient

stable. Cette méthode de stabilisation est adaptée seulement aux systèmes de petites dimensions où les variables d'état observés ne sont soumises à aucun bruit.

La remarque la plus importante concernant la méthode OGY, est que les orbites périodiques instables utilisées dans le calcul numérique, représentent des approximations des orbites réelles ce qui a pour conséquence, la convergence de l'état contrôlé vers des approximations d'orbites. Donc, la performance de la méthode OGY dépend de la précision des approximations. De plus cette méthode est une méthode locale ; on peut donc attendre longtemps avant que le système passe au voisinage de l'orbite et que le contrôle ne se déclenche.

Pour améliorer l'efficacité de la méthode OGY, différentes approches ont été proposées dans la littérature [27-31]. En particulier, Shinbort , Ott, Grebogi et York ont proposé des approches pour réduire le temps d'attente et conduire la trajectoire vers le voisinage désiré dans un temps très court [32],[33]. Cependant, des problèmes comme la difficulté à obtenir les paramètres du système ou même lorsqu'ils sont bien identifiés, il est très difficile de les introduire comme lois de commande, peuvent être rencontrées.

Reyl et al [34] ont montré que des valeurs propres complexes survenaient pour des orbites de période 3 ou plus. Ils ont donc suggéré de revoir l'algorithme OGY pour qu'il puisse s'accommoder de plusieurs directions instables. Ils ont donc développé une méthode connue sous le nom MED (Minimal Expected Deviation).

Pour la définition de l'orbite périodique, Hao a proposé une méthode analytique [35]. Osipanko a utilisé une représentation graphique pour identifier l'orbite périodique. L'idée de la méthode est basée sur la construction d'une représentation graphique de la dynamique du système étudié [36]. Dans [37], Davidchack et al ont introduit des transformations sur le système chaotique original en gardant toujours la structure topologique de l'espace d'état. Donc, cette transformation agit seulement sur la stabilité des orbites.

Pour éviter le problème d'identification de l'orbite périodique, beaucoup de chercheurs ont pensé à utiliser des méthodes qui réalisent les deux objectifs à la fois. C'est-à-dire, identifier l'orbite périodique et stabiliser le système. Le contrôle à retour d'état (feedback contrôle FC) est une méthode de la forme deux en un. La procédure d'identification de l'orbite périodique est combinée avec l'algorithme de stabilisation [38-45].

Pyragas a proposé une méthode simple et très efficace qui repose sur l'injection des états retardés sur l'entrée du système [46].

Dans cette méthode, l'entrée du contrôle est basée sur la différence entre un état retardé de temps T et l'état courant, où T dénote une période des orbites périodiques instables. Donc, c'est une méthode de contrôle en boucle fermée avec retard. La commande appliquée au système est donnée par :

$$u(k) = K(x(k - T) - x(k)) \quad (\text{II.1})$$

K : gain de retour

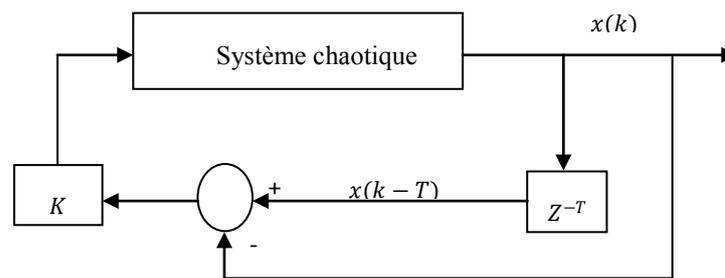


Fig. II. 1 Structure de contrôle proposé par Pyragas.

Le principe de la méthode est que l'erreur est approximée par la différence entre l'état courant $x(k)$ et l'état retardé $x(k - T)$, lorsque la trajectoire est au voisinage du point fixe.

Par la suite, plusieurs alternatives à la méthode originale de Pyragas ont été publiées. Par exemple, Yamamoto et al ont introduit l'aspect prédictif de la manière suivante [47]:

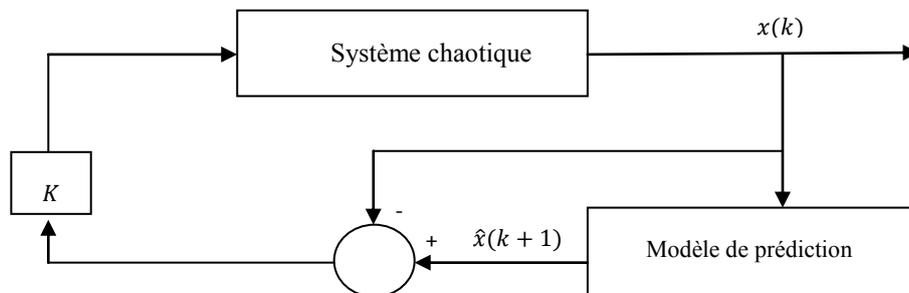


Fig. II. 2 structure de contrôle prédictif.

La loi de commande dans ce cas est :

$$u(k) = K(\hat{x}(k + 1) - x(k)) \quad (\text{II.2})$$

En 1991, Hunt a introduit une méthode de contrôle à retour d'état occasionnelle (Occasional Proportional Feedback OPF) [48]. Il a essayé de réduire un attracteur à une application unidimensionnelle autour d'un point fixe x_f . Tout d'abord la coordonnée du point fixe doit être connue. L'application du $i^{\text{ème}}$ retour peut être décrite autour du point fixe x_f par :

$$x_{n+i} = u \left(x_n - x_f(p_n) \right) + x_f(p_n) \quad (\text{II.3})$$

p : est un paramètre accessible du système.

Le point fixe est instable si la grandeur de la pente $|u| > 1$. il peut être stabilisé si l'on déplace le point fixe actuel du système à un autre situé à :

$$x_f = x_f(p_0 + \delta p) = u(u - 1)^{-1} \left(x_n - x_f(p_0) \right) + x_f(p_0) \quad (\text{II.4})$$

Le déplacement du point fixe est effectué par perturbation paramétrique, i.e. que

$$\delta p_n = \frac{u}{(u-1)dx_f} (x_n - x_f(p_0)) \equiv \frac{(x_n - x_f(p_0))}{k} \quad (\text{II.5})$$

k :est le facteur de proportionnalité.

Nitsche et Dressler ont amélioré la méthode OPF en RPF (Recurssive Proportional Feedback) [49], en intégrant la notion de récursivité pour prendre en considération le déplacement d'une application sur une section de Poincaré sous un changement paramétrique.

L'avantage majeur de la stratégie du contrôle par retour d'état, c'est que l'amplitude de la loi de commande calculée est très petite par rapport à l'état du système, et dans ce cas elle ne va pas détruire la dynamique originale du système. D'où la désignation de contrôle non destructif.

De plus, une fois le système stabilisé, le contrôle peut être relâché, ce qui donne un autre avantage économique à la méthode. Cependant, après le relâchement du contrôle, la surveillance de l'état contrôlé doit se faire d'une manière permanente, ce qui est très difficile à réaliser pour des applications réelles et expérimentales. Pour remédier à ce problème, plusieurs stratégies du contrôle en boucle ouverte (Non-Feedback Control : NFC) ont été proposées. On citera à titre d'exemple, les travaux de Mirus et al où un signal périodique a été appliqué pour supprimer le chaos [50] ou les travaux de Ramesh et al, où c'est un bruit qui a été suggéré au lieu du signal périodique [51]. Ce type de stratégies ne nécessite aucune analyse supplémentaire pour comprendre la dynamique chaotique du système étudié.

De plus, du point de vue implémentation de la stratégie de contrôle, le NFC offre plus de simplicité par rapport au contrôle FC, puisque pour ce dernier, on a parfois besoin de valeurs difficilement mesurables. Le contrôle NFC permet de supprimer le chaos ou donner un mouvement périodique au système. Mais pour faire la poursuite d'une trajectoire, il est nécessaire de faire une analyse complète pour comprendre la dynamique du système et introduire aussi quelques modifications sur la stratégie de contrôle comme indiqué dans [52-54].

D'autres méthodes ont été proposées et développées pour réaliser le contrôle du chaos dans divers systèmes dynamique non linéaires. en 1999, Chen a proposé une combinaison prédictive flou pour le contrôle des systèmes incertains définis par des séries de données [55]. Udatawa a développé un contrôleur flou pour les systèmes chaotiques [56]. Puis dans [57], Park a proposé une autre structure adaptative d'un contrôleur flou pour le contrôle des systèmes chaotiques incertains. Ramesh et al ont utilisé un réseau neuronal pour le contrôle du chaos dans l'oscillateur de Van Der Pol [58], puis Ren et al ont utilisé le réseau neuronal pour l'identification et le contrôle des systèmes chaotiques continus [59]. D'autres approches comme, le backstepping [60-63], le mode glissant [64-66], la commande adaptatif [67-70], ont été également utilisées.

Il est important de préciser que la littérature dans ce domaine est très large et les méthodologies décrites dans cette thèse ne représentent qu'une partie d'entre elle. Dans ce qui suit, nous décrivons trois méthodes de contrôle de systèmes chaotiques avec application sur des exemples de systèmes continus et discrets. Il s'agit de la méthode OGY qui est très connue, la méthode de contrôle Backstepping et d'une méthode qui combine le contrôle flou et le contrôle prédictif basée sur un régulateur PID.

II.3 Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques

II.3.1 La méthode OGY

La méthode Ott-Grebogi-Yorke ou OGY est une méthode qui se base sur l'idée suivante :

- déterminer quelques orbites périodiques instables, les examiner, puis choisir une qui représente les performances du système.
- ajuster les paramètres de perturbation, en un temps relativement court, dans le but de stabiliser l'orbite périodique instable.

On considère le système suivant :

$$\dot{x} = F(x, p), \quad x \in R^N, \quad (\text{II.6})$$

Où p représente le paramètre du contrôle.

La section de Poincaré du système est représentée par :

$$x_{n+1} = F_M(x_n, p), \quad x \in R^{N-1} \quad (\text{II.7})$$

Chaque point périodique dans la section représente une orbite périodique instable(UPO)

Soit x_f un point fixe dans la section de Poincaré

$$x_f = F(x_f, p_o), \quad (\text{II.8})$$

Où p_o représente la valeur nominale du paramètre

La stratégie de contrôle va donc consister à trouver une loi de contrôle et de stabilisation par retour d'état, définie au voisinage de l'orbite choisi.

Le système étudié présente un phénomène chaotique, donc nous garantissons le passage au voisinage du point fixe. Une fois que le système rentre dans le voisinage du x_f , la procédure du contrôle est déclenchée pour amener le système vers l'orbite désirée.

Dans ce cas, on a :

$$\delta x_n = x_n - x_f, \quad (\text{II.9})$$

Et

$$\delta p_n = p_n - p_o, \quad (\text{II.10})$$

Le système est linéarisé autour du point x_f

$$\delta x_{n+1} = A \delta x_n + B \delta p_n, \quad (\text{II.11})$$

Avec

$$A = D_x F(x), \quad (\text{II.12})$$

$$B = \partial F / \partial p, \quad (\text{II.13})$$

La matrice A représente deux directions propres, une direction stable e_s (valeur propre <1) et une direction instable e_u (valeur propre >1).

Les corrections sont donc à appliquer sur la direction instable.

On pose les notations suivantes :

λ_s : Valeur propre $|\lambda_s| < 1$.

λ_u : Valeur propre $|\lambda_u| > 1$

e_s : Vecteur propre correspond à la valeur propre λ_s

e_u : Vecteur propre correspond à la valeur propre λ_u

Donc, on peut mettre la matrice A sous la forme

$$A = \lambda_s e_s f_s + \lambda_u e_u f_u \quad (\text{II.14})$$

Où f_s, f_u représentent les vecteurs covariances.

Avec $f_s e_s = f_u e_u = 1$,

$$f_s e_u = f_u e_s = 0,$$

Alors, l'équation (II.11) devient :

$$\delta x_{n+1} = (\lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s) \delta x_n + B \delta p_n, \quad (\text{II.15})$$

En multipliant (II.15) par f_u :

$$f_u \delta x_{n+1} = f_u [(\lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s) \delta x_n + B \delta p_n], \quad (\text{II.16})$$

La stratégie de la méthode OGY consiste à ajuster le paramètre du contrôle p , afin de stabiliser le système sur le point x_j , c'est-à-dire, il faut que $\delta x_{n+1} = 0$.

Alors

$$f_u [(\lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s) \delta x_n + B \delta p_n] = 0, \quad (\text{II.17})$$

Sachant que :

$$f_s e_s = f_u e_u = 1,$$

$$f_s e_u = f_u e_s = 0,$$

Alors :

$$f_u \lambda_u \delta x_n + f_u B \delta p_n = 0, \quad (\text{II.18})$$

L'ajustement sur le paramètre du contrôle est donné par :

$$\delta p_n = \frac{-f_u \lambda_u}{f_u B} \delta x_n, \quad (\text{II.19})$$

Si on pose :

$$k = \frac{-f_u \lambda_u}{f_u B},$$

Alors on obtient :

$$\delta p_n = -k \delta x_n, \quad (\text{II.20})$$

Avec la condition suivante :

$$|p_n - p_o| < \varepsilon, \quad (\text{II.21})$$

ε : Paramètre prédéfini, qui détermine le voisinage du x_j .

On peut également, écrire :

$$|k \delta x_n| < \varepsilon, \quad (\text{II.22})$$

L'incrément du contrôle est donc donné par :

$$\delta p_n = \begin{cases} -k(x_n - x_f) & \text{si } |k(x_n - x_f)| < \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

• Contrôle du système de Hénon par la méthode OGY

Le système de Hénon est décrit par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Où a et b représentent les paramètres de contrôle

- **point fixe :**

Pour déterminer les points fixes on pose $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = y_n$, on obtient donc:

$$\begin{cases} x = a - x^2 + by \\ y = x \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

C'est à dire :

$$x_f, y_f = -\frac{(1-b)}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-b)^2}{4} + a} \quad (\text{II.26})$$

En posant : $c = \frac{1-b}{2}$

On obtient : $x_f, y_f = -c \pm \sqrt{c^2 + a}$ (II.27)

- **application de l'algorithme de contrôle :**

L'algorithme de contrôle est appliqué au système avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ pour assurer la présence du phénomène chaotique.

Le contrôle par la méthode OGY consiste à effectuer les opérations suivantes :

a- identification d'orbite périodique à stabiliser :

Remplaçant a et b dans l'équation (II.26) on obtient

$$x_{f1}, y_{f1} = 0.8839 \quad (\text{II.27})$$

$$x_{f2}, y_{f2} = -1.5839 \quad (\text{II.28})$$

Dans notre cas on choisit le point x_{f1}

b- calcul des matrices A et B :

On a $A = D_x F(x)$ et $B = \partial F / \partial p$

$$A = \begin{bmatrix} -2x_{f1} & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Donc

$$A = \begin{bmatrix} -1.7678 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

c- calcul des valeurs propres λ_u et λ_s

λ_u et λ_s sont définis par

$$\lambda_{s,u} = -x_{f1} \pm \sqrt{x_{f1}^2 + b} \quad (\text{II.31})$$

Soit :

$$\lambda_s = 0.1559 \quad \text{et} \quad \lambda_u = -1.9237 \quad (\text{II.32})$$

d- calcul des vecteurs propres $\{e_s, e_u\}$ et les vecteurs covariances $\{f_s, f_u\}$:

Les vecteurs propres sont calculés à partir de l'équation suivante :

$$[\lambda I - A]e = 0 \quad (\text{II.33})$$

Le vecteur propre est choisi de la forme :

$$e = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \text{ Avec } e_s = \begin{bmatrix} \lambda_s \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } e_u = \begin{bmatrix} \lambda_u \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$e_s = \begin{bmatrix} 0.1559 \\ 1 \end{bmatrix}, e_u = \begin{bmatrix} -1.9237 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Sachant que : $f_s e_s = f_u e_u = 1$ et $f_s e_u = f_u e_s = 0$

Ce qui donne :

$$f_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_s - \lambda_u} & \frac{\lambda_u}{\lambda_u - \lambda_s} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} & \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \end{bmatrix}$$

$$f_s = [0.4808 \quad 0.9250] \quad \text{et} \quad f_u = [-0.4787 \quad 0.0746]$$

e- calcul de k :

Le paramètre k est représenté par

$$k = \frac{\lambda_u f_u}{f_u B} = \frac{\lambda_u \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} & \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_u - \lambda_s} & \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = [\lambda_u \quad -\lambda_u \lambda_s] \quad (\text{II.35})$$

$$k = [-1.9237 \quad 0.3011] \quad (\text{II.36})$$

On choisit $\delta = 0.01$

- Résultats de simulations

L'algorithme appliqué avec la boucle de test : Si $|k \delta x_n| < \varepsilon$

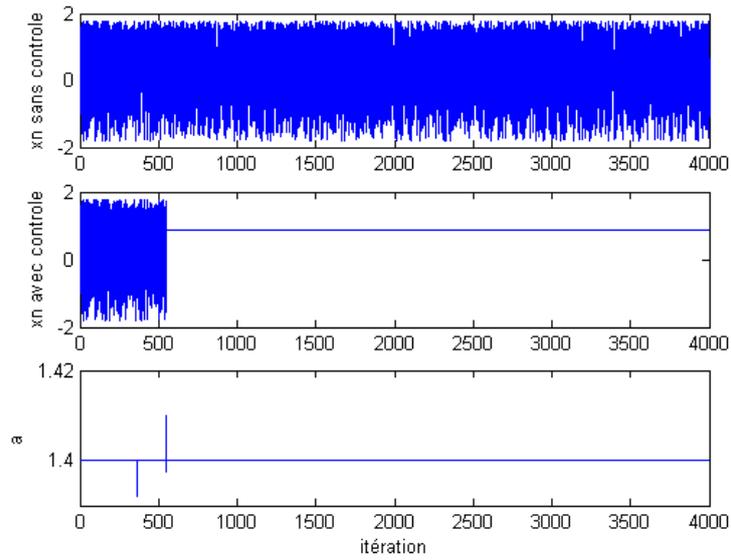


Fig. II. 3 Contrôle du système de Hénon par la méthode OGY

On remarque qu’au environ de la 554^{ème} itération, le système se stabilise à la valeur $x_n = 0.8839$ après deux déclenchements du contrôle.

Pour activer le contrôle plus tôt et pour éviter le double déclenchement du contrôle, on change la condition de test dans l’algorithme par :

$$(x_n - x_{f1})^2 + (y_n - y_{f1})^2 < \varepsilon \tag{II.37}$$

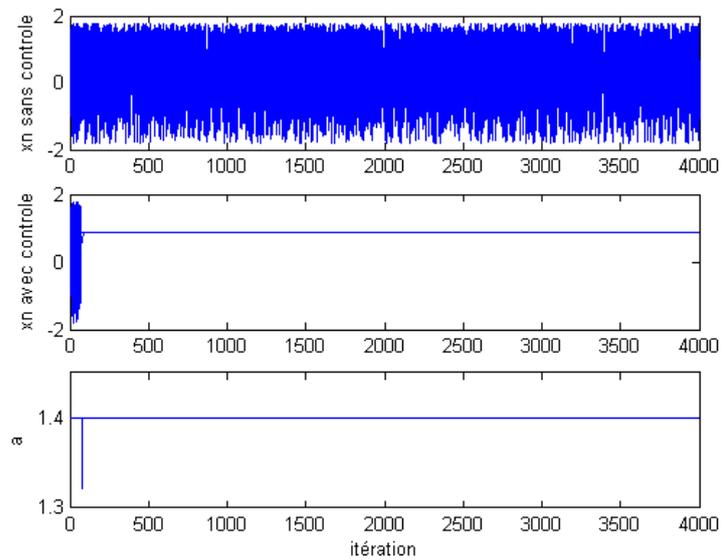


Fig. II. 4 Contrôle de l’attracteur de Hénon par la deuxième condition

Dans ce deuxième cas, on remarque que le déclenchement du contrôle se produit une seule fois. Le système se stabilise à la valeur $x_n = 0.8839$ après 79 itérations seulement, cela signifie l'efficacité de cette deuxième condition au voisinage du point fixe x_{f1} .

II.3.2 La méthode Backstepping

L'algorithme backstepping est un algorithme récursif qui repose sur le choix de la fonction de Lyapunov pour le calcul du contrôleur.

A l'étape i , le $i^{\text{ème}}$ sous système de dimension i est stabilisé à l'aide d'un contrôleur virtuel α_i et de la commande u_i qui est calculée à partir de la fonction de Lyapunov en satisfaisant les conditions de stabilité.

- **Application de l'algorithme Backstepping pour le contrôle du système de Lorenz**

Le modèle mathématique du système de Lorenz est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x - y), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

a, b, r : les paramètres du système.

Le système possède trois points fixes :

$$x_{f1} = (0,0,0), \quad x_{f2} = (+\sqrt{b(r-1)}, +\sqrt{b(r-1)}, (r-1)), \quad x_{f3} = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))$$

a- Contrôle du système sur un point fixe ou une orbite périodique

Soit $O(x_f, y_f, z_f)$ l'orbite périodique instable, On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}_f = a(y_f - x_f) \\ \dot{y}_f = -x_f z_f + r x_f - y_f \\ \dot{z}_f = x_f y_f - b z_f \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Pour que le système (II.38) se stabilise sur l'orbite périodique O il faut que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X - O\| = 0$,

avec $X = (x, y, z)^T$.

Le système contrôlé est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x - y) + u_1, \\ \dot{y} = -xz + rx - y + u_2, \\ \dot{z} = xy - bz + u_3, \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Où u_1, u_2, u_3 représentent les lois de contrôle ; elles sont calculées par l'algorithme de backstepping.

Soient : $e_1 = x - x_f, e_2 = y - y_f, e_3 = z - z_f$ les erreurs de contrôle.

La dynamique de l'erreur est donnée par le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 + ae_2 + u_1 \\ \dot{e}_2 = (r - z_f)e_1 - e_2 - x_f e_3 - e_1 e_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -y_f e_1 + x_f e_2 - be_3 + e_1 e_2 + u_3 \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Pour concevoir un simple contrôleur on pose $u_1 = 0$.

- **Etape 1** :

On pose : $z_1 = e_1$, sa variation est :

$$\dot{z}_1 = ae_2 - az_1 \quad (\text{II.42})$$

Où $e_2 = \alpha_1(z_1)$ est considérée comme un contrôleur virtuel qui doit être choisi de telle façon à ce que le sous système z_1 soit stable. Pour cela, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1 = \frac{z_1^2}{2} \quad (\text{II.43})$$

$$\Rightarrow \dot{V}_1 = -az_1^2 + az_1 \alpha_1 \quad (\text{II.44})$$

Si on choisit $\alpha_1 = 0$, \dot{V}_1 est définie négative, ce qui implique que le sous système z_1 est asymptotiquement stable.

La fonction $\alpha_1(z_1)$ est une fonction d'estimation, lorsque e_2 est considérée comme contrôleur.

On définit z_2 l'erreur entre e_2 et $\alpha_1(z_1)$

$$z_2 = e_2 - \alpha_1 \quad (\text{II.45})$$

On obtient, le sous système suivant

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = az_2 - az_1 \\ \dot{z}_2 = (r - z_f)z_1 - z_2 - x_f e_3 - z_1 e_3 + u_2 \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

Où e_3 est considéré comme un contrôleur virtuel

$$e_3 = \alpha_2(z_1, z_2) \quad (\text{II.47})$$

- **Etape 2** :

Pour stabiliser le sous système (z_1, z_2) on définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2 = V_1 + \frac{z_2^2}{2} \quad (\text{II.48})$$

Ce qui implique:

$$\dot{V}_2 = -az_1^2 + [(r - z_f)z_1 + u_2]z_2 - (x_f z_2 + z_1 z_2)\alpha_2 - z_2^2 \quad (\text{II.49})$$

pour $\alpha_2 = 0$ et $u_2 = -(r - z_f)z_1$ on a :

$$\dot{V}_2 = -az_1^2 - z_2^2 \Rightarrow \dot{V}_2 \leq 0 \quad (\text{II.50})$$

Donc le sous système (z_1, z_2) est asymptotiquement stable.

Nous savons que : $z_3 = e_3 - \alpha_2$, car α_2 est une fonction d'estimation. On obtient le sous système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = az_2 - az_1 \\ \dot{z}_2 = -z_2 - (x_f + z_1)z_3 \\ \dot{z}_3 = -y_f z_1 + x_f z_2 - bz_3 + z_1 z_2 + u_3 \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

- **Etape 3** :

Afin de stabiliser le sous système (z_1, z_2, z_3) on choisit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_3 = V_2 + \frac{z_3^2}{2} \quad (\text{II.52})$$

Ce qui donne :

$$\dot{V}_3 = -az_1^2 - z_2^2 - bz_3^2 + (-y_f z_1 + x_f z_2 + z_1 z_2 + u_3)z_3 \quad (\text{II.53})$$

Pour $u_3 = y_f z_1 - x_f z_2 - z_1 z_2$ la dérivée de la fonction de Lyapunov est définie semi-négative, ce qui implique la stabilité du sous système (z_1, z_2, z_3) .

$$\dot{V}_3 = -az_1^2 - z_2^2 - bz_3^2 \leq 0 \quad (\text{II.54})$$

b- Contrôle du système sur une trajectoire

Dans cette partie, le système de Lorenz est contrôlé pour suivre une trajectoire désirée $x_d(t)$

- **Etape 1** :

Soit $x_1 = x - x_d$ l'erreur entre la variable x et la trajectoire désirée. La dérivée est donnée par :

$$\dot{x}_1 = a(y - x) - \dot{x}_d \quad (\text{II.55})$$

$y = \alpha_1(x_1)$ est considéré comme contrôleur virtuel.

Si on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1 = \frac{x_1^2}{2} \quad (\text{II.56})$$

Alors :

$$\dot{V}_1 = -ax_1^2 + ax_1(\alpha_1 - x_d) - x_1 \dot{x}_d \quad (\text{II.57})$$

Pour $\alpha_1 = \frac{\dot{x}_d + ax_d}{a}$, le sous système x_1 est stable parce que $\dot{V}_1 = -ax_1^2 \leq 0$.

$y = \alpha_1(x_1)$ est une fonction d'estimation. Donc on peut définir la variable d'erreur suivante :

$$x_2 = y - \alpha_1 \quad (\text{II.58})$$

Ce qui nous donne le sous système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_d)(r - z) - (x_2 + \alpha_1) - \dot{\alpha}_1 + u_2 \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

Avec $z = \alpha_2(x_1, x_2)$ est vu comme un contrôleur virtuel.

- **Etape 2** :

Pour calculer la loi de contrôle qui stabilise le système (x_1, x_2) , on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2 = V_1 + \frac{x_2^2}{2} \quad (\text{II.60})$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_2 = -ax_1^2 + [(x_1 + x_d)(r - \alpha_2) - (x_2 + \alpha_1) - \dot{\alpha}_1 + u_2]x_2 \quad (\text{II.61})$$

On choisissant : $\alpha_2 = 0$ et $u_2 = -r(x_1 + x_d) + \dot{\alpha}_1 + \alpha_1$, alors :

$\dot{V}_2 = -ax_1^2 - x_2^2 \leq 0$, ce qui assure que le sous système (x_1, x_2) est asymptotiquement stable.

α_2 est une fonction d'estimation dont la variable d'erreur est donnée par : $x_3 = z - \alpha_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + x_d)x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = (x_1 + x_d)(x_2 + \alpha_1) - bx_3 + u_3 \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

- **Etape 3** :

Soit V_3 une fonction de Lyapunov:

$$V_3 = V_2 + \frac{x_3^2}{2} \quad (\text{II.63})$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_3 = -ax_1^2 - x_2^2 + x_3[(x_1 + x_d)(x_2 + \alpha_1) - bx_3 + u_3] \quad (\text{II.64})$$

Pour $u_3 = -(x_1 + x_d)(x_2 + \alpha_1)$ on obtient :

$$\dot{V}_3 = -ax_1^2 - x_2^2 - bx_3^2 \leq 0 \quad (\text{II.65})$$

Ce qui garantit que le sous système (x_1, x_2, x_3) est asymptotiquement stable.

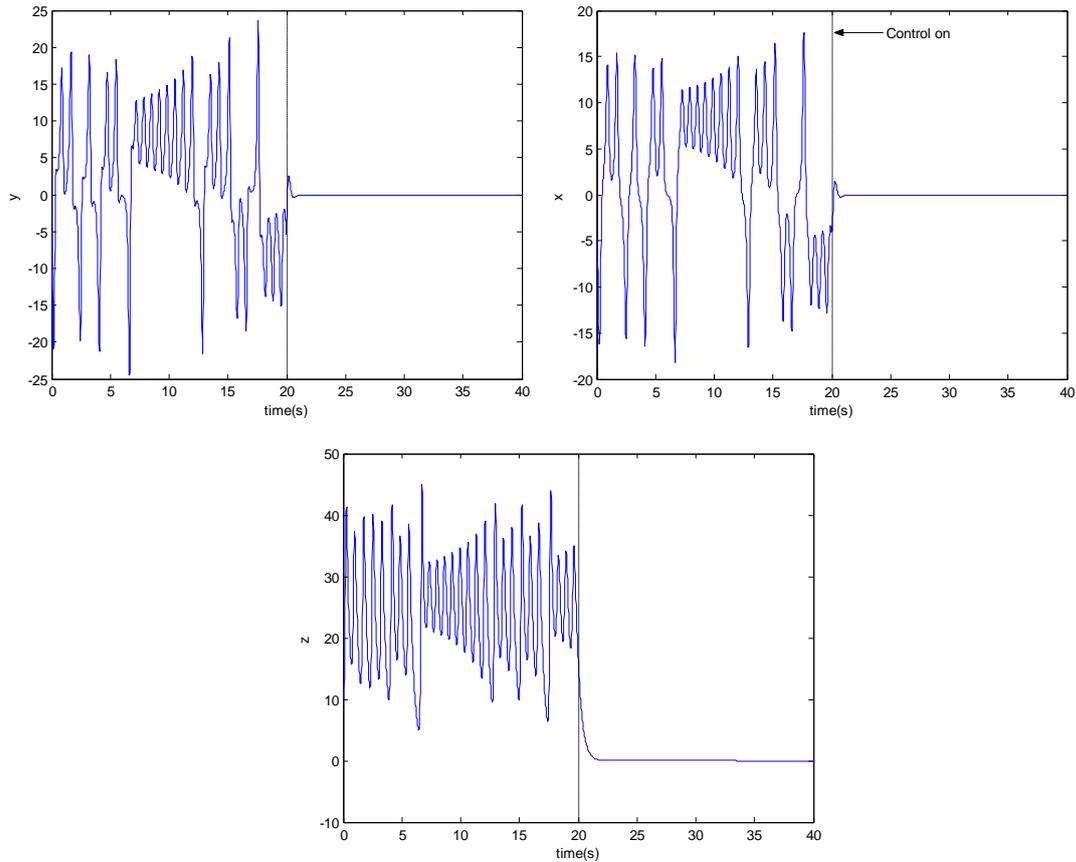
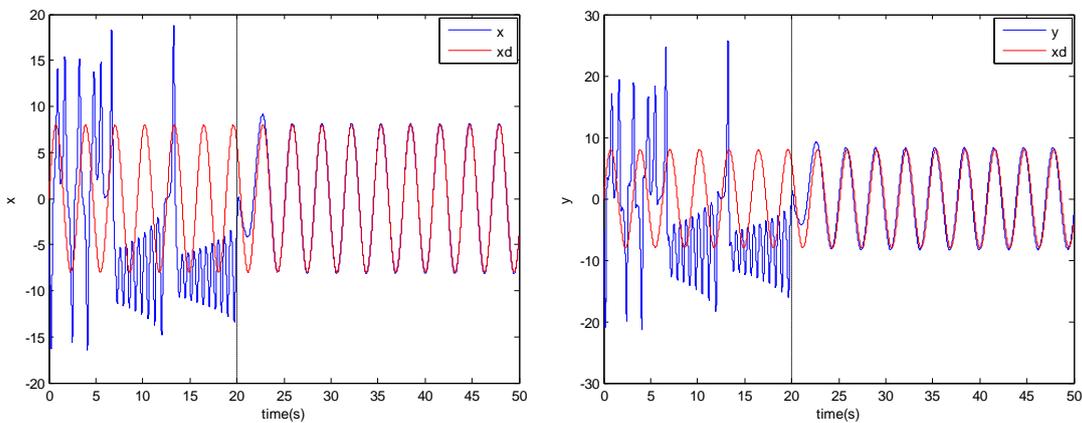


Fig. II. 5 Contrôle du système de Lorenz sur un point fixe

Bien que le calcul de la loi de commande a été basé seulement sur la stabilisation de la variable x , on remarque que le chaos est supprimé et la variable y suit une trajectoire sinusoïdale. Ce résultat est un cas particulier pour le système de Lorenz parce que dans ce dernier la variable x et y varient toujours de la même manière. Par contre dans la figure(II.6), le chaos a été supprimé, mais la variable z ne suit pas la sinusoïde, mais elle se stabilise sur le point fixe origine.



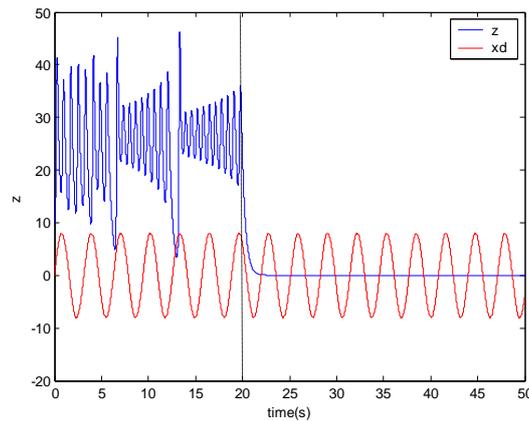


Fig. II. 6 Contrôle sur une trajectoire

II.3.3 Le contrôle prédictif flou PD+I

Le contrôle prédictif est une stratégie de contrôle basée sur la prédiction de la sortie du système sur un horizon étendu dans le futur, elle permet au contrôleur de prédire le changement de la grandeur à commander et de baser les actions du contrôle sur la prédiction. Le principe est de réaliser des prédictions à partir d'un modèle mathématique du système et de déterminer à chaque période d'échantillonnage la commande qui minimise un critère contenant la somme quadratique des erreurs sur l'horizon de prédiction et l'effort de la commande pondéré. Par ailleurs, le contrôle prédictif de type PID, et le contrôle prédictif basé sur la logique floue et les réseaux de neurones ont attirés beaucoup d'attentions [71-73]. La logique introduite par L. Zadeh est utilisée avec succès pour le contrôle des systèmes non linéaires dont les modèles des systèmes sont inconnus [74]. La combinaison de la logique floue avec le contrôle prédictif peut aider à résoudre le problème de la commande prédictive non linéaire. Pour cette raison, le contrôle prédictif flou est devenu de plus en plus intéressant. Par la suite, plusieurs combinaisons du contrôle flou PID ont été développées, elles ont une structure analytique et une stabilité garantie, elles ont donné de bonnes performances pour le contrôle des systèmes non linéaires.

En se basant sur ce qui précède, une combinaison intéressante du contrôle flou PID avec le GPC (Generalized Predictive Control) a été proposée dans [75]. Dans cette partie, on se propose d'appliquer cette approche pour le contrôle des systèmes chaotiques.

Le contrôleur prédictif flou PD+I est composé :

- D'un modèle de prédiction.
- D'un contrôleur flou PD.
- D'un contrôleur flou I.

- D'un critère de coût J (Optimal Cost Index J) à minimiser en ligne.

Dans la figure (II.7), $R_j(k)$ est la référence, $y(k)$ est la sortie du système, $u(k)$ est la commande du système, $\hat{y}(k+1)$ est la valeur prédite de la sortie du système basée sur un modèle de prédiction qui peut être linéaire ou non-linéaire, $R_y(k+1), R_y(k), \dots, R_y(k-m)$ sont les références de y pour des différents temps d'échantillonnage et $\Delta u(k)$ est l'incrément de la commande.

La théorie du contrôleur repose sur deux stratégies différentes mais complémentaires qui sont la prédiction et la logique floue. Pour atteindre l'objectif, on utilise un modèle comme prédicteur pour estimer $\hat{y}(k+1)$. Pour que le contrôleur ait les mêmes caractéristiques que le GPC, un critère de coût optimal a été intégré directement. Cette intégration permet d'avoir une prédiction similaire à celle du GPC en réduisant considérablement le coût en calcul.

Cette structure de commande a deux objectifs, le premier c'est de forcer la sortie du système à suivre sa référence connue R_y , l'autre c'est de forcer le coût J à suivre une référence R_j , pour le rendre le plus petit possible. L'erreur de J et sa dérivée sont utilisées comme des entrées pour le contrôleur flou PD+I, puis les paramètres du contrôleur sont ajustés pour forcer le coût J à tendre vers sa référence lorsque le temps tend vers l'infini.

Cependant, l'ajustement des paramètres doit se faire de telle façon à ce que la sortie du système y se rapproche à sa référence R_y . Le fait d'ajuster les paramètres selon cette condition garantit la convergence de J vers sa référence R_j . Autrement dit, quand l'erreur de y et sa dérivée tendent vers zéro, l'erreur de J et sa dérivée doivent eux aussi tendre vers zéro. Donc l'ajustement des paramètres d'un seul contrôleur PID permet de réaliser les deux objectifs cités précédemment. Ceci est l'avantage principal de cette théorie.

Pour la prédiction, il est possible d'utiliser des modèles linéaires ou non linéaires. Par exemple dans le cas linéaire, on peut utiliser le modèle CARMA « Controlled Auto-Regressive Moving Average model ». Dans le cas non-linéaire, on peut utiliser le modèle du système lui-même comme prédicteur. Pour la stabilité du contrôle prédictif, le critère de coût optimal à optimiser est défini par :

$$J = \sum_{i=-1}^H (r(k-i) - y(k-i))^2 + \sum_{j=0}^{H_c} (\Delta u(k-j))^2 \quad (\text{II.66})$$

$$= \sum_{i=-1}^H e^2(k-i) + \sum_{j=0}^{H_c} (\Delta u(k-j))^2 \quad (\text{II.67})$$

r : la référence, Δu : l'incrément de commande, $y(k-i), i = 0, \dots, H$: les sorties du système.

e : l'erreur entre y et r .

H : l'horizon de prédiction, H_c : l'horizon de commande.

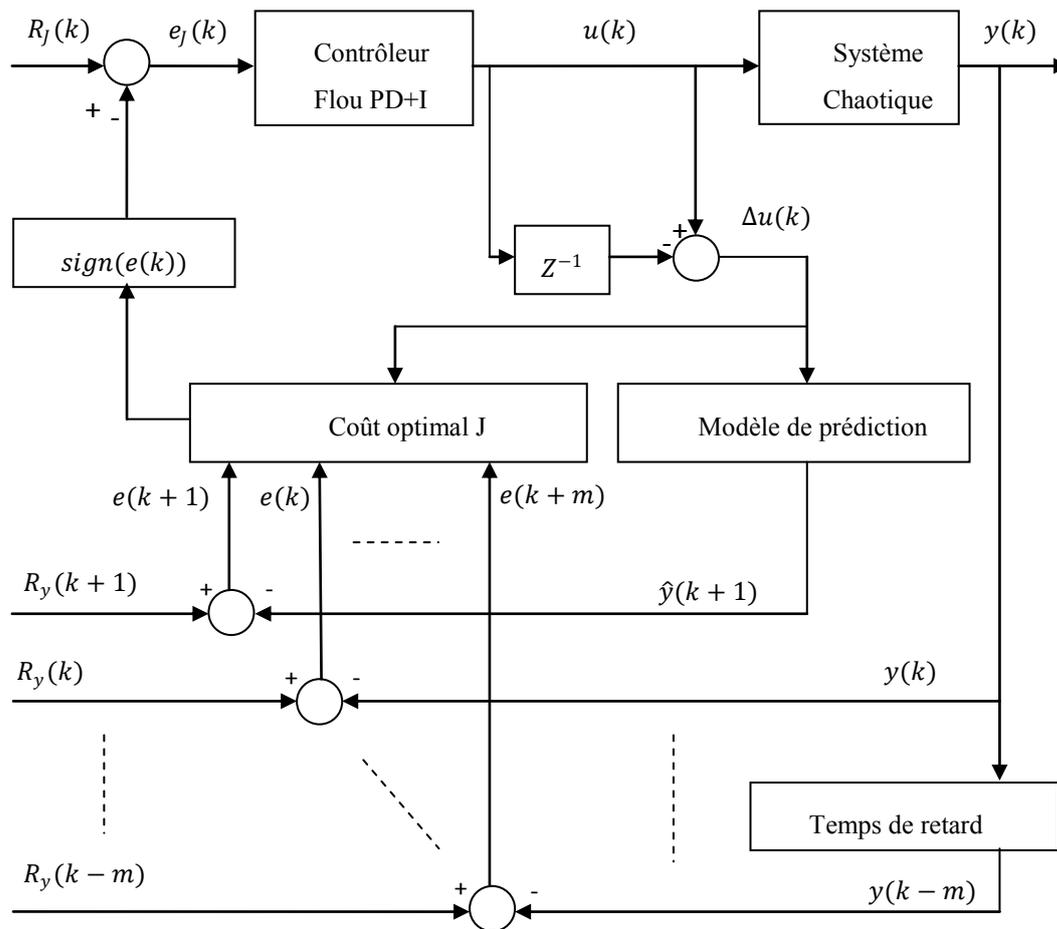


Fig. II. 7 Le contrôleur prédictif flou PD+I.

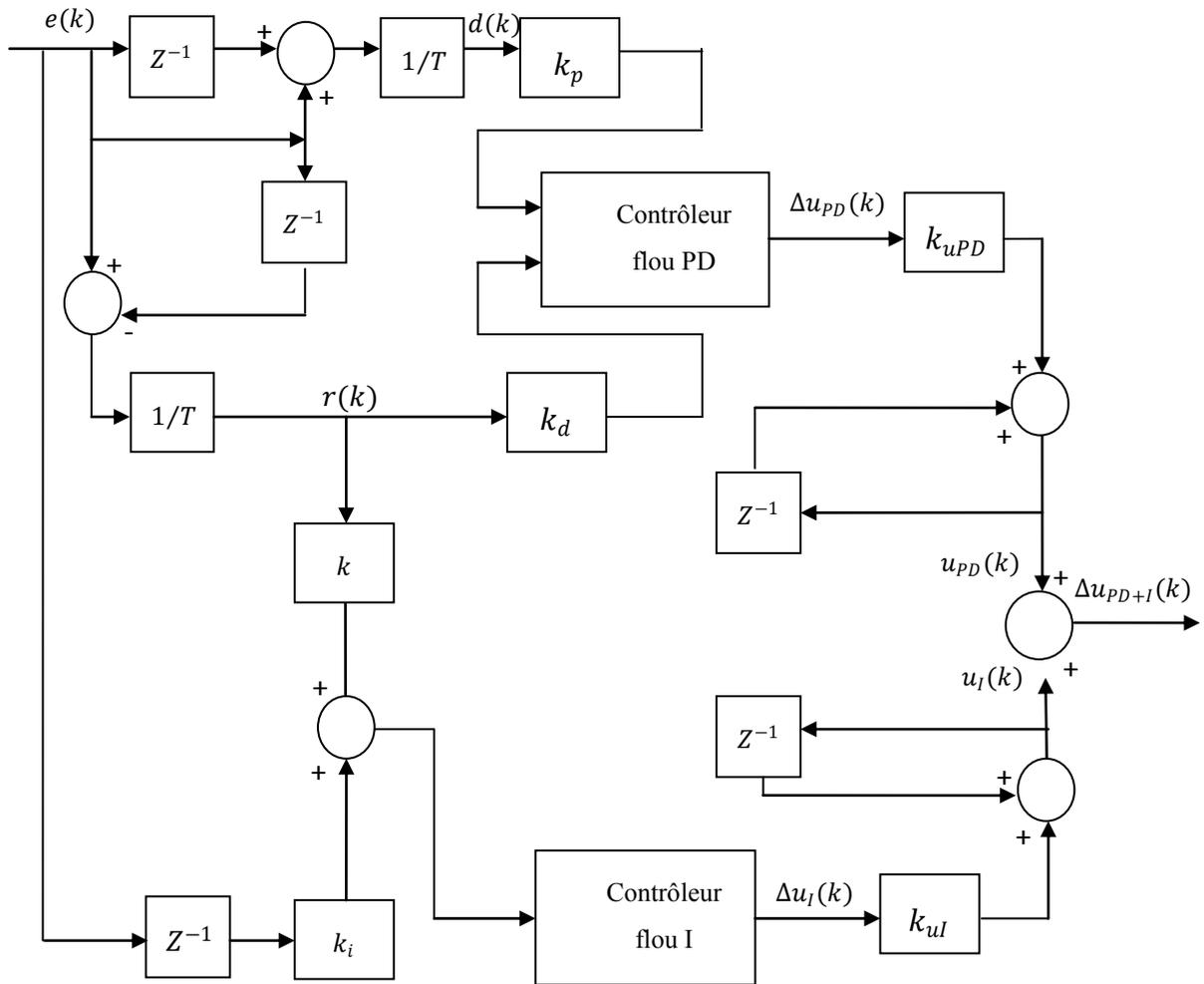


Fig. II. 8 Le contrôleur flou PD+I

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats de simulation du contrôle du système de Hénon choisi comme exemple. L'équation récurrente qui décrit le système de Hénon est :

$$y(k) = 1.3 - 1.3 y^2(k-2) - 0.065 y(k-3) + u(k-1) \quad (\text{II.68})$$

$u(k)$: la loi de commande.

Le critère d'optimalité est défini comme suit :

$$J(k) = \sum_{i=-1}^3 e^2(k-i) + \sum_{j=0}^3 (\Delta u(k-j))^2 \quad (\text{II.69})$$

On essayera de comparer les résultats obtenus par le contrôle prédictif flou PID avec des résultats obtenus par un contrôleur flou PID.

Le calcul des paramètres et l'étude de la stabilité des contrôleurs est fait de la même manière que dans [76]. Pour le régulateur prédictif flou PID les paramètres sont optimisés comme suit :

$$T = 0.1, k_i = 60, k = 3, k_p = 0.0001, k_d = 0.0002, k_{ul} = 0.2, k_{uPD} = 0.001$$

Pour le régulateur non prédictif flou PID, les paramètres sont :

$$T = 0.1, k_i = 1.55, k = 0.0775, k_p = 0.0007, k_d = 0.002, k_{ul} = 0.1, k_{uPD} = 0.1$$

Pour la prédiction le système est lui-même utilisé comme prédicteur, donc la prédiction est faite par un modèle non linéaire.

Les résultats de simulation sont représentés par les figures (II.9) et (II.10). On remarque que le contrôleur flou PID ne contrôle pas bien le système sur la trajectoire désirée. La figure (II.9) nous montre que le système se stabilise sur son point fixe zéro, mais une fois que la référence change, le système contrôlé devient instable.

Par contre, dans le cas du contrôleur prédictif flou PD+I, le système suit parfaitement la référence ce qui explique l'efficacité de l'action de prédiction introduite par la minimisation du coût J , et aussi le calcul des paramètres à partir de la fonction de Lyapunov ce qui offre plus de stabilité à la méthode de contrôle.

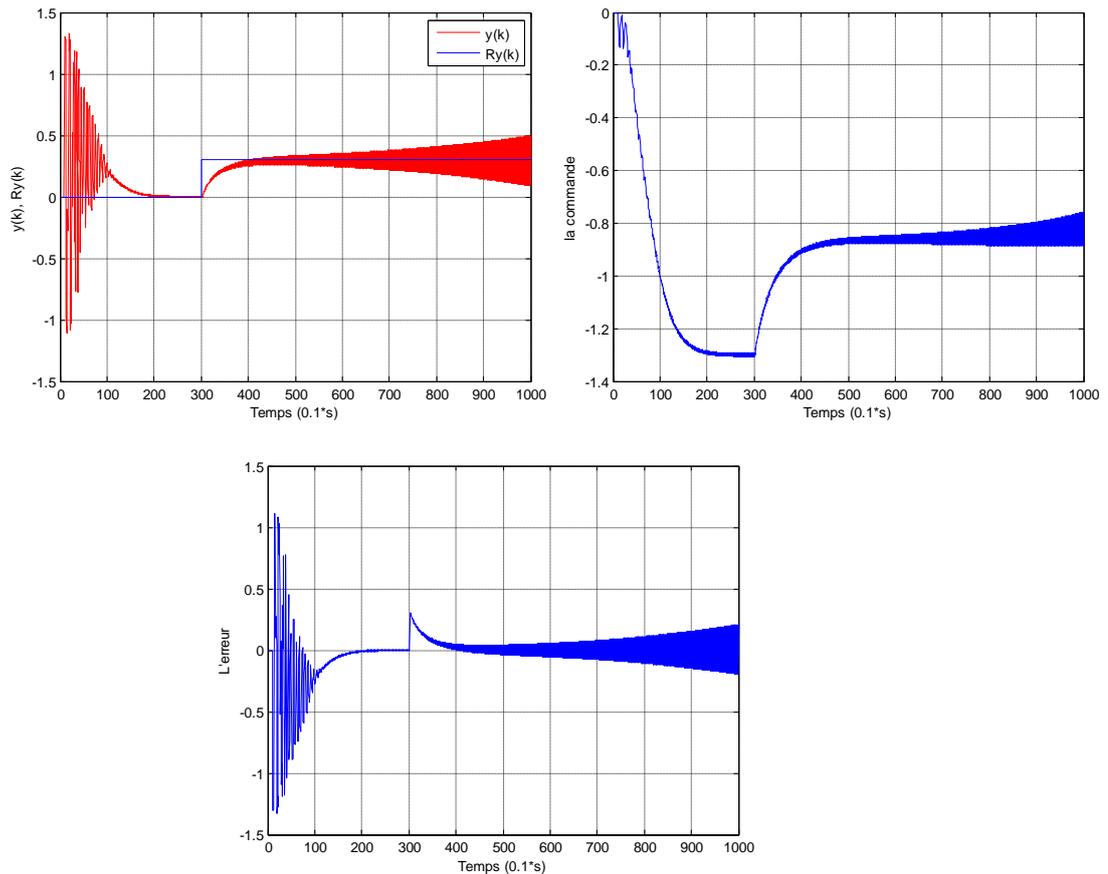


Fig. II. 9 Contrôle du système chaotique de Hénon par un contrôleur flou PD+I

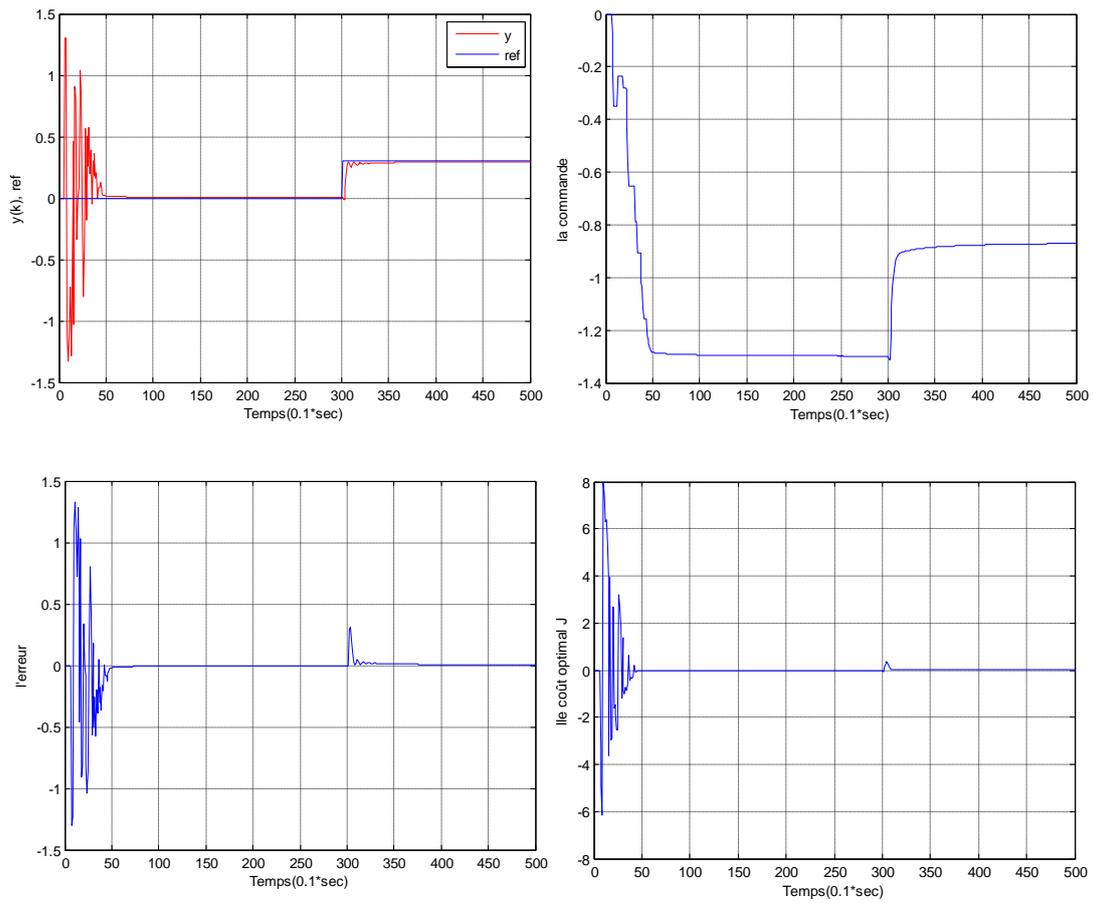


Fig. II. 10 Contrôle du système chaotique de Hénon par un contrôleur prédictif flou PD+I

Chapitre III : Synchronisation des systèmes chaotiques

III.1 Introduction

La synchronisation du chaos est une suite de développement de la théorie du contrôle. Les méthodes de stabilisation du chaos ont prouvé non seulement la possibilité de stabiliser un système chaotique sur une orbite périodique, mais aussi pour faire une poursuite d'une trajectoire périodique. Ce phénomène de contrôle peut donc être considéré comme un phénomène de synchronisation d'un système chaotique avec un signal périodique.

La synchronisation chaotique c'est lorsque le signal périodique est remplacé par un signal chaotique. Si l'on s'arrête à la propriété de sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques, cette synchronisation paraît difficile à réaliser car à la différence de la synchronisation où l'on cherche à reproduire juste une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés en premier par Yamada et Fujisaka [77]-[78]. Par la suite des concepts importants liés à la synchronisation chaotique ont été développés par Afraïmovich et al dans [79] et ultérieurement Pecora et Carroll [80] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de *synchronisation identique*, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un maître et l'autre esclave. Cette structure de synchronisation souvent désignée par *P-C synchronisation* est globalement asymptotiquement stable. La synchronisation est obtenue si tous les exposants de Lyapunov du système esclave sont négatifs. Après cette découverte, plusieurs méthodes de suppression de chaos ont été appliquées pour la synchronisation chaotique puisqu'un problème de synchronisation peut être aussi transformé en un problème de contrôle de l'erreur pour qu'elle se stabilise à l'origine.

Il existe deux types de synchronisation : la synchronisation unidirectionnelle et la synchronisation bidirectionnelle. Dans la synchronisation bidirectionnelle la boucle de retour est appliquée sur les deux systèmes à la fois [81]. Par contre, dans le cas de la synchronisation unidirectionnelle la boucle de retour est appliquée sur l'un des deux systèmes.

On considère les deux systèmes décrits respectivement par (III.1) et (III.2):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + K_1(y(t) - x(t)) \quad (\text{III.1})$$

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + K_2(x(t) - y(t)) \quad (\text{III.2})$$

Avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire continue.

k_1, k_2 matrices de gain de retour.

On note l'erreur de synchronisation par :

$$e(t) = y(t) - x(t) \quad (\text{III.3})$$

Et

$$f(y) - f(x) = E_{xy} \quad (\text{III.4})$$

La dynamique de l'erreur de synchronisation est donnée par :

$$\dot{e}(t) = \left(A + E_{x,y} - (K_1 + K_2) \right) e(t) \quad (\text{III.5})$$

Théorème : S' il existe une matrice constante P et un $\varepsilon > 0$ tels que [62]:

$$\left(A + E_{x,y} - (K_1 + K_2) \right)^T P + P \left(A + E_{x,y} - (K_1 + K_2) \right) < -\varepsilon I \quad (\text{III.6})$$

Où I est la matrice identité.

Alors, la dynamique du système d'erreur est globalement stable, ce qui implique la synchronisation des deux systèmes.

La synchronisation unidirectionnelle est un cas particulier de la synchronisation bidirectionnelle, elle est définie si $K_1 = 0$ ou $K_2 = 0$.

III.2 Méthodes de synchronisation

Diverses stratégies de synchronisation ont été proposées et étudiées sur la base de modèles simples ou de circuits électroniques générateurs de chaos. Certaines méthodes ont mis un accent particulier sur l'effet des incertitudes des paramètres des systèmes, lesquels impliquent en général une différence entre systèmes maître et esclave.

Parmi les approches proposées dans la littérature pour synchroniser les systèmes chaotiques identiques, non identiques, incertains, hyper-chaotiques, les oscillateurs à excitation... etc. nous pouvons citer les méthodes de synchronisation basées sur : le contrôle non linéaire [82-84], le contrôle adaptatif [85]-[86], le contrôle par mode glissant [87]-[88], le contrôle actif [89]-[90], le contrôle Backstepping [91]-[92], le contrôle à retour d'état [93], ..., etc.

Ce chapitre est consacré à la présentation des méthodes les plus performantes et les plus rencontrées.

III.2.1 Le contrôle actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été proposée par Bai et Lonngren [94], c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non

seulement pour la synchronisation des systèmes non identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes hyper-chaotiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme. Des variations adaptatives ont été introduites sur la méthode, afin de l'appliquer à la synchronisation des systèmes incertains. Le principe de l'algorithme est le suivant :

Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser. Un système maître défini par :

$$x_1(k+1) = f[x_1(k), \alpha] \quad (\text{III.7})$$

Et un système esclave défini par :

$$x_2(k+1) = f[x_2(k), \alpha] \quad (\text{III.8})$$

$x(k)$ représente le vecteur d'état du système, f une fonction non linéaire et α le paramètre de contrôle.

Afin de synchroniser les deux systèmes, on applique sur l'esclave la fonction du contrôle actif $s(k)$

$$x_2(k+1) = f[x_2(k), \alpha] + s(k) \quad (\text{III.9})$$

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Cette erreur est obtenue en faisant la soustraction entre (III.7) et (III.8)

$$x_s(k+1) = f[x_2(k), \alpha] - f[x_1(k), \alpha] + s(k) \quad (\text{III.10})$$

Elle peut être exprimée comme suit :

$$x_s(k+1) = L[x_s(k), \alpha] + G[x_s(k), \alpha] + s(k) \quad (\text{III.11})$$

Où $L[x_s(k), \alpha]$ représente la partie linéaire et $G[x_s(k), \alpha]$ la partie non linéaire.

On définit la fonction du contrôle actif par :

$$s(k) = -G[x_s(k), \alpha] + U(x_s) \quad (\text{III.12})$$

On obtient donc :

$$x_s(k+1) = g_i x_s(k) \quad (\text{III.13})$$

Pour $g_i < 1$, $i = (1, 2, \dots)$, $x_s \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, La synchronisation entre les deux systèmes est alors réalisée.

III.2.2 Le contrôle hybride à rétroaction

On considère le système chaotique dont la forme est la suivante:

$$\dot{x} = Ax + Bg(x) \quad (\text{III.14})$$

Où $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $g(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, est une fonction non-linéaire.

Pour la synchronisation, ce système est considéré comme maître et le système suivant est le système comme esclave :

$$\dot{y} = Ay + B[g(y) + u] \quad (\text{III.15})$$

Avec u la loi de commande.

Pour mieux illustrer le principe de cette méthode, on considère à titre d'exemple un système de dimension 3.

L'erreur de synchronisation entre les deux systèmes dans ce cas est définie par:

$$e = (e_1, e_2, e_3)^T = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)^T \quad (\text{III.16})$$

Et sa dynamique donnée par :

$$\dot{e} = Ae + B[g(x) - g(y) - u] \quad (\text{III.17})$$

Pour rendre le système d'erreur contrôlable, la loi de commande u doit être convenablement choisie.

On pose :

$$u = u_1 + u_2 \quad (\text{III.17})$$

Où

$$u_1 = g(x) - g(y) \quad (\text{III.18})$$

$$u_2 = K(x - y) = (k_1, k_2, k_3) \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.19})$$

$k = (k_1, k_2, k_3)$: est le vecteur de rétroaction.

u_1 est un contrôleur non-linéaire, et u_2 un contrôleur linéaire. Le contrôleur global u est dit contrôleur hybride.

la stabilité asymptotique du système d'erreur est garantie si toutes les valeurs propres de la matrice $(A - BK)$ ont des parties réelles négatives. Si on applique les lois de commande sur le système d'erreur, sa dynamique devient :

$$\dot{e} = (A - BK)e \quad (\text{III.20})$$

En s'appuyant sur la théorie du contrôle linéaire, la synchronisation est obtenue si les parties réelles des valeurs propres de la matrice $(A - BK)$ sont toutes négatives.

III.2.3 La méthode du Backstepping

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire. Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :

- Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur

- Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques : systèmes identiques, différents, hyper-chaotiques, avec excitation extérieur.
- Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur quelque soit la dimension des systèmes à synchroniser.
- Le contrôleur calculé ne contient pas de dérivée ce qui offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

En considère un système défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_{n+1}(t) \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

f_1 est une fonction linéaire, et f_i ($i = 2, 3, \dots, n$) sont des fonction non-linéaires. Pour certains systèmes tels que celui de Lorenz ou de Rossler, $f_{n+1}(t) = 0$.

On considère un système maître représenté par (III.21) et un système esclave défini par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, y_3) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + \hat{f}_{n+1}(t) + u \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

$\hat{f}_{n+1}(t)$ a les même caractéristiques que $f_{n+1}(t)$, et u est une loi de commande qui doit être choisie convenablement pour obtenir la synchronisation.

L'erreur de synchronisation s'écrit :

$$e_1 = y_1 - x_1 \quad e_2 = y_2 - x_2 \quad \dots \quad e_n = y_n - x_n \quad (\text{III.23})$$

Et la dynamique du système:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2) \\ \dot{e}_2 = g_2(x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3) \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, e_1, e_2, \dots, e_n) + \hat{f}_{n+1}(t) - f_{n+1}(t) + u \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

g_1 est une fonction linéaire, et g_i ($i = 2, 3, \dots, n$) sont des fonctions non-linéaires.

L'objectif est de calculer une loi de commande u qui assure la convergence du système e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping.

Pour cela, le système d'erreur (III.24) doit être décomposé en sous système:

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) \quad (\text{III.25})$$

Et pour chaque sous système on définit une fonction de Lyapunov V positive:

$$V_j = h_j(e, x, y, u_j, \alpha_j) \quad (\text{III.24})$$

j : l'ordre du sous-système.

u_j, α_j : représentent respectivement la loi de commande et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre j .

Les lois de commandes et les contrôleurs virtuels sont calculés à chaque fois de tel sorte que la dérivée de la fonction de Lyapunov soit strictement négative $\dot{V}_j < 0$.

III.2.4 la méthode du mode glissant

Soit deux systèmes chaotiques de dimension n :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \quad (\text{III.25})$$

Et

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u(t) \quad (\text{III.26})$$

Avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice constante.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire continue, et $u \in \mathbb{R}^n$ une loi de commande.

On a :

$$e(t) = y(t) - x(t) \quad (\text{III.27})$$

Et

$$E_{xy} = f(y) - f(x) \quad (\text{III.28})$$

La dynamique de l'erreur s'écrit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + E_{xy} + u(t) \quad (\text{III.29})$$

Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur, la loi de commande $u(t)$ est choisie comme suit :

$$u(t) = Bv(t) - E_{xy} \quad (\text{III.30})$$

Avec B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B v(t) \quad (\text{III.31})$$

Le calcul du contrôleur est souvent basé sur la méthode donnée par Hung et al [95].

Soit $s(e)$ la surface de glissement :

$$s(e) = Ce(t) \quad (\text{III.32})$$

C : vecteur constant.

Le système contrôlé doit satisfaire :

$$s(e) = 0, \quad \dot{s}(e) = 0 \quad (\text{III.33})$$

Donc on peut écrire :

$$\dot{s}(e) = C(Ae(t) + Bv(t)) = 0 \quad (\text{III.34})$$

La loi de commande équivalente est :

$$v(t) = -(CB)^{-1}C A e(t) \quad (\text{III.35})$$

L'existence de $(CB)^{-1}$ est une condition nécessaire.

La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est :

$$\dot{e}(t) = [I - B(CB)^{-1}C]A e(t) \quad (\text{III.36})$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, la matrice C doit être choisie de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $[I - B(CB)^{-1}C]A$ soient toutes négatives,

Dans [96], Young et al ont proposé un contrôleur en mode glissant de la forme:

$$\dot{s} = -q \operatorname{sgn}(s) - k s \quad (\text{III.37})$$

Où $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe, et $q > 0, k > 0$ sont des constantes.

La loi de commande dans ce cas est :

$$v(t) = -(CB)^{-1}[C(kI + A)e(t) + q \operatorname{sgn}(s)] \quad (\text{III.38})$$

Ce qui est équivalent à :

$$v(t) = \begin{cases} -(CB)^{-1}[C(kI + A)e(t) + q] & \text{si } s(e) > 0 \\ -(CB)^{-1}[C(kI + A)e(t) - q] & \text{si } s(e) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Pour observer la stabilité de la dynamique de l'erreur de synchronisation, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{s^2}{2} \quad (\text{III.40})$$

d'où

$$\dot{V} = -ks^2 - q \operatorname{sgn}(s) s \quad (\text{III.41})$$

la dérivée est toujours négative, puisque $\operatorname{sgn}(s) s$ est toujours positive tant que $e \neq 0$ et $q, k > 0$.

Les constantes q, k doivent être choisies judicieusement pour minimiser le « *chattering mode* » et améliorer le « *reaching mode* »

III.3 Les types de synchronisation

Parallèlement au développement des méthodes, différents type de synchronisation ont été proposés : la synchronisation en phase (PS), la synchronisation Lag, la synchronisation généralisée (GS), la synchronisation complète (CS)... etc, [97-99].

III.3.1 La synchronisation identique (PC)

La synchronisation identique a été proposée par Pecora et Carroll. Elle a l'avantage de représenter une solution de synchronisation simple et performante. Elle permet à l'esclave de reproduire le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire.

L'idée de la synchronisation identique est de diviser le système initial en deux sous-systèmes. Cette opération peut être réalisée d'une manière arbitraire.

La figure suivante représente le processus de décomposition en sous-systèmes. y représente la variable d'état qui commande le sous-système esclave s_2^2

Le sous-système réplique s_2^2 est un candidat susceptible de se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette proposition soit vraie est que le sous-système s_2^2 soit stable; cette hypothèse est équivalente avec la condition qui dit que l'ensemble des coefficients de Lyapunov du sous-système s_2^2 soient négatifs. Une synchronisation parfaite peut alors être obtenue puisque les trajectoires sont asymptotiquement convergentes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_2(t) - x_2(t)\| = 0 \quad (\text{III.42})$$

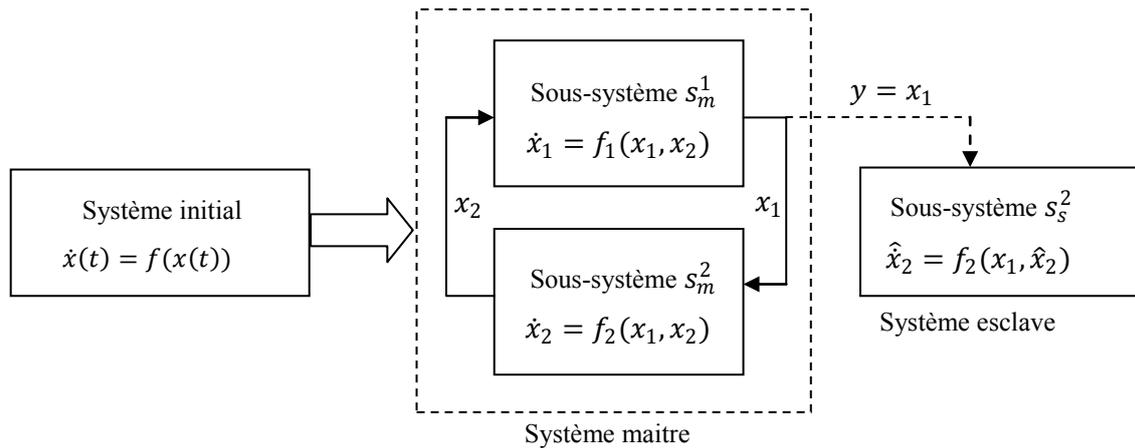


Fig. III. 1 Structure de synchronisation par décomposition en sous-système proposée par Pecora et Carroll

Pour illustrer ce mécanisme de synchronisation on considère comme exemple le système de Lorenz défini par les équations (I.26) ($a = 10, b = 8/3, r = 28$). Le maître et l'esclave sont initialisés séparément avec des conditions initiales très proches. Pour une durée de 10 secondes on les laisse fonctionner indépendamment, les trajectoires des deux systèmes deviennent alors assez vite divergentes.

A l'instant $t = 10s$, on supprime la dimension x du système esclave et on le remplace par l'état correspondant côté maître ; Cette opération va forcer les états y et z du système esclave à converger asymptotiquement vers les états correspondants du système maître. La garantie de cette convergence est donnée par les valeurs négatives $\lambda_2, \lambda_3 \leq 0$ des exposants de Lyapunov associés au système esclave. La figure suivante montre qu'après une période de transition, le système esclave converge asymptotiquement vers l'état du maître, et les deux se retrouvent parfaitement synchronisés.

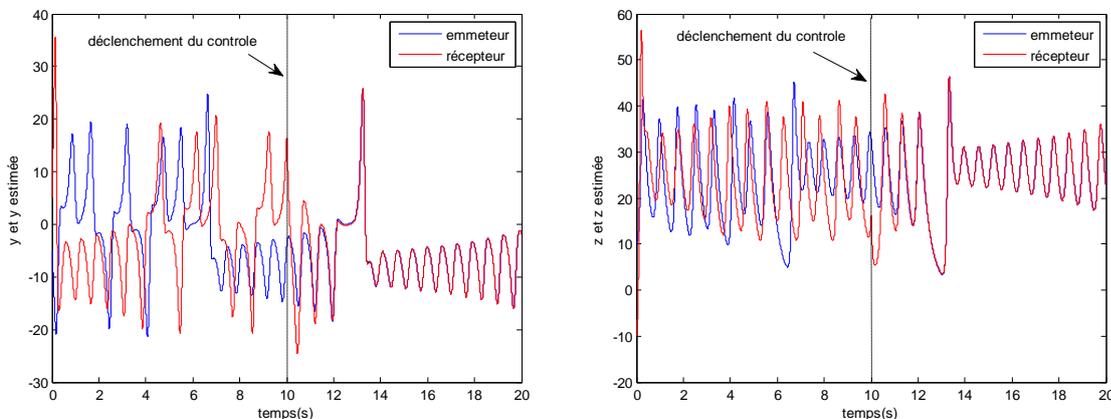


Fig. III. 2 Synchronisation maître esclave P-C du système de Lorenz

Bien que les deux systèmes aient été initialisés différemment, ils ont fini par se rattraper et avoir la même trajectoire. Ce type de synchronisation est dite unidirectionnel, car le système maître représente la source et le système esclave le destinataire.

Par la suite Carroll a proposé un système de communication crypté basé sur l'exemple de Pecora et illustré par la figure suivante.

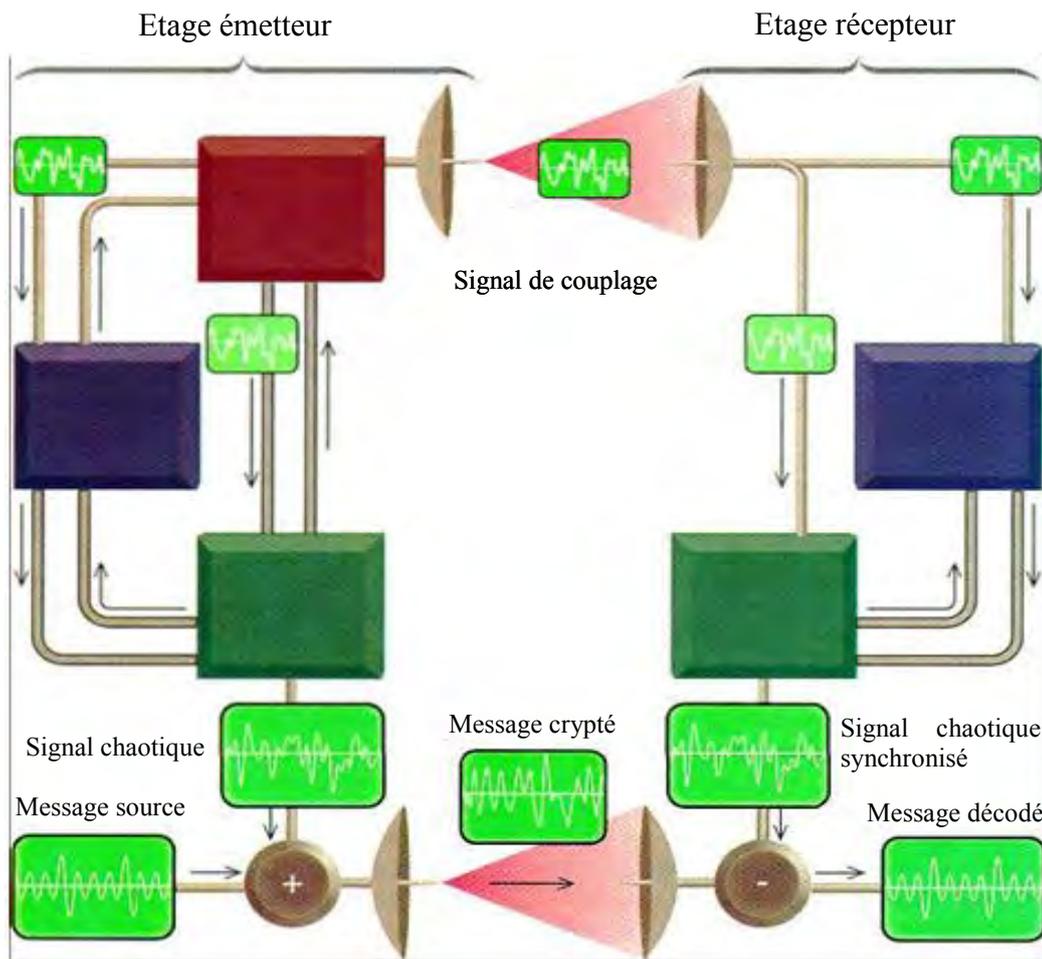


Fig. III. 3 Système de communication chaotique proposé par Pecora et Carroll [100]

Le transmetteur ajoute un signal chaotique au message à transmettre et envoie au récepteur le résultat en plus du signal de couplage. Ce dernier est composé d'une partie dupliquée du système de transmission, le signal chaotique est alors régénéré puis retranché au signal reçu pour avoir le message original.

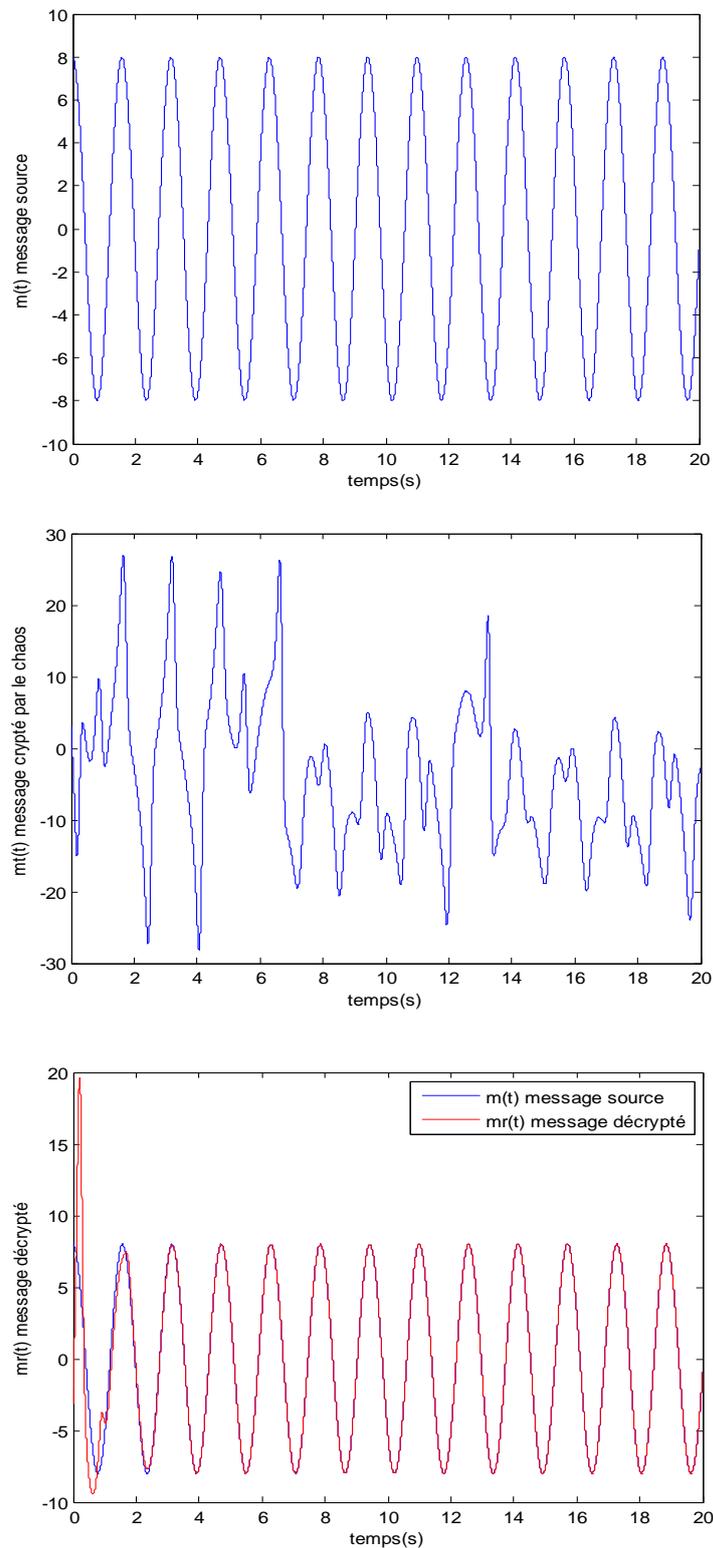


Fig. III. 4 Transmission chaotique d'une sinusoïde selon la structure de Pecora et Carroll

Pour illustrer cette architecture de communication chaotique on représente un exemple de simulation, en prenant comme message source, une sinusoïde de la forme $m(t) = 8\cos(4t)$.

Le message source est mélangé avec la deuxième variable y du système, et la variable x est utilisée comme signal de couplage.

Les résultats de simulation sont représentés par la figure (III.4). On remarque qu'après seulement quelques secondes on reconstruit exactement le même message émis.

Pour éviter l'état transitoire (*dead bit synchronization*) il est conseillé d'introduire le message utile au milieu de la porteuse chaotique.

III.3.2 La synchronisation complète (CS)

On considère un système maître représenté par les équations suivantes :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad y = h(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{III.43})$$

Et un système esclave donné par :

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(t, \hat{x}, y), \quad \hat{y} = \hat{h}(\hat{x}) \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^p, \quad h: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q \quad (\text{III.44})$$

Où (x, \hat{x}) sont les états des systèmes et (y, \hat{y}) sont les sorties.

Soit φ une fonction continue, qui décrit la relation entre le maître et l'esclave lors de la synchronisation :

$$\hat{y} = \varphi(y), \quad \varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q \quad (\text{III.45})$$

La synchronisation est dite complète si $\hat{x}(t) = x(t)$.

Ce qui implique que ; $m = q$ et φ est une identité.

Si $\hat{f} = f$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Si $\hat{f} \neq f$ c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés. Les méthodes de synchronisation complète sont typiquement associées avec la synchronisation des systèmes identiques.

La majorité des concepts de synchronisation complète utilise un schéma de rétroaction et sont considérées comme étant bidirectionnelles, car les deux systèmes sont à la fois source et destination.

III.3.3 La synchronisation généralisée (GS)

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète pour synchroniser des systèmes chaotiques de modèle différent. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre deux systèmes chaotiques couplés.

III.3.4 La synchronisation Lag

Elle est définie pour le cas où $\hat{x}(t) \approx x(t - \tau)$, avec τ est un nombre positif très petit.

III.3.5 La synchronisation anticipée

Comme dans le cas de la synchronisation Lag, la relation entre les variable d'état des systèmes maître et esclave est donnée par :

$$\hat{x}(t) \approx x(t + \tau), \quad \tau > 0. \quad (\text{III.46})$$

III.3.6 La synchronisation de phase (PS)

Soit φ_1 et φ_2 les phases des systèmes maître et esclave respectivement. La synchronisation de phase est réalisée si pour deux nombres entiers m et n , il existe un nombre positive très petit ε tel que :

$$|m\varphi_1 - n\varphi_2| < \varepsilon. \quad (\text{III.47})$$

Le phénomène de synchronisation de phase est totalement différent de ceux présentés précédemment. Généralement, lorsque la synchronisation chaotique est obtenue, les exposants de Lyapunov du système esclave sont tous négatifs. Donc le système esclave est un système non chaotique avec une sortie chaotique. Cependant, dans le cas de la synchronisation de phase, les exposants de Lyapunov peuvent prendre des valeurs positives.

III.3.7 L'anti-synchronisation

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit [101]:

$$e_i = (xm_i + xs_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{III.48})$$

xm_i, xs_i : l'état du système maître et esclave respectivement.

n : la dimension des systèmes.

III.4 Résultats de simulation

Pour illustrer les principes des différentes méthodes énumérées précédemment, nous présentons dans ce qui suit les résultats obtenus pour différents cas de simulation.

III.4.1 Synchronisation des systèmes chaotiques identiques

a- Synchronisation par la méthode du contrôle actif

Exemple 1 : Système discret de dimension 2

On considère le système de Hénon suivant :

$$x_1(k+1) = a - x_1^2(k) + by_1(k) \quad (\text{III.49})$$

$$y_1(k+1) = x_1(k)$$

Avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

Ce système représente le maître et le système esclave est défini par :

$$x_2(k+1) = a - x_2^2(k) + by_2(k) + S_1(k) \quad (\text{III.50})$$

$$y_2(k+1) = x_2(k) + S_2(k)$$

L'erreur entre les deux systèmes s'écrit :

$$x_s(k+1) = x_1^2 - x_2^2 + by_s(k) + S_1(k) \quad (\text{III.51})$$

$$y_s(k+1) = x_s(k) + S_2(k)$$

Donc, la loi de contrôle doit être sous la forme

$$S_1(k) = U_1(k) + (x_2^2 - x_1^2) - by_s(k) \quad (\text{III.52})$$

$$S_2(k) = U_2(k) - x_s(k) \quad (\text{III.53})$$

Où

$$U_1(k) = g_1 x_s(k) \quad (\text{III.54})$$

$$U_2(k) = g_2 y_s(k) \quad (\text{III.55})$$

Alors

$$x_s(k+1) = g_1 x_s(k) \quad (\text{III.56})$$

$$y_s(k+1) = g_2 y_s(k) \quad (\text{III.57})$$

Pour la simulation, on prend:

$$g_1 = g_2 = 0.1, \quad x_1(0) = 0.1, y_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.4, y_2(0) = 0.5 .$$

L'algorithme de synchronisation est appliqué sur le système esclave à l'itération $i = 50$. On remarque alors qu'après quelques itérations, l'erreur de synchronisation converge rapidement vers zéro, et le système esclave se synchronise parfaitement avec le maître bien que les conditions initiales soient totalement différentes.

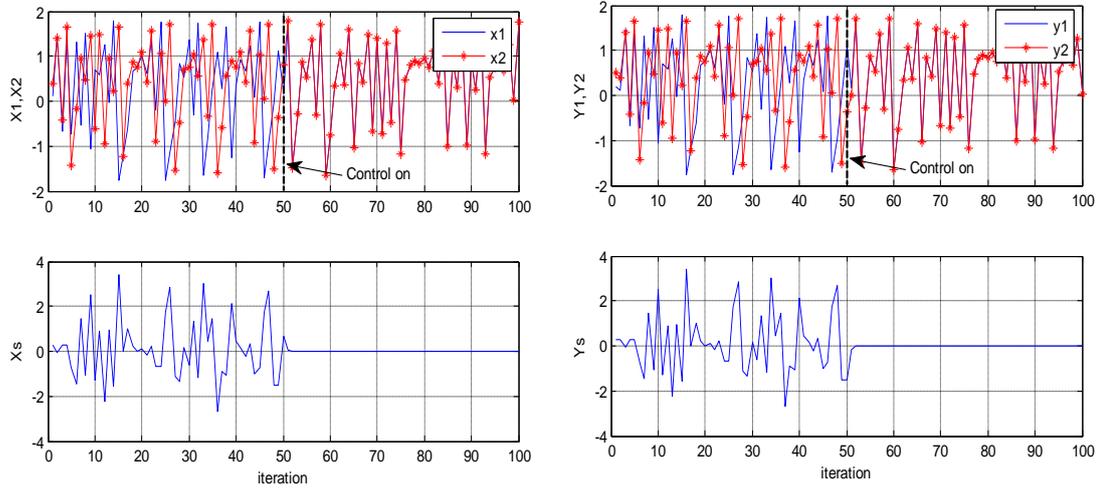


Fig. III. 5 Synchronisation du système de Hénon par le contrôle actif pour $a = 1.4$.

Exemple 2 : Système discret de dimension 3

Le système considéré est celui de Kokame, décrit par [102] :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f(x_1(k), a) + 0.4y_1(k) - 0.5z_1(k) \\ y_1(k+1) = 0.3x_1(k) + f(y_1(k), b) \\ z_1(k+1) = 0.1x_1(k) - 0.2z_1(k) \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

Avec

$$f(\alpha, v) = \begin{cases} v(\alpha + 1) & \text{si } \alpha < -0.5 \\ v\alpha & \text{si } |\alpha| \leq 0.5 \\ v(\alpha - 1) & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases} \quad (\text{III.59})$$

Et $a = b$.

le système esclave est défini comme suit:

$$\begin{cases} x_2(k+1) = f(x_2(k), a) + 0.4y_2(k) - 0.5z_2(k) + s_1(k) \\ y_2(k+1) = 0.3x_2(k) + f(y_2(k), a) + s_2(k) \\ z_2(k+1) = 0.1x_2(k) - 0.2z_2(k) + s_3(k) \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

L'erreur de synchronisation est alors la suivantes:

$$\begin{cases} x_s(k+1) = f(x_2(k), a) - f(x_1(k), a) + 0.4y_s(k) - 0.5z_s(k) + s_1(k) \\ y_s(k+1) = 0.3x_s(k) + f(y_2(k), a) - f(y_1(k), a) + s_2(k) \\ z_s(k+1) = 0.1x_s(k) - 0.2z_s(k) + s_3(k) \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

Pour satisfaire la condition de synchronisation, on utilise la loi de contrôle suivante :

$$\begin{cases} s_1(k) = f(x_1(k), a) - f(x_2(k), a) - 0.4y_s(k) + 0.5z_s(k) + g_1x_s(k) \\ s_2(k) = -0.3x_s(k) - f(x_2(k), a) + f(x_1(k), a) + g_2y_s(k) \\ s_3(k) = -0.1x_s(k) + (g_3 + 0.2)z_s(k) \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

Pour la simulation on choisit:

$$a = 2, b = 2, g_1 = 0.01, g_2 = 0.01, g_3 = 0.01.$$

$$(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0.1, 0.1, 0.1), (x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0.2, 0.3, 0.25)$$

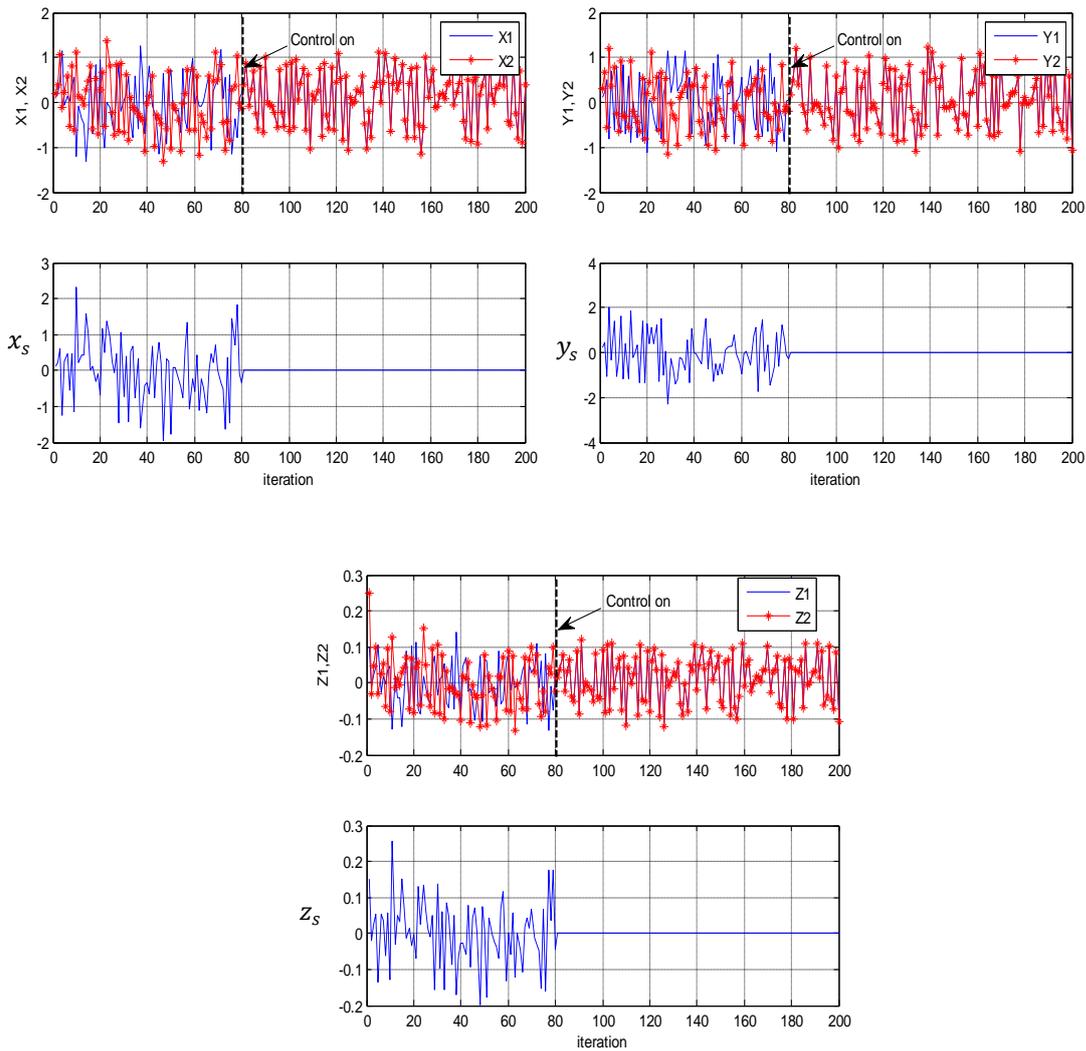


Fig. III. 6 Synchronisation de système de Kokame pour $a = 2$,

Exemple 3 : Anti-synchronisation de systèmes chaotiques continus

Les lois de commande qu'on doit appliquer sur l'esclave afin d'assurer l'anti-synchronisation sont calculées à l'aide de l'algorithme du contrôle actif.

Soit les systèmes maître et esclave représentés respectivement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + c y_1, \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - b z_1, \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + S_1, \\ \dot{y}_2 = -x_2 z_2 + c y_2 + S_2, \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - b z_2 + S_3, \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

Où $S = [S_1, S_2, S_3]^T$ représente la fonction du contrôle actif à calculer.

Contrairement à la synchronisation, l'erreur d'anti-synchronisation est donnée par :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 + x_2 \\ e_2 = y_1 + y_2 \\ e_3 = z_2 + z_1 \end{cases} \quad (\text{III.65})$$

Sa dynamique est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_1 + \dot{y}_2 \\ \dot{e}_3 = \dot{z}_2 + \dot{z}_1 \end{cases} \quad (\text{III.66})$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a e_2 - a e_1 + S_1 \\ \dot{e}_2 = c e_2 - x_1 e_3 + z_2 (x_1 - x_2) + S_2 \\ \dot{e}_3 = x_1 e_2 - b e_3 + y_2 (x_2 - x_1) + S_3 \end{cases} \quad (\text{III.67})$$

Pour obtenir l'anti-synchronisation il faut que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i (i = 1, 2, 3) = 0 \quad (\text{III.68})$$

Pour éliminer les termes non linéaires dans l'équation (III.67), la fonction du contrôle actif est choisi, telle que:

$$\begin{cases} S_1 = v_1 \\ S_2 = -z_2 (x_1 - x_2) + v_2 \\ S_3 = -y_2 (x_2 - x_1) + v_3 \end{cases} \quad (\text{III.69})$$

où v_1, v_2 et v_3 sont les lois de contrôle.

En remplaçant (III.69) dans (III.67), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ae_2 - ae_1 + v_1 \\ \dot{e}_2 = ce_2 - x_1e_3 + v_2 \\ \dot{e}_3 = x_1e_2 - be_3 + v_3 \end{cases} \quad (\text{III.70})$$

Dans ce cas, le problème d'anti-synchronisation se transforme en un problème de contrôle de l'erreur pour la stabiliser à la valeur zéro.

Pour définir les lois de contrôle, on choisit la fonction de Lyapunov suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (\text{III.71})$$

Dont la forme générale de la dérivée est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 \\ &= e_1(ae_2 - ae_1 + v_1) + e_2(ce_2 - x_1e_3 + v_2) + e_3(-be_3 + x_1e_2 + v_3) \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Si on choisit :

$$\begin{cases} v_1 = -ae_1 \\ v_2 = x_1e_3 - 2ce_2 \\ v_3 = -e_2x_1 \end{cases} \quad (\text{III.73})$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\frac{df(t)}{dt} = -ae_1^2 - ce_2^2 - be_3^2 \quad (\text{III.74})$$

Si on pose

$$r = \min\{a, b, c\} \quad (\text{III.75})$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &\leq -r(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = -2rf(t) \\ f(t) &\leq f(0)e^{-2rt} \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

Ce qui assure que pour $t \rightarrow \infty$, l'erreur $e_i (i=1,2,3) \rightarrow 0$.

C'est-à-dire l'anti-synchronisation des deux systèmes est réalisée.

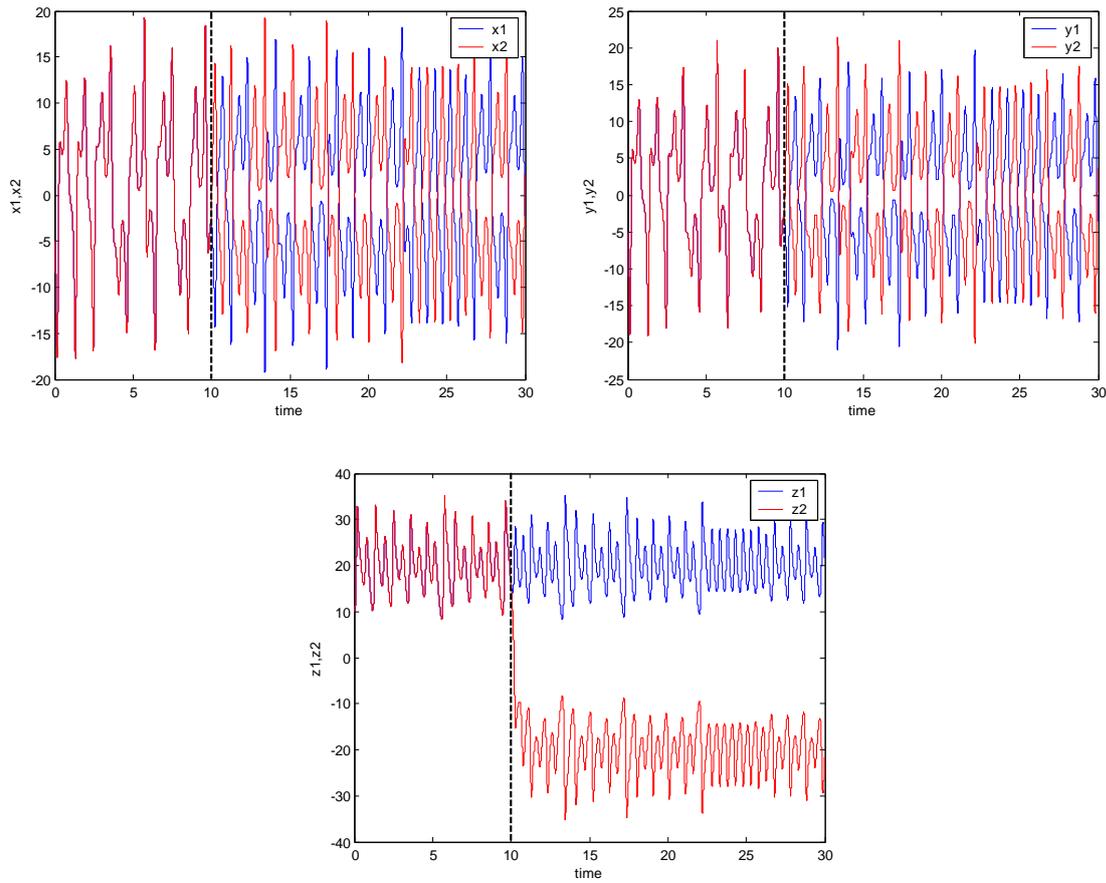


Fig. III. 7 Anti-synchronisation du système de Lü par le contrôle actif.

b- Synchronisation par le contrôle non-linéaire

Pour illustrer cette partie nous avons choisi le système hyperchaotique de Lü. Les systèmes maître et esclave sont représentés respectivement par les équations (III.77) et (III.78):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) + u_1 \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + c y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - b z_1 \\ \dot{u}_1 = x_1 z_1 + d u_1 \end{cases} \quad (\text{III.77})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + u_2 + v_1 \\ \dot{y}_2 = -x_2 z_2 + c y_2 + v_2 \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - b z_2 + v_3 \\ \dot{u}_2 = x_2 z_2 + d u_2 + v_4 \end{cases} \quad (\text{III.78})$$

Où v_1, v_2, v_3 et v_4 sont les lois de contrôle.

L'erreur de synchronisation entre les deux systèmes s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} e_x(t) = x_2(t) - x_1(t) \\ e_y(t) = y_2(t) - y_1(t) \\ e_z(t) = z_2(t) - z_1(t) \\ e_u(t) = u_2(t) - u_1(t) \end{cases} \quad (\text{III.79})$$

Pour que les deux systèmes se synchronisent il faut que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i (i = 1, \dots, 4) \rightarrow 0$. Dans ce cas le problème de synchronisation se transforme à un problème de contrôle de l'erreur pour qu'elle se stabilise à la valeur zéro.

L'expression (III.80) représente la dynamique de l'erreur entre les deux systèmes

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -a(e_x - e_y) + e_u + v_1 \\ \dot{e}_y = -z_1 e_x + c e_y - x_2 e_z + v_2 \\ \dot{e}_z = y_1 e_x + x_2 e_y - b e_z + v_3 \\ \dot{e}_u = z_1 e_x + x_2 e_z + d e_u + v_4 \end{cases} \quad (\text{III.80})$$

Pour définir la loi de contrôle, on choisit la fonction de Lyapunov suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + e_u^2) \quad (\text{III.81})$$

Dont la forme générale de la dérivée est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z + e_u \dot{e}_u \\ &= e_x(-a(e_x - e_y) + e_u + v_1) + e_y(-z_1 e_x + c e_y - x_2 e_z + v_2) \\ &\quad + e_z(y_1 e_x + x_2 e_y - b e_z + v_3) + e_u(z_1 e_x + x_2 e_z + d e_u + v_4) \end{aligned} \quad (\text{III.82})$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} v_1 &= -e_y(a + y_1) \\ v_2 &= -2c e_y + z_1 e_x \\ v_3 &= -x_2 e_u \\ v_4 &= -2d e_u - e_x(z_1 + 1) \end{aligned} \quad (\text{III.83})$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\frac{df(t)}{dt} = -a e_x^2 - c e_y^2 - b e_z^2 - d e_u^2 \quad (\text{III.84})$$

Si on pose $r = \min\{a, b, c, d\}$

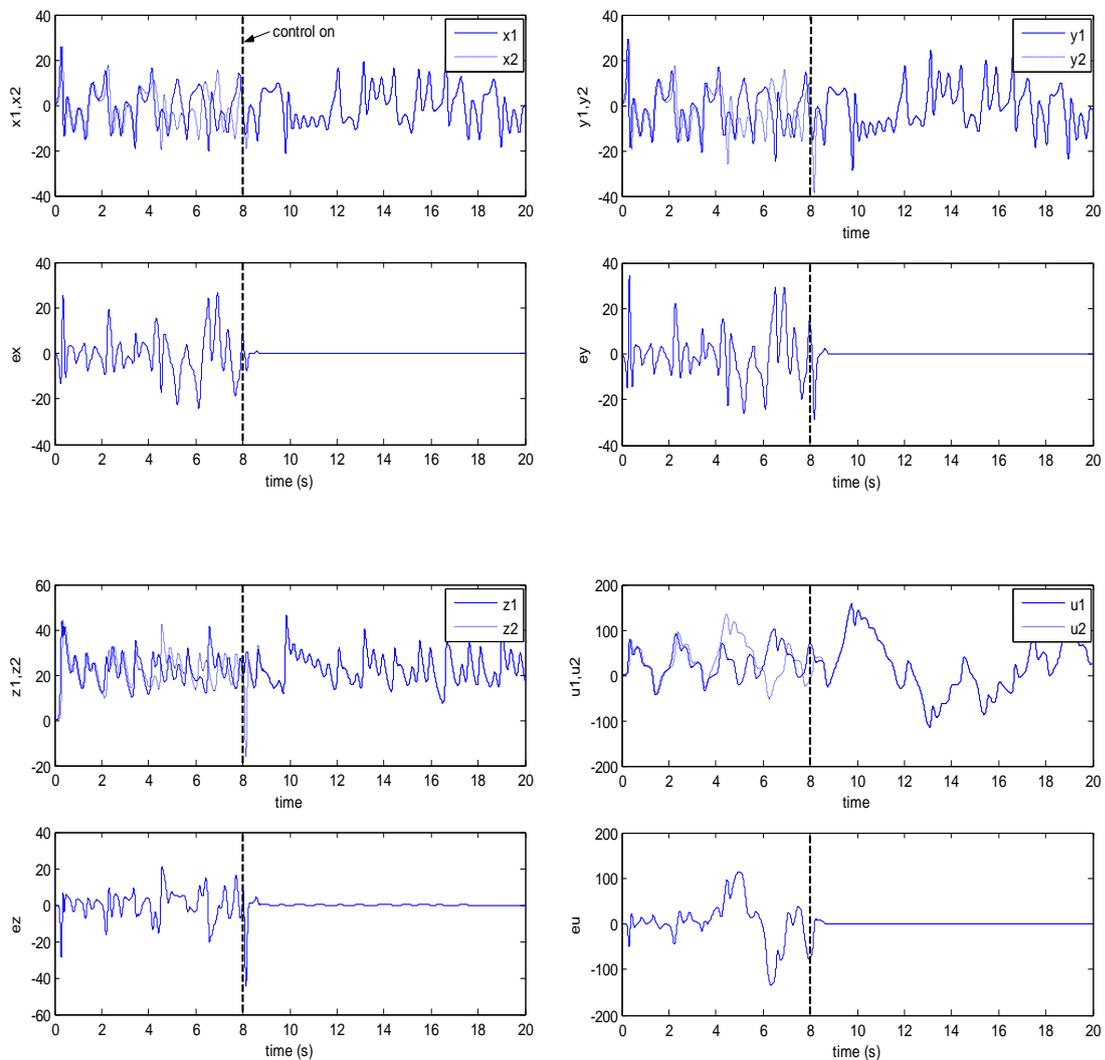
Alors :

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &\leq -r(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + e_u^2) = -2r f(t) \\ &\Rightarrow f(t) \leq f(0)e^{-2rt} \end{aligned} \quad (\text{III.85})$$

Ce qui assure que pour $t \rightarrow \infty$ l'erreur $e \rightarrow 0$, c'est-à-dire la synchronisation des deux systèmes est obtenue.

Les figures suivantes représentent les résultats de simulation obtenus pour des conditions initiales différentes

Les différentes figures montrent que les trajectoires des variables d'état (x, y, z, u) des systèmes maître et esclave divergent avant le déclenchement du contrôle. Ceci est dû à la sensibilité aux conditions initiales. Une fois le contrôle déclenché, ces mêmes trajectoires convergent rapidement et deviennent identiques dans un temps réduit.



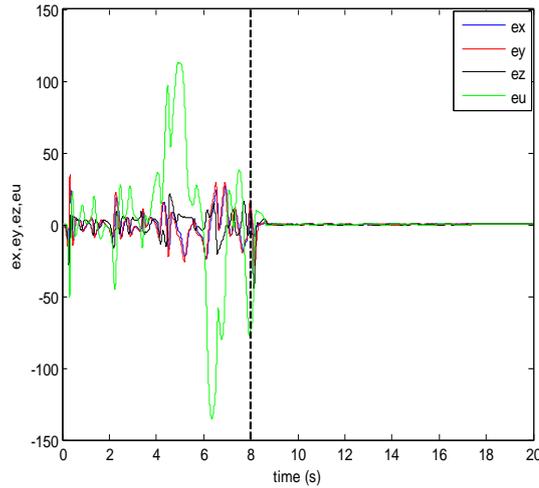


Fig. III. 8 Synchronisation et erreurs de synchronisation du système hyper-chaotique de Lü

c- Synchronisation par le contrôle hybride à rétroaction

On considère le système chaotique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1 x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = b - x_1 x_2 - c x_3 \end{cases} \tag{III.86}$$

Où a, b, c sont les paramètres du système. Pour $a = 5, b = 16, c = 1$ le système est dans un état chaotique.

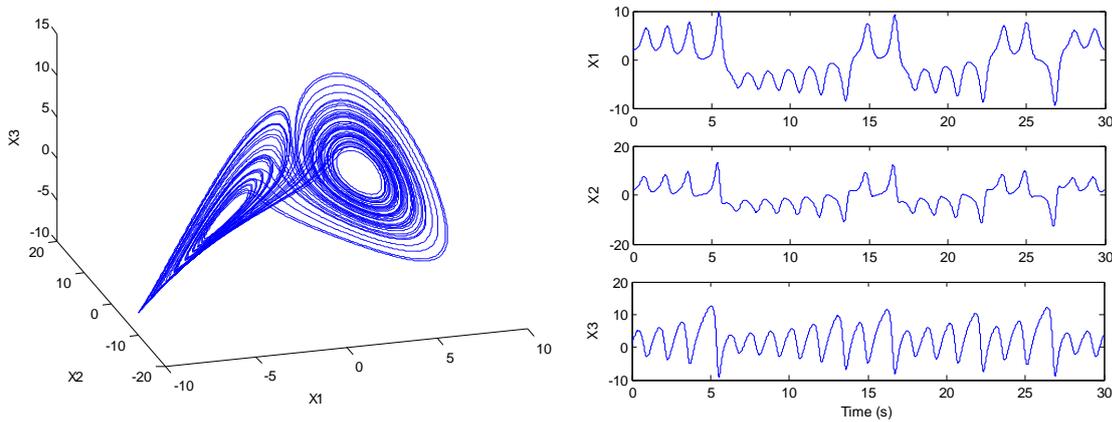


Fig. III. 9 Attracteur chaotique et représentation temporelles des états du système

Ce système peut être représenté sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ b - x_1 x_2 \end{bmatrix} \tag{III.87}$$

Si on compare cette équation avec la forme définie précédemment, on obtient:

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_3 \\ b - x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.88})$$

Soit K un contrôleur tel que :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.89})$$

Alors :

$$A - BK = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.90})$$

Pour $a = 5, b = 16, c = 1$ on a :

$$A - BK = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -k_1 & -1 - k_2 & -k_3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.91})$$

L'équation caractéristique de $(A - BK)$ est donnée par :

$$\det(\lambda I - (A - BK)) = \lambda^3 + \lambda^2(k_2 + 7) + \lambda(5k_1 + 6k_2 + 11) + 5(k_1 + k_2 + 1) \quad (\text{III.91})$$

Où I est la matrice identité de dimension (3×3) et λ la matrice des valeurs propres du système.

En utilisant la table de Routh, les gains k_i peuvent être choisis comme suit :

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 3 \quad (\text{III.92})$$

On considère le système esclave suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = y_1 y_3 - y_2 \\ \dot{y}_3 = b - y_1 y_2 - c y_3 \end{cases} \quad (\text{III.93})$$

Comme pour le système maître, le système esclave est mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 y_3 \\ b - y_1 y_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.94})$$

$$g(y) = \begin{bmatrix} y_1 y_3 \\ b - y_1 y_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.95})$$

La synchronisation des deux systèmes revient à appliquer sur le système esclave une loi de commande $u = u_1 + u_2$.

Où

$$u_1 = g(x) - g(y) \quad (\text{III.96})$$

Et

$$u_2 = K(x - y) \quad (\text{III.97})$$

Dans notre cas, on a :

$$u_1 = \begin{bmatrix} x_1 x_3 - y_1 y_3 \\ -x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} (x_1 - y_1) + 3(x_2 - y_2) + 3(x_3 - y_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.98})$$

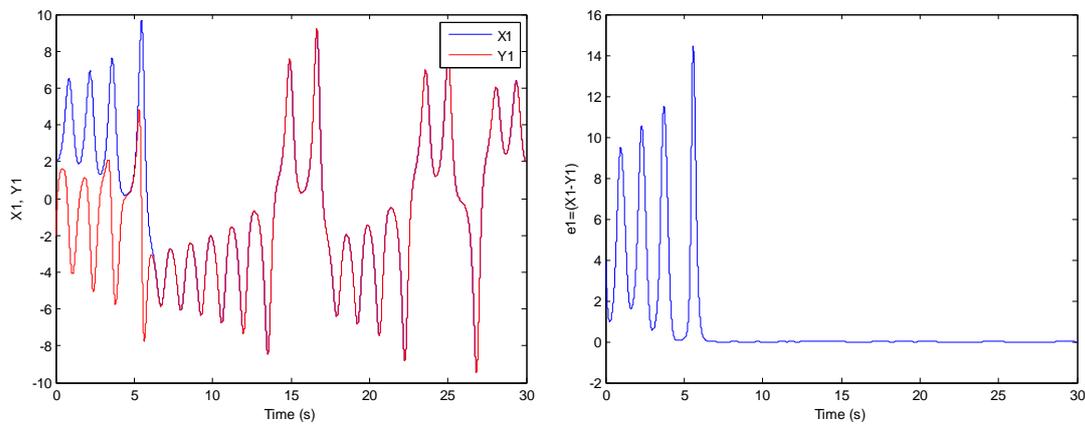
Donc, le système contrôlé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + x_1 x_3 - y_1 y_3 + (x_1 - y_1) + 3(x_2 - y_2) + 3(x_3 - y_3) \\ \dot{y}_2 = y_1 y_3 - y_2 - x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ \dot{y}_3 = b - y_1 y_2 - c y_3 \end{cases} \quad (\text{III.99})$$

Pour illustrer l'efficacité de la méthode, quelques résultats de simulation sont représentés par les figures suivantes.

Au départ les deux systèmes évoluent de deux conditions initiales différentes $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, 2, 1)$ et $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (-2, -2, -1)$.

Les lois de commande sont appliquées sur le système esclave dès le départ. On remarque que pour les premières secondes les deux systèmes varient selon une dynamique différente, mais dans un temps très court les trajectoires commencent à se rapprocher et deviennent identiques à l'instant $t = 7s$.



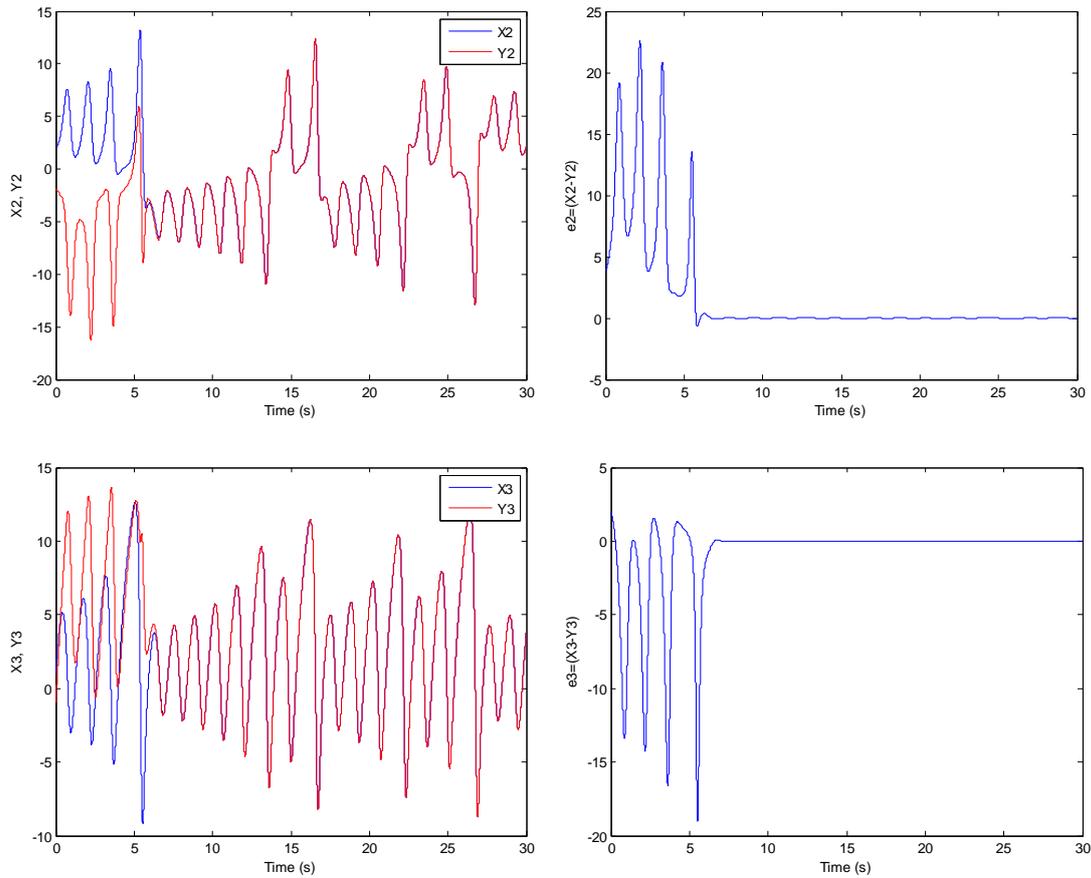


Fig. III. 10 Synchronisation des systèmes chaotique par le contrôle hybride à rétroaction

d- Synchronisation par la méthode du backstepping

Soient les systèmes maître et esclave représentés respectivement par (III.100) et (III.101).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + c y_1, \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - b z_1, \end{cases} \quad (\text{III.100})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + u_1, \\ \dot{y}_2 = -x_2 z_2 + c y_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - b z_2 + u_3, \end{cases} \quad (\text{III.101})$$

Où u_1, u_2, u_3 sont les lois de contrôle, calculées par l'algorithme de backstepping.

Si on désigne les erreurs de synchronisation entre les deux systèmes par :

$$e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1 \quad (\text{III.102})$$

La dynamique de l'erreur est alors définie par:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ae_2 - ae_1 + u_1 \\ \dot{e}_2 = -z_2e_1 + ce_2 - x_1e_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 = y_2e_1 + x_1e_2 - be_3 + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.103})$$

Pour concevoir un contrôleur simple on pose $u_1 = 0$.

Etape 1 :

On pose $\beta_1 = e_1$, alors :

$$\dot{\beta}_1 = ae_2 - a\beta_1 \quad (\text{III.104})$$

Où $e_2 = \alpha_1(\beta_1)$ est considéré comme contrôleur virtuel.

Pour définir la condition de stabilité du sous système β_1 , on définit la fonction de Lyapunov:

$$V_1 = \frac{\beta_1^2}{2} \quad (\text{III.105})$$

Dont la dérivée est:

$$\dot{V}_1 = \beta_1 a \alpha_1 - a\beta_1^2 \quad (\text{III.106})$$

Si $\alpha_1 = 0$, on a $\dot{V}_1 = -a\beta_1^2 \leq 0$. Donc, le sous système β_1 est asymptotiquement stable.

L'équation (III.107) représente l'erreur entre la variable d'état et la fonction d'estimation

$$\beta_2 = e_2 - \alpha_1 \quad (\text{III.107})$$

Ce qui nous donne le sous système suivant

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = a\beta_2 - a\beta_1 \\ \dot{\beta}_2 = -z_2\beta_1 + c\beta_2 - x_1e_3 + u_2 \end{cases} \quad (\text{III.108})$$

$e_3 = \alpha_2(\beta_1, \beta_2)$ est un contrôleur virtuel.

Etape 2 :

On considère la fonction de Lyapunov:

$$V_2 = V_1 + \frac{\beta_2^2}{2} \quad (\text{III.109})$$

Sa dérivée est:

$$\dot{V}_2 = -a\beta_1^2 + [-z_2\beta_1 + c\beta_2 - x_1\alpha_2 + u_2]\beta_2 \quad (\text{III.110})$$

Pour $\alpha_2 = 0$ et $u_2 = z_2\beta_1 - (c+1)\beta_2$, le sous système (β_1, β_2) est asymptotiquement stable car :

$$\dot{V}_2 = -a\beta_1^2 - \beta_2^2 \leq 0 \quad (\text{III.111})$$

On désigne par : $\beta_3 = e_3 - \alpha_2$, l'erreur entre la variable d'état et la fonction d'estimation.

Donc, le nouveau sous système est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = a\beta_2 - a\beta_1 \\ \dot{\beta}_2 = -\beta_2 - x_1\beta_3 \\ \dot{\beta}_3 = y_2\beta_1 + x_1\beta_2 - b\beta_3 + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.112})$$

Etape 3 :

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_3 = V_2 + \frac{\beta_3^2}{2} \quad (\text{III.113})$$

Donc :

$$\dot{V}_3 = -a\beta_1^2 - \beta_2^2 - b\beta_3^2 + (y_2\beta_1 + x_1\beta_2 + u_3)\beta_3 \quad (\text{III.114})$$

Si on choisit :

$$u_3 = -y_2\beta_1 - x_1\beta_2 \quad (\text{III.115})$$

On obtient:

$$\dot{V}_3 = -a\beta_1^2 - \beta_2^2 - b\beta_3^2 \leq 0 \quad (\text{III.116})$$

Ce qui implique une stabilité du sous système $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, et donc la synchronisation des deux systèmes.

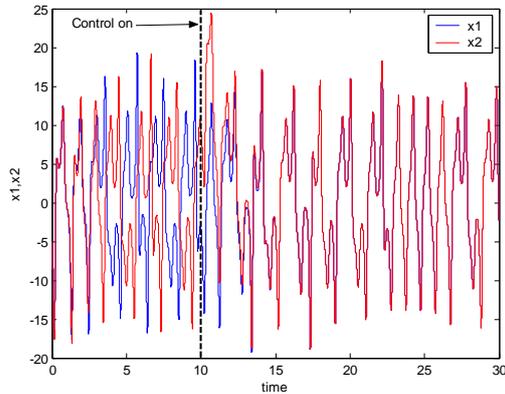


Fig. III. 11 Synchronisation de la variable x

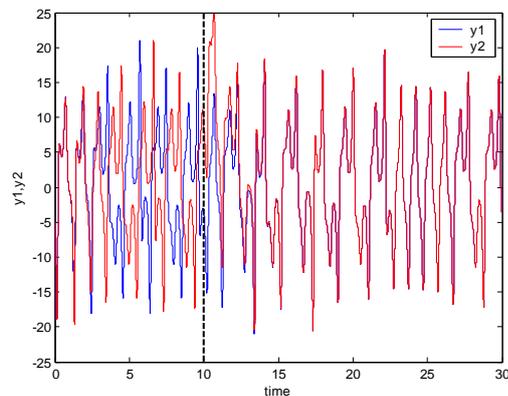


Fig. III. 12 Synchronisation de la variable y

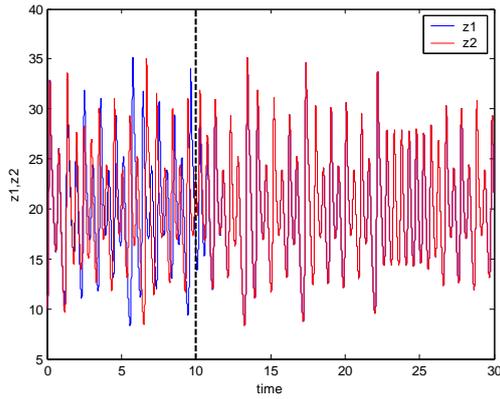
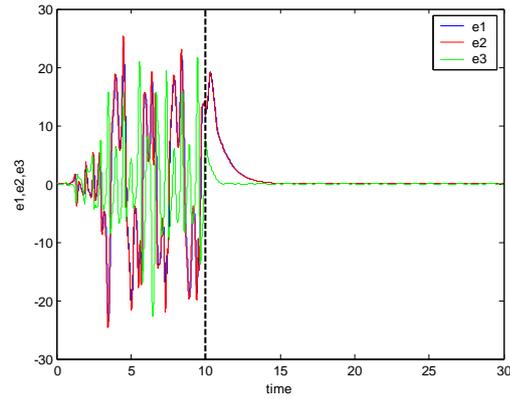
Fig. III. 13 Synchronisation de la variable z 

Fig. III. 14 Erreurs de synchronisation.

III.4.2 Synchronisation de systèmes chaotiques différents

Dans cette partie, le contrôle actif est appliqué à la synchronisation de deux systèmes différents. Le système hyper-chaotique de Lü est choisi comme système maître et le système chaotique de Qi comme esclave. Lorsque les deux systèmes sont synchronisés, le système chaotique de Qi va suivre une trajectoire hyper-chaotique.

Les équations suivantes décrivent la dynamique du système de Qi [103]:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a_2(y_2 - x_2) + y_2 z_2 u_2 \\ \dot{y}_2 = b_2(x_2 + y_2) - x_2 z_2 u_2 \\ \dot{z}_2 = -c_2 z_2 + x_2 y_2 u_2 \\ \dot{u}_2 = -d_2 u_2 + x_2 y_2 z_2 \end{cases} \quad (\text{III.117})$$

Pour $a_2 = 30, b_2 = 10, c_2 = 1, d_2 = 10$, le système est chaotique.

Le système maître est défini par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + c_1 y_1 + u_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - b_1 z_1 \\ \dot{u}_1 = -y_1 z_1 + d_1 u_1 \end{cases} \quad (\text{III.118})$$

Et le système esclave par:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a_2(y_2 - x_2) + y_2 z_2 u_2 + s_1 \\ \dot{y}_2 = b_2(x_2 + y_2) - x_2 z_2 u_2 + s_2 \\ \dot{z}_2 = -c_2 z_2 + x_2 y_2 u_2 + s_3 \\ \dot{u}_2 = -d_2 u_2 + x_2 y_2 z_2 + s_4 \end{cases} \quad (\text{III.119})$$

La fonction du contrôle actif appliquée sur l'esclave est :

$$\begin{cases} s_1 = -y_2 z_2 u_2 - a_2 y_1 - a_1 x_2 + a_2 x_1 + v_1 \\ s_2 = c_1 y_2 - b_2 y_1 - b_2 x_2 + x_2 z_2 u_2 - x_1 z_1 + u_1 + v_2 \\ s_3 = c_2 z_1 - b_1 z_2 - x_2 y_2 u_2 + x_1 y_1 + v_3 \\ s_4 = d_2 u_1 + d_1 u_2 - x_2 y_2 z_2 - y_1 z_1 + v_4 \end{cases} \quad (\text{III.120})$$

Avec:

$$\begin{cases} v_1 = (a_1 + a_2 - 1)e_x - (a_1 + a_2)e_y \\ v_2 = -(b_2 + c_1 + 1)e_y \\ v_3 = (c_2 + b_1 - 1)e_z \\ v_4 = (d_2 - d_1 - 1)e_u \end{cases} \quad (\text{III.121})$$

Les résultats de simulation de la synchronisation du système hyper-chaotique de Lü avec le système chaotique de Qi sont représentés sur les figures suivantes:

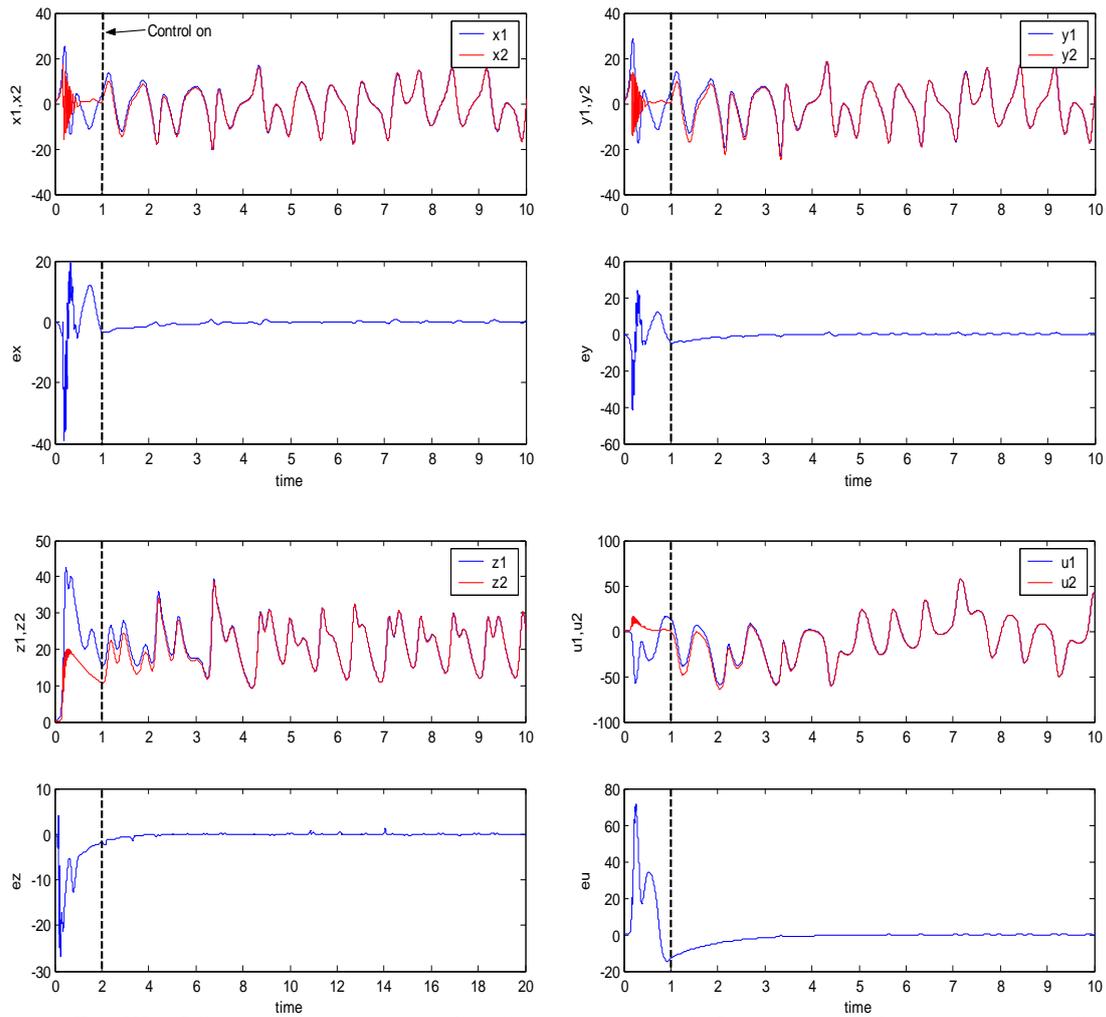


Fig. III. 15 Synchronisation du système hyper-chaotique de Lü avec le système chaotique de Qi

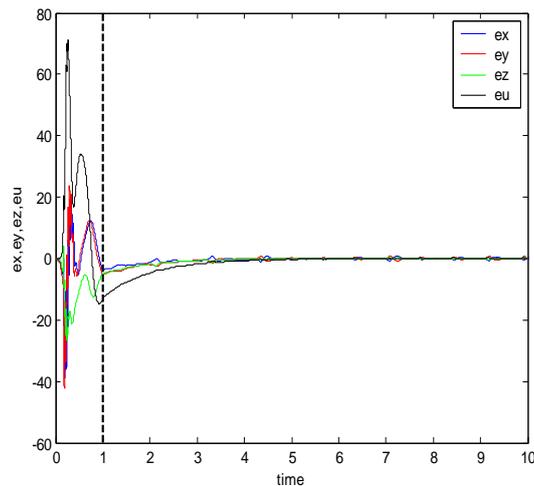


Fig. III. 16 Erreurs de synchronisation

Les figures montrent l'efficacité du contrôle actif même lorsqu'il s'agit de synchroniser des systèmes différents et de dynamique plus complexe. On remarque que le contrôleur calculé a parfaitement conduit le système esclave à suivre des trajectoires hyper-chaotiques. De plus la stabilité est garantie puisque les lois de commande sont tirées de la fonction de Lyapunov, ce qui assure une stabilité asymptotique.

III.5 Synchronisation des systèmes incertains

Dans cette partie nous nous intéressons aux systèmes chaotiques incertains, c'est-à-dire dans lesquelles les paramètres du système sont incertains ou partiellement connus.

Pour illustrer le principe de la synchronisation de ce type de système nous avons choisi deux exemples de systèmes, le système de Lorenz et le système de Chen [104]

III.5.1 Synchronisation des systèmes chaotiques incertains par le contrôle Backstepping adaptatif

Exemple 1 : synchronisation de systèmes de Lorenz incertains

On considère deux systèmes, un système maître avec l'indice m et un système esclave avec l'indice s .

Le système maître s'écrit donc:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = a(y_m - x_m) \\ \dot{y}_m = -x_m z_m + r x_m - y_m \\ \dot{z}_m = x_m y_m - b z_m \end{cases} \quad (\text{III.122})$$

Et le système esclave:

$$\begin{cases} \dot{x}_s = a_u(y_s - x_s) + u_1 \\ \dot{y}_s = -x_s z_s + r_u x_s - y_s + u_2 \\ \dot{z}_s = x_s y_s - b_u z_s + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.123})$$

où a_u, r_u, b_u sont les paramètres incertains à estimer, et u_1, u_2, u_3 sont les lois de commande à calculer pour réaliser la synchronisation.

Soit :

$$e_a = a_u - a, \quad e_r = r_u - r, \quad e_b = b_u - b \quad (\text{III.124})$$

L'erreur de synchronisation est donnée par :

$$e_x = x_s - x_m, \quad e_y = y_s - y_m, \quad e_z = z_s - z_m \quad (\text{III.125})$$

Et sa variation est:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = a(e_y - e_x) + e_a(y_s - x_s) + u_1 \\ \dot{e}_y = (r - z_m)e_x - e_y - x_s e_z + e_r x_s + u_2 \\ \dot{e}_z = y_m e_x + x_s e_y - b e_z - e_b z_s + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.126})$$

On pose $\beta_1 = e_x$

Donc:

$$\dot{\beta}_1 = a(e_y - \beta_1) + e_a(y_s - x_s) + u_1 \quad (\text{III.127})$$

où $e_y = \alpha_1(\beta_1)$ est considéré comme contrôleur virtuel.

Pour étudier la stabilité du sous-système (β_1) , on considère la fonction de Lyapunov suivante:

$$V_1 = \frac{\beta_1^2}{2} + \frac{e_a^2}{2} \quad (\text{III.128})$$

$$\dot{V}_1 = \beta_1[-e_a(x_s - y_s) - a\beta_1 + a\alpha_1 + u_1] + e_a \dot{e}_a \quad (\text{III.129})$$

Pour :

$$\alpha_1 = 0, u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{e}_a = \beta_1(x_s - y_s)$$

On obtient :

$$\dot{V}_1 = -a\beta_1^2 \leq 0 \quad (\text{III.130})$$

Ainsi, le sous-système (β_1) est asymptotiquement stable.

On note par β_2 l'erreur entre e_y et la fonction d'estimation $\alpha_1(\beta_1)$

$$\beta_2 = e_y - \alpha_1 \quad (\text{III.131})$$

On obtient le nouveau sous-système (β_1, β_2)

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = a(\beta_2 - \beta_1) + e_a(y_s - x_s) \\ \dot{\beta}_2 = (r - z_m)\beta_1 - \beta_2 - x_s e_z + e_r x_s + u_2 \end{cases} \quad (\text{III.132})$$

Où $e_z = \alpha_2(\beta_1, \beta_2)$ est le contrôleur virtuel.

Afin de stabiliser le sous-système (β_1, β_2) , on considère la fonction de Lyapunov V_2

$$V_2 = V_1 + \frac{\beta_2^2}{2} + \frac{e_r^2}{2} \quad (\text{III.133})$$

Dont la dérivée est :

$$\dot{V}_2 = -a\beta_1^2 + \beta_2[(r - z_m)\beta_1 - \beta_2 - x_s \alpha_2 + e_r x_s + u_2] + e_r \dot{e}_r \quad (\text{III.134})$$

Pour $\alpha_2 = 0, u_2 = -(r - z_m)\beta_1$ et $\dot{e}_r = -\beta_2 x_s$

On a :

$$\dot{V}_2 = -a\beta_1^2 - \beta_2^2 < 0 \quad (\text{III.135})$$

Donc, avec ces conditions le sous-système (β_1, β_2) est asymptotiquement stable.

soit $\beta_3 = e_z - \alpha_2$ l'erreur entre e_z et $\alpha_2(\beta_1, \beta_2)$

le nouveau sous-système est donné par:

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = a(\beta_2 - \beta_1) + e_a(y_s - x_s) \\ \dot{\beta}_2 = -\beta_2 - x_s \beta_3 + e_r x_s \\ \dot{\beta}_3 = y_m \beta_1 + x_s \beta_2 - b \beta_3 - e_b z_s + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.136})$$

Soit V_3 une fonction de Lyapunov telle que:

$$V_3 = V_2 + \frac{\beta_3^2}{2} + \frac{e_b^2}{2} \quad (\text{III.137})$$

Et dont la variation est:

$$\dot{V}_3 = -a\beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3[x_s\beta_2 - b\beta_3 + y_m\beta_1 - e_b z_s + u_3] + e_b \dot{e}_b \quad (\text{III.138})$$

Pour $u_3 = -(x_s\beta_2 + y_m\beta_1)$ et $\dot{e}_b = \beta_3 z_s$

On a :

$$\dot{V}_3 = -a\beta_1^2 - \beta_2^2 - b\beta_3^2 < 0 \quad (\text{III.139})$$

Pour cela, le sous-système $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est asymptotiquement stable.

Ainsi, les lois de commandes qui réalisent la synchronisation sont:

$$\begin{aligned} u_2 &= -(r - z_m)e_x \\ u_3 &= -(x_s e_y + y_m e_x) \end{aligned} \quad (\text{III.140})$$

Et les lois d'adaptation des paramètres incertains sont:

$$\begin{aligned} \dot{e}_a &= e_x(x_s - y_s) \\ \dot{e}_r &= -e_y x_s \\ \dot{e}_b &= e_z z_s \end{aligned} \quad (\text{III.141})$$

Pour la simulation, les paramètres du maître sont : $a=10, b=8/3, r=28$, et les valeurs initiales des paramètres incertain de l'esclave sont : $a_u=6, b_u=8, r_u=13$.

Pour des conditions initiales différentes, la simulation donne les résultats représentés par les figures suivantes

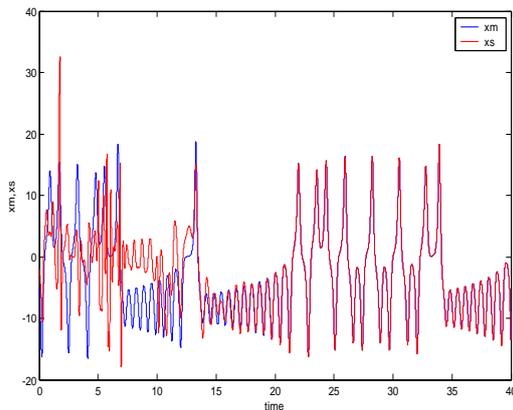


Fig. III. 17 Synchronisation des variables x_m et x_s

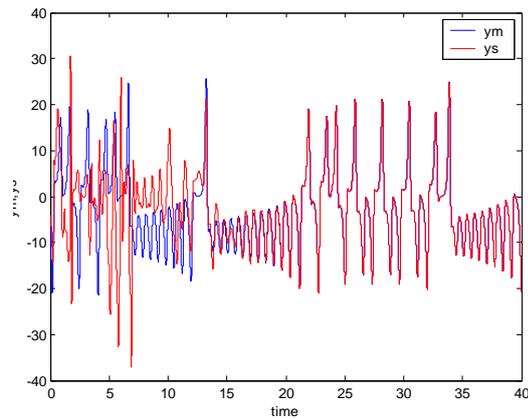


Fig. III. 18 Synchronisation des variables y_m et y_s

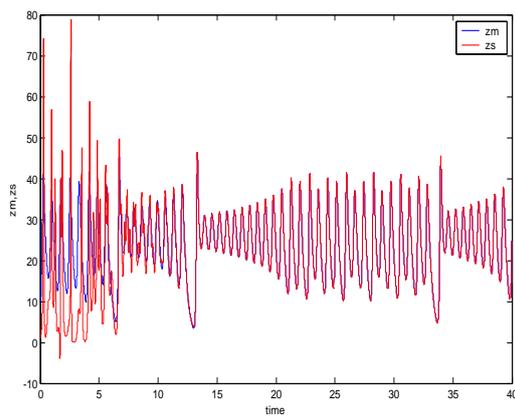
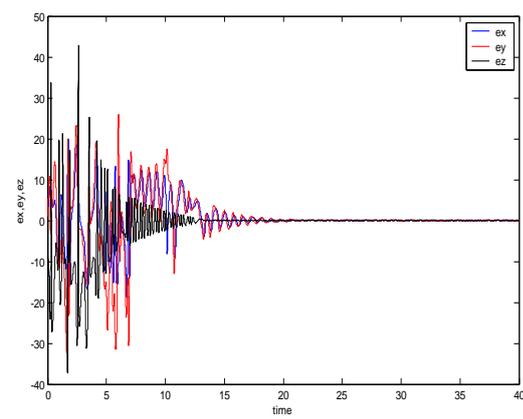
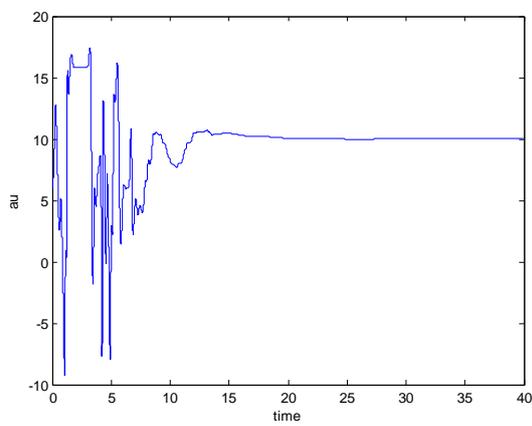
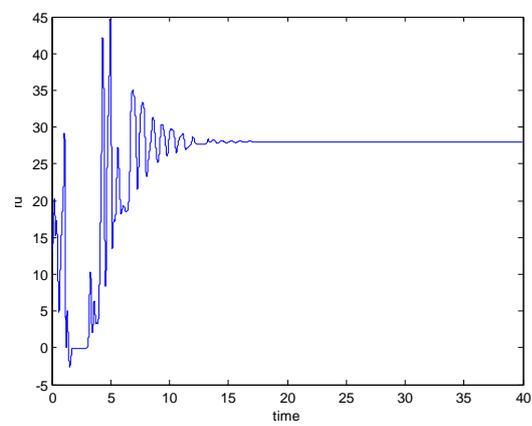
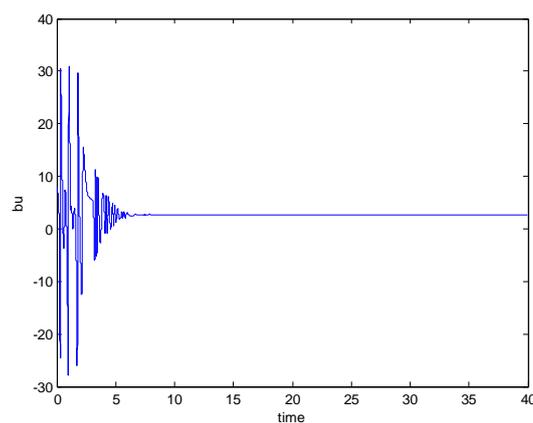
Fig. III. 19 Synchronisation des variables z_m et z_s 

Fig. III. 20 Erreurs de synchronisation.

Fig. III. 21 Estimation du paramètre a_u Fig. III. 22 Estimation du paramètre r_u Fig. III. 23 Estimation du paramètre b_u

Au départ, les deux trajectoires sont divergentes. Une fois le contrôle déclenché à $t = 3s$, les trajectoires commencent à se rapprocher et deviennent identiques après quelques secondes, et

l'erreur de synchronisation se stabilise à l'origine. Les figures (III.21) à (III.23) représentent l'estimation des paramètres incertains du système esclave. On remarque que les paramètres incertains se stabilisent exactement sur les mêmes valeurs que celles du système maître.

Exemple 2 : Synchronisation des systèmes de Chen incertains

Comme dans l'exemple précédent, on considère deux systèmes de Chen, le premier est considéré comme maître et le deuxième comme esclave.

$$\begin{cases} \dot{x}_m = a(y_m - x_m) \\ \dot{y}_m = (c - a - z_m)x_m + cy_m \\ \dot{z}_m = x_m y_m - bz_m \end{cases} \quad (\text{III.142})$$

Et

$$\begin{cases} \dot{x}_s = a_u(y_s - x_s) + u_1 \\ \dot{y}_s = (c_u - a_u - z_s)x_s + c_u y_s + u_2 \\ \dot{z}_s = x_s y_s - b_u z_s + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.143})$$

Où a_u, b_u, c_u sont les paramètres incertains, et u_1, u_2, u_3 les lois de commande.

La dynamique de l'erreur de synchronisation est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = a(e_y - e_x) + e_a(y_s - x_s) + u_1 \\ \dot{e}_y = (c - a - z_s)e_x + ce_y - x_m e_z + e_c(x_s + y_s) - e_a x_s + u_2 \\ \dot{e}_z = y_m e_x + x_s e_y - be_z - e_b z_s + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.144})$$

Avec

$$e_a = a_u - a, e_b = b_u - b, e_c = c_u - c \quad (\text{III.145})$$

Soit $\beta_1 = e_x$

Alors

$$\dot{\beta}_1 = a(e_y - \beta_1) + e_a(y_s - x_s) + u_1 \quad (\text{III.146})$$

$e_y = \alpha_1(\beta_1)$ est considéré comme contrôleur virtuel.

Pour étudier la stabilité du sous-système (β_1) une fonction de Lyapunov V_1 est choisie telle que:

$$V_1 = \frac{\beta_1^2}{2} + \frac{e_a^2}{2} \quad (\text{III.147})$$

Sa dérivée est:

$$\dot{V}_1 = \beta_1[-e_a(x_s - y_s) - a\beta_1 + a\alpha_1 + u_1] + e_a \dot{e}_a \quad (\text{III.148})$$

Si on choisit:

$$\alpha_1 = 0, u_1 = 0 \quad (\text{III.149})$$

Et

$$\dot{e}_a = \beta_1(x_s - y_s) \quad (\text{III.150})$$

Le sous-système (β_1) est asymptotiquement stable car:

$$\dot{V}_1 = -a\beta_1^2 < 0 \quad (\text{III.151})$$

L'erreur entre e_y et la fonction d'estimation est décrit par:

$$\beta_2 = e_2 - \alpha_1 \quad (\text{III.152})$$

Ainsi, le nouveau sous-système est donné par:

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = a(\beta_2 - \beta_1) + e_a(y_s - x_s) \\ \dot{\beta}_2 = (c - a - z_s)\beta_1 + c\beta_2 - x_m e_z + e_c(x_s + y_s) - e_a x_s + u_2 \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

Et $e_z = \alpha_2(\beta_1, \beta_2)$ est le contrôleur virtuel

Afin de trouver les conditions de stabilité qui stabilise le sous-système (β_1, β_2) , on considère la fonction de Lyapunov V_2

$$V_2 = V_1 + \frac{\beta_2^2}{2} + \frac{e_c^2}{2} \quad (\text{III.154})$$

$$\dot{V}_2 = -a\beta_1^2 + \beta_2[(c - a - z_s)\beta_1 + c\beta_2 - x_m \alpha_2 + e_c(x_s + y_s) - e_a x_s + u_2] + e_c \dot{e}_c \quad (\text{III.155})$$

Pour

$$\alpha_2 = 0, u_2 = -(c - a - z_s)\beta_1 - \beta_2(c + 1) + e_a x_s, \quad (\text{III.156})$$

Et

$$\dot{e}_c = -\beta_2(x_s + y_s) \quad (\text{III.157})$$

On obtient

$$\dot{V}_2 = -a\beta_1^2 - \beta_2^2 < 0 \quad (\text{III.158})$$

Donc, le sous-système (β_1, β_2) est asymptotiquement stable puisque la dérivée de la fonction de Lyapunov est définie négative.

Soit β_3 l'erreur entre e_z et $\alpha_2(\beta_1, \beta_2)$

$$\beta_3 = e_z - \alpha_2 \quad (\text{III.159})$$

Le nouveau système obtenu $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est déterminé par

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = a(\beta_2 - \beta_1) + e_a(y_s - x_s) \\ \dot{\beta}_2 = -\beta_2 - x_m e_z + e_c(x_s + y_s) \\ \dot{\beta}_3 = y_m \beta_1 + x_s \beta_2 - b\beta_3 - e_b z_s + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.160})$$

On choisit la fonction de Lyapunov comme suit:

$$V_3 = V_2 + \frac{\beta_3^2}{2} + \frac{e_b^2}{2} \quad (\text{III.161})$$

$$\dot{V}_3 = -a\beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3[y_m \beta_1 + x_s \beta_2 - b\beta_3 - e_b z_s + u_3] + e_b \dot{e}_b \quad (\text{III.162})$$

Si $u_3 = -(x_s \beta_2 + y_m \beta_1)$ et $\dot{e}_b = \beta_3 z_s$, le sous-système $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est asymptotiquement stable car la dérivée de la fonction de Lyapunov est définie négative.

$$\dot{V}_3 = -a\beta_1^2 - \beta_2^2 - b\beta_3^2 < 0 \quad (\text{III.163})$$

Les lois de contrôle qui assurent la synchronisation des deux systèmes sont:

$$\begin{aligned} u_2 &= -(c - a - z_s)e_x - e_y(c + 1) + e_a x_s \\ u_3 &= -(x_s e_y + y_m e_x) \end{aligned} \quad (\text{III.164})$$

Et les lois d'adaptations des paramètres incertains sont:

$$\begin{aligned} \dot{e}_a &= e_x(x_s - y_s) \\ \dot{e}_c &= -e_y(x_s + y_s) \\ \dot{e}_b &= e_z z_s \end{aligned} \quad (\text{III.165})$$

Pour la simulation, les paramètres du système maître sont $a = 35, b = 3, c = 28$. Pour le système esclave les valeurs initiales des paramètres incertains sont $a_u = 30, b_u = 1, c_u = 18$.

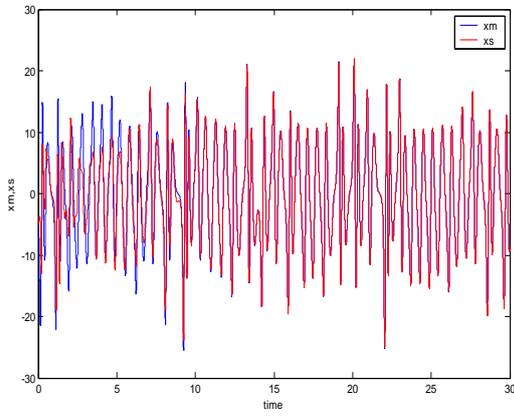


Fig. III. 24 Synchronisation des variables x_m et x_s

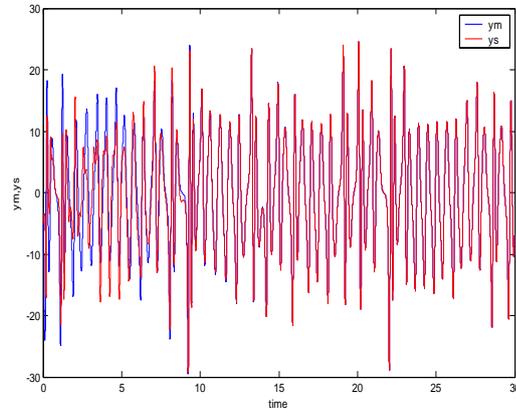


Fig. III. 25 Synchronisation des variables y_m et y_s

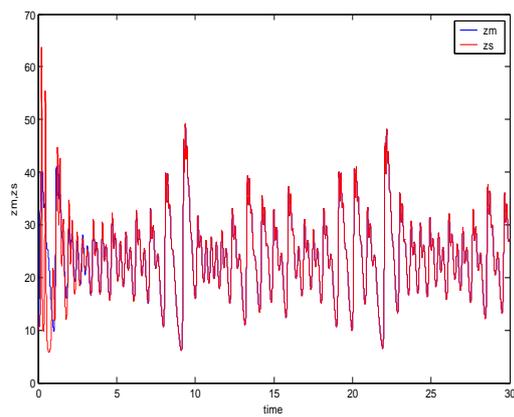


Fig. III. 26 Synchronisation des variables z_m et z_s

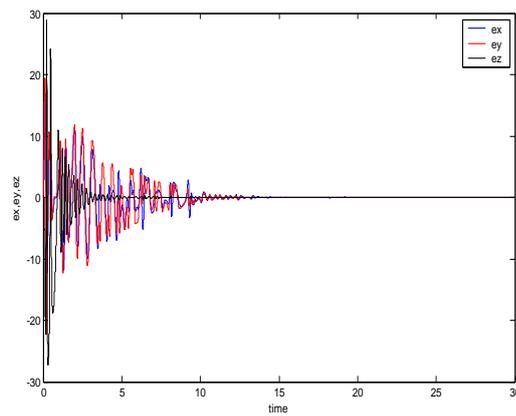


Fig. III. 27 Erreurs de synchronisation.

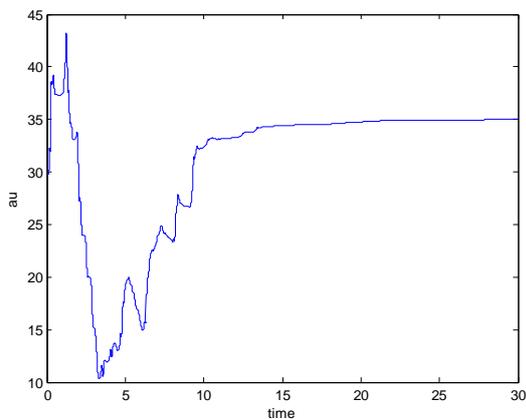


Fig. III. 28 Estimation du paramètre a_u

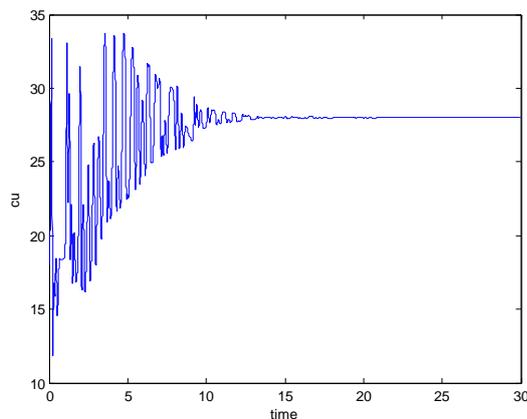
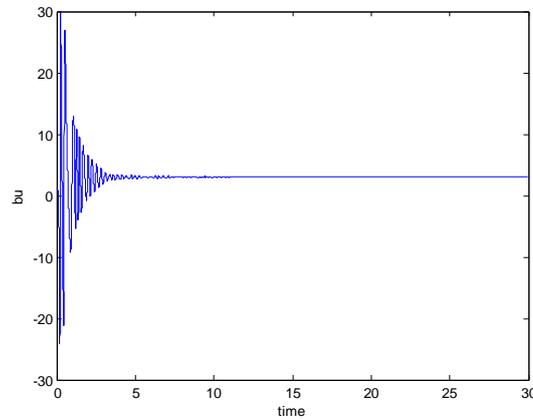


Fig. III. 29 Estimation du paramètre c_u

Fig. III. 30 Estimation du paramètre b_u

La différence entre les trajectoires avant l'activation du contrôle est due à la sensibilité aux conditions initiales. Une fois le contrôle déclenché les trajectoires de l'esclave suivent parfaitement le maître et l'erreur de synchronisation se stabilise sur la valeur zéro. Les paramètres incertains aussi se stabilisent à la limite sur les mêmes valeurs que celles du maître.

III.5.2 Synchronisation des systèmes chaotiques incertains par le contrôle actif adaptatif

Exemple 1 : Synchronisation des systèmes de Lorenz incertains [105]

Comme défini précédemment, la dynamique de l'erreur de synchronisation est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = a(e_y - e_x) + e_a(y_s - x_s) + u_1 \\ \dot{e}_y = (r - z_m)e_x - e_y - x_s e_z + e_r x_s + u_2 \\ \dot{e}_z = y_m e_x + x_s e_y - b e_z - e_b z_s + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.166})$$

Pour éliminer les termes non-linéaires, on prend:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = z_m e_x + x_s e_z + v_2 \\ u_3 = -y_m e_x - x_s e_y + v_3 \end{cases} \quad (\text{III.167})$$

Le système obtenu est un système linéaire avec les lois de commande v_1 , v_2 et v_3

$$\begin{cases} \dot{e}_x = a(e_y - e_x) + e_a(y_s - x_s) + v_1 \\ \dot{e}_y = re_x - e_y + e_r x_s + v_2 \\ \dot{e}_z = -be_z - e_b z_s + v_3 \end{cases} \quad (\text{III.168})$$

On considère la fonction de Lyapunov suivante:

$$f(t) = \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_r^2) \quad (\text{III.169})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} &= e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z + e_a \dot{e}_a + e_b \dot{e}_b + e_r \dot{e}_r \\ &= e_x [a(e_y - e_x) + e_a(y_s - x_s) + v_1] + e_a \dot{e}_a \\ &\quad + e_y [re_x - e_y + e_r x_s + v_2] + e_r \dot{e}_r \\ &\quad + e_z [-be_z - e_b z_s + v_3] + e_b \dot{e}_b \end{aligned} \quad (\text{III.170})$$

Pour assurer la stabilité du système, les lois de contrôle sont choisies comme suit:

$$\begin{cases} v_1 = -ae_y \\ v_2 = -re_x \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.171})$$

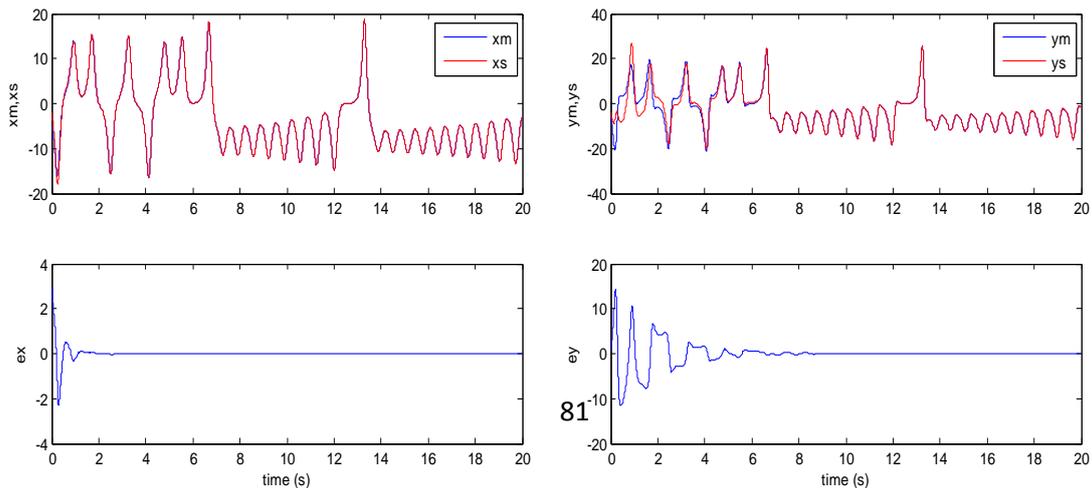
Et les lois d'adaptations des paramètres:

$$\begin{cases} \dot{e}_a = e_x(x_s - y_s) \\ \dot{e}_r = -e_y x_s \\ \dot{e}_b = e_z z_s \end{cases} \quad (\text{III.172})$$

Pour la simulation, les valeurs des paramètres du système maître sont $a = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$

Pour l'esclave, les valeurs initiales des paramètres incertains sont $a_u = 6, b_u = 8, r_u = 13$.

Les figures suivantes montrent que la synchronisation se produit rapidement. On peut alors déduire qu'avec le contrôle actif la synchronisation se fait beaucoup plus rapidement qu'avec l'algorithme backstepping.



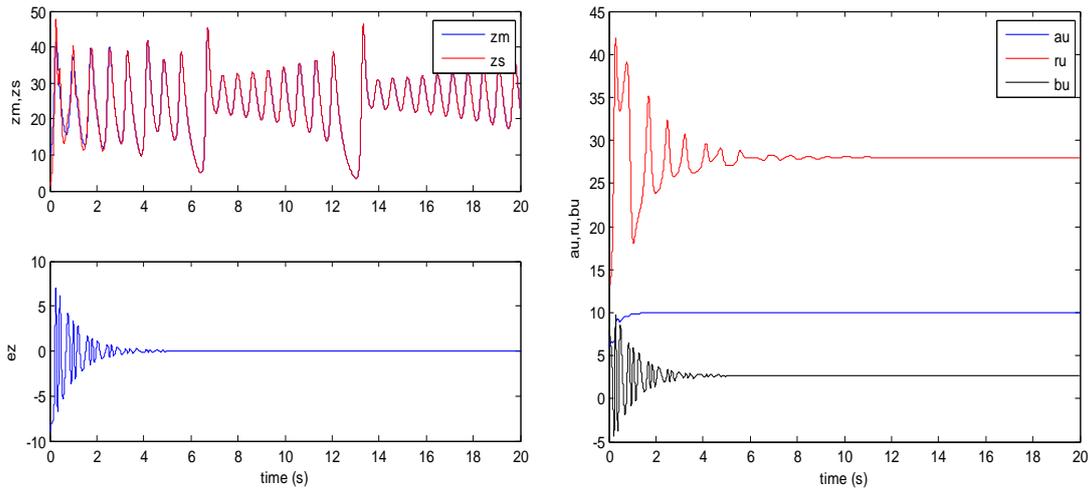


Fig. III. 31 Synchronisation des systèmes de Lorenz par le contrôle actif adaptatif et estimation des paramètres incertains.

Exemple2 : Synchronisation des systèmes de Chen incertains

Pour ce système, la dynamique de l'erreur de synchronisation est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = a(e_y - e_x) + e_a(y_s - x_s) + u_1 \\ \dot{e}_y = (c - a - z_s)e_x + ce_y - x_m e_z + e_c(x_s + y_s) - e_a x_s + u_2 \\ \dot{e}_z = y_m e_x + x_s e_y - be_z - e_b z_s + u_3 \end{cases} \quad (\text{III.173})$$

Pour éliminer la partie non linéaire on choisit:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = z_s e_x + x_m e_z + v_2 \\ u_3 = -y_m e_x - x_s e_y + v_3 \end{cases} \quad (\text{III.174})$$

La fonction de Lyapunov est:

$$f(t) = \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2) \quad (\text{III.175})$$

D'où sa dérivée:

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z + e_a \dot{e}_a + e_b \dot{e}_b + e_c \dot{e}_c \\ &= e_x [a(e_y - e_x) + e_a(y_s - x_s) + v_1] + e_a \dot{e}_a \\ &\quad + e_y [(c - a)e_x + ce_y + e_c(x_s + y_s) - e_a x_s + v_2] + e_c \dot{e}_c \\ &\quad + e_z [-be_z - e_b z_s + v_3] + e_b \dot{e}_b \end{aligned} \quad (\text{III.176})$$

On obtient alors les lois de commandes suivantes:

$$\begin{cases} v_1 = -ae_y \\ v_2 = (a-c)e_x - 2ce_y + e_ax_s \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.177})$$

Et les paramètres incertains s'adaptent selon les lois:

$$\begin{cases} \dot{e}_a = e_x(x_s - y_s) \\ \dot{e}_c = -e_y(x_s + y_s) \\ \dot{e}_b = e_z z_s \end{cases} \quad (\text{III.178})$$

On obtient une forme simplifiée de la fonction de Lyapunov, dont la dérivée est toujours négative.

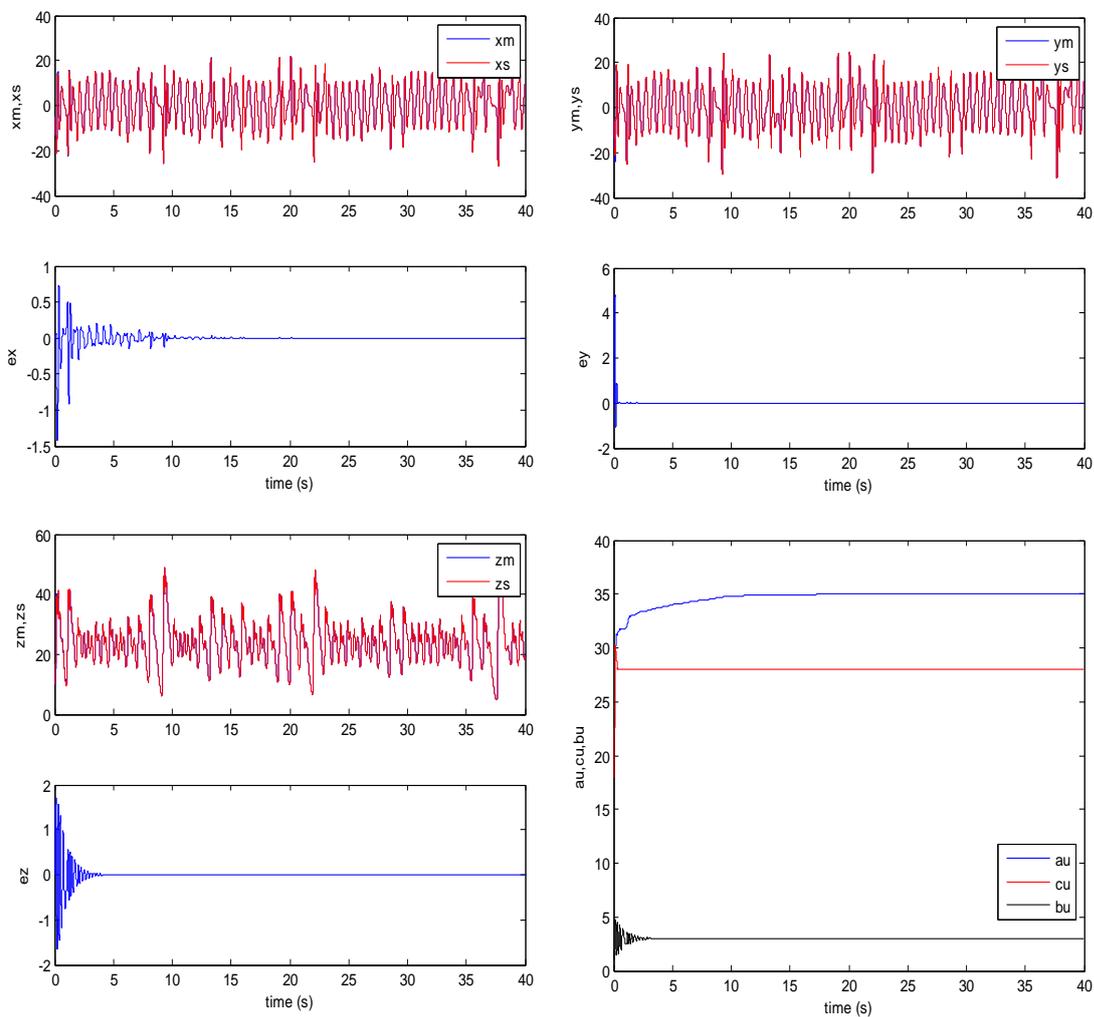


Fig. III. 32 Synchronisation des systèmes de Chen par le contrôle actif adaptatif et estimation des paramètres incertains.

Pour la simulation les valeurs des paramètres du système maître sont $a = 35, b = 3, c = 28$, et les valeurs initiales des paramètres incertains de l'esclave sont : $a_u = 30, b_u = 1, c_u = 18$.

Comme pour l'exemple précédent le contrôle actif adaptatif permet la synchronisation de deux systèmes de Chen, avec une incertitude dans les paramètres de l'esclave. Le temps de synchronisation est très court par rapport aux méthodes déjà étudiées.

Chapitre IV : Chaotification ou anti-contrôle des systèmes non linéaires

IV.1 Introduction

Depuis le développement des théories de stabilisation et de synchronisation du chaos, l'anti-contrôle ou chaotification des systèmes non-linéaires est devenu un sujet de recherche et d'application très important. Contrairement au contrôle par suppression du chaos, la chaotification désigne le processus de génération du comportement chaotique pour un système stable ou le rehaussement du comportement chaotique dans un système qui est déjà chaotique. Au début, la difficulté a été au niveau de la définition du chaos lui-même. En fait, il s'agissait de trouver comment garantir que le comportement généré à partir d'un système non-linéaire soit un comportement chaotique.

La première définition du chaos a été proposée par Li et York en 1975 [106], puis Marotto a généralisé cette définition pour les systèmes de dimension supérieure [107]. Une autre variante a été proposée par Denavey [108], et qui est la plus utilisée pour le moment surtout après l'amélioration introduite par Wiggins [109]. Cependant, ces définitions sont toutes développées pour des systèmes discrets, il n'existe aucun critère ou définition pour prouver l'existence du chaos dans un système continu. Le seul moyen est de calculer l'exposant de Lyapunov ; une valeur positive de l'exposant signifie la présence du chaos [110]. Cette méthode de calcul dépend de l'algorithme numérique utilisé et de la précision du calculateur, ce qui rend la conception d'un contrôleur basé sur l'exposant de Lyapunov pratiquement impossible. Dans certains systèmes, la génération du chaos est possible en faisant varier l'un de ses paramètres. Mais il existe des systèmes qui ne sont pas sensibles à cette variation paramétrique, ce qui explique la limitation de la méthode.

En se basant sur le critère de définition du chaos, les méthodes de chaotification qui existent sont divisées en deux catégories :

- Le système contrôlé doit posséder au moins un exposant positif et évoluer dans un espace borné. En général, un système chaotique évolue dans une région bornée et très sensible aux conditions initiales, donc dans cette catégorie, le principe de chaotification va reposer sur le fait d'assurer l'existence d'un exposant positif dans le système contrôlé en gardant toujours un espace de variation borné.

- Introduire une dynamique chaotique sur le système: Parmi les approches proposées pour introduire la dynamique chaotique on peut citer
 - Le contrôle à retour d'état [111] ; le principe de cette méthode se base sur la transformation d'un système chaotique connu en une forme normale RNF (Rational Normal Form) [112], puis extraire les termes non linéaires obtenu par cette transformation et les utiliser comme une partie du contrôleur. L'autre partie du contrôleur est calculée pour stabiliser le système contrôlé. Le rôle du contrôleur est de stabiliser la dynamique du système étudié et d'introduire une dynamique chaotique extraite à partir d'un système chaotique.
 - Le contrôle impulsif [113]: dans ce cas, la loi de commande est composée de deux parties : une partie pour éliminer la dynamique du système original, et une autre pour générer le chaos.
 - Le contrôle à retard [114]: Quelques travaux ont proposé d'introduire un élément de retard dans une boucle de retour. Si un élément de retard est appliqué sur un système de dimension finie, alors le système contrôlé devient de dimension infinie, ce qui permet d'obtenir une dynamique plus complexe.

La première approche dans le domaine de chaotification a été proposée par Chen et Lai [115]. Ces auteurs ont développé une méthode basée sur les exposants de Lyapunov. L'idée est d'injecter un exposant positif dans une loi de commande composée d'une matrice de gain bornée et d'une action modulo pour garantir la convergence de l'algorithme. Cette action modulo est remplacée dans certains travaux par un contrôleur de faible amplitude.

A la suite de ces travaux, beaucoup de méthodes ont été développées parmi lesquelles: le contrôle à retour d'état, le contrôle à retard, le contrôle adaptatif, le contrôle non linéaire [116-119]. Les méthodes présentées précédemment sont valables pour les systèmes décrits par un modèle mathématique. Pour les systèmes incertains ou à modèle inconnu, des méthodes basées sur la logique floue sont présentées dans [120].

Le présent chapitre est consacré à la présentation de quelques méthodes de chaotification ou d'anti-contrôle de système continu et discrets.

IV.2 Les méthodes de chaotification

IV.2.1 La méthode de Chen-Lai

On considère le système dynamique discret suivant :

$$x(k + 1) = f(x(k)), \quad x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0 \quad (IV.1)$$

Avec f une fonction dérivable.

On applique sur le système une loi de commande à retour d'état de la forme :

$$u(k) = B(k)x(k) \quad (IV.2)$$

B est une matrice de gain de dimension $(n \times n)$

Le système contrôlé est donc le suivant:

$$x(k + 1) = f(x(k)) + u(k), \quad x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0 \quad (IV.3)$$

$$x(k + 1) = f(x(k)) + B(k)x(k), \quad x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0 \quad (IV.4)$$

Si on définit par $\hat{f}(x_f)$ la matrice Jacobienne du système non contrôlé autour du point fixe x_f

$$\hat{f}(x_f) = \left. \frac{\partial x(k+1)}{\partial x(k)} \right|_{x=x_f} \quad (IV.5)$$

Et par J la matrice Jacobienne du système contrôlé

$$J = \hat{f}(x_f) + B(k) \quad (IV.6)$$

Alors, les exposants de Lyapunov sont donnés par :

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln\{J\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (IV.7)$$

Les exposants de Lyapunov sont choisis tels que :

$$0 < \alpha < \lambda_i < \infty \quad (IV.8)$$

α étant une constante strictement positive.

L'algorithme de chaotification consiste à appliquer d'une part, la séquence $\{B(k)\}_{k=0}^{\infty}$ en imposant qu'au moins un exposant soit positif et assurer la convergence de l'algorithme d'autre part. La séquence $\{B(k)\}_{k=0}^{\infty}$ doit être bornée.

$$\sup_{0 \leq k < \infty} \|B(k)\| \leq M < \infty \quad (IV.9)$$

M : constante

A chaque itération et avec une valeur désirée de l'exposant de Lyapunov, la matrice du gain est calculé par :

$$B(k) = -\hat{f}(x(k)) + \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}, \quad k = 0, \dots, n \quad (\text{IV.10})$$

Pour borner la loi de commande sur un intervalle rétréci, et éviter la divergence du système, l'action modulo (*mod*) est appliquée sous cette forme :

$$x(k+1) = f(x(k)) + B(k)x(k) \text{mod}(\varepsilon) \quad (\text{IV.11})$$

ε : constante positive très petite $0 < \varepsilon < 1$.

IV.2.2 La méthode Delay Feedback

On considère le système dynamique décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{IV.12})$$

x : un vecteur d'état

f : fonction continue

Le principe de la méthode est d'appliquer sur le système, une loi de commande $u(t)$ telle que :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t) \quad (\text{IV.13})$$

Où

$$u(t) = k[x(t) - x(t - \tau)] \quad (\text{IV.14})$$

k : gain de retour

τ : temps de retard.

Le système contrôlé est donné sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + k[x(t) - x(t - \tau)] \quad (\text{IV.15})$$

Cette méthode peut être utilisée pour la suppression du chaos ou pour la chaotification. Les gains de retour et les temps de retard doivent être convenablement choisis. Leurs choix se fait généralement en s'aidant du diagramme de bifurcation

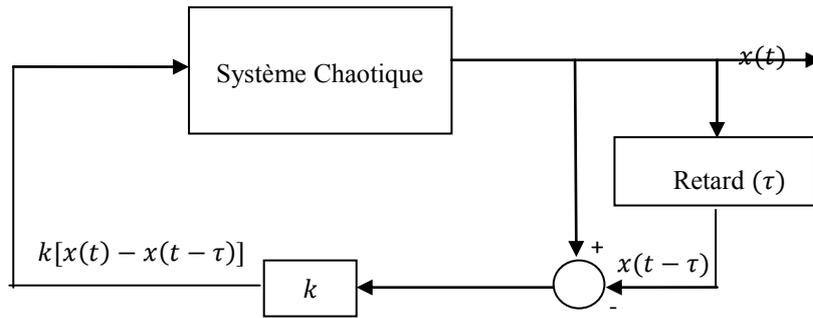


Fig. IV. 1 Schéma bloc de la méthode Delay Feedback

IV.2.3 La méthode de l'anti-contrôle impulsif

Soit un système continu autonome de dimension $n \geq 3$ décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{IV.16}$$

Où

$x \in R^n$ et $f \in R^n \rightarrow R^n$ fonction continue.

L'anti-contrôle impulsif consiste à injecter dans le système stable des impulsions d'une manière périodique, ce qui va forcer la carte de Poincaré du système stable à ressembler à une carte chaotique désirée. Il faut donc choisir une carte chaotique de dimension $(n - 1)$ comme suit :

$$q(i + 1) = Bq(i) + u(i), \quad q(i), u(i) \in R^{n-1} \tag{IV.17}$$

B : Matrice constante

Avec

$$u(i) = (N + e^c)q(i) \text{ mod}(r) \tag{IV.18}$$

r, c représentent des nombres positifs choisis.

Chen et Lai ont montré que tous les exposants de la carte contrôlée sont strictement positifs et que l'orbite contrôlée est toujours bornée [115].

Alors, l'injection du contrôleur impulsif dans le système original donne :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i \delta(t - iT), \quad g_i \in R^n \tag{IV.19}$$

$\delta(t)$: Impulsion de Dirac.

Les perturbations sont appliquées au système aux instants $\{T, \dots, iT, \dots\}$

Pour rendre la carte du système contrôlé similaire à la carte pré désignée, les perturbations g_i doivent avoir la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 g_i &= [I_1, \dots, I_{n-1}] (q(i+1) - q(i)) - k(x(i+1) - \bar{x})k \\
 g_i &= [I_1, \dots, I_{n-1}] B^{-1} U_{B,J} q(i) - k(x(i+1) - \bar{x})k \tag{IV.20} \\
 g_i &= [I_1, \dots, I_{n-1}] B^{-1} U_{B,J} [I_1, \dots, I_{n-1}]^T (x(i) - \bar{x}) - k(x(i) - \bar{x})k
 \end{aligned}$$

Où

I : Matrice identité

\bar{x} : Point appartenant au cycle limite stable

A titre d'exemple, on considère le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 10y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = 10x + y - y(x^2 + y^2) \\ \dot{z} = -z \end{cases} \tag{IV.21}$$

Ce système est toujours stable sur un cycle limite $\psi : p(t) = (\cos(10t), \sin(10t), 0)^T$ de période $T = 0.2\pi$.

On prend comme condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ et on trace les réponses temporelles et le diagramme de phase du système.

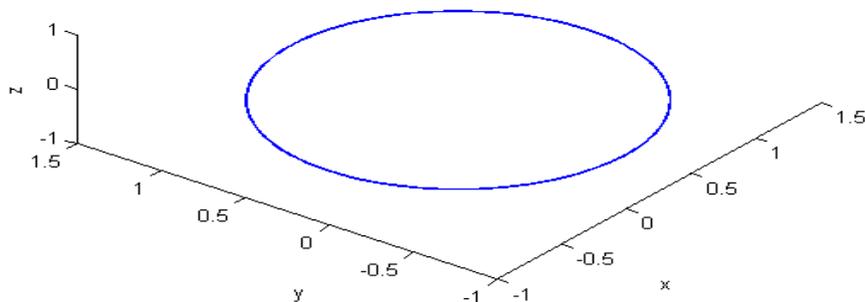


Fig. IV. 2 Diagramme de phase du système sans anti-contrôle

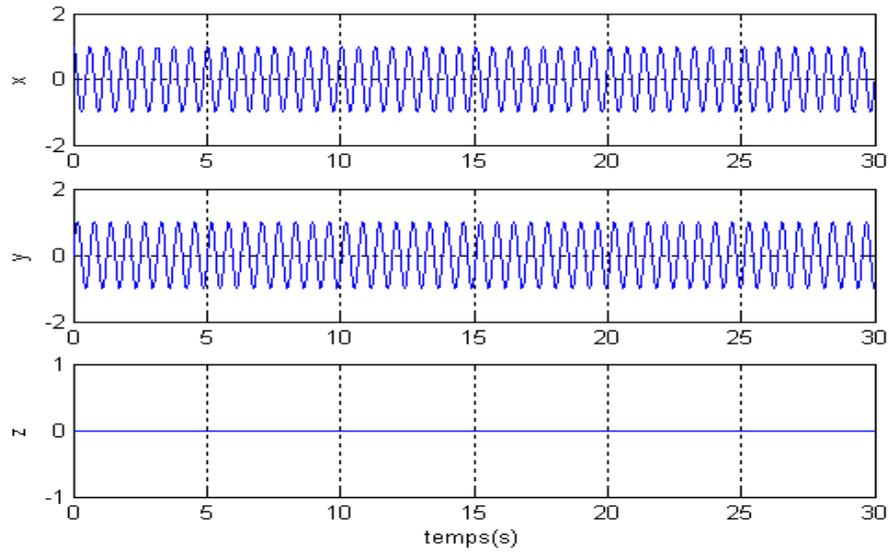


Fig. IV. 3 Réponses temporelles du système sans anti-contrôle

Les figures montrent que le système n'admet aucun comportement chaotique et aucune variation sur l'axe z . Pour rendre ce système chaotique, on utilise la loi de contrôle suivante [121] :

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) + u(i), \tag{IV.22}$$

Où

$$u(i) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \delta(t - iT), \tag{IV.23}$$

On choisit le point $\bar{x} = (1,0,0)$ qui appartient au cycle stable.

On fixe

$$r = 0.2, \quad c = 1, \quad N = e^{-0.2\pi} \text{ et } (x_0, y_0, z_0) = (1.05, 0, 0.03)$$

Alors

$$g_i = \begin{pmatrix} e^{0.4\pi} & 0 \\ 0 & e^{0.2\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\left(e^{-0.2\pi} + e^1 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(x(iT) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \bmod(0.2) \right] - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

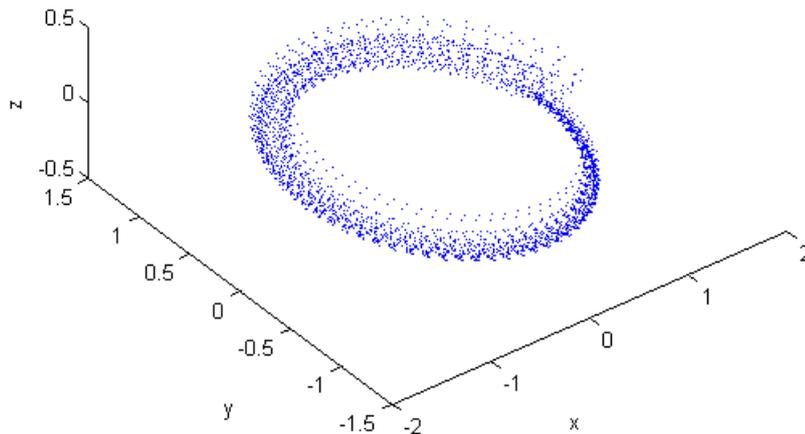


Fig. IV. 4 Diagramme de phase du système sous anti-contrôle

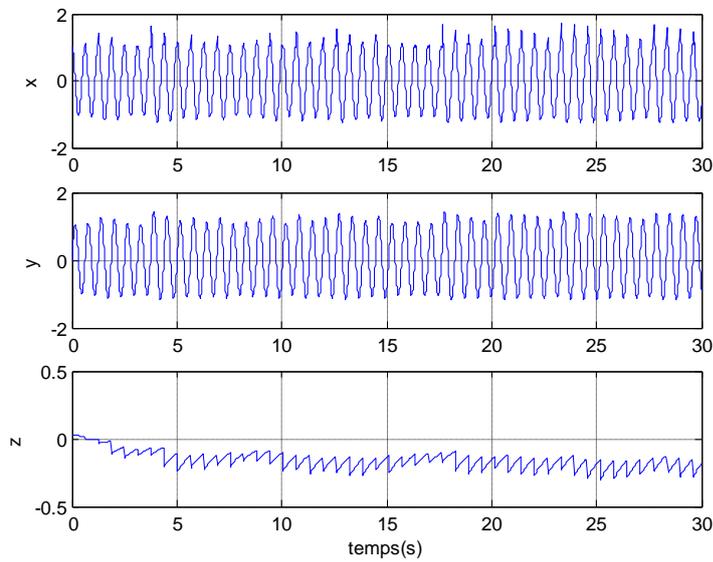


Fig. IV. 5 Réponses temporelles du système sous anti-contrôle

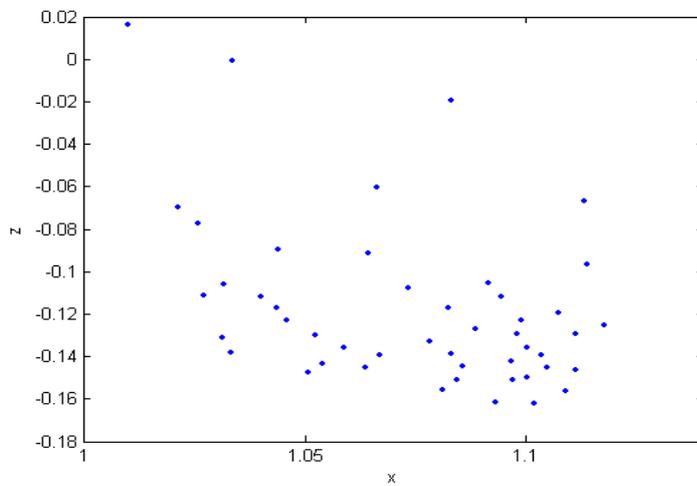


Fig. IV. 6 Section de Poincaré du système sous anti-contrôle.

A chaque période du système, on applique une impulsion qui sert à déstabiliser le système de son orbite périodique, c'est pour cela qu'on observe des pics sur les sommets de la représentation temporelle du système contrôlé.

La représentation du système dans le plan de phase nous montre l'apparition du phénomène chaotique, dans ce cas l'anti-contrôle impulsif oblige le système à suivre plusieurs orbites périodiques instables. La section de Poincaré montre que les orbites instables varient selon les trois axes au lieu de deux, mais elles sont toujours bornées grâce à la fonction modulo.

IV.3 Chaotification des systèmes discrets

IV.3.1 Exemple 1

Le système considéré pour cet exemple est le système de Hénon, défini par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

Ce système possède aussi trois zones de stabilité en fonction du paramètre a , un point fixe, une orbite stable et une trajectoire chaotique. La variation de l'exposant de Lyapunov en fonction de a met bien en évidence ces trois états.

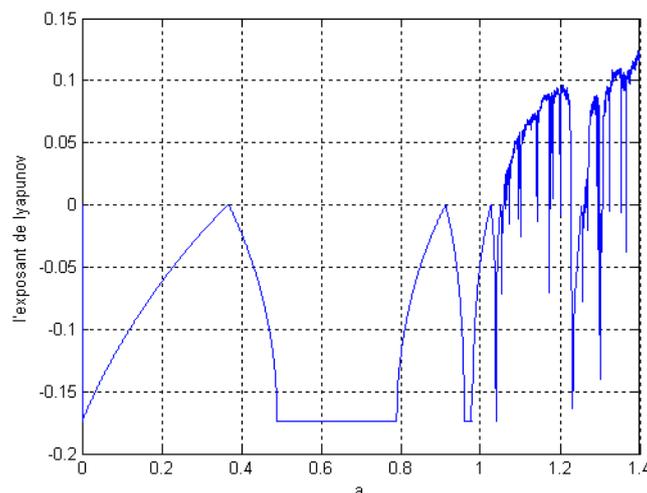


Fig. IV. 7 Exposant de Lyapunov

Les étapes de calcul sont les mêmes que celles effectuées dans l'exemple précédent, c'est-à-dire :

$$B(k) = -f'(k) + J \quad (\text{IV.25})$$

Avec

$$f'(k) = \begin{bmatrix} -2x(k) & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix},$$

Pour garantir l'apparition du phénomène chaotique on donne à λ_1 une valeur strictement positive, par exemple $\lambda_1 = 0.25$. La valeur de λ_2 garde la valeur originale c'est-à-dire $\lambda_2 = -2.31$. La loi de contrôle appliquée au système est donc la suivante :

$$u(k) = B(k) \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \text{ mod } \varepsilon, \quad (\text{IV.26})$$

Les résultats de simulation pour les différents cas sont représentés dans les figures (IV.8) à (IV.10). Pour un fonctionnement sans anti-contrôle on a :

- pour $a = 0.2$ et $b = 0.3$, le système converge vers un point fixe.
- pour $a = 0.6$ et $b = 0.3$, le système stabilise sur une orbite périodique.
- pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$, le système suit une trajectoire chaotique.

Avant l'activation du contrôle, les deux systèmes suivent une trajectoire identique. Au moment du déclenchement du contrôle le système sous anti-contrôle obtient un exposant positif qui l'oblige à suivre une trajectoire différente et plus précisément chaotique, donc il va perdre sa stabilité soit sur le point fixe ou sur l'orbite périodique. Mais dès que le contrôle est relâché le système récupère ses caractéristiques originales de stabilité, donc il revient à son état avant contrôle.

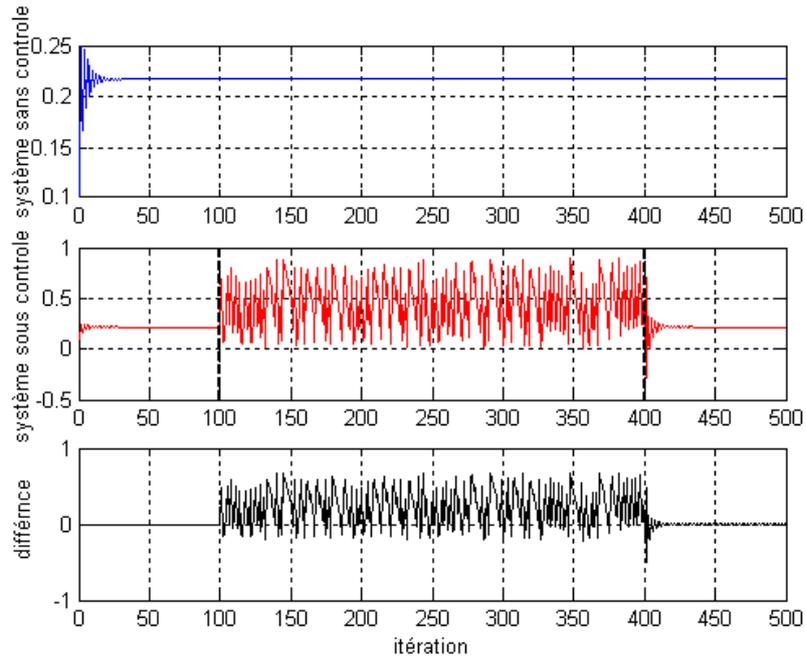


Fig. IV. 8 Réponse temporelle du système sous anti-contrôle pour $a = 0.2$

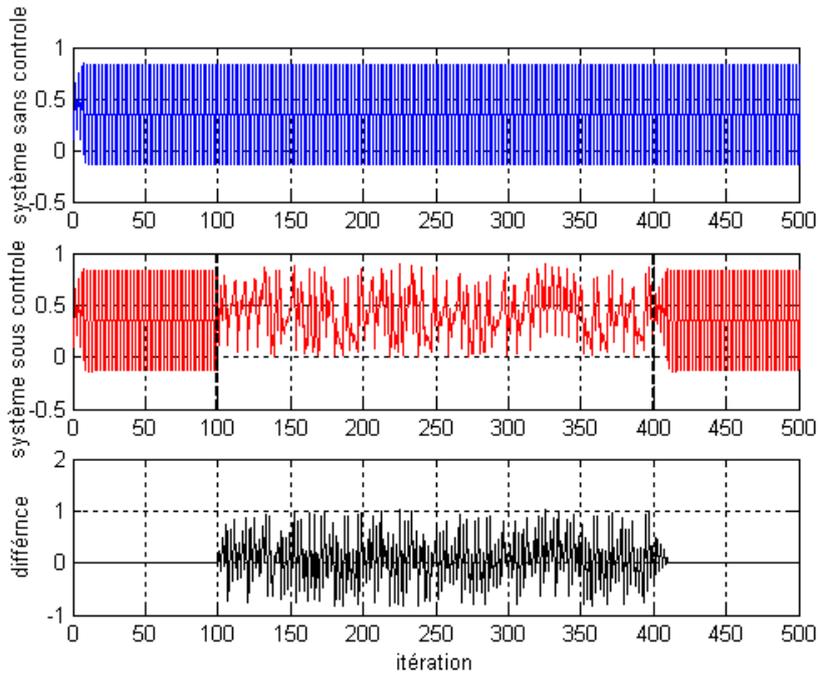


Fig. IV. 9 Réponse temporelle du système sous anti-contrôle pour $a = 0.6$

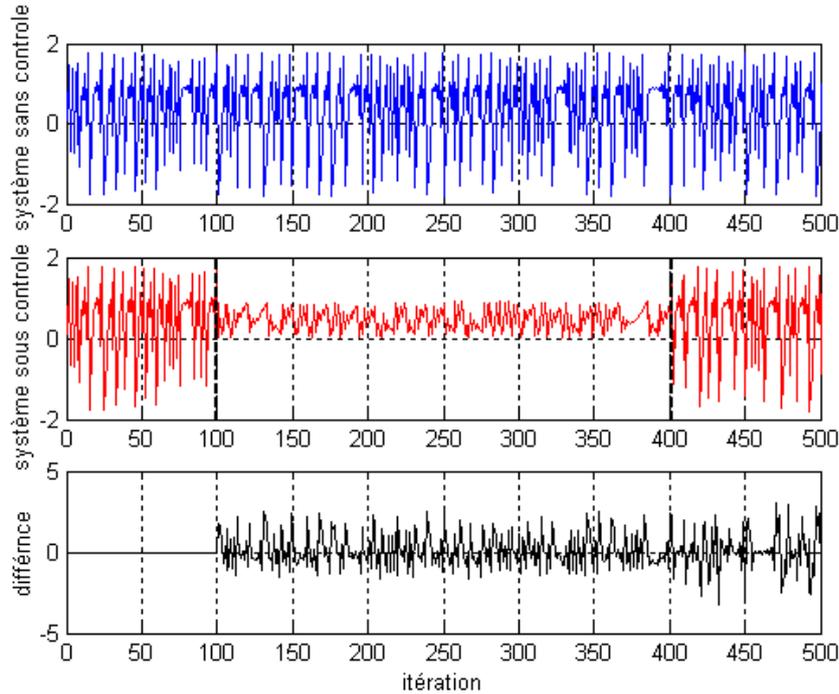


Fig. IV. 10 Réponse temporelle du système sous anti-contrôle pour $a = 1.4$

IV.3.2 Exemple 2

On considère le système du deuxième ordre suivant :

$$x_{k+2} = \frac{1}{1 + \frac{A^{(1+b)} x_k^{ab} (1-x_k)^{b^2}}{[1 + Ax_k^a (1-x_k)^b]^{(a+b)}}} \tag{IV.27}$$

Où

A , a et b sont les paramètres du système.

Si $A=3$, $a=1.6$ et $b=-0.4$ le système est stable sur une orbite de deux cycles, et il n'accepte aucun comportement chaotique quelque soit la condition initiale x_0 . Pour cela on essaye de tracer la population $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ pour différentes conditions initiales.

On fait varier x_0 entre 0.1 et 1 puis on observe les différentes réponses du système.

On remarque que, quelque soit la condition initiale le système est toujours stable sur un point fixe $x_f = 0.2$ ou sur une orbite périodique. Donc pour ces conditions le système ne peut jamais être chaotique.

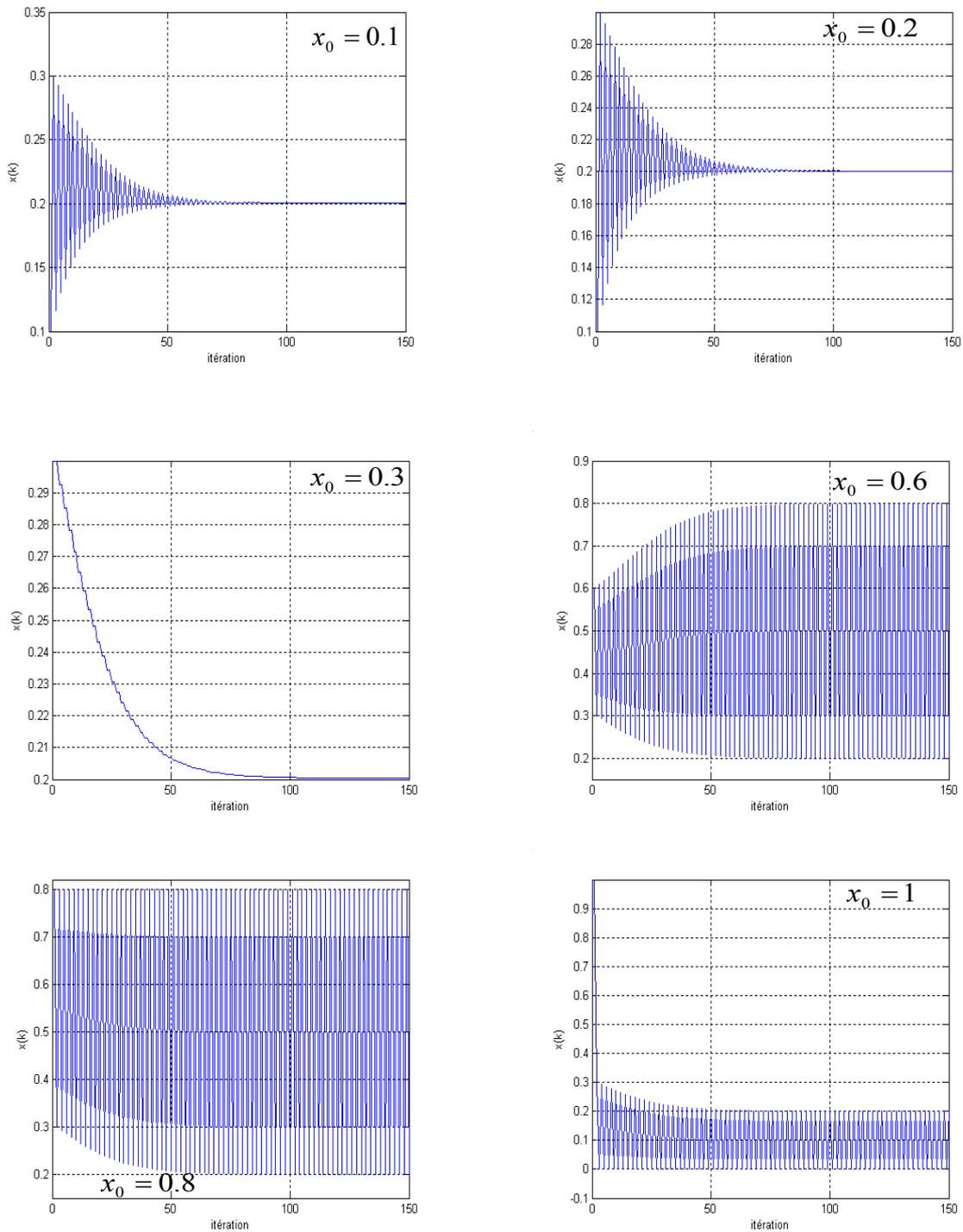


Fig. IV. 11 Réponses du système pour différentes valeurs de x_0

Pour appliquer l'algorithme d'anti-contrôle on prend le cas où $x_0 = 0.6$.

La matrice jacobienne du système est alors :

$$f' = \begin{bmatrix} 0 & S(k+2, k) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.28})$$

Et
$$S(k+2, k) = \frac{1-x(k+2)}{1-x(k)} \frac{x(k+2)}{x(k)} [(a+b)x(k+1) - a][(a+b)x(k) - a]$$

Pour ces paramètres et cette condition initiale, les exposants de Lyapunov du système sont les suivants :

$$\lambda_1 = -0.6418, \quad \lambda_2 = -0.6931,$$

Les deux exposants sont négatifs, ce qui signifie que le système est stable. "Pour chaotifier le système il faut qu'au moins un exposant soit positif. Alors, on inverse le signe de l'un des deux exposants, ce qui donne la matrice J suivante :

$$J = \begin{bmatrix} e^{0.6418} & 0 \\ 0 & e^{-0.6931} \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0.6418 \quad (\text{IV.29})$$

La loi d'anti-contrôle appliquée est :

$$u(k) = B(k)x(k) \bmod \varepsilon, \quad \varepsilon = 0.1 \quad (\text{IV.30})$$

La fonction modulo est ajoutée pour borner la matrice de gain B

La matrice B est calculée à chaque itération par

$$B(k) = -f' + J$$

$$B(k) = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-x(k+2)}{1-x(k)} \frac{x(k+2)}{x(k)} [(a+b)x(k+1) - a][(a+b)x(k) - a] \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix},$$

Les figures suivantes représentent les résultats de simulation du système sans et sous anti-contrôle. On remarque que le système original se stabilise sur une orbite périodique d'amplitude maximale égale à 0.799.

Dès le départ, Le système sous anti-contrôle suit une trajectoire chaotique avec une amplitude supérieure à celle du système original (varie entre 0 et 1). Ensuite, la réponse du système contient plusieurs sommets différents, ce qui signifie le comportement chaotique de la séquence $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$.

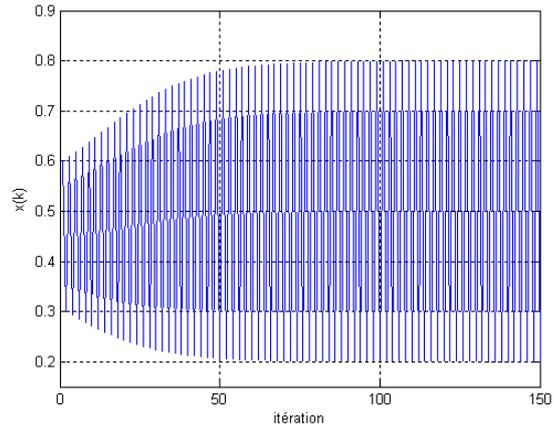


Fig. IV. 12 Réponse du système sans anti-contrôle.

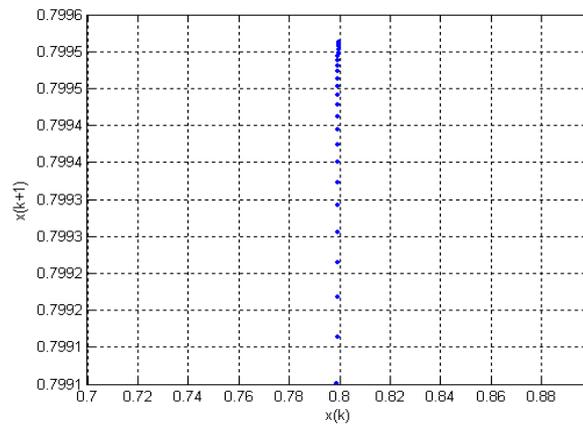


Fig. IV. 13 Les sommets du système sans anti-contrôle.

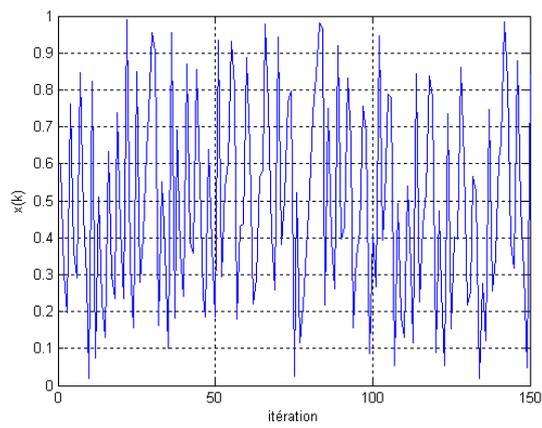


Fig. IV. 14 Réponse du système sous anti-contrôle

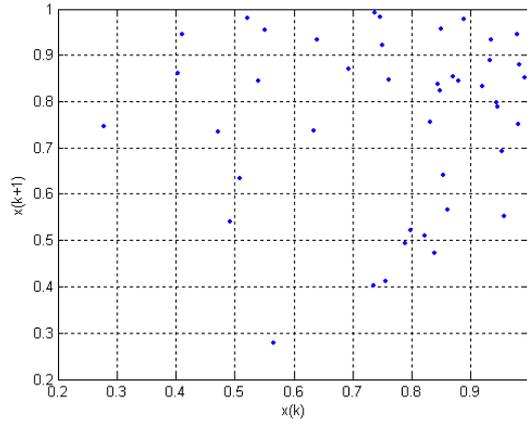


Fig. IV. 15 Les sommets du système sous anti-contrôle

IV.3.3 Exemple 3

Le système de Kokame est décrit par :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), a) + 0.4y(k) - 0.5z(k) \\ y(k+1) = 0.3x(k) + f(y(k), a) \\ z(k+1) = 0.1x(k) - 0.2z(k) \end{cases} \quad (IV.31)$$

Avec

$$f(\alpha, v) = \begin{cases} v(\alpha + 1), & \text{si } \alpha < -0.5 \\ v\alpha, & \text{si } |\alpha| \leq 0.5 \\ v(\alpha - 1), & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases} \quad (IV.32)$$

Et a paramètre du système

Donc pour $|x(k)| \leq 0.5$ et $|y(k)| \leq 0.5$ le système de Kokame admet un point fixe $p_f(0,0,0)$.

Pour voir le comportement dynamique du système, on trace le diagramme de bifurcation de la variable x en fonction du paramètre a .

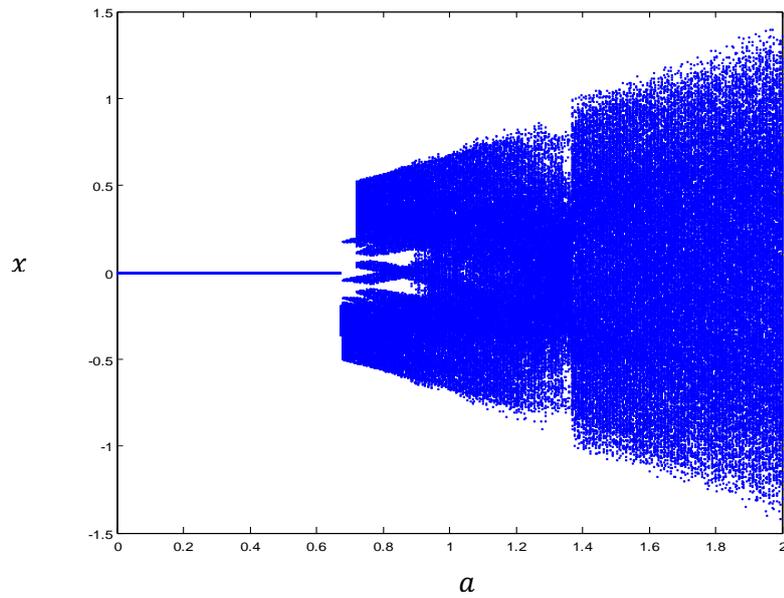
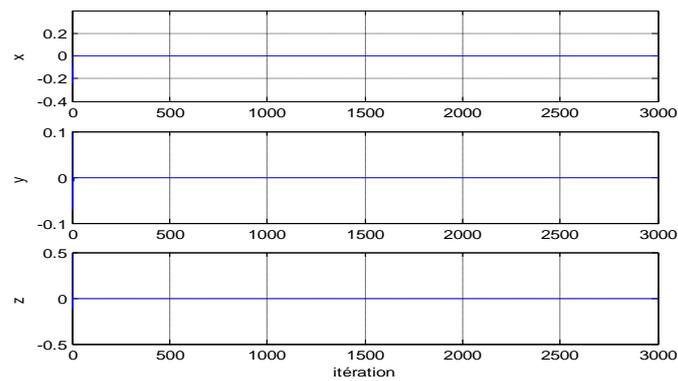


Fig. IV. 16 Diagramme de bifurcation du système de Kokame

On remarque deux zones de stabilité

- $a \in [0, 0.66]$, le système se stabilise sur son point fixe $p_f(0, 0, 0)$
- $a \in]0.66, 2]$, le système présente un phénomène chaotique.

Fig. IV. 17 Le système de Kokame pour $a = 0.3$

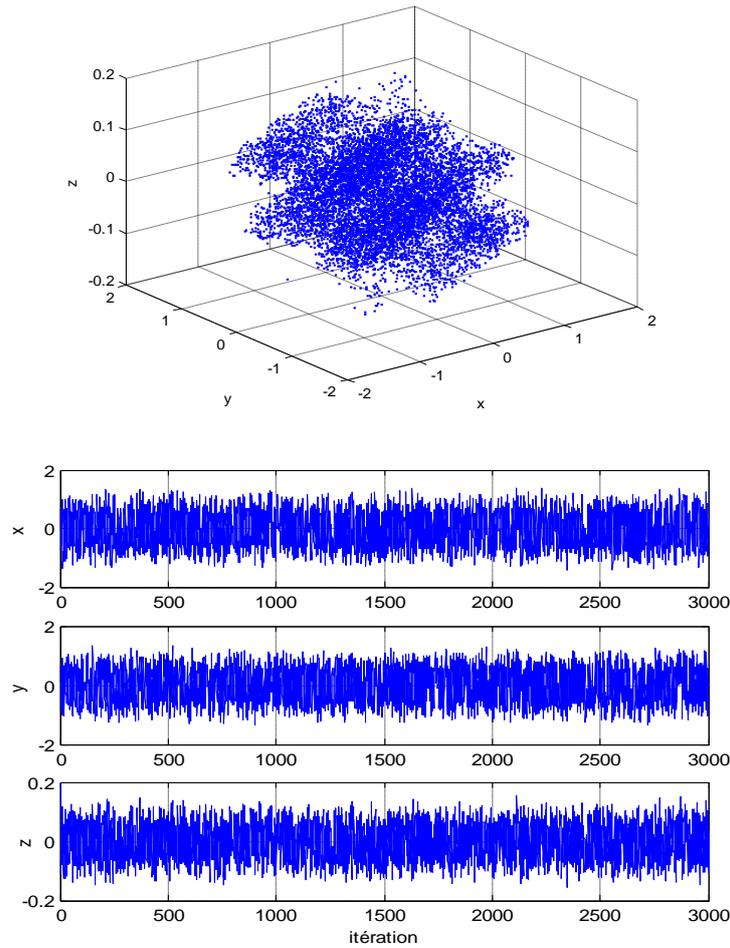


Fig. IV. 18 Le système de Kokame pour $a = 2$

Les figures (IV.17) et (IV.18) représentent les réponses du système pour différentes valeurs de a . Pour $a = 0.3$ le système est stable et ne présente aucun comportement chaotique. Le but de la chaotification est de faire basculer le système vers un état chaotique dans cette partie stable.

L’algorithme de chaotification utilisé est le même que celui des exemples précédents ; la loi de contrôle est la suivante :

$$u(k) = B(k)x(k) \text{ mod } \varepsilon \tag{IV.33}$$

Avec

$$B(k) = -f' + J \tag{IV.34}$$

Où

$$f' = \begin{bmatrix} a & 0.4 & -0.5 \\ 0.3 & a & 0 \\ 0.1 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} \tag{IV.35}$$

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 , les trois exposants de Lyapunov du système. On dit que le système est chaotique si est seulement si [122] :

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0 \tag{IV.36}$$

Le système possède les exposants suivants :

$$\lambda_1 = -1.2, \quad \lambda_2 = -1.2, \quad \lambda_3 = -1.6,$$

Alors, pour rendre le système chaotique on peut faire le choix suivant :

$$\lambda_1 = 1.2, \quad \lambda_2 = -1.2, \quad \lambda_3 = -1.6,$$

D'où

$$J = \begin{bmatrix} e^{1.2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1.2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1.6} \end{bmatrix}, \tag{IV.37}$$

Le système sous anti-contrôle s'écrit alors, comme suit [123]:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ z(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} a & 0.4 & -0.5 \\ 0.3 & a & 0 \\ 0.1 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{1.2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1.2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1.6} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \text{ mod}(\varepsilon), \tag{IV.38}$$

Avec : $\varepsilon=1$

La figure (IV.19) montre que le système sous anti-contrôle avec $a = 0.3$ est en plein chaos. Ce phénomène est dû à l'exposant positif injecté par la procédure d'anti-contrôle. Dans ce cas, le système obtient une valeur propre à l'extérieur du cercle unitaire qui force le système à perdre sa stabilité pour suivre une trajectoire chaotique.

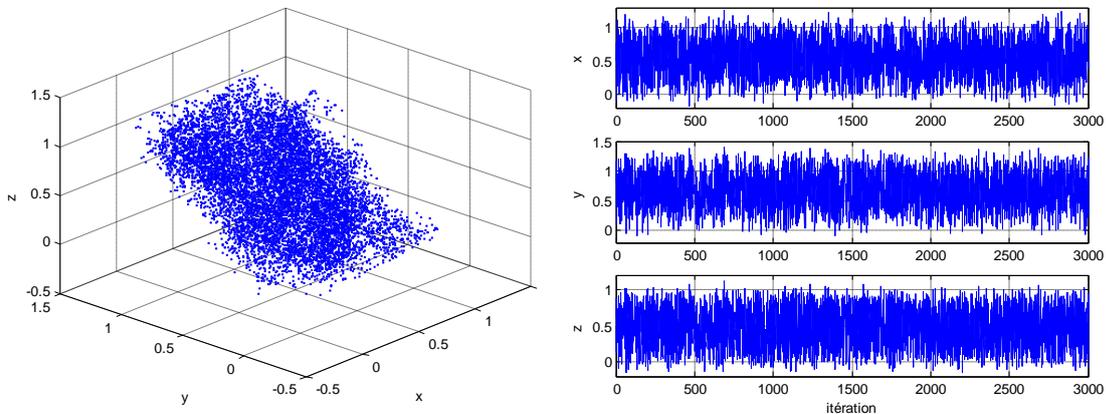


Fig. IV. 19 Le système de Kokame sous anti-contrôle pour $a = 0.3$

IV.4 Chaotification des systèmes continus

IV.4.1 Chaotification des systèmes continus par la méthode DCF (*Delayed Control Feedback*)

Soit un système dynamique continu de dimension n ($n \geq 3$)

$$\dot{X}(t) = f[X(t)] \quad (\text{IV.39})$$

X : Vecteur d'état ($X \in R^n$)

f : Fonction continue ($f : R^n \rightarrow R^n$)

Le principe de la méthode (**DCF**) c'est d'appliquer sur le système continu une loi de commande $U(t)$, tel que [124]:

$$\dot{X}(t) = f[X(t)] + U(t) \quad (\text{IV.40})$$

Avec
$$U(t) = K[X(t) - X(t - \tau)]$$

K : Le gain de retour

τ : Temps de retard

Donc, le système contrôlé devient

$$\dot{X}(t) = f[X(t)] + K[X(t) - X(t - \tau)] \quad (\text{IV.41})$$

De cette équation on peut conclure que le résultat du contrôle (ou de la chaotification) des systèmes continus repose sur le bon choix des deux paramètres K et τ .

IV.4.2 Exemple de chaotification

L'exemple considéré est le système de Lü défini par:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = -xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

a, b, c : paramètres du système

Pour $a = 36, b = 3, c = 20$ le système de Lü est en plein chaos.

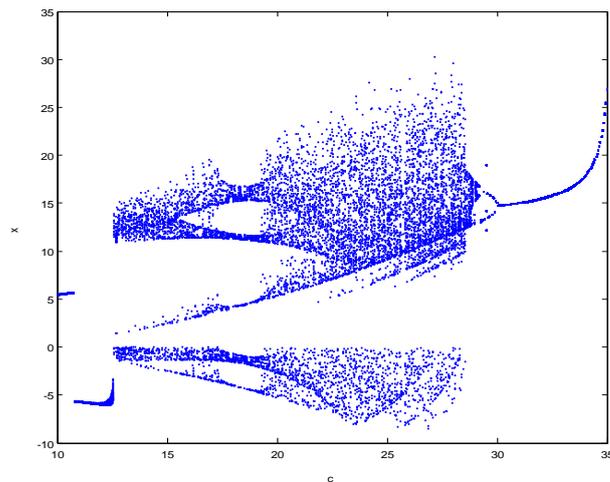


Fig. IV. 20 Diagramme de bifurcation du système de Lü

Le système de Lü contrôlé a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) + k_1[x(t) - x(t-\tau_1)] \\ \dot{y} = -xz + cy + k_2[y(t) - y(t-\tau_2)] \\ \dot{z} = xy - bz + k_3[z(t) - z(t-\tau_3)] \end{cases} \quad (IV.43)$$

Avec k_1, k_2, k_3 : gains de retour

τ_1, τ_2, τ_3 : temps de retard

Dans ce qui suit nous allons montrer l'effet du choix des gains k_i , et des retards τ_i sur le comportement du système.

a- L'effet du retard

1°cas) On fixe $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 0, \tau_2 = 0, \tau_3 = 0$ et on fait τ_1 varier dans l'intervalle $[0,1]$.

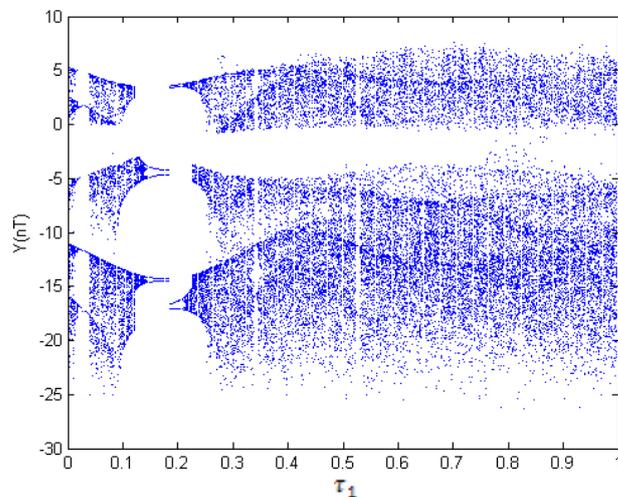


Fig. IV. 21 Diagramme de bifurcation en fonction de τ_1

Le comportement dynamique du système en fonction du temps de retard τ_1 est représenté dans la figure(IV.21). Au départ le système est dans un état chaotique, puis il se stabilise sur une orbite périodique pour $\tau_1 = 0.0025s$. En augmentant le temps de retard τ_1 , le système rentre à nouveau dans une zone chaotique (par exemple pour $\tau_1 = 0.1s$) afin de se stabiliser une autre fois sur une orbite périodique ($\tau_1 = 0.17s$). L'incrémentation de τ_1 par contre, fait changer le comportement dynamique du système et il va suivre cette fois la route vers le chaos ($\tau_1 = 0.5s$). Les trajectoires du système pour les différents temps de retard sont représentées dans la figure (IV.22).

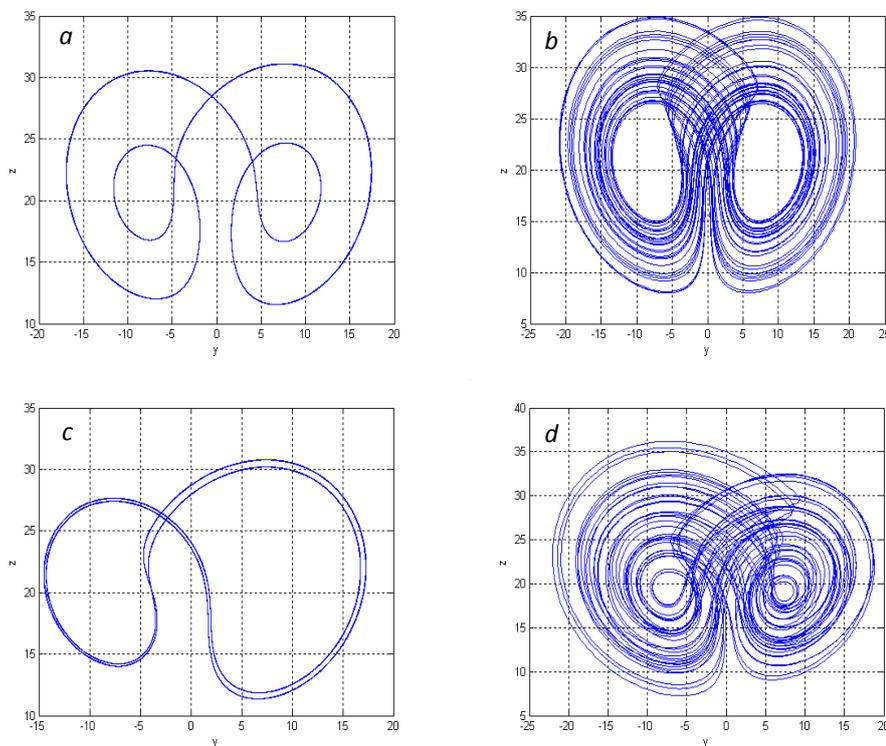


Fig. IV. 22 Diagramme de phase pour a) $\tau_1 = 0.0025s$, b) $\tau_1 = 0.1s$, c) $\tau_1 = 0.17s$, d) $\tau_1 = 0.5s$.

2° cas) On fixe $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 0, \tau_1 = 0, \tau_3 = 0$ et on laisse τ_2 varier dans l'intervalle $[0, 1]$.

Dans cette partie la boucle de retour est appliquée seulement sur la deuxième équation. La figure(IV.23) représente les points de Poincaré $Y(nT)$ en fonction du temps de retard τ_2 . On remarque dans cette figure l'apparition de plusieurs zones stables et chaotiques, par exemple pour $\tau_2 = 0.2s, \tau_2 = 0.48s, \tau_2 = 0.8s$ le système se stabilise toujours sur des orbites périodiques, par contre pour $\tau_2 = 0.3s, \tau_2 = 0.6s, \tau_2 = 1s$ le système est en plein chaos. Les diagrammes de phase pour les différents temps de retard sont représentés dans la figure(IV.24).

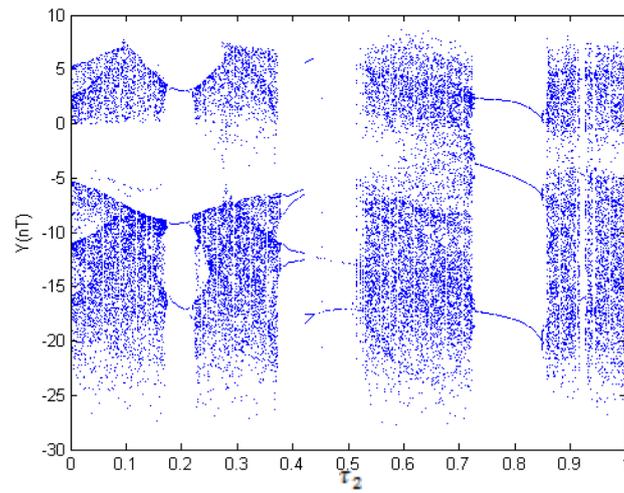


Fig. IV. 23 Diagramme de bifurcation en fonction de τ_2

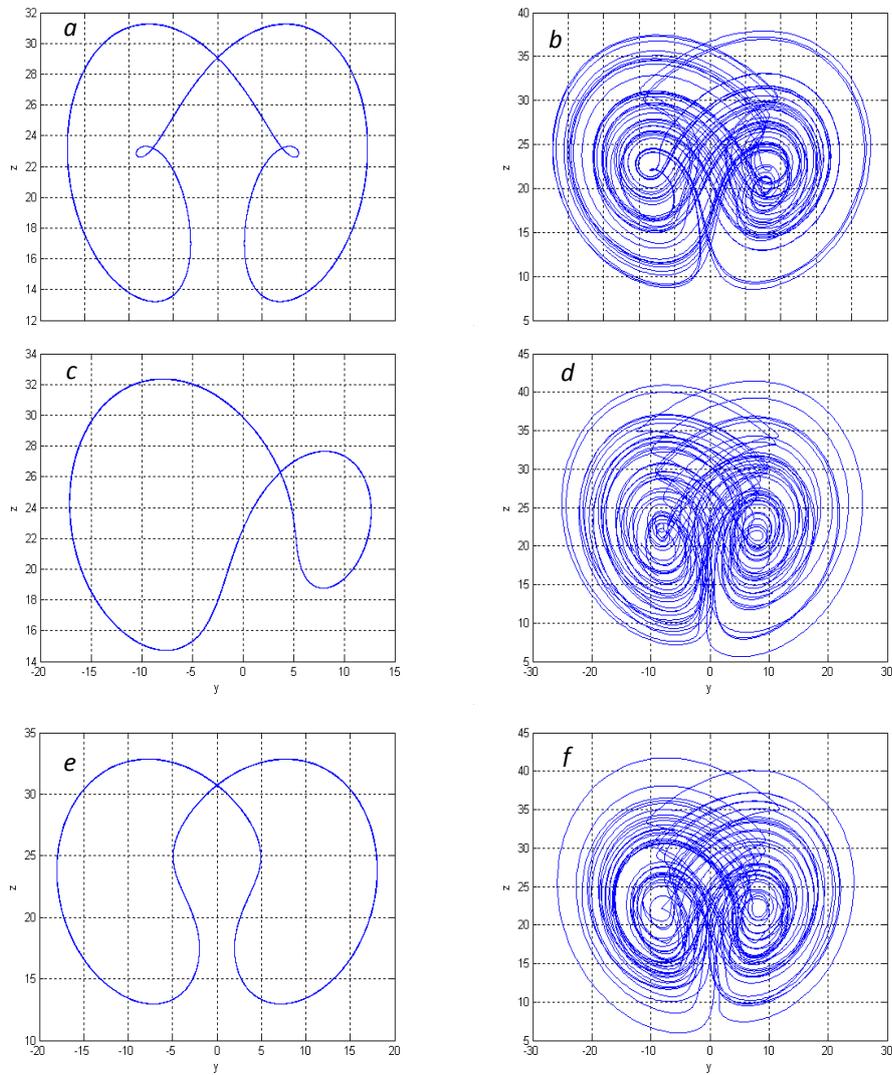


Fig. IV. 24 Diagramme de phase pour a) $\tau_2 = 0.2s$, b) $\tau_2 = 0.3s$, c) $\tau_2 = 0.48s$, d) $\tau_2 = 0.6s$, e) $\tau_2 = 0.8s$, f) $\tau_2 = 1s$.

3° cas) On fixe $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1, \tau_1 = 0, \tau_2 = 0$ et on laisse τ_3 varier dans l'intervalle $[0, 1]$.

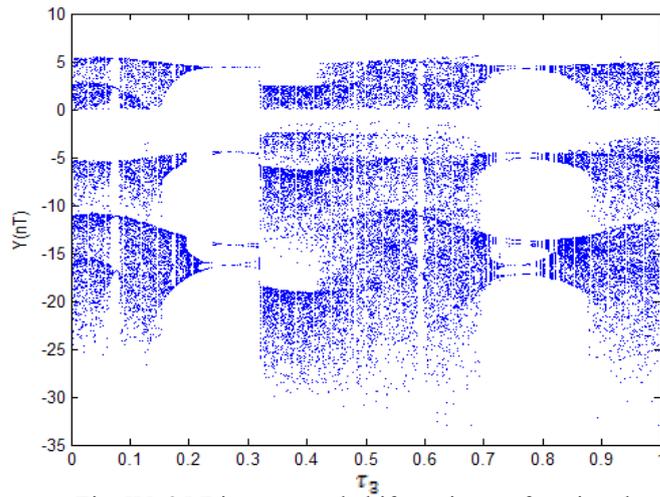


Fig. IV. 25 Diagramme de bifurcation en fonction de τ_3

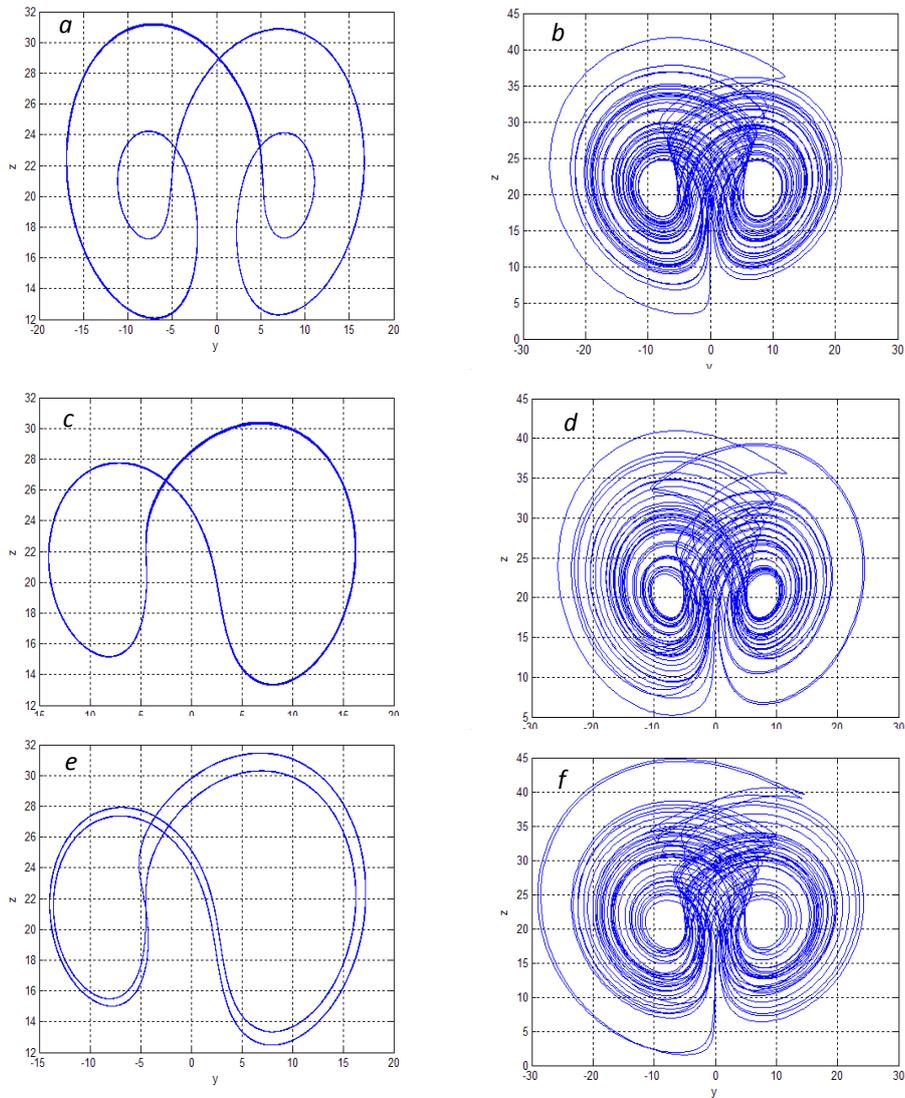


Fig. IV. 26 Diagramme de phase pour a) $\tau_3 = 0.075s$, b) $\tau_3 = 0.1s$, c) $\tau_3 = 0.255s$, d) $\tau_3 = 0.55s$, e) $\tau_3 = 0.75s$, f) $\tau_3 = 1s$.

La boucle de retour est appliquée cette fois sur la troisième équation. Le comportement dynamique du système est représenté dans la figure (IV.25). On remarque qu'il existe plusieurs valeurs de τ_3 pour lesquelles le système se stabilise sur des différentes orbites périodiques, par exemple pour $\tau_3 = 0.255s$ le système se stabilise sur une orbite périodique de deux cycles, par contre pour $\tau_3 = 0.75s$ il se stabilise sur deux orbites périodiques de deux cycles. Le diagramme de bifurcation montre aussi plusieurs zones chaotiques ($\tau_3 = 0.1s, \tau_3 = 0.55s, \tau_3 = 1s$). Les trajectoires suivies pour les différents temps de retard sont représentées dans la figure (IV.26).

4° cas) On fixe $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, \tau_1 = \tau, \tau_2 = 2\tau, \tau_3 = 3\tau$ et on laisse τ varier dans l'intervalle $[0, 1]$.

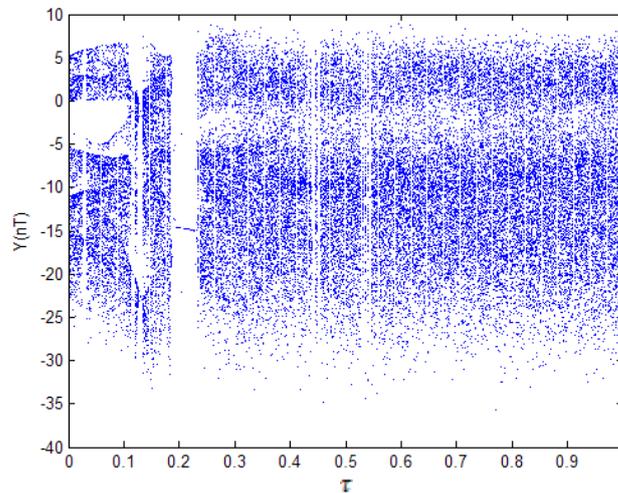


Fig. IV. 27 Diagramme de bifurcation en fonction de τ

Dans ce cas, le contrôle est appliqué sur les trois variables au même temps, donc il s'agit cette fois du multiple time delay. La dynamique du système est représentée dans la figure (IV.27). On remarque que le système est toujours chaotique sauf pour quelques petits intervalles où il se stabilise sur des orbites périodiques comme pour $\tau = 0.03, \tau = 0.13, \tau = 0.22$. Pour la partie chaotique on remarque cette fois que le comportement chaotique est un peu plus rehaussé, puisque les attracteurs plus larges dans l'espace de phase et possèdent une amplitude un peu grande par rapport à celle de l'attracteur représenté original. Les attracteurs obtenus pour les différents valeurs de τ sont représentés dans la figure (IV.28).

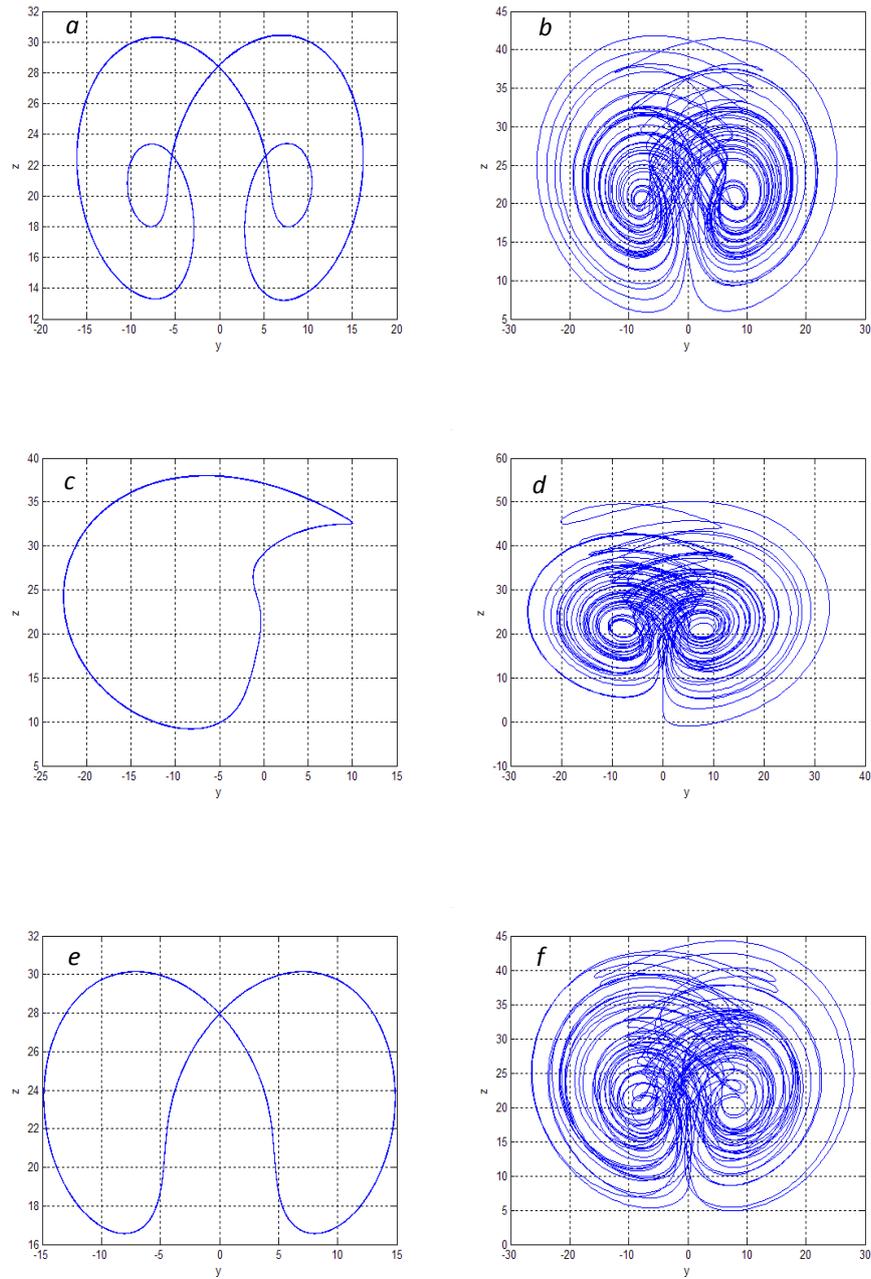


Fig. IV. 28 Diagramme de phase pour a) $\tau = 0.03s$, b) $\tau = 0.1s$, c) $\tau = 0.13s$, d) $\tau = 0.16s$, e) $\tau = 0.22s$,
f) $\tau = 1s$

b- L'effet du Gain

On fixe $k_2 = 0, k_3 = 0, \tau_1 = 0.1s, \tau_2 = 0, \tau_3 = 0$ et on laisse k_1 varier dans l'intervalle $[0, 1]$.

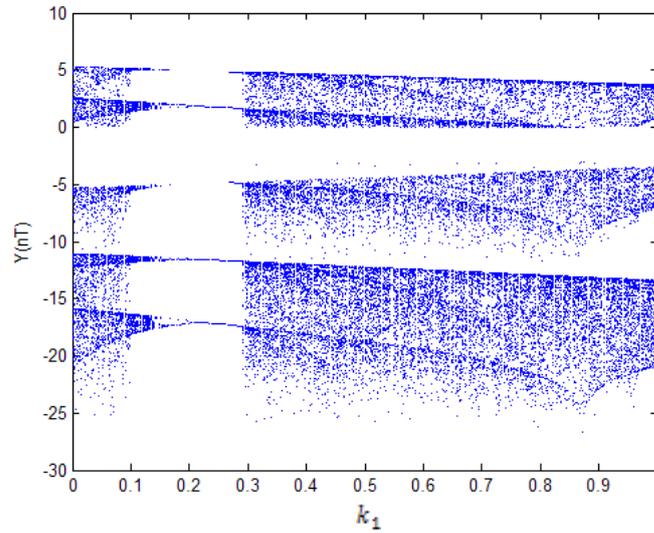


Fig. IV. 29 Diagramme de bifurcation en fonction de k_1

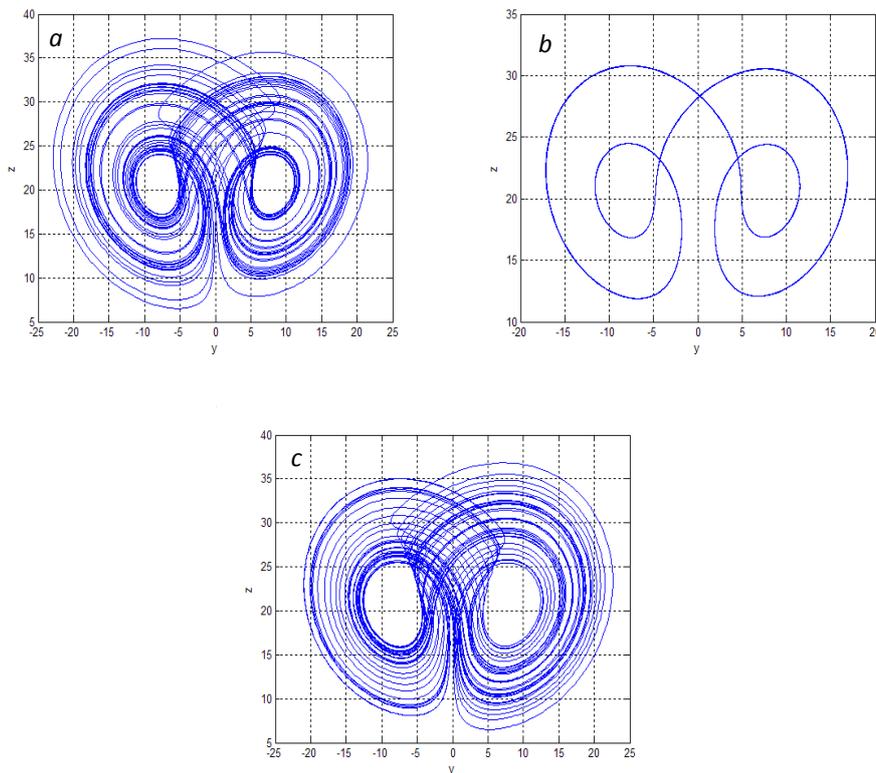


Fig. IV. 30 Diagramme de phase pour a) $k_1 = 0.05$ b) $k_1 = 0.2$ c) $k_1 = 0.6$

Contrairement aux parties précédentes où l'étude est basée seulement sur les temps de retard, cette partie est consacrée à l'étude de la dynamique du système en fonction des gains de retour. Pour cela, la boucle de retour est appliquée seulement sur la première équation où le

temps de retard est fixé à $\tau_1 = 0.1s$. A partir du diagramme de bifurcation de la figure (IV.29) on remarque que le système au départ est dans un état chaotique ($k_1 = 0.05$), mais lorsque le gain de retour augmente le comportement chaotique commence à disparaître jusqu'à ce que le système se stabilise sur une orbite périodique ($k_1 = 0.2$). Avec l'augmentation du gain de retour le système va perdre sa stabilité et rentrer à nouveau dans une zone chaotique ($k_1 = 0.6$). Les trajectoires obtenus dans ce cas sont représentées dans la figure(IV.30).

c- Chaotification du système

Dans cette partie on applique le retour d'état dans la zone où le système n'admet aucun comportement chaotique. D'après le diagramme de bifurcation de la figure (IV.20) on remarque que pour $c = 34$ le système se stabilise sur une orbite périodique.

Pour mieux voir la dynamique du système contrôlé dans cette zone, on fait appel au diagramme de bifurcation pour les valeurs des paramètres:

$$k_1 = 0.1, k_2 = 0.1, k_3 = 0.1, \tau_1 = \tau, \tau_2 = 2 * \tau, \tau_3 = 3 * \tau \text{ et } \tau \in [0,1]$$

Bien que le système soit dans sa partie stable, on observe sur le diagramme de bifurcation de la figure (IV.31) l'apparition de plusieurs zones chaotiques générées par la variation du temps de retard τ . Les attracteurs chaotiques obtenus représentés dans la figure (IV.31) n'ont pas la même forme que l'attracteur de Lü original mais montrent que le système est en plein chaos. Pour les parties stables on remarque que le système se stabilise pratiquement sur des orbites périodiques de la même forme.

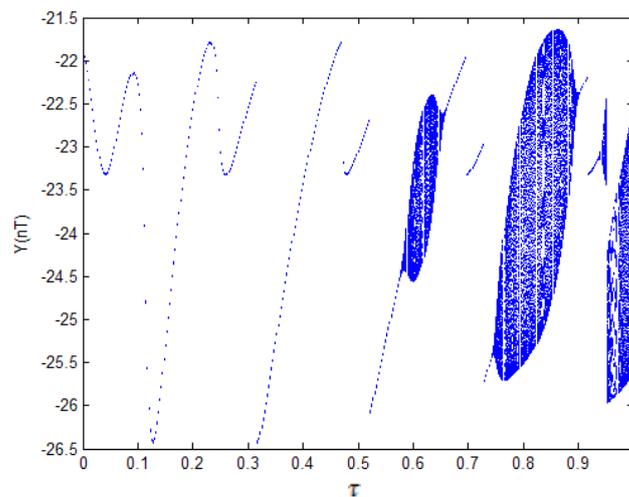


Fig. IV. 31 Diagramme de bifurcation en fonction de τ pour $c = 34$

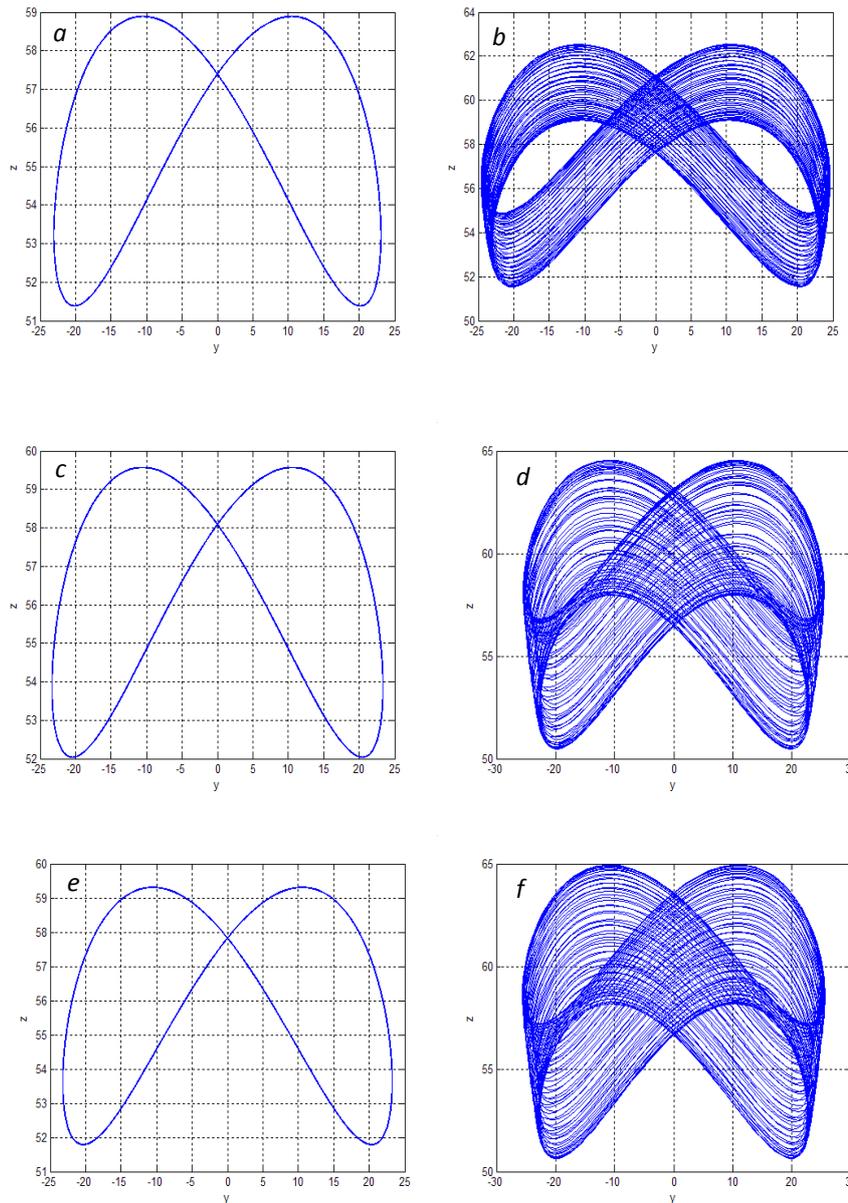


Fig. IV. 32 Diagrammes de phase pour *a*) $\tau = 0.5s$, *b*) $\tau = 0.6s$, *c*) $\tau = 0.7s$, *d*) $\tau = 0.8s$,
e) $\tau = 0.93s$, *f*) $\tau = 1s$.

On constate que le bon choix des gains de retour k_i et des temps de retard τ_i permet le contrôle (suppression du chaos) ou la chaotification (génération ou rehaussement du chaos) du système de Lü même s'il est choisi dans une zone stable.

IV.4.2 Suppression et génération du chaos par perturbation paramétrique

Le contrôle ou la chaotification des systèmes dynamiques est généralement obtenue au moyen de méthodes de contrôle à retour d'état. Nous présentons dans cette partie, une méthode de

contrôle par application des petites perturbations sur le paramètre le plus sensible du système. La perturbation appliquée doit être bornée et très petite par rapport au paramètre perturbé. Les perturbations de type sinusoïdales représentent un bon exemple et peuvent être utilisées car elles sont toujours bornées.

Soit le système de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x - y), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

a, b, r : Paramètres du système.

Le paramètre r est le paramètre le plus sensible dans le système de Lorenz. L'étude sera donc basée sur la variation de ce paramètre.

Pour $a = 10, b = 8/3$, le diagramme de bifurcation est représenté dans la figure (IV.33). Il représente deux types de comportement, stable et chaotique. Ainsi pour $r = 15$, le système converge dans ce cas vers un point fixe alors que pour $r = 28$, le système est en plein chaos.

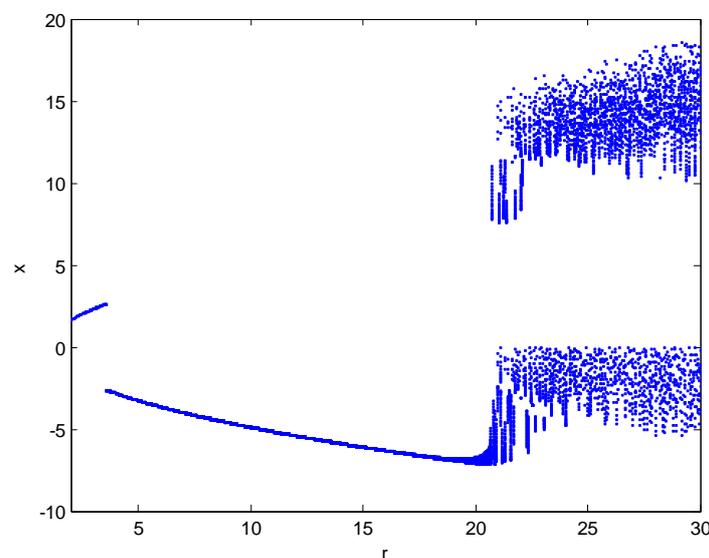


Fig. IV. 33 Diagramme de bifurcation du système de Lorenz

Le but de la méthode de contrôle est de supprimer le chaos dans les zones chaotiques et générer le chaos dans les parties stables, par exemple rendre le système chaotique pour $r = 15$ et le stabiliser pour $r = 28$.

On applique une perturbation sinusoïdale sur le paramètre r de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x - y), \\ \dot{y} = -xz + r[1 + \varepsilon \sin(\omega t)]x - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \tag{IV.45}$$

ε, ω : Paramètres de perturbation.

L'introduction de la perturbation $\varepsilon \sin(\omega t)$ transforme le système de Lorenz autonome en un système non autonome, qui est équivalent à un système autonome de dimension 4. Dans ce cas le système a quatre exposants $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ et $\lambda_4 = 0$.

- On fixe $\varepsilon = 0.1, \omega = 10$ et on fait varier r dans l'intervalle $[2,30]$

Le diagramme de bifurcation et les diagrammes de phase du système perturbé sont représentés dans les figures suivantes.

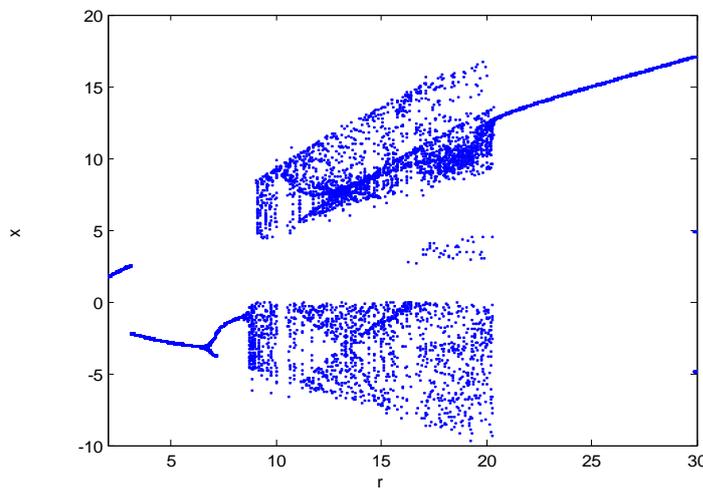


Fig. IV. 34 Diagramme de bifurcation du système perturbé pour $\varepsilon = 0.1, \omega = 10$

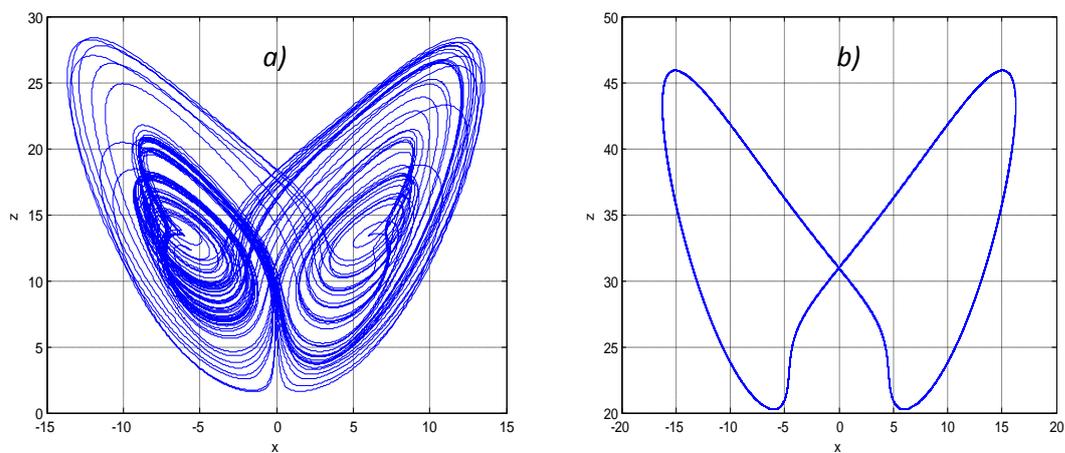


Fig. IV. 35 Diagramme de phase : a) $r = 15$, b) $r = 28$

Dans le diagramme de bifurcation de la figure (IV.34) on remarque que :

Pour $r \in [2,8.5[\cup [10.15,10.3] \cup [20.4,30]$ le système perturbé est stable sur une orbite périodique.

Pour $r \in [8.5,10.15] \cup]10.3,20.4[$ le système perturbé présente un phénomène chaotique.

Par cette perturbation, on a donc réussi à stabiliser le système dans la zone où il était en plein chaos, et le chaotifier dans la zone où il était stable.

Pour voir l'efficacité de la méthode on fixe $r = 26$ et on cherche les valeurs des paramètres de perturbation nécessaires pour déstabiliser le système une nouvelle fois et générer un attracteur chaotique similaire à celui du système original de Lorenz.

b) on fixe $r = 26, \omega = 10$ et on varie ε dans l'intervalle $[0,1]$

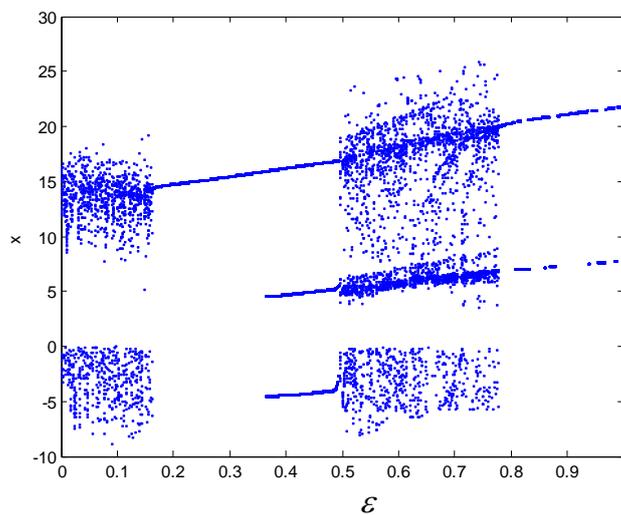


Fig. IV. 36 Diagramme de bifurcation du système perturbé pour $r = 26$ et $\omega = 10$

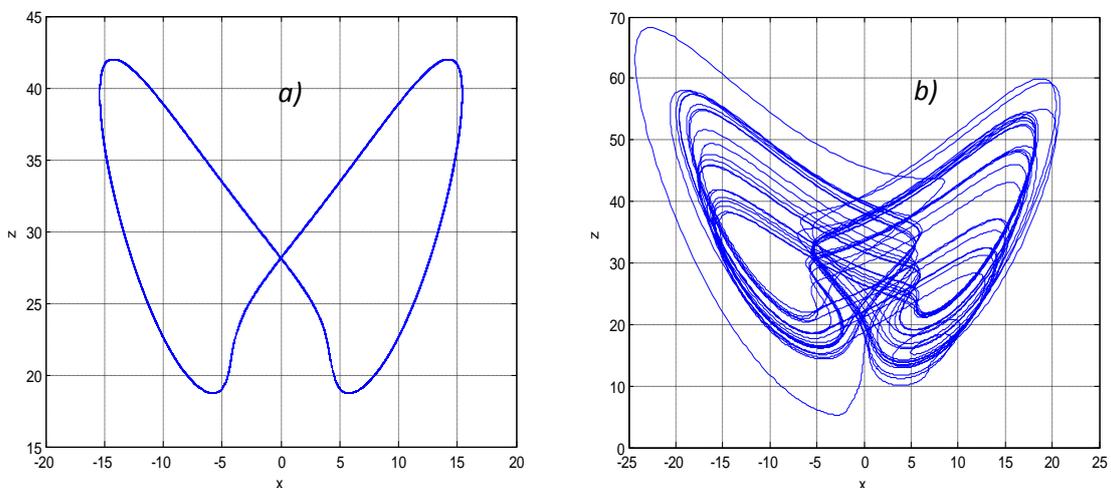


Fig. IV. 37 Diagramme de phase: a) $\varepsilon = 0.3$, b) $\varepsilon = 0.6$

Dans le diagramme de bifurcation de la figure (IV.36) on remarque que :

Pour $\varepsilon \in [0, 0.165[\cup]0.495, 0.78[$ le système perturbé est déstabilisé de son orbite périodique et présente un phénomène chaotique.

Pour $\varepsilon \in [0.165, 0.495] \cup [0.78, 1]$ le système perturbé reste toujours stable sur son orbite périodique.

Pour améliorer la forme de l'attracteur on fixe $\varepsilon = 0.6$ et on cherche la valeur de ω qui génère un attracteur chaotique presque identique à l'attracteur de Lorenz.

- On fixe $r = 26, \varepsilon = 0.6$ et on varie ω dans l'intervalle $[0, 100]$

Le diagramme de bifurcation, les exposants de Lyapunov et les diagrammes de phase sont représentés dans les figures suivantes.

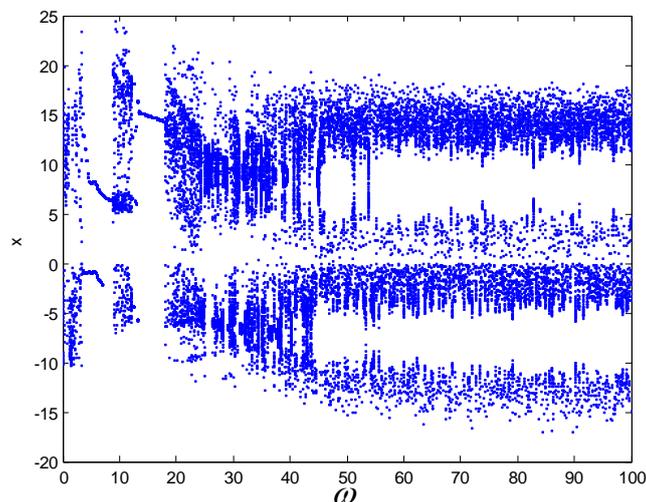


Fig. IV. 38 Diagramme de bifurcation du système perturbé pour $r = 26$ et $\varepsilon = 0.6$

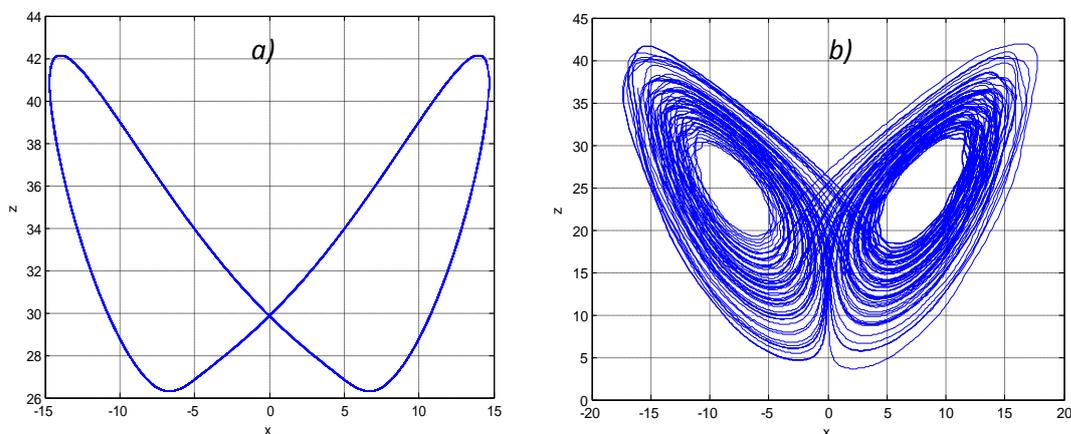


Fig. IV. 39 Diagramme de phase: a) $\omega = 16$, b) $\omega = 100$

De la figure (IV.38) on constate que :

- Pour $\omega \in [0,3.4] \cup [8.8,12.2] \cup [18.2,100]$ le système est chaotique.
- Pour $\omega \in]3.4,8.8[\cup]12.2,18.2[$ le système se stabilise sur une orbite périodique.

Ce qui nous intéresse dans notre étude c'est la partie chaotique, pour cela on va prendre la valeur maximale de ω où le système est en plein chaos. On remarque que l'attracteur chaotique obtenu pour $\omega = 100$ est presque identique au fameux attracteur de Lorenz représenté dans la figure (IV.39.b).

On peut donc conclure que l'application d'une perturbation sinusoïdale sur le paramètre d'un système chaotique autonome est très efficace aussi bien pour la stabilisation (suppression du chaos) que pour la chaotification (génération ou rehaussement du chaos) du système.

IV.4.4 Chaotification des oscillations harmoniques :

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mu \arctan(\frac{x}{\delta}) \\ \dot{y} = -\delta(x + y) \end{cases} \quad (\text{IV.46})$$

Avec μ, δ des coefficients constants.

Le système d'équation précédent représente un système à deux états stables, déterminés par les conditions initiales des variables d'état et les paramètres du système. Donc, l'apparition du chaos dans la dynamique de ce système est impossible.

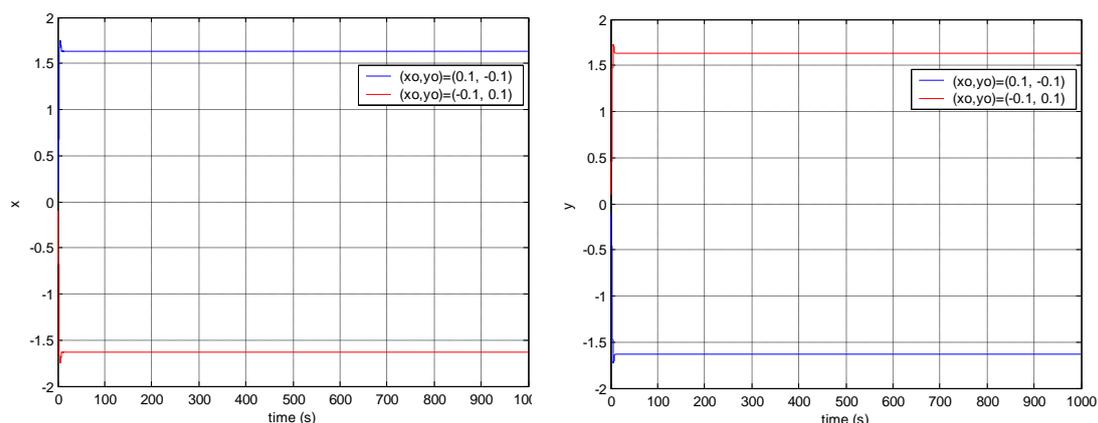


Fig. IV. 40 . Les deux états stables des harmoniques $\mu = \delta = 1.6$

Afin d'obtenir des oscillations chaotiques, on introduit une variation périodique sur l'une des variables du système comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mu \arctan(x) \\ \dot{y} = -\delta[x \cos(\omega_0 t) + y] \end{cases} \quad (\text{IV.47})$$

Où ω_0 est la fréquence de la perturbation périodique.

Pour trouver la valeur de la fréquence ω_0 pour laquelle le système est en plein chaos, il faut étudier la dynamique du système en fonction de la variation de la fréquence ω_0 , pour cela, on trace le diagramme de bifurcation, en faisant varier ω_0 dans l'intervalle $[0.75, 0.9]$.

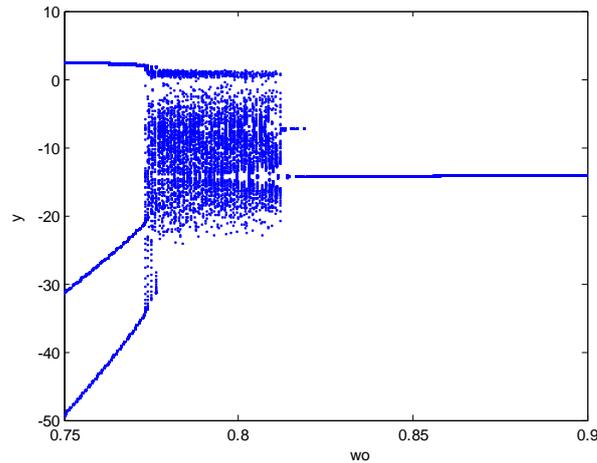


Fig. IV. 41 Diagramme de bifurcation du système contrôlé

Le diagramme de bifurcation montre que le système est dans un état chaotique si $\omega_0 \in [0.7735, 0.812]$. A l'extérieur de cet intervalle, il garde toujours son état périodique.

La représentation temporelle et la structure des oscillations pour les différentes valeurs de la fréquence ω_0 sont représentées par les figures (IV.42) et (IV.43). Pour $\omega_0 = 0.76$ le système oscille sur une orbite double période, par contre pour $\omega_0 = 0.9$ le système suit des oscillations régulières. La transition des oscillations périodiques vers le régime chaotique est faite par le doublement de périodes qui se multiplie en fonction de la variation de la fréquence d'oscillation.

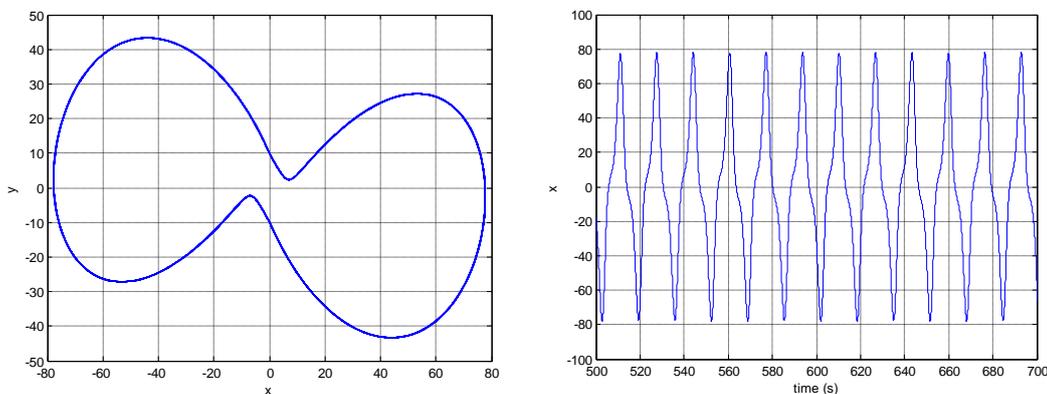


Fig. IV. 42 Diagramme de phase et représentation temporelle dans le cas de double période $\omega_0 = 0.76$

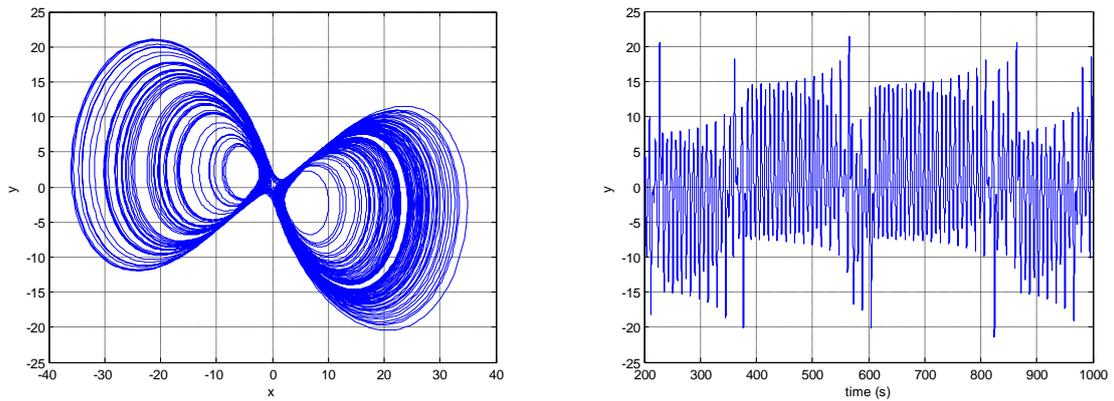


Fig. IV. 43 Diagramme de phase et série temporelle dans le cas chaotique $\omega_0 = 0.8$

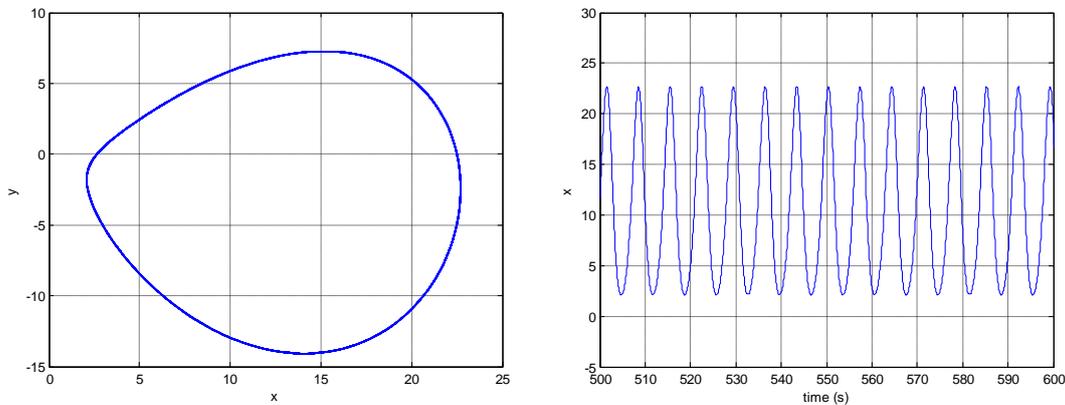


Fig. IV. 44 Diagramme de phase et série temporelle dans le cas d'oscillation régulière $\omega_0 = 0.9$

IV.4.5 Génération du chaos à partir de systèmes stables :

Soit le système continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 10y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = y + 10x - y(x^2 + y^2) \\ \dot{z} = -z \end{cases} \tag{IV.48}$$

Ce système d'équations représente un cylindre dans l'espace et la projection des trajectoires du système sur le plan (x, y) nous donne un cercle unitaire. D'après la figure (IV.45), le système est toujours stable. Donc l'apparition d'une dynamique quasi-périodique ou chaotique paraît impossible.

Pour la génération du caractère chaotique dans un système qui ne l'est pas, on introduit des perturbations périodiques avec des fréquences d'oscillations différentes pour donner plus de complexité à la dynamique du système.

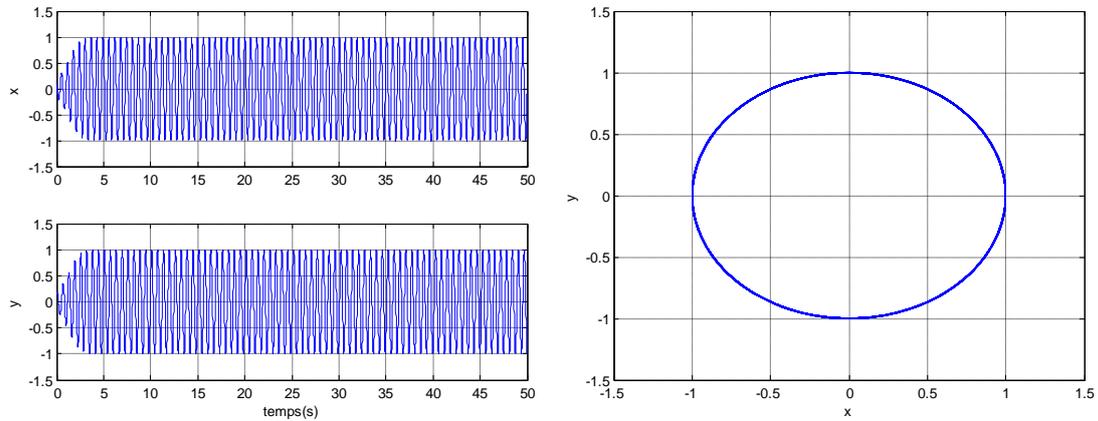


Fig. IV. 45 Représentation temporelle et diagramme de phase du système stable

Le système contrôlé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = x p_1 - 10y - x p_1((x p_1)^2 + y^2) \\ \dot{y} = y p_2 + 10x - y p_2(x^2 + (y p_2)^2) \\ \dot{z} = -z p_3 \end{cases} \quad (IV.49)$$

Avec :

$$\begin{cases} p_1 = \cos(\omega_1 t) \\ p_2 = \cos(\omega_2 t) \\ p_3 = \cos(\omega_3 t) \end{cases} \quad (IV.50)$$

L'idée de la méthode est d'appliquer la variation périodique seulement sur la variable x_i qui se trouve dans l'équation de \dot{x}_i (x : variable d'état). Pour notre application, les fréquences d'oscillation sont choisies comme suit :

$$\omega_1 = 0.01, \omega_2 = 0.3, \omega_3 = 0.9 \quad (IV.51)$$

Les ω_i ont été choisis, après une étude de la dynamique du système en fonction de la variation des ω_i à l'aide du diagramme de bifurcation.

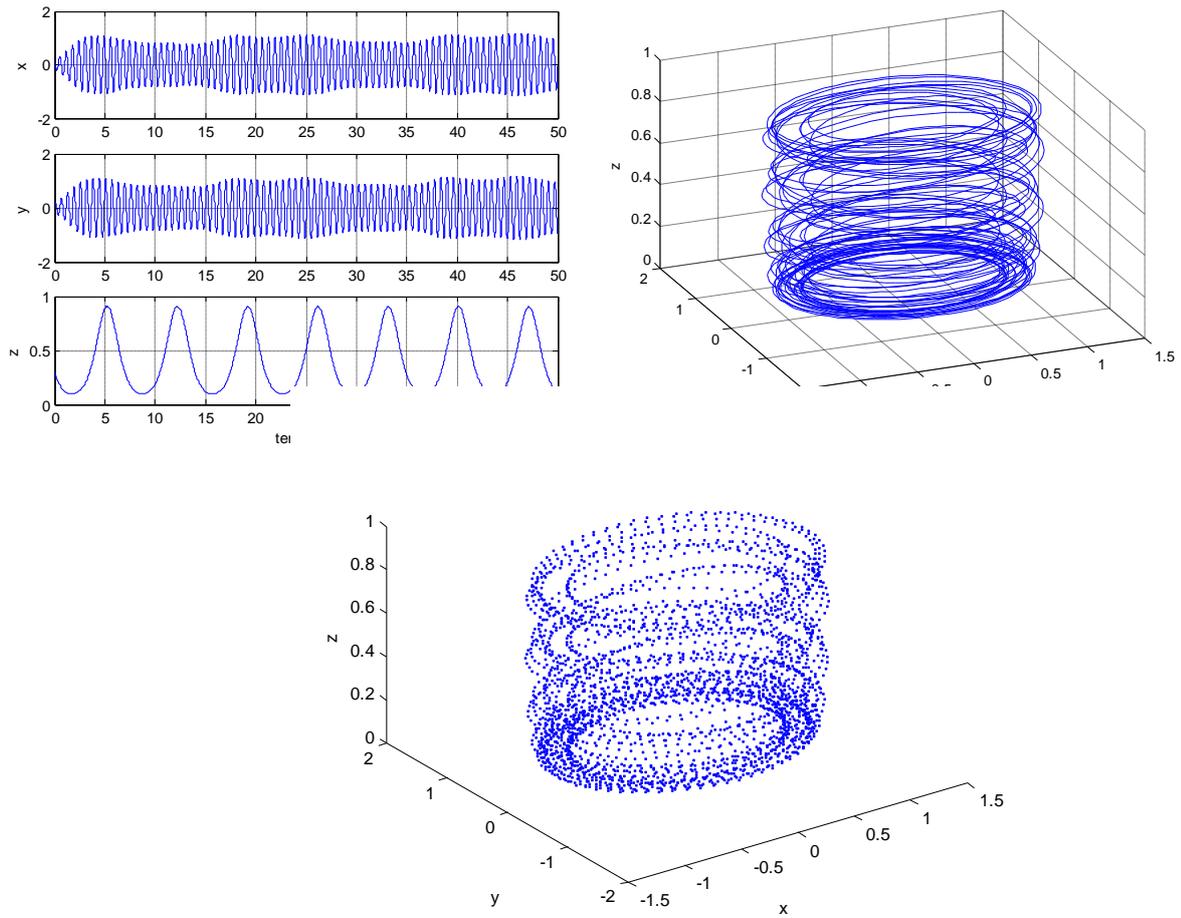


Fig. IV. 46 Représentation temporelle et diagrammes de phase du système chaotifié

Chapitre V : Hyperchaotification des systèmes chaotiques

V.1 Introduction

Le comportement hyperchaotique a été étudié dans différentes applications telles que: l'oscillateur de Colpitts [125], les circuits non-linéaires [126]-[127], les systèmes de communications et la synchronisation [128]-[129]. Pour cela, la génération de ce comportement dynamique complexe devient un sujet de recherche très important.

Le comportement hyperchaotique a été découvert pour la première fois par Rössler en 1979 [130] par une boucle de retour appliquée sur son système original. Cette découverte a ouvert un autre horizon de recherche dans la théorie du chaos.

Ces dernières années, les systèmes chaotiques ont été beaucoup plus utilisés pour le cryptage des données dans les communications sécurisées. Dans la communication chaotique sécurisée, le signal chaotique est utilisé pour masquer les messages à transmettre. Perez et Cerderia [14] ont prouvé que le masquage des messages par un système chaotique normal (possédant un seul exposant de Lyapunov positif) n'était pas toujours efficace. Puis Pecora a montré que ce problème pouvait être résolu en utilisant un système chaotique de dimension élevée c'est-à-dire avec plusieurs exposants de Lyapunov positifs.

Un système hyperchaotique est un système dynamique qui possède au moins deux exposants de Lyapunov positifs. Le comportement dynamique de ces systèmes est donc plus compliqué que celui d'un simple système chaotique. C'est pour cette raison que ces systèmes offrent plus de sécurité dans le domaine de la communication.

Pour générer un comportement hyperchaotique à partir d'un système chaotique, il faut que les deux conditions suivantes soit satisfaites [131]:

- La dimension du système doit être supérieure ou égale à 4 et l'ordre de chaque équation doit être supérieur ou égale à 2.
- Le système doit avoir au moins deux exposants positifs et la somme de tous les exposants doit être négative.

Ce chapitre est consacré au développement de méthodes qui permettent d'obtenir ce comportement à partir de systèmes chaotiques classiques.

V.2 Hyper-chaotification des systèmes chaotiques par le contrôle par retour d'état

Dans cette partie nous présentons une méthode de contrôle par retour d'état où le système de Lorenz est considéré comme exemple. Le système de Lorenz est un système de dimension 3, donc pour générer le comportement hyper-chaotique il faut qu'on augmente sa dimension. Il existe plusieurs possibilités de l'application de la loi de commande. Dans ce qui suit, on applique sur le système deux lois de commandes différentes de deux manières différentes afin d'obtenir des dynamiques hyper-chaotiques différentes à partir du même système. Dans le premier cas, on utilise une loi de commande quadratique simple de la forme $u = dyz$ appliquée sur la deuxième équation du système original. Dans le deuxième cas on applique sur la première équation du système une loi de commande de la forme

$$u(t) = -x(t-1)z(t-1) + du(t-1).$$

V.2.1 Hyper-chaotification par la commande $u(t) = dy(t-1)z(t-1)$

Le système de Lorenz est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = rx - xz + y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

a, b, r : les paramètres du système

Le contrôleur à retour d'état est introduit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = rx - xz + y - u \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{u} = dyz \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

d est le paramètre de contrôle.

On remarque que le système contrôlé possède un point fixe à l'origine, en résolvant :

$$\begin{cases} a(y-x) = 0 \\ rx - xz + y - u = 0 \\ xy - bz = 0 \\ dyz = 0 \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

On remarque tout de suite que le point $p_{f_1}(0,0,0,0)$ est un point fixe.

Du système (V.3) un autre point fixe est donné par:

$$p_{f_2} = (b, b, bd, b(r - bd + 1))$$

La matrice Jacobienne du système contrôlé est :

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ r - z & 1 & -x & -1 \\ y & x & -b & 0 \\ 0 & dz & dy & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.4})$$

Autour du point fixe p_{f_1} on a:

$$J_{p_{f_1}} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.5})$$

En résolvant :

$$\det(\lambda I - J) = (\lambda + a) + a \lambda (\lambda - 1)(\lambda + b) - ra \lambda (\lambda + b) = 0 \quad (\text{V.6})$$

On obtient les valeurs propres suivantes:

$$\lambda_1 = 13,1139, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -2.6667, \quad \lambda_4 = -22.1139$$

Pour faire une analyse complète de la dynamique du système contrôlé en s'appuyant sur les diagrammes de bifurcation, les exposants de Lyapunov et les diagrammes de phase.

Le diagramme de bifurcation du système contrôlé en fonction du paramètre de contrôle est représenté par la figure suivante.

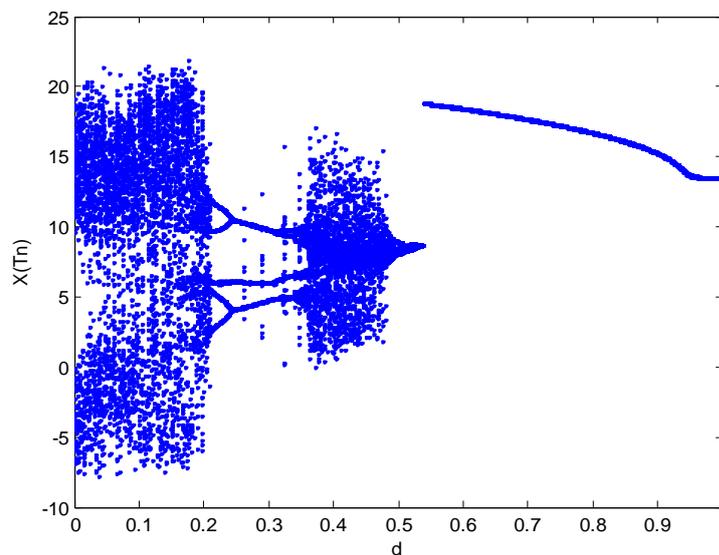


Fig. V. 1 Diagramme de bifurcation du système contrôlé

Au départ, le système contrôlé évolue d'un état chaotique et passe rapidement vers un état hyper-chaotique. Puis il reprend une nouvelle fois son comportement chaotique pour ensuite

se stabilise sur des orbites périodiques par le phénomène de doublement de période inverse. L'incrémentation du paramètre de contrôle d influe sur la stabilité du système qui sort de son état stable vers un état chaotique, et à la limite il se stabilise sur une orbite périodique de période 1.

L'objectif de l'application de cette méthode de contrôle était la génération du comportement hyper-chaotique, mais on remarque également que la méthode permet aussi de supprimer le chaos et stabiliser le système sur des orbites périodiques de formes différentes.

Dans un diagramme de bifurcation il est très difficile de différencier le comportement chaotique du comportement hyper-chaotique. Donc, pour étudier le comportement du système dans les différentes zones de stabilité et plus précisément pour justifier l'apparition de l'état hyper-chaotique, on doit calculer les exposants de Lyapunov du système contrôlé.

d	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	comportement
0.1	0.7124	0.0760	0.0049	-12.4500	Hyper-chaotique
0.22	0.0352	-0.4592	-0.7236	-10.5670	périodique
0.25	0.0132	-0.0916	-0.3581	-11.2279	périodique
0.45	0.5017	-0.0009	-0.3696	-11.7951	chaotique
0.7	0.0099	-0.9740	-0.9788	-9.7224	périodique

Tableau. V. 1

Du tableau (V.1) on remarque que pour $d = 0.1$ le système possède deux exposants positifs $\lambda_1 = 0.7124$ et $\lambda_2 = 0.0760$. Un système de dimension 4 avec deux exposants positifs est une condition suffisante pour affirmer que le comportement obtenu dans ce cas est un comportement hyper-chaotique. Les figures suivantes représentent l'évolution du système dans le plan de phase ainsi que l'exposant de Lyapunov pour les différentes valeurs de d .

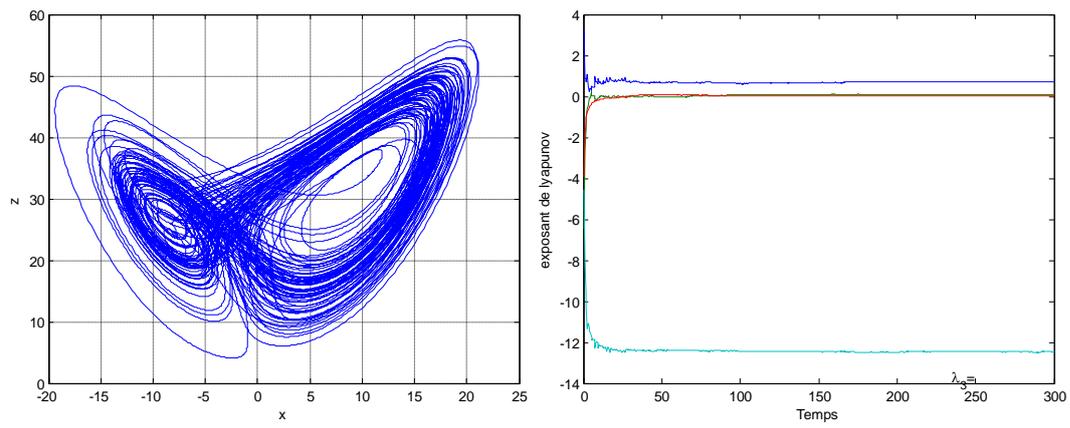


Fig. V. 2 Attracteur hyper-chaotique pour $d = 0.1$

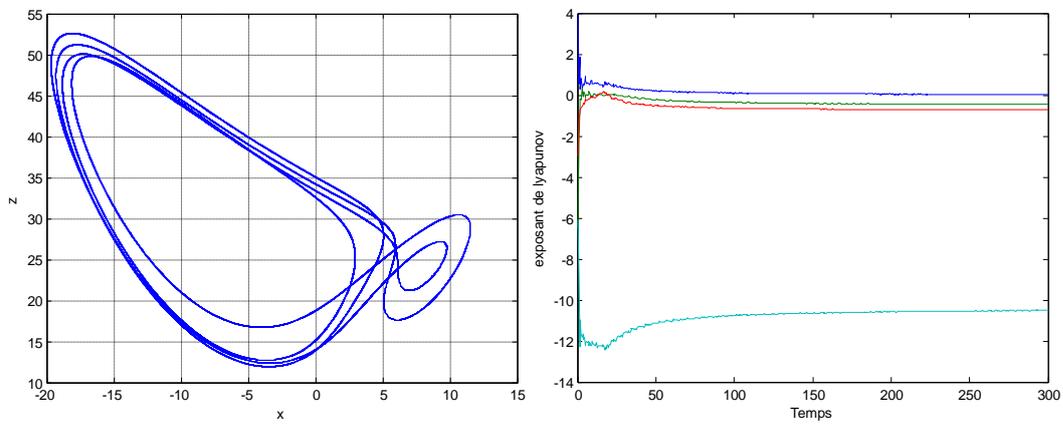


Fig. V. 3 orbite périodique pour $d = 0.22$

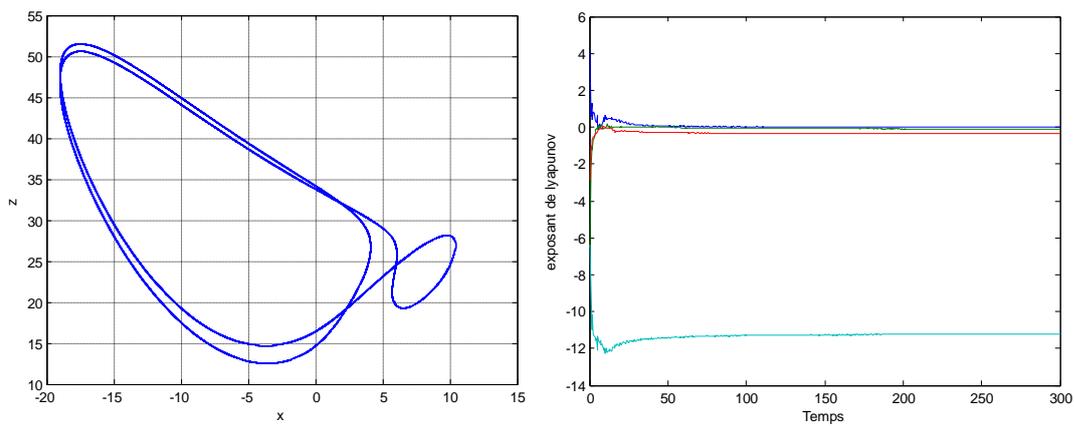


Fig. V. 4 Orbite périodique pour $d = 0.25$

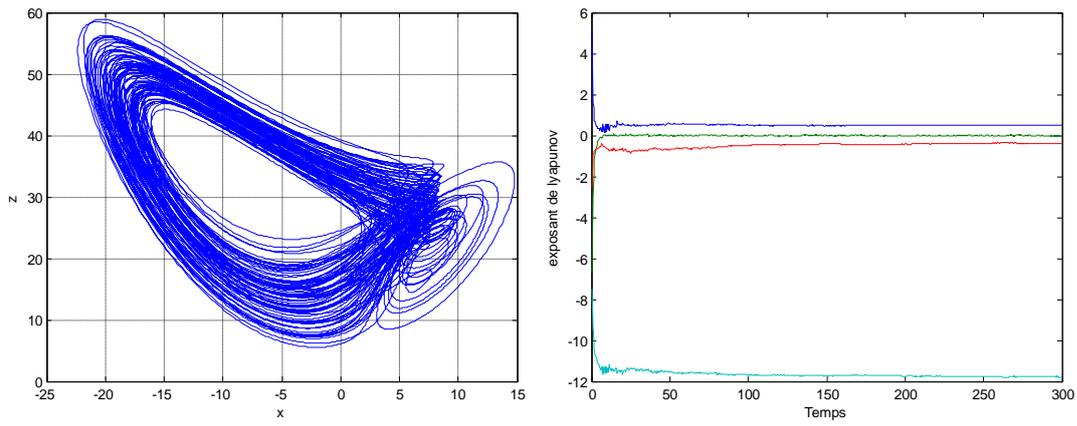


Fig. V. 5 Attracteur chaotique pour $d = 0.45$

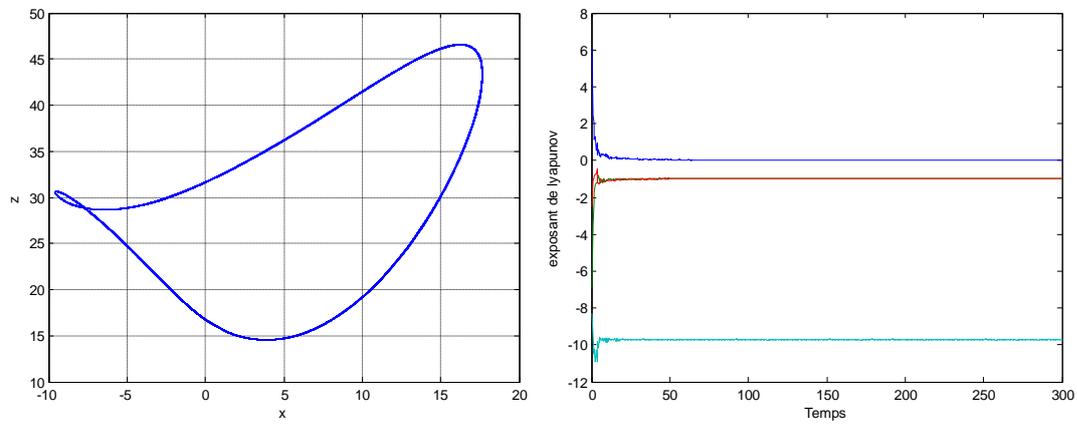
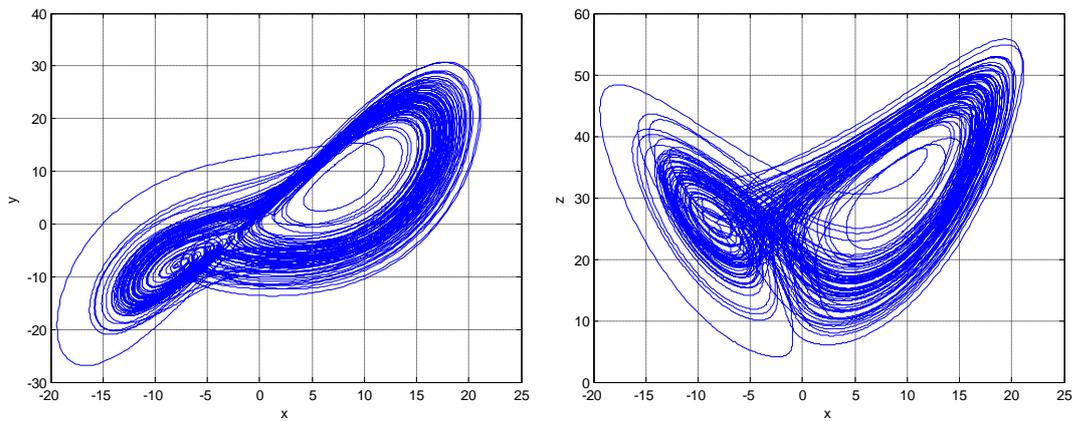


Fig. V. 6 Orbite périodique pour $d = 0.7$



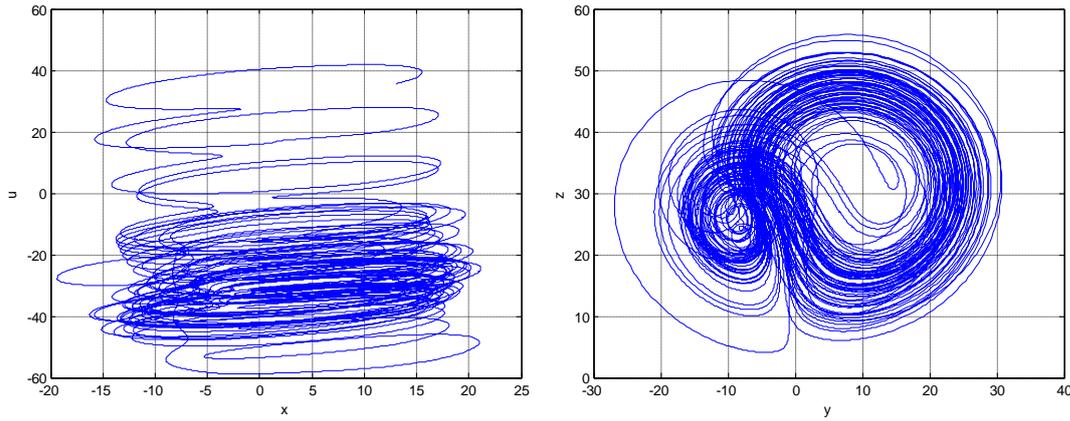


Fig. V. 7 Attracteur hyper-chaotique dans les différents plans de phase

V.2.2 Hyper-chaotification par la commande $u(t) = -x(t-1)z(t-1) + du(t-1)$.

Dans cet exemple la loi de contrôle est appliquée sur le système comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x-y) + u \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{u} = -xz + du \end{cases} \quad (\text{V.7})$$

Les points fixes du système sont les solutions du système :

$$\begin{cases} -a(x-y) + u = 0 \\ -xz + rx - y = 0 \\ xy - bz = 0 \\ -xz + du = 0 \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

Il est évident que le point $p_{f_1}(0,0,0,0)$ est un point fixe.

La matrice jacobienne du système contrôlé est décrite par :

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ r-z & -1 & -x & 0 \\ y & x & -b & 0 \\ -z & 0 & -x & d \end{bmatrix} \quad (\text{V.9})$$

Autour du point p_{f_1} la Jacobienne du système devient:

$$J_{p_{f_1}} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ r & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad (\text{V.10})$$

Les valeurs propres sont calculées par :

$$\det(\lambda I - J) = (\lambda + a)(\lambda + b)(\lambda + d)(\lambda + 1) - ar(\lambda + b)(\lambda - d) = 0 \quad (\text{V.11})$$

Les valeurs propres sont donc fonction des paramètres du système et du paramètre de contrôle d , donc les valeurs propres du système varie avec la variation du paramètre de contrôle. Alors, avec ce paramètre on peut choisir des valeurs propres à partie réelle positive ou négative (ce qui signifie la stabilité et l'instabilité du système)

Pour analyser la dynamique du système en fonction du paramètre de contrôle d on fait varier d dans l'intervalle $[0.2, 1.3]$ puis on trace le diagramme de bifurcation représenté dans la figure suivante.

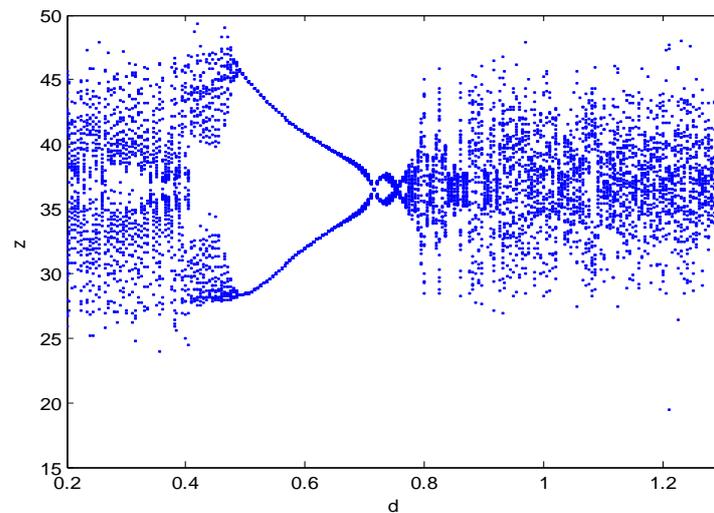


Fig. V. 8 Diagramme de bifurcation du système sous contrôle.

On constate que pour $d < 0.49$ le système est défini dans une zone chaotique. Si on choisit d dans l'intervalle $[0.49, 0.75]$ le système chaotique peut être stabilisé sur une orbite périodique de deux cycles, mais en augmentant d jusqu'à > 0.75 , le système va perdre sa stabilité et rentre de nouveau dans une zone chaotique, pour devenir à la limite hyper chaotique.

d	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	comportement
0.4	0.3034	0.0009	-0.4456	-13.1269	Chaotique
0.6	0.0047	-0.1553	-0.1669	-12.7468	périodique
1.3	0.3570	0.2144	0.0016	-12.9377	Hyper chaotique

Tableau. V. 2

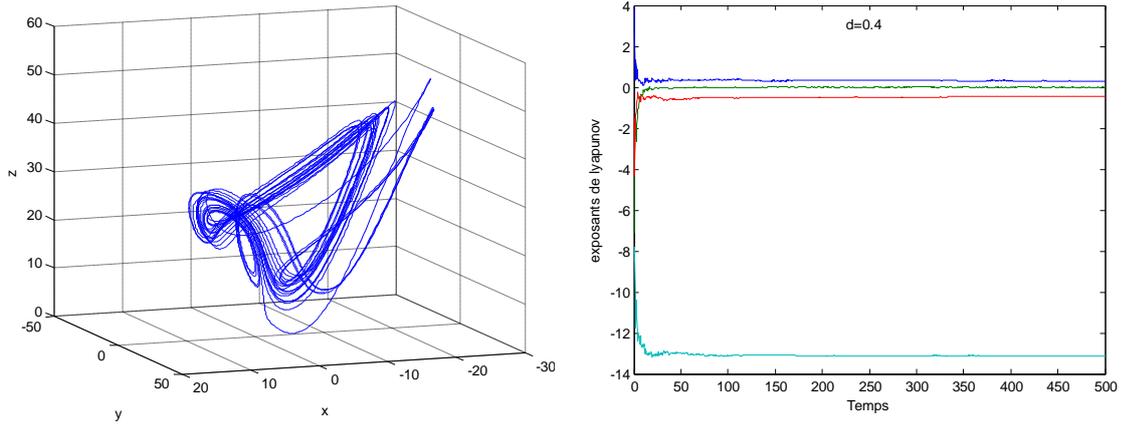


Fig. V. 9 Attracteur chaotique pour $d = 0.4$

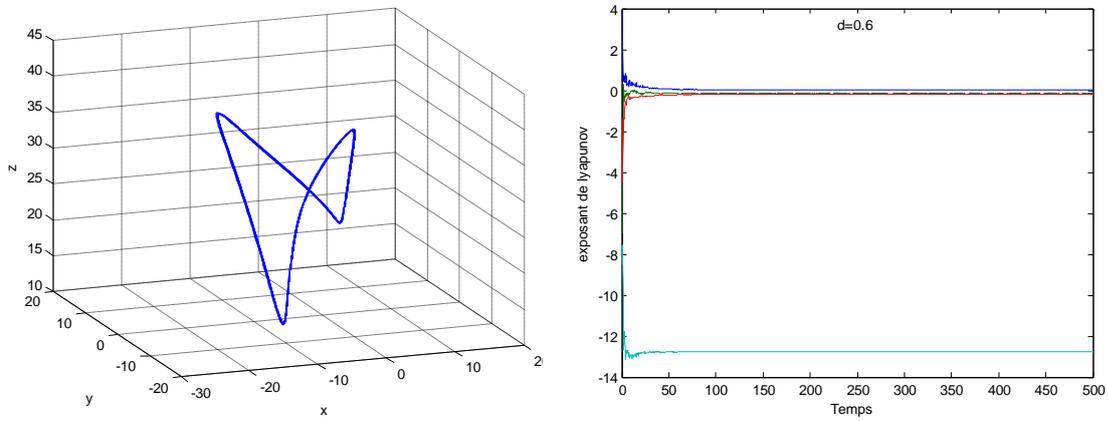


Fig. V. 10 Orbite périodique pour $d = 0.6$

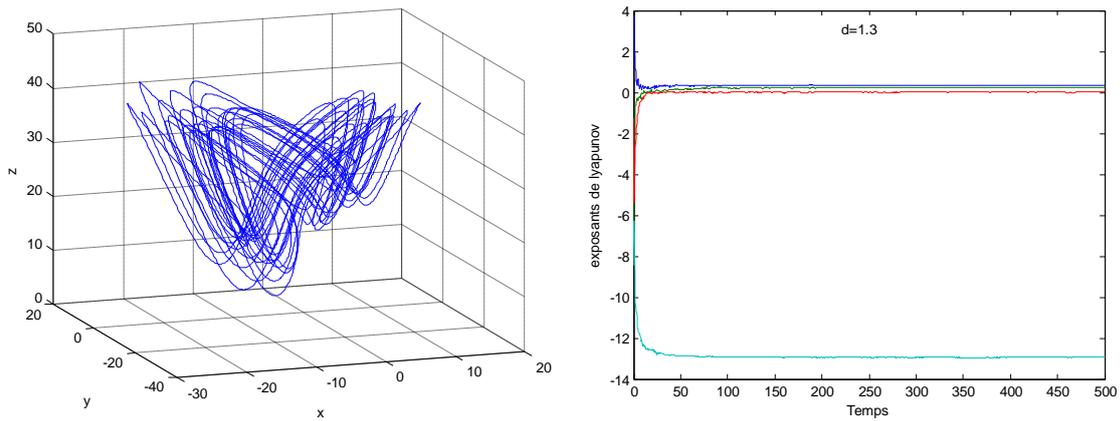


Fig. V. 11 Attracteur hyper-chaotique pour $d = 1.3$

D'après les résultats représentés dans le tableau (V.2) et par les figures (V.9) à (V.11), on remarque que pour $d = 0.4$ le système contrôlé possède un seul exposant positif, le système se trouve donc dans un état chaotique. Pour $d = 0.6$ le plus grand exposant du système est

pratiquement nul, alors le système cette fois est stable sur une orbite de deux cycles. Pour $d = 1.3$ le système possède deux exposants positifs qui sont suffisants pour conduire le système vers un état hyper chaotique

Pour l'attracteur hyper chaotique on observe l'apparition de plusieurs branches supplémentaires qui n'existe pas dans l'attracteur chaotique. L'apparition de ces branches prouve que les systèmes hyper chaotiques ont un comportement plus compliqué par rapport aux systèmes chaotiques normaux. Pour mieux voir la différence, on fait appel à la section de Poincaré, la figure (V.13) représente les sections de Poincaré du système dans son état chaotique et hyper chaotique.

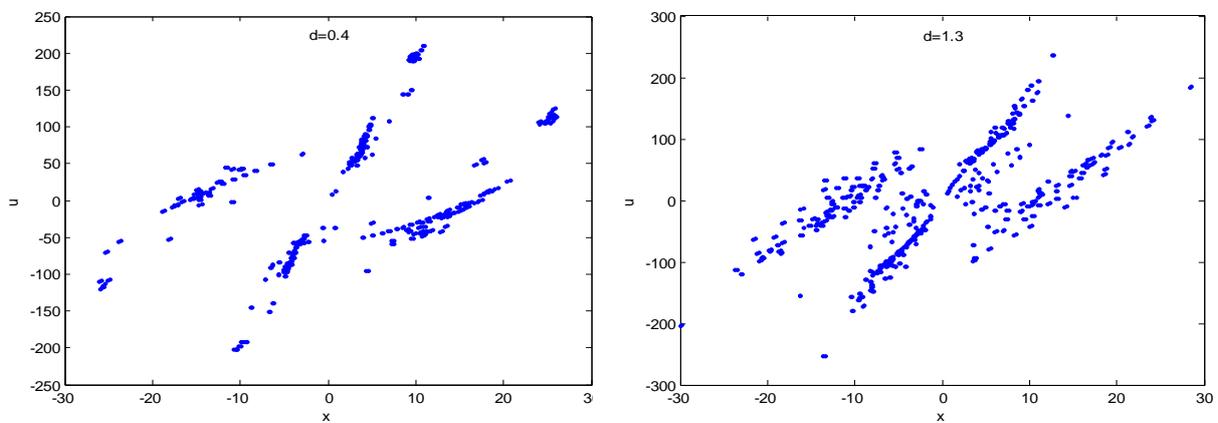


Fig. V. 12 Section de Poincaré pour $d = 0.4$ et $d = 1.3$

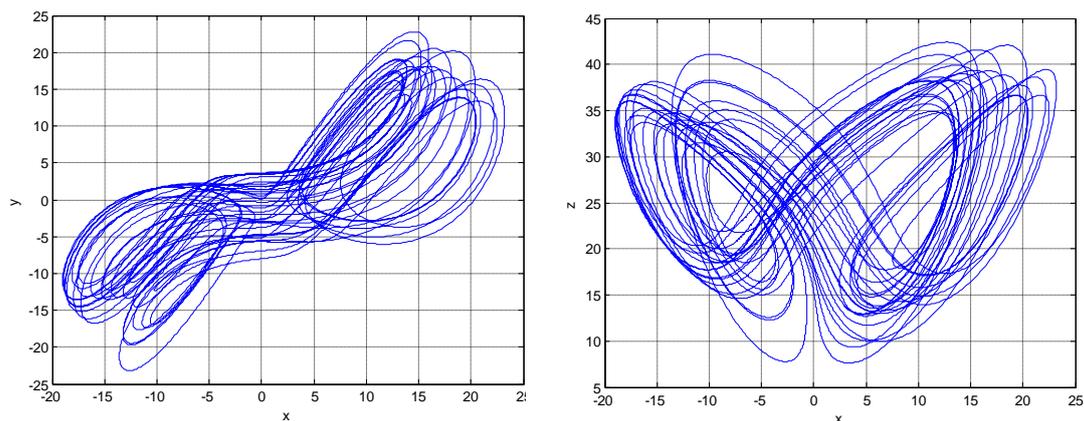


Fig. V. 13 Attracteur hyper-chaotique pour $d = 1.3$

V.3 Hyperchaotification par perturbation paramétrique

Dans cette partie on s'intéresse à la génération du comportement hyperchaotique en utilisant une perturbation sinusoïdale appliquée sur l'un des paramètres du système. L'efficacité de cette technique est illustrée par un exemple de simulation du système de Chen-Lee.

On considère le système de Chen-Lee donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -yz + ax \\ \dot{y} = xz - by \\ \dot{z} = \left(\frac{1}{3}\right)xy - cz \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

a, b, c : les paramètres du système.

Dans le système de Chen-Lee le paramètre c est considéré comme le paramètre le plus sensible, donc notre étude va être basée sur la perturbation de ce paramètre. Afin de déterminer les différentes zones de stabilité du système, on trace le diagramme de bifurcation en fonction du paramètre c .

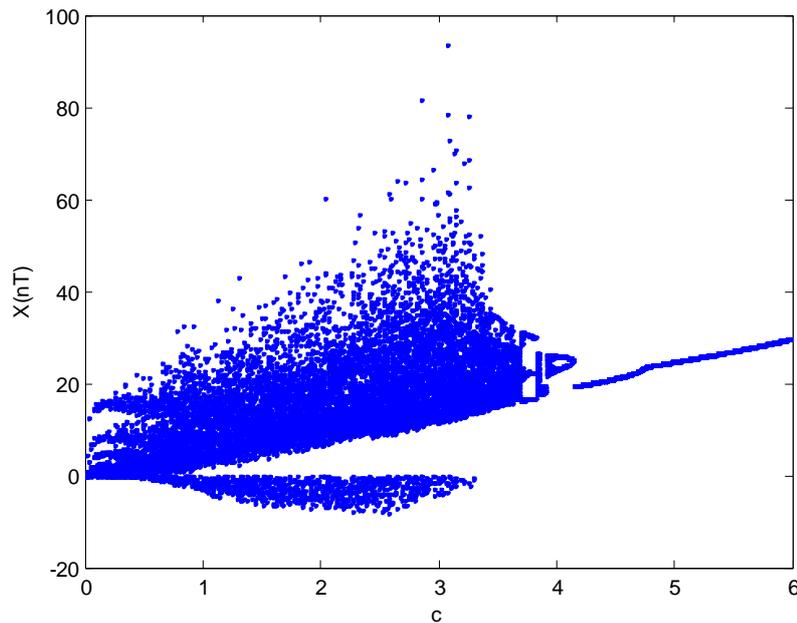


Fig. V. 14 Diagramme de bifurcation du système de Chen-Lee

La perturbation sinusoïdale est appliquée sur le système comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -yz + ax \\ \dot{y} = xz - by \\ \dot{z} = \left(\frac{1}{3}\right)xy - c(1 + \varepsilon \sin(\omega t))z \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

ε, ω : paramètres de perturbation.

Après l'introduction de la perturbation $\varepsilon \sin(\omega t)$ le système autonome devient non autonome. Il devient donc équivalent à un système autonome de dimension 4. Le système perturbé dans ce cas possède quatre exposants de Lyapunov $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$ où $\lambda_4 = 0$. La génération d'un comportement hyperchaotique est alors possible, ceci dépend bien sûr du choix des paramètres de bifurcation de manière à ce que le système ait deux exposants positifs à la fois.

a) **Effet du paramètre c** On fixe $\varepsilon = 0.5$ et $\omega = 23$ on fait varier c dans l'intervalle $[0, 6]$

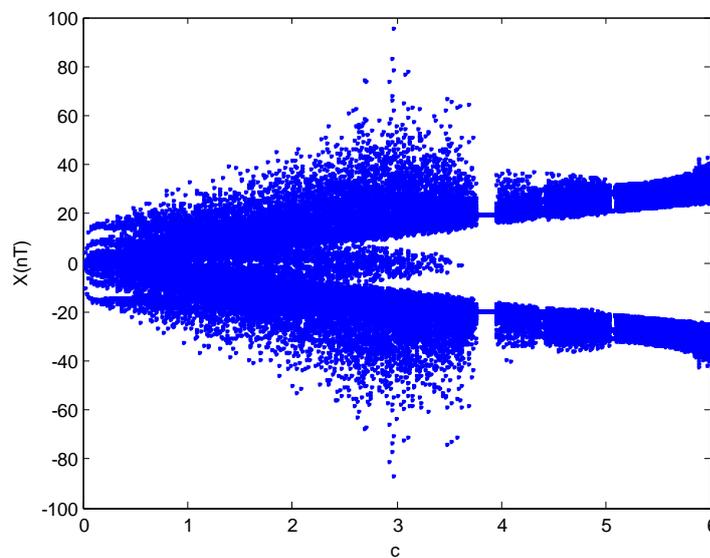


Fig. V. 15 Diagramme de bifurcation du système contrôlé pour $\varepsilon = 0.5$ et $\omega = 23$

Dans la figure (V.16) on remarque que la dynamique du système a été complètement changée. En particulier, des parties stables sont devenues chaotiques et des parties chaotiques se sont stabilisées.

c	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Comportement
2	1.3435	0.03870	0	-8.3803	Hyperchaotique
3.75	0.3003	0	-0.2389	-6.8078	Chaotique
3.8	0	-0.9944	-2.2031	-5.5990	Périodique

Tableau. V. 3

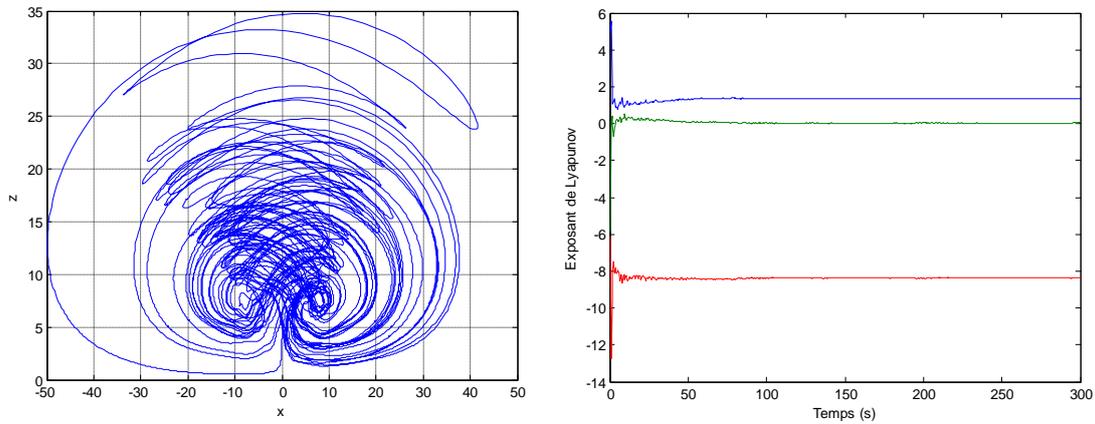


Fig. V. 16 Attracteur hyperchaotique et exposant de Lyapunov pour $c = 2$

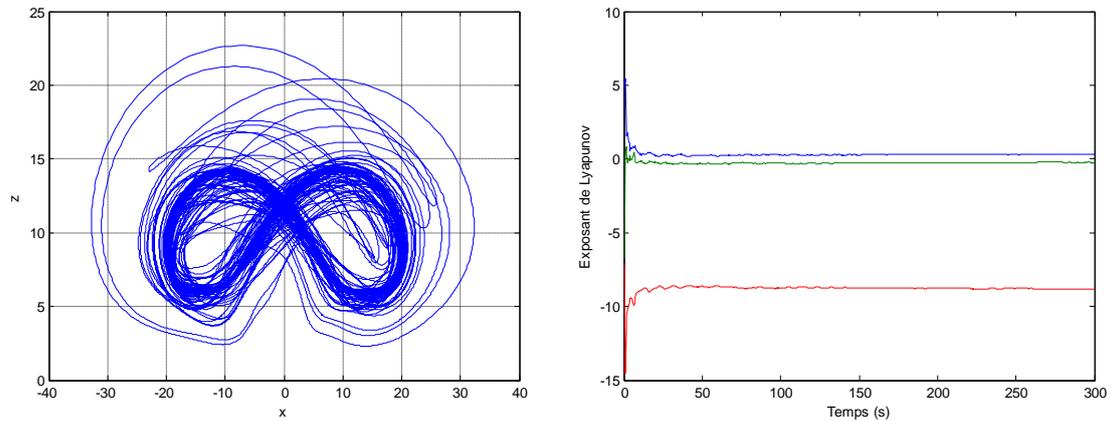


Fig. V. 17 Attracteur chaotique et exposant de Lyapunov pour $c = 3.75$

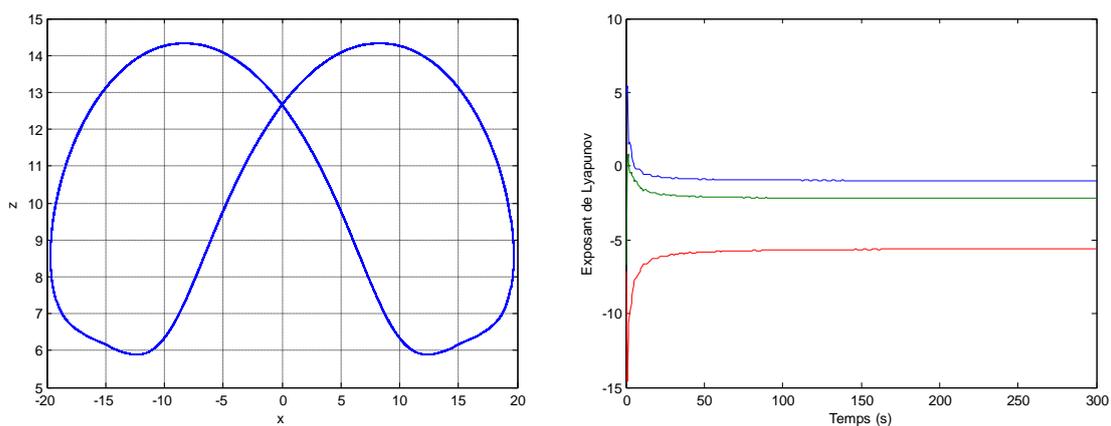


Fig. V. 19 Orbite périodique et exposant de Lyapunov pour $c = 3.8$

b) Effet du paramètre ε On fixe $c = 3.8$ et $\omega = 23$ on fait varier ε dans l'intervalle $[0,1]$

Dans ce qui suit, on va chercher à déterminer les valeurs de ε pour laquelle le système contrôlé devient chaotique ou hyper chaotique, alors qu'il est sur une orbite stable.

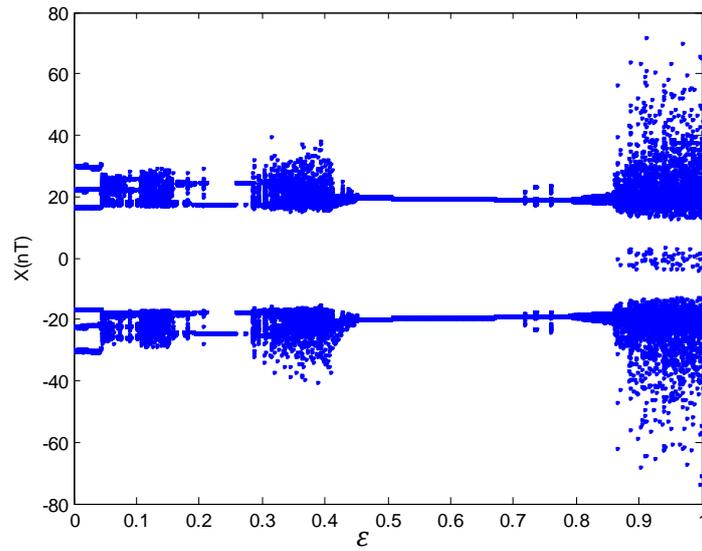


Fig. V. 20 Diagramme de bifurcation pour $c = 3.8, \omega = 23$

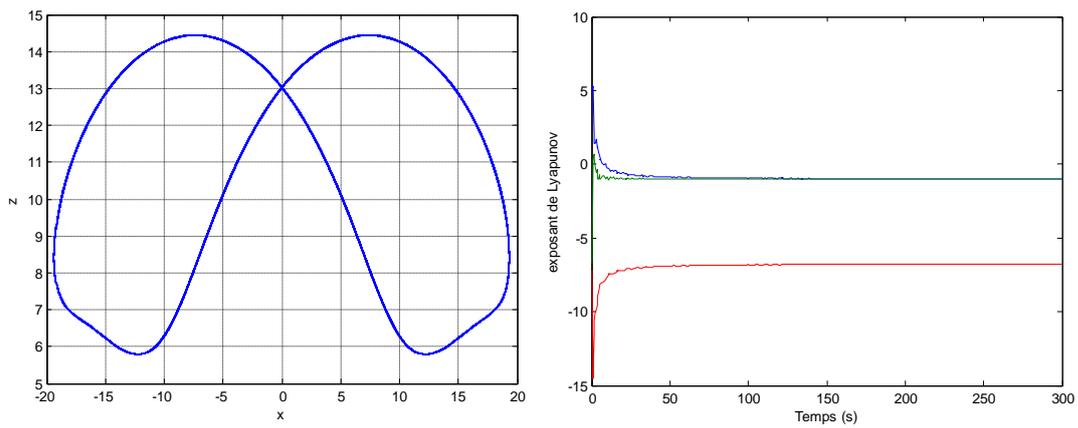


Fig. V. 21 Orbite périodique et exposant de Lyapunov pour $\varepsilon = 0.6$

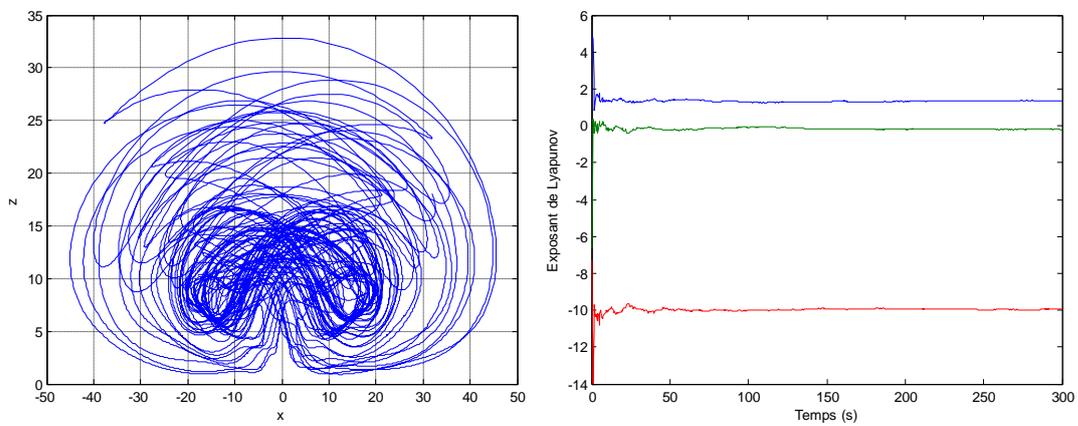


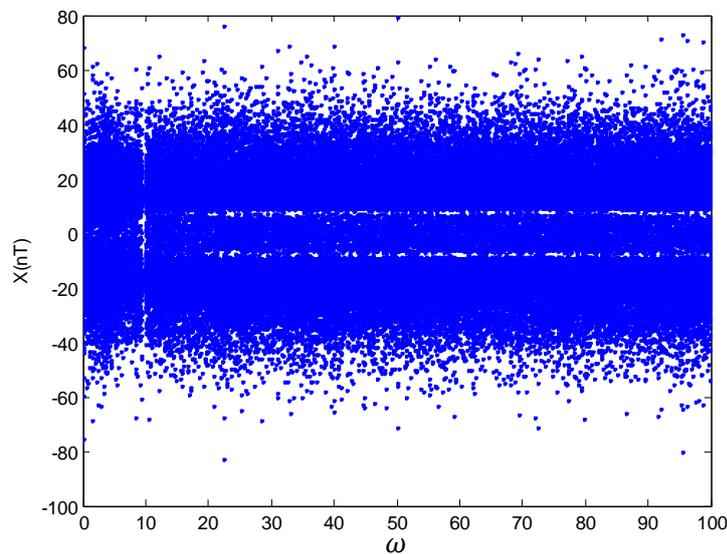
Fig. V. 22 Attracteur chaotique et exposant de Lyapunov pour $\varepsilon = 1$

ε	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Comportement
0.6	0	-1.0042	-1.0322	-6.7602	Périodique
1	1.3488	0	-0.1995	-9.9421	Chaotique

Tableau. V. 4

On remarque que lorsque le système est défini dans une zone stable, la variation du paramètre ε pour obtenir un comportement hyperchaotique n'est pas efficace. La dynamique du système bascule entre état stable et état chaotique comme nous montre les figures précédentes. Pour cela on va choisir pour le cas suivant le système défini dans une zone chaotique (par exemple pour $c = 2.5$) et on cherche la valeur de la fréquence ω qui permet d'avoir l'hyperchaos.

c) **Effet du paramètre ω** On fixe $c = 2.5$ et $\varepsilon = 0.5$ on fait varier ω dans l'intervalle $[0,100]$

Fig. V. 23 Diagramme de bifurcation pour $c = 2.5, \varepsilon = 0.5$

La figure (V.23) montre la disparition du régime périodique sauf autour de $\omega = 9.7$. Pour le reste, le comportement du système varie entre l'état chaotique et hyperchaotique.

ω	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Comportement
5	1.0831	0	-0.2071	-8.3700	Chaotique
9.7	0	-1.0484	-1.0708	-5.3801	Périodique
12	1.2873	0.1292	0	-8.9132	Hyperchaotique
20	1.3475	0.1415	0	-8.9849	Hyperchaotique

Tableau. V. 5

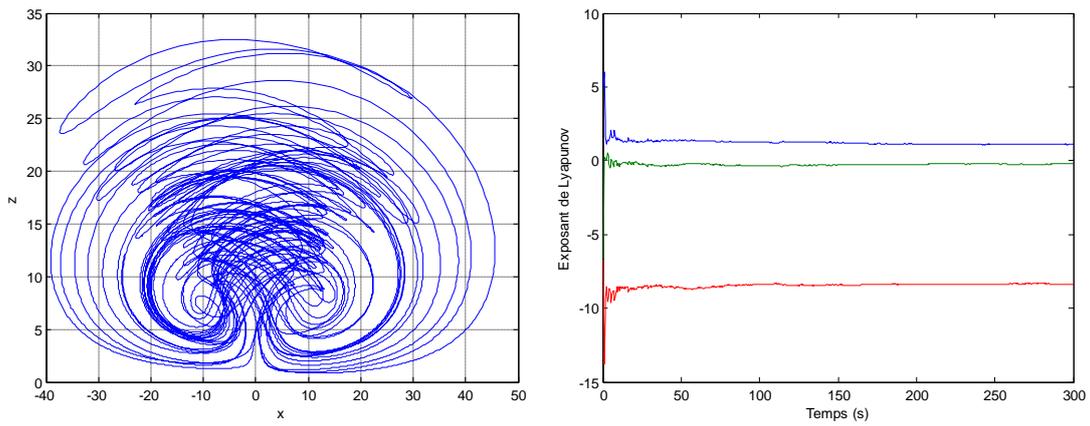


Fig. V. 24 Attracteur chaotique et exposant de Lyapunov pour $\omega = 5$

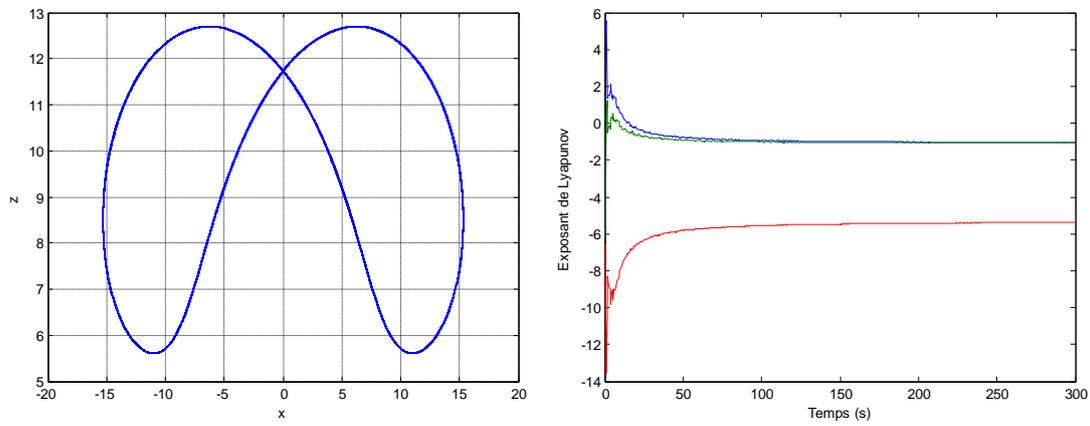


Fig. V. 25 Orbite périodique et exposant de Lyapunov pour $\omega = 9.7$

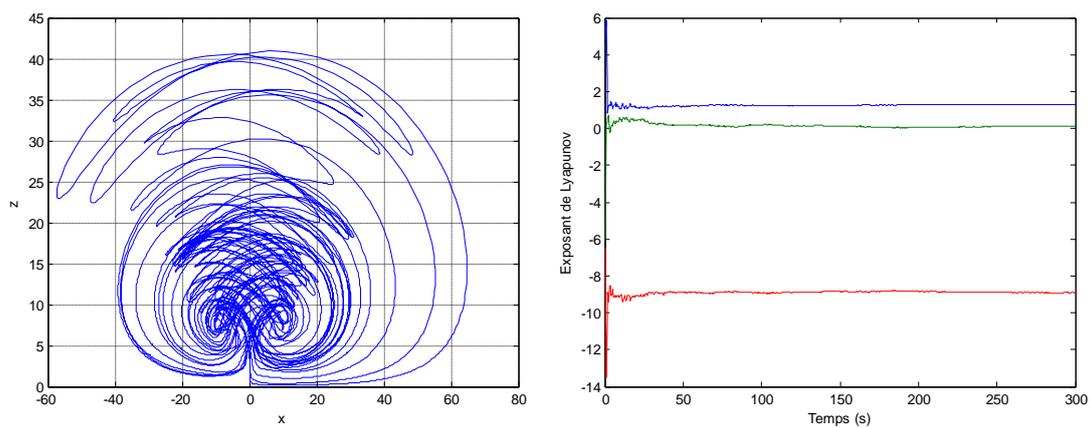


Fig. V. 26 Attracteur hyperchaotique et exposant de Lyapunov pour $\omega = 12$

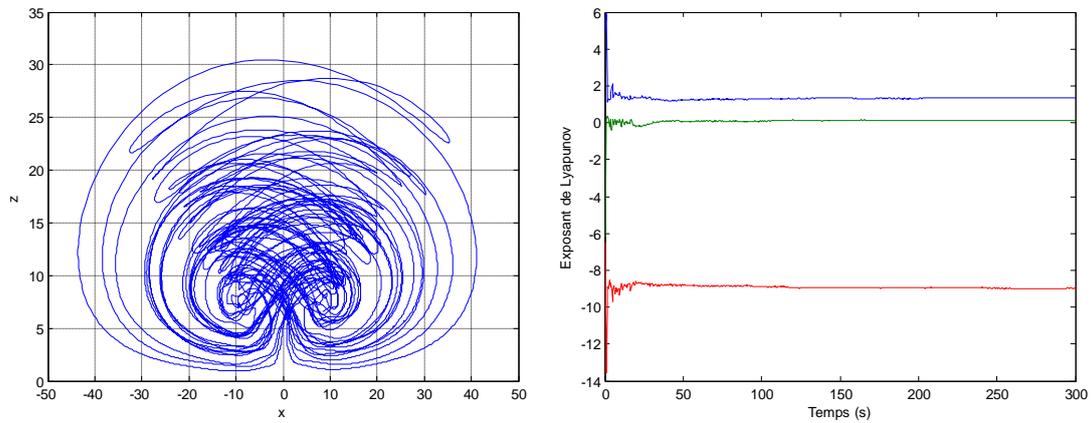


Fig. V. 27 Attracteur hyperchaotique et exposant de Lyapunov pour $\omega = 20$

Après cette étude détaillée de la génération des comportements hyperchaotiques on remarque que l'application d'un contrôleur à retour d'état ou d'une perturbation paramétrique avec augmentation de la dimension du système pour les systèmes chaotiques de dimension 3, permet non seulement l'hyperchaotification mais aussi la stabilisation des systèmes (suppression du chaos) par un bon choix du paramètre de contrôle. Ce dernier peut être bien défini à partir du diagramme de bifurcation et des exposants de Lyapunov.

Conclusion générale

Le travail développé dans cette thèse concerne la proposition et le développement de différentes approches pour la synchronisation de systèmes non linéaires sur des trajectoires stables ou instables ainsi que pour la chaotification et l'hyperchaotification des systèmes non linéaires. Plusieurs approches sont proposées.

L'algorithme backstepping est utilisé pour le contrôle des systèmes chaotiques continus. L'efficacité de cette méthode récursive que se soit pour la stabilisation du système sur son point fixe ou pour la poursuite d'une référence prédéterminée est montrée avec un exemple d'application. La méthode offre une stabilité asymptotique garantie car les lois de contrôle sont tirées directement de la fonction de Lyapunov en satisfaisant les conditions de stabilité.

L'efficacité des méthodes de contrôle non linéaire est illustrée par une combinaison intéressante de la logique floue et le contrôle prédictif basé sur un régulateur classique PID ; notre objectif était de mettre en évidence les performances de la méthode pour le contrôle des systèmes chaotiques discrets. La méthode est très efficace surtout lorsque la prédiction est faite par un modèle non linéaire.

La grande partie de ce travail était la synchronisation des systèmes chaotiques. Des approches basées sur les méthodes de contrôle actif, hybride à rétroaction, backstepping et mode glissant ont été ainsi développées et testées sur des systèmes discrets et continus. Le cas des systèmes avec des paramètres incertains a été particulièrement abordé et représente une part importante de notre contribution. Ces méthodes sont appliquées pour la synchronisation des systèmes identiques, systèmes différents, systèmes hyperchaotiques et les systèmes incertains.

L'anti-contrôle ou la chaotification des systèmes consiste à générer le chaos dans des systèmes n'ayant aucun comportement chaotique dans leur dynamique. Les approches développées se basent sur une amélioration de la méthode d'anti contrôle impulsif et la méthode par retour d'état d'une part, et la proposition de techniques telles que l'introduction d'une perturbation périodique avec une fréquence d'oscillation différente sur l'une des variables, d'autre part.

Dans la dernière partie consacrée à l'hyperchaotification des systèmes chaotiques. Deux méthodes ont été développées : le contrôle par retour d'état et le contrôle par perturbation paramétrique du système. Les deux méthodes sont appliquées sur les systèmes exemples de systèmes chaotiques et les résultats obtenus sont très satisfaisants.

Bibliographie

- [1] **E. N. Lorenz**, “Deterministic nonperiodic flow,” *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 20, 1963.
- [2] **D. Ruelle and F. Takens**, “On the nature of turbulence,” *Commun. Math. Phys.* Vol. 20, pp. 167-192, 1971.
- [3] **T. Y. Li and J. A. Yorke**, “Period three implies chaos,” *Am. Math. Mon.* Vol. 82, pp. 985-992, 1975.
- [4] **R. M. May**, “Simple mathematical models with very complicated dynamics,” *Nature*, 1976.
- [5] **M. Feigenbaum**, “Universal behaviour in nonlinear systems,” *Los Alamos Science*, 1980.
- [6] **B. B. Mandelbrot**, “The Fractal Geometre of Nature,” *Freeman*, San Francisco. 1982.
- [7] **T. Winfree**, “The geometry of biological time,” *SpringerVerlag*, New York, 1980.
- [8] **B. Van Der Pol and J. Van Der Mark**, “Frequency demultiplication,” *Nature*, Vol. 120, pp. 363-364, 1927.
- [9] **L. O. Chua**, “Chua's circuit 10 years later,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, Vol. 22, pp. 279-305, 1994.
- [10] **A. Hübler**, “Adaptive control of chaotic systems,” *Helv. Phys. Acta*, Vol. 62, pp. 343-347, 1989.
- [11] **E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke**, “Controlling chaos,” *Phys. Rev. Lett*, Vol. 64, pp. 1196-1199, 1990.
- [12] **L. M. Pecora and T. L. Carroll**, “Synchronization in chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett.* Vol. 64, pp. 821-824, 1990.
- [13] **G. Chen and D. Lai**, “Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems,” *Int. J. Bifurc. Chaos*. Vol. 6, pp. 1341-1349, 1996.
- [14] **G. Perez and H. Cerderia**, “Extracting message masked by chaos,” *Phys. Rev. Lett.* 74, pp. 1970-1973, 1995.
- [15] **M. P. Kennedy**, “Basic concepts of nonlinear dynamics and chaos,” *Tutorials IEEE*, pp. 289-313, 1994.
- [16] **A. Serbanescu**, “Dynamical systems,” *Applications in communications, ATM*, 2004.

- [17] **P. Maneville**, “Systèmes dynamiques et chaos,” *Ecole polytechnique, Palaiseau*, 1999.
- [18] **F. Alain**, “Contribution à la prédiction et au contrôle des comportements apériodiques dans les convertisseurs électromécanique. Application de la théorie du chaos,” Thèse de doctorat, *Université de Reims France*, 2005.
- [19] **T. Sauer, C. Grebogi and J. York**, “How long do numerical chaotic solutions remain valid?,” *Phys. Rev. Lett*, Vol. 79, pp. 59-62, 1997.
- [20] **T. S. Parker and L. O. Chua**, “Practical numerical algorithm for chaotic systems,” *Springer-Valerg*, 1989.
- [21] **G. Qi, S. Du, G. Chen, Z. Chen and Z. Yuan**, “On a four-dimensional chaotic system,” *Chaos, Solution and Fractals*, Vol. 23, pp. 1671-1682, 2005.
- [22] **K. Alligood, T. Sauer and J. York**, “An introduction to dynamical systems,” *Chaos*, Springer, New York, 1997.
- [23] **A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney and J.A. Vastano**, “Determining Lyapunov exponents from a time series,” *Physica, D*, 16, pp. 285-317, 1985.
- [24] **H. Dang-Vu et C. Delcarte**, “Bifurcation et Chaos,” *Ellipses, Paris*, 2000.
- [25] **R. Kraft**, “Chaos, cantor set and Hyperbolicity for the logistic maps,” *Am. Math. Mon*, Vol. 106, pp. 400-408, 1999.
- [26] **A. Ikhlef et N. Mansouri**, “Contrôle et synchronisation des systèmes chaotique par un algorithme backstepping, ” *Proc. International Conference on Systems and Information Processing*, Guelma, Algérie, 2009.
- [27] **M. Ding, E. Ott and C. Grebogi**, “Controlling chaos in a temporally irregular environment,” *Phys. D*, Vol. 74, pp. 386-394.
- [28] **B.I. Epureanu and E. Dowell**, “Optimal multi-dimensional OGY controller,” *Phys. D*, Vol. 139, pp. 87-96, 2000.
- [29] **C. Grebogi and Y. Lai**, “Controlling chaos in high dimensions,” *IEEE Trans Circuits Syst I*, Vol. 44, pp. 971-975, 1997.
- [30] **S. Iplikci and Y. Denizhan**, “Control of chaotic systems using targeting by extended control regions method,” *Phys. D*, Vol. 150, pp. 163-176, 2001.
- [31] **K. Yagasaki and T. Uozumi**, “New approach for controlling chaotic dynamical systems,” *Phys. Lett. A*, Vol. 238, pp. 349-357, 1998.

- [32] **T. Shinbort, C. Grebogi, J. Yorke and E. Ott**, “Using small perturbations to control chaos,” *Nature*, Vol. 363, pp. 411-417, 1993.
- [33] **T. Shinbort, E. Ott, C. Grebogi and J. Yorke**, “Using chaos to direct orbits to targets,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 65, pp. 3215-3218, 1990.
- [34] **C. Reyl, L. Fleep, R. Baddi and E. Brun**, “Control of NMR-laser chaos in high dimensional embedding space,” *Phys. Rev. E*, Vol. 47, pp. 267-272, 1993.
- [35] **B. Hao**, “Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems,” *World Scientific*, Singapore, 1989.
- [36] **G. Osipanko**, “Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms,” *Springer*, Berlin, 2007.
- [37] **R. Davidchack and Y. Lai**, “Efficient algorithm for detecting unstable periodic orbits in chaotic systems,” *Phys. Rev. E*, Vol. 60, pp. 6172-6175, 1999.
- [38] **M. Brandt and G. Chen**, “Time-delay feedback control of complex pathological rhythms in an atrioventricular conduction model,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, Vol. 10, pp. 2781-2784, 2000.
- [39] **M. Bleich and J. Socolar**, “Delayed feedback control of a paced excitable oscillator,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, Vol. 10, pp. 603-609, 2000.
- [40] **M. Bleich, D. Hochheiser, J. Moloney and J. Socolar**, “Controlling extended systems with spatially filtered, time-delayed feedback,” *Phys. Rev. E*, Vol. 55, pp. 2119-2126, 1997.
- [41] **S. Bielawski, D. Derozier and P. Glorieux**, “Experimental characterization of unstable periodic orbits by controlling chaos,” *Phys. Rev. A*, Vol. 47, pp. 2492-2495, 1993.
- [42] **T. Hikihara and T. Kawagoshi**, “An experimental study on stabilization of unstable periodic motion in magneto-elastic chaos,” *Phys. Lett. A*, Vol. 211, pp. 29-36, 1996.
- [43] **K. Konishi, M. Hirai and H. Kokame**, “Decentralized delayed-feedback control of a coupled map model for open flow,” *Phys. Rev. E*, Vol. 58, pp. 3055-3059, 1998.
- [44] **K. Konishi, H. Kokame and K. Hirata**, “Coupled map car-following model and its delayed feedback control,” *Phys. Rev. E*, Vol. 60, pp. 4000-4007, 1999.
- [45] **J. Socolar, D. Sukow and D. Gauthier**, “Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems,” *Phys. Rev. E*, Vol. 50, pp. 3245-3248, 1994.
- [46] **K. Pyragas**, “Continuous control of chaos by self-controlling feedback,” *Phys. Lett. A*, Vol. 170, pp. 421-428, 1992.

- [47] **T. Ushio and S. Yamamoto**, “Prediction-based control of chaos,” *Phys. Lett. A*. Vol. 264, pp. 30-35, 1999.
- [48] **E. R. Hunt**, “Stabilizing high-period orbits in a chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett*, Vol. 67, pp. 1953-1955, 1991.
- [49] **U. Dressler and G. Nitsche**, “Controlling chaos using time delay coordinates,” *Phys. Rev. Lett*, Vol. 68, pp. 1-4, 1992.
- [50] **K. Mirus and J. Sprott**, “Controlling chaos in a high dimensional system with periodic parametric perturbations,” *Phys. Lett. A*, Vol. 254, pp. 275-278, 1999.
- [51] **M. Ramesh and S. Narayanan**, “Chaos control by non feedback methods in the presence of noise,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 10, pp. 1473-1489, 1999.
- [52] **E. Jackson**, “On the control of complex dynamic systems,” *Phys. D*, Vol. 50, pp. 341-366, 1991.
- [53] **E. Jackson and I. Grosu**, “An open-plus-closed-loop (OPCL) control of complex dynamic systems,” *Physi. D*. Vol. 85, pp. 1-9, 1995.
- [54] **E. Jackson and A. Hübner**, “Periodic entrainment of chaotic logistic map dynamics,” *Phys. D*, Vol. 44, pp. 407-420, 1990.
- [55] **L. Chen and G. Chen**, “Fuzzy predictive control of uncertain chaotic systems using time series,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 9, pp. 757-767, 1999.
- [56] **L. Udawatta, K. Watanabe, K. Kiguchi and K. Izumi**, “Fuzzy-chaos hybrid controller for controlling of nonlinear systems,” *IEEE Transaction on Fuzzy systems*, Vol. 10, pp. 401-411, 2002.
- [57] **C. Park, C. Lee, J. Kim, S. Kim and M. Park**, “Design of an adaptive fuzzy controller and its applications to controlling uncertain chaotic systems,” *Transaction on Control, Automation and Systems Engineering*, Vol. 3, pp. 95-105, 2001.
- [58] **M. Ramesh and S. Narayanan**, “Chaos control of Bonhoeffer-van der Pol oscillator using neural networks,” *Chaos Solutions and Fractals*, Vol. 12, pp. 2395-2405, 2001.
- [59] **X. M. Ren, A.B. Rad, P.T. Chan and W.L. Lo**, “ Identification and control of continuous-time nonlinear systems via dynamic neural networks,” *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, Vol. 50, pp. 478-486, 2003.

- [60] **U.E. Vincent, A. Ucar, J.A. Laoye and S.O. Kareem**, “Control and synchronization of chaos in RCL-shunted Josephson junction using backstepping design,” *Phys. C. Superconductivity*, Vol. 468, Issue 5, pp. 374-382, 2008.
- [61] **A.N. Njah, K.S. Ojo, G.A. Adebayo and A.O. Obawole**, “Generalized control and synchronization of chaos in RCL-shunted Josephson junction using backstepping,” *Phys. C. Superconductivity*, Vol. 470, Issues. 13-14, pp. 558-564, 2010.
- [62] **C. Wang, N. Pai and H. Yau**, “Chaos control in AFM system using sliding mode control by backstepping design,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, Issue 3, pp. 741-751, 2010.
- [63] **D. Lin, X. Wang, F. Nian and Y. Zhang**, “Dynamic fuzzy neural networks modeling and adaptive backstepping tracking control of uncertain chaotic systems,” *Neurocomputing*, Vol.73, Issues16-18, pp. 2873-2881, 2010.
- [64] **H. Salarieh and A. Alasty**, “Control of stochastic chaos using sliding mode method,” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 225, Issue. 1, pp. 135-145, 2009.
- [65] **H. Wang, Z. Han, Q. Xie and W. Zhang**, “Sliding mode control for chaotic systems based on LMI,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, Issue. 4, pp. 1410-1417, 2009.
- [66] **G. Ablay**, “Sliding mode control of uncertain unified chaotic systems,” *Nonlinear Analysis. Hybrid Systems*, Vol. 3, Issue. 4, pp. 531-535, 2009.
- [67] **G. Chen**, “A simple adaptive feedback control method for chaos and hyper-chaos control,” *Applied Mathematics and Computation*, Vol 217, Issue 17, pp. 7258-7264, 2011.
- [68] **J. Zheng**, “A simple universal adaptive feedback controller for chaos and hyperchaos control,” *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 61, Issue 8, pp. 2000-2004, 2011.
- [69] **Y. Hung, T. Liao and J. Yan**, “Adaptive variable structure control for chaos suppression of unified chaotic systems,” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 209, Issue.2, pp.391-398, 2009.

- [70] **Z. Ge, S. Li, S. Li and C. Chang,** "Pragmatical adaptive chaos control from a new double van der Pol system to a new double Duffing system," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 203, Issue. 2, pp. 513-522, 2008.
- [71] **C. Georgescu, A. Afshari and G. Bonnard,** "Fuzzy predictive PID controllers: A heating control applications," *Proceed. Fuzz. IEEE*, pp. 1091-1098, 1993.
- [72] **M. Norgard, P. Sorensen, N. Poulsen, O. Raven and L. Hansen,** "Intelligent predictive control of non linear processes using neural networks," *proceed. IEEE. Intern. Sympo. On intelligent control*, pp. 15-18, 1996.
- [73] **A. Cipriano and D. Saez,** "design of fuzzy model based predictive controllers and its application to an inverted pendulum," *Proceed. Fuzz. IEEE*, pp. 915-919, 1997.
- [74] **C. C. Lee,** "Fuzzy logic in control system," *IEEE. Trans. Syst. Man and Cybernetics, SMC*, pp. 404-418, 2000.
- [75] **J. Lu, G. Chen and H. Ying,** "Predictive fuzzy PID control: theory, design and simulation," *Information sciences*, Vol. 137, pp. 157-187. 2001.
- [76] **A. Ikhlef et T. Chahboub,** "La commande prédictive floue appliquée à des systèmes non linéaires," *Projet de fin d'étude, université Mentouri Constantine*, 2003.
- [77] **T. Yamada and H. Fujisaca,** "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator," *Systems. II. Prog. Theor. Phys*, Vol. 70, pp. 1240, 1983
- [78] **T. Yamada and H. Fujisaca,** "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator," *Systems. III. Prog. Theor. Phys*, Vol. 72, pp. 885, 1984
- [79] **V. S. Afraimovich, N. N. Verochev and M. I. Robinovich,** "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems," *Radio. Phys. and Quantum Electron*, Vol. 29, pp. 795-803, 1983.
- [80] **L. Pecora and T. Carroll,** "Synchronization in chaotic systems," *Phys. Rev. Lett*, Vol. 64, pp. 821-823, 1990.
- [81] **Y. Yu and S. Zhang,** "The synchronization of linearly bidirectional coupled chaotic systems," *Chaos. Solitons and Fractals*, Vol. 22, pp. 189-197, 2004.
- [82] **J. H. Park,** "On synchronization of unified chaotic systems via non linear control," *Chaos. Solitons and Fractals*, Vol. 25, pp. 699-704, 2005.

- [83] **H. Chen, G. Sheu, Y. Lin and C. Chen**, “Chaos synchronization between two different chaotic systems via nonlinear feedback control,” *Nonlinear Analysis. Theory. Methods and Applications*, Vol. 70, Issue 12, pp. 4393-4401, 2009.
- [84] **Q. Zhang and J. Lu**, “Chaos synchronization of new chaotic system via nonlinear control,” *Chaos. Solitons and fractals*, Vol. 37, Issue 1, pp. 175-179, 2008.
- [85] **H. Salarieh and A. Alasty**, “Adaptive chaos synchronization in Chua’s systems with noisy parameters,” *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 79, Issue 3, pp. 233-241, 2008.
- [86] **U. E. Vincent and R. Guo**, “A simple adaptive control for full and reduced-order synchronization of uncertain time-varying chaotic systems,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, Issue 11, pp. 3925-3932, 2009.
- [87] **M. Heydari, H. Salarieh and M. Behzad**, “Stochastic chaos synchronization using Unscented Kalman–Bucy Filter and sliding mode control,” *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 81, Issue 9, pp. 1770-1784, 2011.
- [88] **C. Kuo**, “Design of a fuzzy sliding-mode synchronization controller for two different chaos systems,” *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 61, Issue 8, pp. 2090-2095, 2011.
- [89] **A.N. Njah and U.E. Vincent**, “Synchronization and anti-synchronization of chaos in an extended Bonhöffer–van der Pol oscillator using active control,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, Issues 1-2, pp. 41-49, 2009.
- [90] **A. Ikhlef and N. Mansouri**, “Synchronization of chaotic and hyperchaotic systems using an active control based algorithm,” *Proc. International Conference on Electrical Engineering design and Technologies (ICEEDT)*, Sousse, Tunisia, 2009.
- [91] **G. Cai and W. Tu**, “Adaptive Backstepping of the uncertain unified chaotic system”, *International Journal of Nonlinear Science*, Vol. 4, pp. 17-24., 2007.
- [92] **C. M. Liu, Y. F. Peng and M. H. Lin**, “CMAC- based adaptive backstepping synchronization of uncertain chaotic systems,” *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 21, pp. 981-988., 2009.

- [93] **C. Wu, T. Fang and H. Rong**, “Chaos synchronization of two stochastic Duffing oscillators by feedback control,” *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 32, Issue 3, pp. 1201-1207, 2007.
- [94] **E. Bai and K. E. Lonngren**, “Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control,” *Chaos. Solitons and Fractals*, Vol. 11, pp. 1041-1044, 2000.
- [95] **J. Hung and W. Gao**, “Variable structure control,” *IEEE. Trans. Indust. Elect.*, Vol. 40, pp. 2-22, 1993.
- [96] **K. D. Young, V. Utkin and U. Ozgunr**, “A control engineer’s guide to sliding mode control,” *IEEE. Trans. Contr. Syst.*, Vol. 7, pp. 328-342, 1999.
- [97] **S. Guan and C.H. Lai**, “Phase synchronization between two essentially different chaotic systems,” *Phys. Rev.* Vol. 72, Iss. 1, pp. 6205 –6212, 2005.
- [98] **M. Roseblum, A. Pikovski and A. Kurths**, “From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 78, pp. 4193 –4198, 1997.
- [99] **G. Shuguang, L. Kun and C. Lai**, “Chaotic synchronization through coupling strategies,” *Chaos*, Vol. 16, Iss. 2, pp. 023107-023109, 2006.
- [100] **W. L. Ditto and L. M. Pecora**, “Mastering chaos,” *Scientific American*, pp. 77-84. 1993.
- [101] **A. Ikhlef et N. Mansouri**, “Synchronisation et anti-synchronisation des systèmes chaotiques par le contrôle actif et l’algorithme backstepping, ” *Proc. Conférence Internationale en Génie Electrique (CIGET)*, Tebessa, Algérie, 2009.
- [102] **T. Ushio and S. Yamamoto**, “Prediction based control of chaos,” *Phys. Lett. A.* Vol. 246, pp. 30-35, 1999.
- [103] **U. E. Vincent**, “Synchronization of identical and non identical 4-D chaotic systems using active control,” *Chaos. Solitons and Fractals*, Vol. 37, pp. 1065-1075, 2008.
- [104] **A. Ikhlef and N. Mansouri**, “Synchronization of chaotic systems with uncertain parameters using backstepping algorithm,” *International Review of Automatic Control (I.R.E.A.CO)*, Vol. 4, Iss. 1, pp. 6-12, 2011.
- [105] **A. Ikhlef and N. Mansouri**, “Synchronization of chaotic systems with uncertain parameters using backstepping and adaptive active control algorithm: A comparative study,” *IEEE GCC Conference and Exhibition*, pp. 565-568, Dubai, 2011.
- [106] **T. Li and J. Yorke**, “Period three implies chaos,” *Am. Math. Mon.* Vol. 82, pp. 985-992, 1975.

- [107] **F. Marotto**, “Snap-back repellers imply chaos in \mathbb{R}^n ,” *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 63, pp. 199-223, 1978.
- [108] **R. Devaney**, “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems,” 2nd. edn. *Addison-Wesley*, New York, 1989.
- [109] **S. Wiggins** “Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos,” 2nd. edn. *Springer*, New York, 2003.
- [110] **K. Alligood, T. Sauer and J. Yorke**, “Chaos – An Introduction to Dynamical Aystems,” *Springer*, New York, 1997.
- [111] **X. Wang and G. Chen**, “Generating topologically conjugate chaotic systems via feedback control,” *IEEE. Trans. Circuits. Syst. I*, vol. 50, pp. 812-817, 2003.
- [112] **C. Starkov and G. Chen**, “Chaotification of polynomial continuous time systems and rational normal forms,” *Chaos, Solution and Fractals*, V. 22, Iss. 4, pp. 849-856, 2004.
- [113] **H. Zhang, Z. Wang and D. Liu**, “Chaotifying fuzzy hyperbolic model using impulsive and nonlinear feedback control approaches,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, Vol. 15, pp. 2603-2610, 2005.
- [114] **X. Wang, G. Chen and X. Yu**, “Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time delay feedback,” *Chaos*, Vol. 10, pp. 771-779, 2000.
- [115] **G. Chen and D. Lai**, “Feedback anti control of discrete chaos,” *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Vol. 8, pp. 1585-1590, 1998.
- [116] **L. Chen**, “An open-plus-closed-loop control for discrete chaos and hyperchaos,” *Phys. Lett. A*, Vol. 281, pp. 327-333, 2001.
- [117] **G. Chen and X. Wang**, “Chaotification of Dynamical Systems: Theories, Methodologies, and Applications,” *Shanghai. Jiaotong. University. Press*, Shanghai, 2006.
- [118] **F. Dyson**, “Infinite in All Directions,” *Harper and Row*, New York, 1988.
- [119] **R. Enns and G. McGuire**, “Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers,” *Birkh`auser*, Boston, 1997.
- [120] **H. Zhang and Z. Wang**, “chaotifying fuzzy hyperbolic model using adaptive inverse optimal control approach,” *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Vol. 14, pp. 3505-3517, 2004.
- [121] **G. Chen, L. Yang and Z. Liu**, “Anticontrol of chaos for continuous-time systems,” *IEICE. Trans. Fundamentals*, Vol. E85-A, No. 6, pp. 1333-1335, 2002.

- [122] **J.L. Kuang, P. A. Meehan and A. Y. T. Leung**, “Suppression chaos via Lyapunov-Krasovskü’s method,” *Chaos, Solution and Fractals*, V. 27, pp. 1408-1414, 2006.
- [123] **A. Ikhlef and N. Mansouri**, “Chaotification of synchronized discrete chaotic systems,” *Proc. Intrnational Conference on Electrical Engineering design and Technologies (ICEEDT)*, Hamamet, Tunisia, 2008.
- [124] **A. Ikhlef and N. Mansouri**, “Time delay feddback control and chaotification of continuous dynamical systems,” *Proc. IEEE International Multi-Conference on Systems. Signals and Devices SSD’08*, Amman, Jordan, 2008.
- [125] **A. Cenys, A. Tamasevicius, A. Baziliauskas, R. Krivickas and E. Lindberg**, “Hyperchaos in coupled colpitts oscillator,” *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 17, Iss. 2-3, pp. 349-353, 2003.
- [126] **T. Kapitaniak and W. H. Steeb**, “Transition to hyperchaos in coupled generalized van der pol equations,” *Phys. Lett. A*. Vol. 152, pp. 33-36, 1991.
- [127] **N. Yujun, W. Xingyuan, W. Mingjun and Z. Huaguang**, “A new hyperchaotic system and its circuit implementation,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, Issue 11, pp. 3518-3524, 2010.
- [128] **R. Guo**, “A simple adaptive controller for chaos and hyperchaos synchronization,” *Phys. Lett. A*. Vol. 372, pp. 5593-5597, 2008.
- [129] **X. J. Wu, H. Wang and H. T. Lu**, “Hyperchaotic secure communication via generalized function projective synchronization,” *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 12, Iss. 2, pp. 1288-1299, 2011.
- [130] **O. E. Röessler**, “An equation for hyperchaos,” *Phys. Lett. A*, Vol. 71, pp. 155-157, 1979.
- [131] **G. Wang, X. Zhang, Y. Zheng and Y. Li**, “A new modified hyperchaotic Lü system,” *Phys. Lett. A*. Vol. 371, pp. 260-272, 2006.
- [132] **A. Boukabou**, “Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d’ordre élevé et leur application pour la synchronisation : contribution à l’élaboration de nouvelle approches,” *Thèse de doctorat, université Mentouri Constantine*, 20009.
- [133] **H. Zhang, D. Liu and Z. Wang**, “Controlling chaos: suppression, synchronization and chaotification,” *Springer*, New York, 2009.

Abstract

The main contribution reported in this work concern the development and the suggestion of various approaches using in the control and the synchronization of nonlinear systems on stable or unstable trajectories, as well as for the chaotification and the hyper-chaotification of nonlinear systems. These approaches are presented as follows:

- The use of the backstepping algorithm for the control of the continuous chaotic systems. The efficiency of this iterative method to stabilize the system on its fixed point or for the tracking of desired reference as shown in the application example. This method offers an asymptotic stability because the control laws are directly calculated from the Lyapunov function satisfying in the same time the stability conditions.
- The use of a control method which bases on an interesting combination of the fuzzy control and the predictive control based on a classical PID regulator. So, our objective is the study of the method performances in order to control the discrete chaotic systems. This method is very effective especially when a nonlinear model is used for the prediction.
- The application of a chaos control methods for the synchronization of the chaotic systems. Some chaos control methods based on the active control, hybrid feedback control, backstepping algorithm and sliding mode control were also developed. Moreover, these methods were tested on discrete and continuous systems. The case of the systems with uncertain parameters was particularly developed, as well as, our contribution takes an important part in this case. These methods are applied for the synchronization of the identical, different, hyper-chaotic and the uncertain systems.
- The anti-control or the chaotification of the nonlinear systems which consists to generate the chaos in the systems having non-chaotic behavior in their dynamics. Different approaches are developed: the impulsive anti-control, the delay feedback method and the suggestion of techniques such as the introduction of a periodic disturbance with a different oscillation frequency on ones of the system variables.
- The last part of this work is devoted to the hyper-chaotification of the chaotic systems. Thus, two methods were presented: the feedback control and the control by the perturbation of the system parameter. Both methods are applied to continuous chaotic systems.