

**Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre
élevé et leur application pour la synchronisation :
Contribution à l'élaboration de nouvelles approches**

Thèse
Présenté à
La Faculté des Sciences de l'Ingénieurs

by

Abdelkrim Boukabou

Pour l'obtention du degré de
Docteur es-Science

Département d'électronique
Université de Constantine
Juin 2006

**Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre
élevé et leur application pour la synchronisation :
Contribution à l'élaboration de nouvelles approches**

Approved by:

Prof. M. Benslama, Committee Chair

Prof. H. Hamri, Examineur

Prof. Noura Mansouri, Advisor

Prof. N. Slimani, Examineur

Prof. A. Charef, Examineur

Prof. M. Tebikh, Examineur

Date Approved _____



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَمَا أُوتِيتُمْ مِنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا (85)
سورة الإسراء

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا (114)
سورة طه



*To my parents, my brothers W & R my wife and my daughter.
...on this term : "friend"*

REMERCIEMENTS

This thesis would not have been written without help of my advisor, Professor **Noura Mansouri**, whose broad knowledge and scientific intuition were my guiding light during the years I spent at Constantine. I am grateful and indebted to Professor **Guanrong Chen** for all the help and moral support.

Table des matières

DEDICATION	iii
REMERCIEMENTS	iv
LISTE DES TABLEAUX	viii
LISTE DES FIGURES	ix
SOMMAIR	1
I CONTRÔLE DU CHAOS : ÉTAT DE L'ART	7
1.1 Introduction	7
1.2 Définitions du chaos	7
1.2.1 Chaos dans le sens de Li-Yorke	8
1.2.2 Chaos dans le sens de Devaney	9
1.3 Techniques de contrôle du chaos	10
1.3.1 Les méthodes de suppression du chaos	12
1.3.2 Les méthodes de stabilisation des systèmes chaotiques	14
1.3.3 Applications expérimentales des méthodes de contrôle des systèmes chaotiques	25
1.4 Conclusion	31
II CONTRÔLE DES SYSTÈMES CHAOTIQUES D'ORDRE ÉLEVÉ	33
2.1 Introduction	33
2.2 Principe	34
2.3 Applications aux systèmes d'ordre élevé	36
2.3.1 Système de Chen	36
2.3.2 Circuit de Chua	45
2.3.3 Circuit de Chua à n -scroll	51
2.4 Conclusion	58
III CONTRÔLE PRÉDICTIF	59
3.1 Introduction	59

3.2	Contrôle prédictif des systèmes discrets	60
3.2.1	Le principe de la méthode	60
3.2.2	Applications	61
3.3	Contrôle prédictif des systèmes continus	66
3.3.1	L'algorithme proposé	67
3.3.2	Applications	68
3.4	Conclusion	73
IV	CONTRÔLE PRÉDICTIF DES SYSTÈMES CHAOTIQUES DÉFINIS PAR DES DONNÉES D'ENTRÉES-SORTIES	74
4.1	Introduction	74
4.2	Contrôle flou	74
4.2.1	Définitions	76
4.2.2	Modélisation floue	80
4.2.3	Contrôle prédictif flou	84
4.2.4	Résultats et interprétations	88
4.3	Contrôle neuronal	101
4.3.1	Définitions	102
4.3.2	Modélisation par réseaux de neurones	103
4.3.3	Contrôle prédictif neuronal	105
4.3.4	Résultats et interprétations	107
4.4	Conclusion	110
V	APPLICATIONS DU CONTRÔLE DU CHAOS	111
5.1	Introduction	111
5.2	Application à la synchronisation chaotique	112
5.2.1	Le principe	112
5.2.2	Applications	113
5.3	Application à la communication chaotique	120
5.3.1	L'algorithme de contrôle	120
5.3.2	Applications	122

5.4	Conclusion	123
VI	ANTI-CONTRÔLE DU CHAOS	125
6.1	Introduction	125
6.2	Anti-contrôle des systèmes discrets	126
6.2.1	Applications	128
6.3	Anti-contrôle des systèmes continus	132
6.3.1	Anti-contrôle par application du contrôle impulsif	132
6.3.2	Extension de l'algorithme d'anti-contrôle	135
6.4	Conclusion	137
	CONCLUSION	139
	Annexe A — GLOSSAIRE	143
	Annexe B — LE CIRCUIT DE CHUA	146
	RÉFÉRENCES	149

Liste des tableaux

1	Historique du chaos	6
2	Application du chaos	6
3	Domaine d'application du chaos	6
4	Historique de la logique floue	75
5	Paramètres de modélisation floue de l'équation logistique	90
6	Paramètres de modélisation floue du système de Hénon	99

Table des figures

SOMMAIRE

Il existe un comportement entre la régularité rigide et l'aspect aléatoire. Ce comportement s'appelle : *chaos*. On a longtemps supposé que c'était de l'aléatoire et la vaste théorie de la probabilité et des statistiques est appliquée. En fait, c'est un champ nouveau d'investigation qui s'ouvrait en même temps qu'une nouvelle manière d'appréhender des effets parfois méconnus depuis longtemps.

Bien que l'histoire de la théorie du chaos remonte à plus d'un siècle, la révolution de l'ordinateur a donné naissance à leurs applications pratiques. Il y'a une variété d'applications industrielles et commerciales, basée sur les différents aspects des systèmes chaotiques (voir les tableaux 1, 2 et 3).

Après une phase d'excitation où les scientifiques cherchaient et trouvaient du chaos presque partout ; on s'est rendu compte que les outils de la théorie du chaos peuvent être appliqués pour la compréhension, la manipulation et le contrôle d'une variété de systèmes avec des applications pratiques intenses.

La motivation du contrôle du chaos vient du fait, que le chaos permet à un système d'explorer chacune de ses dynamiques : lorsqu'il est sous contrôle, il fournit une variété de propriétés passionnantes ce qui permet de donner des opportunités dans diverses applications technologiques. Aujourd'hui, on commence à réaliser que la conception traditionnelle d'engineering qui essaye toujours de supprimer les comportements irréguliers et, par conséquent, d'éliminer le chaos afin d'éviter la complexité peut engendrer beaucoup d'incidents. Ceci s'avère être quelque chose d'impraticable, peu économique, et physiquement très difficile si ce n'est pas impossible. Dans la tentative de contrôler le chaos, les chercheurs essaient d'apporter de nouvelles idées et techniques qui utilisent la nature elle même du chaos afin de le contrôler.

L'idée innovatrice du contrôle du chaos est que la trajectoire d'un système chaotique se rapproche d'une façon *ergodique* d'une orbite périodique. Ce qui signifie que la dynamique chaotique peut être vue comme un comportement périodique à un moment donné puis passe à un autre comportement périodique mais sans ordre déterminé, ce qui permet à la trajectoire de visiter toutes les orbites périodiques instables (UPOs) du système. Ce fait a suggéré l'idée que la sensibilité aux conditions initiales, puisse être, très souhaitable dans des situations expérimentales pratiques. S'il est vrai, qu'une petite perturbation puisse provoquer une réponse très grande au cours du temps, il est également vrai qu'un choix judicieux d'une telle perturbation peut diriger la trajectoire du système vers des états dynamiques désirés [33]. C'est exactement l'idée qui a amené à une nouvelle ère de l'application des systèmes chaotiques.

Aujourd'hui, même 16 ans après son apparition pour la première fois, le contrôle du chaos reste un sujet d'actualité et ne cesse de se développer et une multitude de méthodes de contrôle sont proposées, se développent et s'appliquent sur les systèmes biologiques, mécaniques, circuits électroniques et divers autres systèmes.

Les systèmes flous et les réseaux de neurones conviennent à un raisonnement incertain ou approximatif. Ils nous permettent de représenter des expressions descriptives ou qualitatives particulières pour les systèmes ayant un modèle mathématique difficile à définir. La logique floue peut être utilisée pour modéliser un système dynamique à comportement chaotique complexe. Les réseaux de neurones sont modélisés sur les réseaux de neurones biologiques. Ils peuvent mener à une meilleure compréhension d'un cerveau humain et apprennent eux-mêmes à construire des modèles. Cet apprentissage peut être appliqué à la modélisation, la prédiction, et le contrôle des systèmes chaotiques. D'un point de vue technologique, les chercheurs ont commencé à créer des circuits chaotiques à l'aide de la logique floue et des réseaux de neurones pour la modélisation et le contrôle des systèmes complexes, le stockage de l'information et divers autres applications.

Le contrôle du comportement chaotique a une autre application importante, à savoir, la

synchronisation des systèmes chaotiques. Si on considère deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes, la différence dans l'évolution de ces deux systèmes va se développer exponentiellement en fonction du temps, et chacun d'eux va évoluer d'une façon très différente. L'injection d'un élément perturbateur à l'un des deux systèmes permettra t'il à rendre leur évolution harmonique et réduire la différence à zéro et pousser les deux systèmes dans une tubulure synchronisée ? S'il est possible de réaliser une telle application, il est possible de communiquer à l'aide des signaux chaotiques et de porter un message utile sur un signal chaotique puis le reconstituer à la réception. Ou mieux encore, utiliser le système chaotique lui même comme information. Reste à contrôler la trajectoire chaotique pour une telle procédure.

L'anti-contrôle du chaos (ou encore chaotification) a le même principe que le contrôle du chaos. En effet, il s'agit d'appliquer une loi de contrôle sur un système stable pour le déstabiliser au voisinage d'un état d'équilibre afin de le rendre chaotique. Dans d'autre application, cela consiste à obtenir le chaos même avant son apparition normale dans un système chaotique.

Notre contribution à travers le travail développé dans cette thèse concerne la proposition et le développement de nouvelles approches et méthodes afin de pouvoir stabiliser, contrôler et conduire la trajectoire des systèmes chaotiques vers des trajectoires bien spécifiques. Ces trajectoires sont les orbites périodiques instables du système chaotique. De plus, appliquer le contrôle du chaos dans la synchronisation chaotique, la communication avec le chaos ainsi que l'anti-contrôle.

Nous avons ainsi proposé plusieurs solutions, liées à des formes différentes des systèmes chaotiques. Ces solutions correspondent aux point suivants :

- La généralisation de la méthode de contrôle OGY pour parvenir à contrôler plusieurs systèmes chaotiques d'ordre élevé. Et plus encore, altérer la stabilisation du système d'une orbite périodique instable à une autre.
- Le développement d'une technique de contrôle prédictif pour les systèmes chaotiques

continus d'ordre élevé.

- Dans des cas réels, le système est souvent représenté par un ensemble de données d'entrées-sorties. Dans une telle situation, on a recours à des méthodes de modélisation. La logique floue et les réseaux de neurones sont des candidats très intéressants.
- Application du contrôle du chaos pour la synchronisation des systèmes chaotiques ainsi qu'à la communication chaotique.
- Anti-contrôle du chaos. Ceci permet de générer le chaos dans des systèmes n'ayant aucun comportement chaotique dans sa dynamique. Ce qui permet de créer de nouvelles approches mathématiques.

Le travail est présenté selon le plan suivant :

Au premier chapitre et dans un premier temps, nous rappelons les principales définitions mathématiques relatives aux systèmes chaotiques, notamment le théorème de Li-Yorke [1] et celui de Devaney [2]. Ensuite, nous consacrons la deuxième partie aux études antérieures sur le contrôle du chaos ainsi que les différentes réalisations expérimentales.

Nous proposons, dans le chapitre 2, une extension de la méthode OGY originale pour la stabilisation des orbites périodiques instables originales des systèmes chaotiques d'ordre élevé. Nous examinons l'efficacité de cette méthode de contrôle sur des exemples d'applications.

Nous consacrons le chapitre 3 à une autre méthode de contrôle, à savoir le contrôle prédictif des systèmes chaotiques. On montre comment fournir les outils appropriés pour diriger la trajectoire chaotique vers des trajectoires désirées.

Lorsque le système chaotique est représenté seulement par un ensemble de données d'entrées-sorties, dans ce cas, l'équation mathématique du système chaotique est inconnue et doit être modélisée pour activer le contrôle, cela nécessite le recours à des approches intelligentes telle que la logique floue et les réseaux de neurones. Ce qui fera l'objet du chapitre 4.

Le chapitre 5 regroupe quelques applications du contrôle du chaos : A savoir la synchronisation chaotique ainsi que la communication à l'aide des signaux chaotiques.

Dans le chapitre 6, nous présentons la notion de l'anti-contrôle du chaos, et, comment créer le comportement chaotique dans des systèmes dynamiques non linéaire qui ne présente pas un tel phénomène lors de leur évolution.

Et enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion générale.

TAB. 1: Historique du chaos

1890	Le Roi Oscar II de Suède octroie un prix au premier chercheur qui pourrait déterminer et résoudre le problème des n-corps des orbites des corps célestes et ainsi prouver la stabilité du système solaire. Jusqu'à ce jour, le problème n'a pas été résolu.
1890	Henri Poincaré gagne le premier prix du Roi Oscar II. Etant le plus proche à résoudre le problème de n-corps, il a découvert que l'orbite de trois corps célestes agissantes l'une sur l'autre peut engendrer un comportement instable et imprévisible. Ainsi, le chaos est naît (mais pas encore mentionné!).
1963	Edward Lorenz découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange.
1975	Tien-Yien Li et James A. Yorke ont présenté pour la première fois le terme " <i>chaos</i> " dans un article intitulé "Period three implies chaos".
1978	Mitchell Feigenbaum introduit un nombre universel associé au chaos.
1990	Edward Ott, Celso Grebogi et James A. Yorke. Introduisent la notion de contrôle du chaos.
1990	Lou Pecora. Synchronisation des systèmes chaotiques.

TAB. 2: Application du chaos

Contrôle	Première application du chaos est le contrôle du comportement irrégulier dans les circuits et les systèmes. Liste des divers applications est incluse dans le tableau 3.
Synchronisation	Communication sécurisée, cryptage, radio.
Traitement d'information	Codage, décodage et stockage d'information dans des systèmes chaotiques, tel que les éléments de mémoires et les circuits. Reconnaissance de forme.
Prédiction à court terme	Les maladies contagieuses, température, économie.

TAB. 3: Domaine d'application du chaos

Engineering	Contrôle de vibration, stabilisation des circuits, réactions chimiques, turbines, étages de puissance, lasers, combustion, et beaucoup plus.
Ordinateurs	Commutation des paquets dans des réseaux informatiques. Cryptage. Contrôle du chaos dans les systèmes robotiques.
Communications	Compression et stockage d'image. Conception et management des réseaux d'ordinateurs.
Médecine et biologie	Cardiologie, analyse du rythme du cœur (EEG), prédiction et contrôle d'activité irrégulière du cœur.
Management et finance	Prévisions économiques, analyse financière, et prévision du marché.

Chapitre I

CONTRÔLE DU CHAOS : ÉTAT DE L'ART

1.1 *Introduction*

Ce chapitre est consacré à un état de l'art sur le thème du chaos. Pour cela, une vue d'ensemble de l'impact potentiel du contrôle du chaos sur les applications en science et technologie, ainsi que les progrès récents en ce qui concerne les méthodes de contrôle du chaos y seront présentées. Parmi les méthodes de contrôle les plus connues et les plus efficaces, deux méthodes sont présentées dans le détail : la méthode de Ott-Grebogi-Yorke [33] et la méthode de Pyragas [52]. Le problème d'optimisation relatif à la manière d'amener la trajectoire au voisinage de l'endroit désiré, le temps qui doit s'écouler avant le déclenchement du contrôle, ainsi que l'influence du bruit sur l'efficacité du contrôle sont autant de points que l'on discutera. Pour conclure, des applications expérimentales dans différents domaines seront présentées.

1.2 *Définitions du chaos*

Comme pour beaucoup de limites en science, il n'y a aucune définition standard du chaos. Néanmoins, les dispositifs typiques du chaos incluent :

- *La non-linéarité.* Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- *Le déterminisme.* Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
- *La sensibilité aux conditions initiales.* de très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- *L'imprévisible.* En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

- *L'irrégularité.* Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques - "ordre dans le désordre" plus simplement.

Deux principes mathématiques importants expliquent le comportement chaotique, celui de Li-Yorke [1] et celui de Devaney [2].

1.2.1 Chaos dans le sens de Li-Yorke

Li et Yorke ont introduit la première définition mathématique du chaos [1]. Ils ont établi un critère très simple "La présence de trois périodes impliquent le chaos". Ce critère joue un rôle très important dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques.

Soit une fonction discrète de dimension $N = 1$, décrite par la formule suivante :

$$x(i + 1) = f(x(i)), \quad x \in R, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Théorème de Li-Yorke Soit I un intervalle dans R et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. Supposons qu'il y a un point $a \in I$ tel que :

$$b = f(a), \quad c = f^2(a) \text{ et } d = f^3(a) \quad (1.2)$$

avec

$$d \leq a < b < c \quad (1.3)$$

Alors :

- pour chaque $i = 1, 2, \dots$, il y a un point périodique de période n .
- l'ensemble $S \in I$ ne contient pas de points périodiques qui satisfassent les conditions suivantes :
- pour chaque $p_s, q_s \in S$ avec $p_s \neq q_s$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p_s) - f^n(q_s)| > 0, \quad (1.4)$$

Et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p_s) - f^n(q_s)| = 0. \quad (1.5)$$

– pour chaque $p_s \in S$ et point périodique $q_{per} \in S$, avec $p_s \neq q_{per}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f^n(p_s) - f^n(q_{per})| > 0, \quad (1.6)$$

Le théorème peut être généralisé par supposition que $f : R \rightarrow R$ et que $f(I) \subset I$. De plus, la fonction f doit satisfaire :

$$f(I) \cap I \neq \emptyset \quad (1.7)$$

afin qu'il contienne les points a, b, c et d .

1.2.2 Chaos dans le sens de Devaney

Soit S un ensemble dans un espace topologique R et soit f^m la fonction définie par :

$$f : S \longrightarrow S \quad (1.8)$$

à savoir que :

$$f^m = f(f^{m-1}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

et

$$f^0 = I. \quad (1.10)$$

Soit $\bar{x} \in S$, ce dernier est appelé point périodique d'une période m s'il satisfait :

$$\bar{x} = f^m(\bar{x}), \text{ mais } \bar{x} \neq f^k(\bar{x}) \text{ pour } 1 \leq k \leq m. \quad (1.11)$$

si $m = 1$, alors le point \bar{x} est appelé un point fixe.

Théorème de Devaney Une fonction $f : S \longrightarrow S$ est chaotique si

– la fonction f est *sensible aux conditions initiales*, dans le sens que pour tout $x \in S$ et au voisinage de x dans S , il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$|f^m(x) - f^m(y)| > \delta, \quad (1.12)$$

pour un point $y \in S$ et pour $m \geq 0$,

- la fonction f est *topologiquement transitive*, dans le sens que pour toute paire de sous-ensembles ouverts $U, V \subset S$, il existe un nombre entier $m > 0$ tel que :

$$f^m(U) \cap V \neq \phi, \quad (1.13)$$

- les points périodiques de la fonction f sont denses dans S .

1.3 Techniques de contrôle du chaos

Pour mieux comprendre la nature même de contrôle du chaos, il est utile de distinguer les approches du contrôle du chaos, des approches de contrôle conventionnelles.

1. Dans le contrôle classique, une cible désirée est habituellement de valeur constante qui n'est pas généralement un état du système donné, et le temps final du contrôle est habituellement fini (par exemple, le concept élémentaire de la "contrôlabilité" est typiquement défini en utilisant un temps final fini et fixe). Cependant, dans le contrôle du chaos, la cible désirée n'est pas limitée aux valeurs constantes dans l'espace d'état ; c'est souvent une orbite périodique instable du système. Ceci exige généralement la réalisation de seulement une commande minuscule. Techniquement, ceci s'avère difficile à cause de l'instabilité de la cible. D'autre part, dans les méthodes de contrôle du chaos, le temps final est infini pour être significatif et pratique, parce que la plupart des comportements dynamiques tels que les états d'équilibre, les cycles limites, les attracteurs et le chaos ont des propriétés *asymptotiques*.
2. Un système chaotique comporte plusieurs orbites périodiques instables, et est extrêmement sensible aux petites perturbations de ses conditions initiales. Un tel comportement, utile pour le contrôle du chaos, n'est pas disponible dans les systèmes linéaires ou nonlinéaires non-chaotiques.
3. Dans la plupart des méthodes de contrôle conventionnelle, on travaille habituellement dans l'espace d'état. Dans le contrôle du chaos, on est amené à travailler dans l'espace de phase, l'espace paramétrique ainsi que la carte de Poincaré. De plus, les exposants

de Lyapounov et le diagramme bifurcation sont des outils typiques pour l'étude, mais non conventionnels.

4. Les performances des méthodes de contrôle des systèmes chaotiques peuvent être différentes de celles des méthodes classiques. Le contrôle du chaos emploie des critères tels que les exposants de Lyapounov, l'ergodicité, et les changements de bifurcation, en plus de ce qui est demandé pour une méthode de contrôle classique, à savoir : la robustesse de l'exécution, la stabilité du contrôle, l'optimum d'énergie, le temps de contrôle et l'influence du bruit.
5. Un système contrôlé est non autonome et ne peut pas être reformulé comme un système autonome car le contrôle ne peut pas être considéré comme une variable d'état du système. Par conséquent, contrairement à ce qui peut paraître, il est plus difficile de concevoir un système chaotique contrôlé.

Le concept du contrôle du chaos s'est installé dans le jargon de la physique moderne pour signifier tout processus ou mécanisme qui permet d'améliorer le chaos ou le stabiliser dans un système dynamique, quand celui-ci est bénéfique, ou le supprimer complètement quand il est nocif. La compréhension et l'utilisation d'une telle dynamique est très souhaitable dans la théorie et les applications.

Par conséquent, il est clair que le comportement dynamique d'un système non linéaire peut être changé en changeant certaines valeurs de ces paramètres, à condition que ces dernières soient accessibles pour l'ajustement. De ce fait, le contrôle du chaos implique l'extraction de mouvements périodiques désirés en dehors des zones chaotiques, par l'application de petites perturbations judicieusement choisies. La suppression de la dynamique chaotique dans un système dynamique est le seul but pour un problème de contrôle.

Plusieurs méthodes et algorithmes ont été proposés et développés pour réaliser le contrôle du chaos dans divers systèmes dynamiques non linéaires. Parmi les nombreux articles, livres, et publications disponibles sur ce thème, nous présentons dans ce qui suit les plus fiables et les plus connues.

Il est important de préciser que la littérature dans cette matière est très large et que les méthodologies décrites ici ne sont nullement les seules valides. Néanmoins, nous espérons avoir fait un tour d’horizon sur tout ce qui a été fait auparavant dans ce domaine.

1.3.1 Les méthodes de suppression du chaos

La première catégorie inclue les méthodes dans lesquelles le contrôle du chaos est réalisé en convertissant le comportement chaotique en n’importe quel comportement périodique désiré. Dans ce type d’algorithmes, le but est de faire en sorte que le flot $x(t)$ suit une dynamique $g(t)$ choisie au préalable [17]. Ceci implique l’addition à l’équation du mouvement

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{1.14}$$

d’un terme $u(t)$ de tel sorte que

$$|x(t) - g(t)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \tag{1.15}$$

Dans ce cas, les auteurs choisissent :

$$u(t) = dg/dt - F(g(t)). \tag{1.16}$$

Le problème est que la valeur de la perturbation u est généralement grande.

D’autres auteurs proposent des méthodes de perturbations périodiques [18, 20] ainsi que des méthodes de perturbations stochastiques [21]. Dans ce type de méthodes, le comportement du système chaotique n’est plus le même, mais peut mener par la suite au choix d’une certaine orbite périodique instable. Quoiqu’elles ne puissent pas être considérées comme des trajectoires désirées, ce type de perturbations permet la suppression du chaos et générer un nouveau comportement. Rajasekar et Lakshmanan [22] ont montré qu’un système chaotique peut être rendu dans une forme régulière par l’addition d’un bruit de type gaussien, grâce à l’utilisation d’une force périodique et d’algorithmes de contrôle adaptatif.

D’autres méthodes parviennent à supprimer le chaos par l’utilisation du couplage mutuel d’un système chaotique avec un système périodique ayant des oscillations du même type [23].

Des modèles mathématiques peuvent être également utilisés pour supprimer le chaos dans les systèmes dynamiques non linéaires. Parmi ces méthodes, on peut citer les méthodes basées sur les modèles mathématiques classiques tel que le modèle ARMA, le contrôle prédictif généralisé (GPC) [26] ou la méthode de Melnikov basée sur le Hamiltonien des systèmes dissipatifs [30, 32].

Dubois [28] utilise une technique de contrôle anticipative qui consiste à introduire une anticipation d'une variable d'état du système afin de supprimer son état chaotique. Le système chaotique sous contrôle anticipatif est donné par :

$$x(i + 1) = f(x(i), u(i)) \quad (1.17)$$

avec $u(t)$ une entrée de contrôle donnée sous la forme :

$$u(i) = f(x(i), x(i + 1)) \quad (1.18)$$

C'est à dire que le système chaotique contient un modèle prédictif de lui même.

Pour illustrer ce principe, prenons l'exemple simple du contrôle de l'équation logistique définie par

$$x(i + 1) = px(i)(1 - x(i)) \quad (1.19)$$

avec $p = 4$.

Le système sous contrôle anticipatif consiste à changer une variable d'état du système pour être calculé à partir d'une valeur prédite non contrôlé comme suit :

$$x(i + 1) = px(i)(1 - x(i + 1)) \quad (1.20)$$

Le contrôle permet de supprimer définitivement le chaos du système dynamique et le stabilise sur une valeur fixe mais qui ne représente pas une orbite périodique instable ou un point fixe instable propre au système étudié. Le résultat du contrôle est représenté par la figure (1.1).

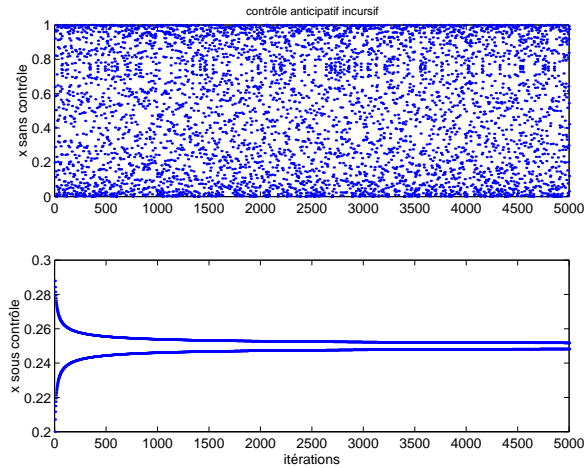


Figure 1.1 : Suppression du chaos par contrôle anticipatif.

1.3.2 Les méthodes de stabilisation des systèmes chaotiques

La deuxième catégorie qui est la plus intéressante inclue les méthodes dans lesquelles le contrôle du chaos est réalisé en stabilisant les orbites périodiques instables d'un système chaotique.

1.3.2.1 La méthode de contrôle OGY

La méthode typique de cette classe est la méthode proposée par Ott, Grebogi et Yorke (OGY) [33] et qui fut la première à évoquer la notion de contrôle des systèmes dynamiques à comportement chaotique.

L'idée développée par les auteurs sus-cités, est qu'un système chaotique peut être contrôlé en appliquant une petite perturbation à certains paramètres du système.

a/ Le principe de la méthode

Soit un système dynamique non linéaire à comportement chaotique donné par :

$$x(i+1) = F(x(i), p), \quad (1.21)$$

où le vecteur x représente les variables d'états du système et p est un paramètre de contrôle accessible de l'extérieur pour des petits ajustements.

Le but du contrôle est de bien choisir ces ajustements afin de réaliser la stabilisation d'une certaine orbite périodique instable (UPO) de l'attracteur chaotique.

Pour cela, on suppose que le paramètre de contrôle p peut varier dans un petit intervalle autour d'une certaine valeur nominale p_0 et que le système chaotique admet des points fixes instables dans la section de Poincaré.

Soit x_f un point fixe donné. La linéarisation du système (1.21) autour de son point fixe est donnée par :

$$\delta x(i+1) = A\delta x(i), \quad (1.22.a)$$

où

$$\delta x(i+1) = x(i+1) - x_F(p) \text{ et } A = \lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s. \quad (1.22.b)$$

Si on applique des petits changements au paramètre p , alors la coordonnée du point fixe est décalée également à un certain point voisin $x_F(\bar{p})$.

Autour de ce point, on peut écrire les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} x_f(\bar{p}) &= x_f(p) + (\bar{p} - p_0) \left(\frac{\partial x_f}{\partial p} \right)_{p=p_0} \\ &= x_f(p) + \delta p(i) B \end{aligned} \quad (1.23)$$

où $\delta p(i) = (\bar{p} - p_0)$ et $B = \left(\frac{\partial x_f}{\partial p} \right)_{p=p_0}$.

La relation (1.22.a) peut alors être réécrite sous la forme suivante :

$$\delta x(i+1) = \delta p(i) B + A[\delta x(i) - \delta p(i) B] \quad (1.24.a)$$

Si on veut que la variation à imposer soit telle que le point $x(i+1)$ corresponde au point fixe instable, ce qui signifie que la trajectoire du système suive la direction stable et que :

$$f_u \delta x(i+1) = 0 \quad (1.24.b)$$

On obtient alors :

$$\delta p(i) = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{f_u}{f_u B} \delta x(i) = K \delta x(i) \quad (1.25)$$

Cette variation paramétrique est activée seulement lorsque $x(i)$ est située dans un interval $|\delta x(i)| < \delta p_{\max}$.

b/ Exemple de contrôle par la méthode OGY

Pour illustrer le principe de cette méthode, sur un exemple précis, on considère le modèle proposé par Ikeda [3] pour décrire la dynamique d'un laser. Ce dernier est représenté par une équation dans le plan complexe telle que donnée par l'expression (1.26) :

$$z(i+1) = a + bz(i)e^{j\left(k - \frac{p}{1+|z(i)|^2}\right)} \quad (1.26)$$

avec $j, z \in \mathbb{C}$, et $a, b, k, p \in \mathbb{R}$.

La variable d'état $z(i)$ peut être réécrite par :

$$z(i) = x(i) + jy(i) \quad (1.27)$$

où $x(i)$ et $y(i)$ sont définis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(i+1) = a + b[x(i)\cos(\theta) - y(i)\sin(\theta)] \\ y(i+1) = b[x(i)\sin(\theta) + y(i)\cos(\theta)] \end{cases} \quad (1.28)$$

avec

$$\theta = k - \frac{p}{1 + x^2(i) + y^2(i)} \quad (1.29)$$

Pour des valeurs des paramètres $a = 0.85, b = 0.9, k = 0.4, p = 7.7$ et une condition initiale $z_0 = (x_0, y_0) = (0.1, 0)$, l'attracteur d'Ikeda est chaotique et il se présente comme indiqué par la figure (1.2).

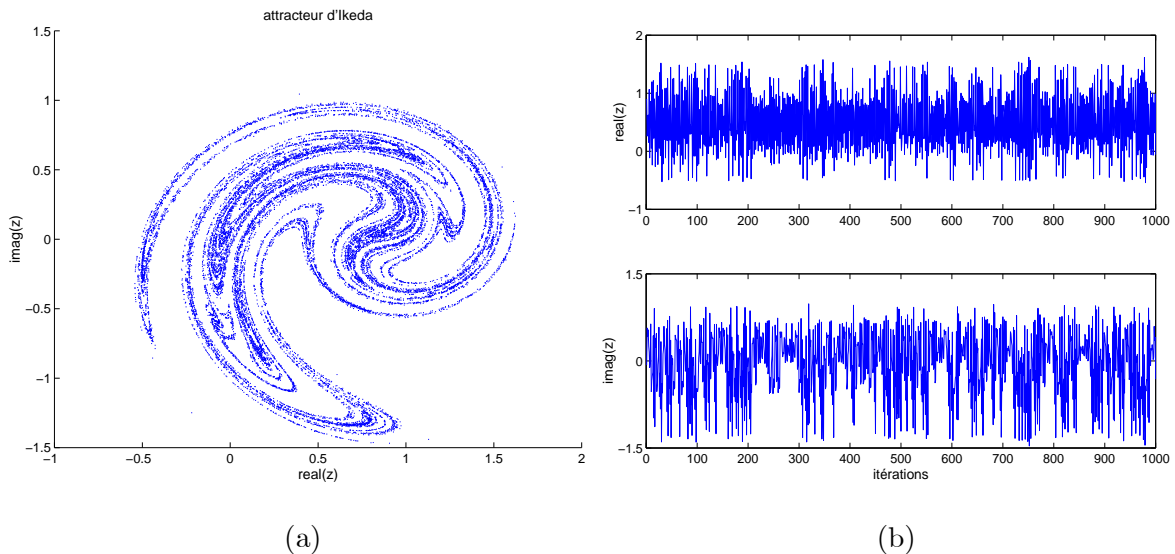


Figure 1.2 : Attracteur d'Ikeda. (a) Plan de phase.(b) Variables d'états.

L'application de la méthode OGY pour contrôler ce système revient à suivre la procédure suivante [84] :

1. Choisir l'orbite périodique instable à stabiliser.

Dans ce cas, la détermination du point fixe revient à calculer :

$$z_f = a + bz_f e^{j \left(\frac{k-p}{1+|z_f|^2} \right)} \quad (1.30)$$

avec

$$\begin{cases} x_f = a + b [x_f \cos(\theta) - y_f \sin(\theta)] \\ y_f = b [x_f \sin(\theta) + y_f \cos(\theta)] \end{cases} \quad (1.31)$$

Les calculs numériques donnent :

$$z_f = (x_f, y_f) = (0.482, 0.485) \quad (1.32)$$

2. Calcul des matrices A et B .

La matrice jacobienne de l'attracteur d'Ikeda est donnée par :

$$A = \frac{b}{(1 + x^2(i) + y^2(i))} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

avec

$$\begin{cases} A_1 = (1 + x^2(i) + y^2(i))^2 \cos(\theta) - 2px^2(i) \sin(\theta) - 2px(i)y(i) \cos(\theta) \\ A_2 = (1 + x^2(i) + y^2(i))^2 \sin(\theta) - 2py^2(i) \cos(\theta) - 2px(i)y(i) \sin(\theta) \\ A_3 = (1 + x^2(i) + y^2(i))^2 \sin(\theta) + 2px^2(i) \cos(\theta) - 2px(i)y(i) \sin(\theta) \\ A_4 = (1 + x^2(i) + y^2(i))^2 \cos(\theta) - 2py^2(i) \sin(\theta) + 2px(i)y(i) \cos(\theta) \end{cases} \quad (1.34)$$

Autour du point fixe z_f , les matrices A et B valent :

$$A = \begin{bmatrix} -1.5604 & -2.5818 \\ -0.4057 & -1.1901 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

3. Calcul des valeurs propres λ_u et λ_s .

$$\lambda_u = -2.4151 \text{ et } \lambda_s = -0.3357 \quad (1.36)$$

4. Calcul des vecteurs propres $\{e_s, e_u\}$ et des vecteurs covariances $\{f_u, f_s\}$ de la matrice jacobienne A .

$$e_u = [3.0200 \ 1]^T, \quad e_s = [-2.1162 \ 1]^T, \quad f_u = [0.1946 \ 0.4120] \quad \text{et} \quad f_s = [-0.1946 \ 0.5876] \quad (1.37)$$

5. Calcul de K

$$K = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{f_u}{f_u B} = [-2.4151 \ -5.1131] \quad (1.38)$$

Une fois qu'on a déterminé la correction à apporter au système ; on choisit arbitrairement une condition initiale dans le bassin d'attraction de l'attracteur. Si la trajectoire se trouve dans la zone de contrôle, c'est à dire :

$$(z(i) - z_f)^2 < \varepsilon \quad (1.39)$$

où ε est un petit nombre positif (on prend $\varepsilon = 0.01$).

Le paramètre a sera perturbé par $\delta a(i) = -K\delta z(i)$ qui sera injecté au paramètre a .

Le résultat du contrôle est représenté par la figure (1.3). On remarque qu'une fois le contrôle déclenche, la trajectoire du système est stabilisée sur le point fixe.

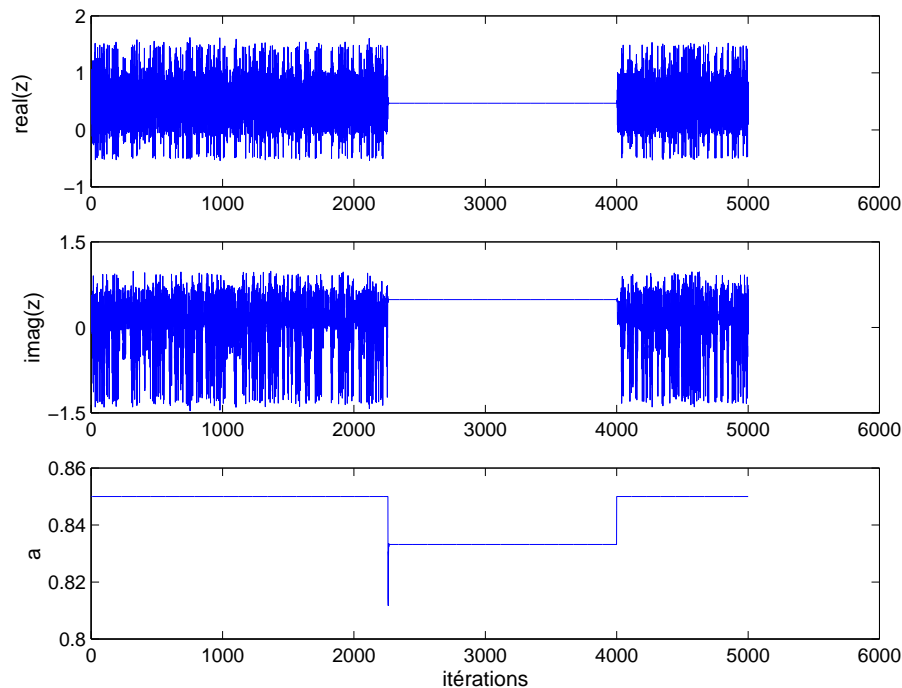


Figure 1.3 : Activation et relâchement du contrôle.

c/ Influence du bruit

En présence du bruit externe, une trajectoire contrôlée sera occasionnellement mise hors du voisinage de la trajectoire désirée. Si un tel phénomène se produit, le contrôle sera désactivé et on est amené à attendre un autre passage dans l'espoir que la trajectoire chaotique entre à nouveau dans le voisinage de l'orbite périodique désirée et soit contrôlée.

Cependant, il faut savoir que le bruit n'influe pas sur le comportement du système une fois contrôlé. Dans le cas d'un système physique, on aurait à faire à des incertitudes relatives à une plage de mesure plus restreinte. Le bruit tolérable estimé par rapport aux paramètres absolus doit être largement inférieur à son équivalent en termes d'incertitude relative.

d/ Distance de contrôle

On appelle distance de contrôle la distance entre le point courant et la trajectoire désirée. En d'autres termes, lorsque le système évolue, on peut calculer la distance entre le point de l'attracteur, correspondant à l'état courant, et la trajectoire désirée. Cette distance évolue au cours du temps. Lorsqu'elle est suffisamment petite, on considère qu'on se trouve au voisinage de cette trajectoire et que le contrôle peut être appliqué. L'expression "suffisamment petite" cache le nombre "distance de contrôle".

On peut rendre la distance de contrôle très faible et s'assurer ainsi que le contrôle une fois déclenché, sera efficace. Seulement, dans ce cas, il faut attendre longtemps avant que le système passe très près de cette trajectoire. Ce temps vite devient déraisonnable.

La probabilité que la trajectoire entre dans le voisinage du point fixe (UPO approprié) est donnée par :

$$P(\varepsilon) = \int_{x(i)-\varepsilon}^{x(i)+\varepsilon} \rho[x(i)] dx \approx 2\varepsilon\rho[x(i)], \quad (1.41)$$

où ρ est la fréquence pour qu'une trajectoire chaotique visite le proche voisinage du point x dans le système chaotique.

Il est clair que, plus la valeur de ε est petite, plus le temps d'attente est long.

e/ Remarques sur la méthode de contrôle OGY

Il y a plusieurs facteurs qui doivent être pris en considération lors de l'application de cette méthode :

1. Le contrôle ne peut être activé que si la trajectoire du système est suffisamment proche de l'orbite désirée. Pour certains systèmes, le proche voisinage du comportement désiré n'est visité que très rarement, on a dans ce cas une dynamique imperturbée qui dure très longtemps ce qui a pour conséquence un temps d'attente exagérément grand pour l'opérateur afin d'appliquer le contrôle. En principe, la magnitude du contrôle δx_n doit être petite de façon significatif pour que la trajectoire $x(i)$ soit suffisamment proche du point fixe désiré $x_f(p_0)$. Cependant, le temps d'attente moyen pour que ceci se produise peut être assez long. Ainsi, il y a un temps mort entre la magnitude de perturbation et le temps d'attente moyen. Il y a aussi des corrections non linéaires dans $x(i) - x_f(p_0)$ qui sont typiquement quadratiques. Les corrections quadratiques sont importantes dans la détermination du temps d'attente moyen avant que le contrôle soit achevé.
2. Le contrôle n'est possible que si la trajectoire se trouve au voisinage du point fixe désiré. Cette condition peut être violée quand le point fixe du système est tel que les vecteurs B et f_u sont presque orthogonaux l'un sur l'autre. De tels points fixes sont impossibles à contrôler par l'utilisation de petites perturbations.
3. Dans le cas des systèmes réels, il y a souvent présence du bruit. Par conséquent, une trajectoire contrôlée sera occasionnellement mise hors du voisinage du point fixe. Si un tel phénomène se produit, le contrôle sera désactivé et on est amené à attendre un autre passage par le point fixe dans l'espoir que la trajectoire chaotique entre à nouveau dans le voisinage de l'orbite périodique désirée et soit contrôlé.
4. Il peut y avoir des erreurs dans les mesures des états du système. Les coordonnées du point fixe que nous souhaitons contrôler peuvent ainsi différer de ses vraies valeurs. De même, les quantités $\lambda_u, \lambda_s, e_u, e_s, f_u$ et f_s , sont nécessaires pour calculer les perturbations à apporter et peuvent elles-mêmes contenir certaines erreurs. Par conséquent,

l'orbite converge vers l'orbite périodique instable estimée.

5. Il faut noter que le contrôle ne fonctionne pas pour n'importe quelle condition initiale.

Cette dernière doit se situer dans le bassin d'attraction de l'attracteur.

1.3.2.2 Méthodes dérivant de la méthode OGY

Le succès de la méthode OGY a été vite exploité et plusieurs algorithmes ont été proposés et développés par la suite [34, 48].

Dans la référence [34], Hunt introduit la première modification à la méthode OGY, et propose un algorithme de contrôle à retour d'état proportionnel occasionnel (OPF : Occasional Proportional Feedback) qui utilise la carte de Poincaré pour représenter les systèmes dynamiques fortement dissipatifs. Le retour d'état est proportionnel à la distance qui sépare la trajectoire du système du point fixe. Afin de minimiser l'ordre de la perturbation du paramètre de contrôle, l'auteur propose de changer la condition sur la loi de contrôle en définissant une fenêtre au voisinage de l'orbite désirée. La largeur de cette fenêtre représente la perturbation maximale du paramètre. Le contrôle peut échouer lorsque un paramètre du système est altéré entre plusieurs valeurs.

Rollins *et al.* [35] modifient la méthode OPF et proposent la méthode de contrôle à retour d'état proportionnel récursif (RPF : Recursive Proportional Feedback).

Dans le cas où le système chaotique ne possède pas de paramètre accessible de l'extérieur, les auteurs proposent d'appliquer le contrôle, en changeant une variable d'état du système ; cette méthode sera appelée méthode de retour d'état proportionnel perturbé (PPF : Perturbed Proportional Feedback) [36].

Reyl *et al.* [37] ont introduit la méthode MED (Minimal Expected Deviation) pour contrôler les systèmes chaotiques ayant des valeurs propres complexes ou des valeurs propres multiples.

Faute de temps d'attente qui peut être assez long, Shinbrot *et al.* [40] proposent de modifier le test concernant la détermination de la zone au voisinage du point fixe afin de

minimiser le temps d'attente avant le déclenchement du contrôle. Une extension du bassin d'attraction est développée dans [47] pour activer le contrôle le plus tôt possible.

Il faut noter que toutes ces méthodes permettent de contrôler les systèmes chaotiques de dimension $N \leq 2$. Le contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé est plus difficile, ceci est dû à leur nature compliquée. La méthode de contrôle OGY ne peut pas être appliquée directement en raison de la grande quantité d'informations (détermination des orbites périodiques instables, influence du paramètre de contrôle,...) qui doivent être extraites du système. Pour cela, plusieurs auteurs proposent des méthodes de contrôle des systèmes dynamiques non linéaires à comportement chaotique d'ordre élevé [38, 48].

a/ OGY et directions instables

Romeiras *et al.* [38] proposent la méthode de placement des pôles afin de généraliser la méthode de contrôle OGY dans le sens où elle tient compte de plusieurs directions instables définies par la section de Poincaré. En introduisant des perturbations sur le paramètre, on modifie le comportement du système de façon à ramener les valeurs propres, régissant l'évolution dans le cercle unité.

La loi de contrôle est donnée par :

$$\delta x(i+1) = (A - BK)\delta x(i) \quad (1.42)$$

où K représente le vecteur gain.

Cette formule implique que le contrôle sera satisfaisant si et seulement si les valeurs propres de $(A - BK)$ sont dans le cercle unité.

Bien souvent, le calcul du point fixe ne se fait pas de manière analytique ; on doit donc utiliser des calculs numériques. De plus, il n'y a pas de méthodes strictes pour le choix des valeurs propres qu'on souhaite donner à la matrice $A - BK$. On procède à des choix arbitraires. Par exemple, on a l'habitude d'imposer une valeur propre inverse pour toute valeur propre instable.

b/ OGY et variétés invariantes

Dans une référence récente [48], les auteurs utilisent une méthode de contrôle du chaos basée sur les variétés invariantes. Cette méthode utilise le concept de variété invariante afin d'étendre la méthode OGY aux systèmes chaotiques de dimension élevée. L'intérêt de cette méthode est que la variété invariante est construite indépendamment des valeurs propres et vecteurs propres du système chaotique.

Lorsqu'on connaît les variétés invariantes passant par le point fixe avec précision, cela peut permettre de ramener rapidement le système au voisinage du point fixe, donc de réduire considérablement le régime transitoire, inhérent aux méthodes de contrôle du chaos.

L'objectif est de trouver la correction $\Delta p(i)$ à apporter pour obtenir une variété h invariante.

$$h(i+1) = C\Delta x(i+1) = CA\Delta x(i) + CB\Delta p(i) + C\rho(i-1) = 0 \quad (1.43)$$

C est un vecteur de contrôle à déterminer. $\rho(i-1)$ est une erreur appropriée au modèle glissant avec

$$\rho(i-1) = x(i) - Ax(i-1) - Bu(i-1) \quad (1.44)$$

La loi de contrôle sera donnée par :

$$\Delta p(i) = -(CB)^{-1} [CA\Delta x(i) + C\rho(i-1)] \quad (1.45)$$

1.3.2.3 Méthode de Pyragas

D'autres auteurs proposent de déterminer l'orbite périodique à stabiliser par une loi de contrôle à retour d'état [49, 65].

Ainsi, Pyragas [52] propose une méthode qui permet de stabiliser des orbites périodiques instables, en se basant sur la connaissance de leur ordre mais sans connaître leurs positions. La méthode n'exige pas le recours à la section de Poincaré, ni le calcul des valeurs propres, des vecteurs propres ou des vecteurs covariances. Elle se base simplement sur l'application d'un terme de retard d'état, afin de forcer l'évolution dynamique du système à suivre une

dynamique périodique désirée le long de sa période. Ainsi, le retard doit avoir la valeur exacte de la période de l'orbite périodique instable à stabiliser.

Soit le système dynamique défini par :

$$x(i+1) = F(x(i)) + u(i); \quad (1.46)$$

$u(i)$ est une fonction qui perturbe l'évolution dynamique de la variable x . F est une fonction non linéaire.

Supposons que ce système se comporte de manière chaotique pour $u = 0$. Par conséquent, on peut extraire à partir de la variable x plusieurs orbites périodiques de la forme :

$$x = x_i(i), \quad x_i(i + T_i) = x_i(i), \quad (1.47)$$

où T_i représente la période de la $i^{\text{ème}}$ orbite périodique instable.

Afin de stabiliser l'orbite périodique instable choisie, on conçoit le contrôle à retour d'état qui réinjecte dans le système la différence entre le signal $x(i)$ et $x(i - \tau)$ comme signal de contrôle :

$$u(i) = K[x(i - \tau) - x(i)] \quad (1.48)$$

où K représente le gain du contrôle et τ le retard d'état. La $i^{\text{ème}}$ orbite périodique instable se stabilise lorsque τ est égale à la période T_i . Cette loi de contrôle est appliquée lorsque la trajectoire chaotique est autour de l'orbite périodique instable qui se définit par :

$$|x(i - \tau) - x(i)| < \varepsilon \quad (1.49)$$

avec ε un petit nombre positif.

Une version plus générale de la méthode de Pyragas est donnée dans la référence [55]. Elle consiste à mettre

$$u(i) = K[x(i - \tau) - x(i)] + Kru(i - 1) \quad (1.50)$$

avec $|r| < 1$.

Dans la référence [56], pour stabiliser une solution périodique, la loi de contrôle est donnée par :

$$u(i) = G(p)[x(i - \tau) - x(i)] \quad (1.51)$$

où $G(p)$ représente la fonction de transfert du filtre déterminée à partir de la stabilité du système autour de sa solution périodique.

D'autres modifications ont été apportés à la méthode de Pyragas pour contrôler tout type de systèmes chaotiques. Ainsi, Nakajima & Ueda [58] l'appliquent aux systèmes avec symétrie. Konishi & Kokam [59] étendent la méthode et l'appliquent aux système couplés. Les mêmes auteurs proposent une extension de la méthode de Pyragas pour inclure un observateur estimant la différence entre la variable d'état du système et la trajectoire instable désirée [60]. Contrôle des systèmes chaotiques à retard d'état [65] et divers autres extensions.

1.3.2.4 *Autres méthodes*

Plusieurs auteurs proposent et développent d'autres méthodes pour le problème de stabilisation dont on peut citer à titre d'exemple : le contrôle adaptatif [66, 67], l'approche de linéarisation entrée-sortie [68], l'analyse dans le domaine fréquentiel [69, 70], la méthode ZSR (Zero-Spectral-Radius) [71], le contrôle optimal [72], le contrôle adaptatif [73], le contrôle pic à pic de la dynamique complexe [74],[77], le principe de séparation [76], par mode glissant [80] et divers autres méthodes.

1.3.3 **Applications expérimentales des méthodes de contrôle des systèmes chaotiques**

Le contrôle du chaos a trouvé des applications expérimentales intenses dans divers domaines physiques. La première application expérimentale était réalisée à la fin de 1990 [97]. L'implantation du contrôle permet de stabiliser une orbite périodique dans la dynamique d'un ruban magnétoélastique. Le ruban montre plusieurs changements lorsqu'il est excité par des petits champs magnétiques. La loi de contrôle OGY est appliquée en prenant comme paramètre de contrôle l'amplitude de la composante du champs magnétique. Le contrôle

est achevé après 200000 itérations (64 heures environ) avec un maximum de perturbation d'environ 9% sur le paramètre non perturbé.

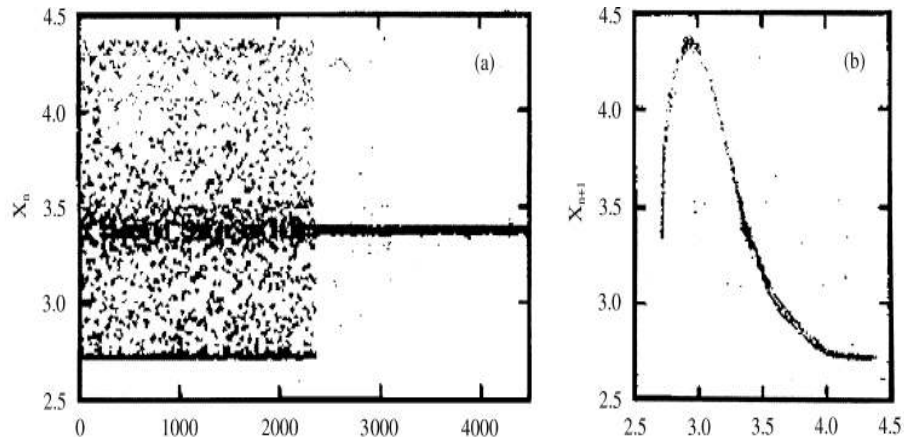


Figure 1.4 : Contrôle de chaos (extraite de la réf. [97]). (a) Série temporelle avant et après déclenchement du contrôle. (b) Section de Poincaré.

Cette expérience constitue la première évidence de la fiabilité de la technique OGY pour le contrôle du chaos. Dès lors, les scientifiques cherchés à exploiter pleinement la dynamique chaotique et à réaliser des comportements réguliers.

1.3.3.1 Contrôle du chaos dans les circuits électroniques

Dans une expérience citée dans la référence [34], l'auteur propose de stabiliser des comportements périodiques plus compliqués en utilisant la méthode OPF. Dans cette expérience, la jonction p-n d'une diode est excitée par une tension harmonique, le comportement du système montre une bifurcation par doublement de période, pour aboutir à un régime chaotique. Le processus de contrôle est réalisé par l'utilisation d'un convertisseur courant-tension qui envoie le signal de sortie à un comparateur électronique, et qui fournit par la suite l'impulsion de commande. La durée de l'impulsion peut être ajustée à tout moment, mais elle est toujours limitée pour être petite en fonction des oscillations.

Les résultats prouvent que les petites perturbations (environ 0.5%) peuvent stabiliser les orbites périodiques basses tandis que le contrôle des orbites périodiques élevées nécessite une force de perturbation plus grande (environ 10%). De telles perturbations peuvent induire

des modifications importantes dans la forme des orbites contrôlées.

Inaba et Nitnai [98] utilisait la même technique OPF pour le contrôle du chaos dans un circuit électronique contenant un générateur d'impulsions. Le circuit est donné par la figure (1.5).

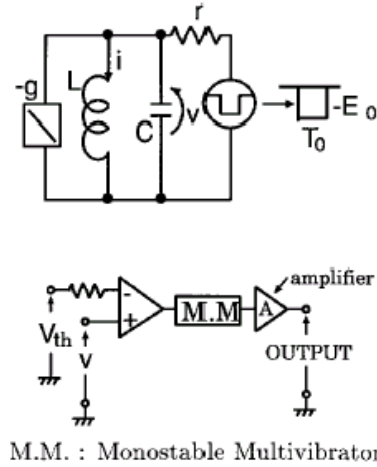


Figure 1.5 : Circuit électronique (extraite de la réf. [98]).

où r , $-g$, L et C représentent respectivement une résistance, un conducteur linéaire négatif, une inductance et un condensateur. Le générateur d'impulsion contient un comparateur, un monostable et un amplificateur.

Le générateur fournit une tension impulsionnelle d'amplitude $-E_0$ et de magnitude T_0 . Le contrôle de ce circuit est réalisé par simulation ainsi que par expérimentation.

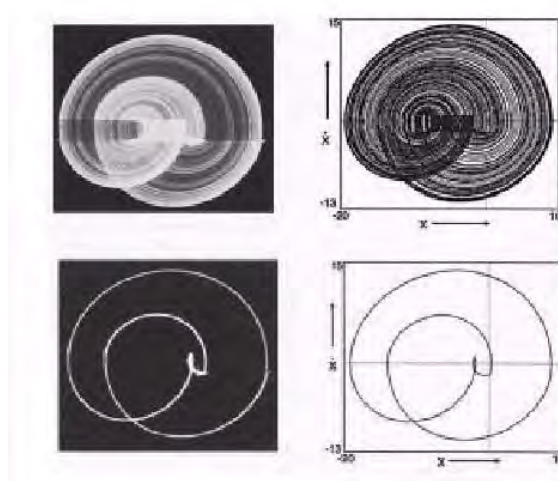


Figure 1.6 : Contrôle du circuit électronique (extraite de la réf. [98]).

Le contrôle permet de générer une multitude d'orbites périodiques instables.

D'autre part, Ogorzalek [99] parvient expérimentalement à contrôler le célèbre circuit électronique à comportement chaotique connu sous le nom du circuit de Chua [9, 10]. Par contre, le contrôle par simulation numérique ne pouvait que supprimer le chaos ou contrôler le circuit sur une orbite périodique de bas dimension. A notre connaissance, les références disponibles ne révèlent aucune technique qui parvient à maintenir la trajectoire du système sur l'orbite périodique instable originale.

1.3.3.2 *Contrôle du chaos dans les systèmes chimiques*

L'existence du chaos dans les systèmes chimiques est dû généralement à la variation imprévisible de la concentration de quelques composants qui influent sur une réaction chimique.

La première expérience de contrôle a été réalisée par le groupe de Showalter [103] sur le système chimique à comportement chaotique connu sous le nom de la réaction de Belousov-Zhabotinsky (BZ), où un acide d'oxydation ion-catalysé est produit dans un réacteur continu. La perturbation $\Delta\mu = (A_n - A_s)/g$ est directement calculé comme fonction de A_n qui représente le potentiel dans une électrode de bromure, et A_s la valeur du point fixe obtenue à partir de la carte de Poincaré. Le facteur g est évalué en mesurant la distance entre deux valeurs du paramètre A_n . L'algorithme de contrôle a été mis en évidence afin de contrôler une orbite de période 1 et une orbite de période 2.

Le contrôle d'une autre expérience chimique est développé dans la référence [104].

1.3.3.3 *Contrôle du chaos dans les lasers*

Le système chaotique est un laser à fibre (NDFL) pompé par une diode laser (DL) [105]. La stabilisation du laser est obtenue en contrôlant celui-ci sur une orbite périodique instable de période nT par la technique de contre-réaction.

A chaque période de l'orbite considérée, on échantillonne le signal de sortie I_k et on mémorise sa valeur précédente I_{k-1} , au moyen des deux échantillonneurs ECH1 et ECH2 (la valeur de I_k peut être considérée comme une coordonnée dans la section de Poincaré). On

applique à un paramètre de contrôle (ici la puissance de pompe) une impulsion d'amplitude $d\mu_k$ proportionnelle à $I_k - I_{k-1}$. En choisissant correctement la forme de l'impulsion et le gain total de la contre-réaction, le laser se stabilise sur une orbite périodique.

Il est également possible de stabiliser le laser sur son état stationnaire instable en remplaçant le dispositif de contrôle par un simple dérivateur analogique.

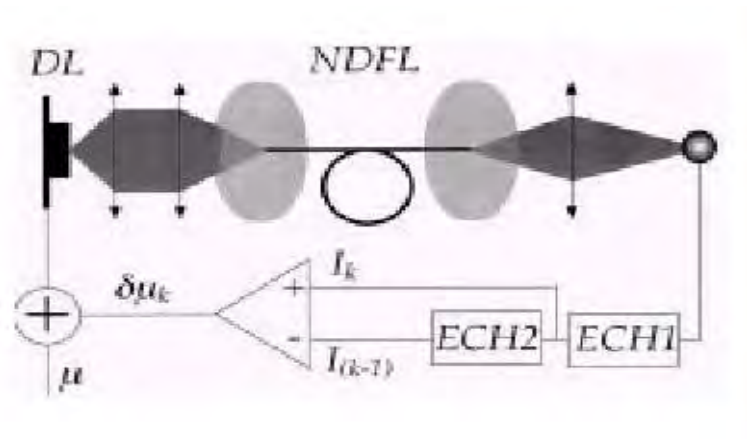


Figure 1.7 : Le principe du laser (extraite de la réf. [105]).

Ainsi, le laser a été stabilisé en considérant l'intensité I du laser comme variable dynamique et la puissance de la pompe comme paramètre de contrôle (figure 1.7). Une correction proportionnelle à la dérivée de l'intensité s'est avérée suffisante, permettant ici aussi de s'affranchir de la détermination du point fixe I_F d'un amplificateur à gain variable. En choisissant un gain suffisamment grand, le laser a pu être stabilisé dans tout le domaine où il avait précédemment un comportement oscillant ou chaotique.

D'autres applications du contrôle du chaos dans les lasers peuvent être consultés aux références [106, 108].

1.3.3.4 Contrôle du chaos dans les fluides

Les premières expériences de contrôle du chaos dans les fluides ont été rapportées par Singer *et al.* [109]. Dans cette expérience, un fluide est pompé dans une cellule toroïdale en position verticale. La moitié inférieure de la cellule est entourée par un réchauffeur, tandis que la partie supérieure est maintenue à une plus basse température par un bain thermique.

Ce système particulier provoque une dynamique qui peut être réduite au modèle de Lorenz. Le régime chaotique est constitué par des sauts entre deux bassins d'attraction correspondant aux deux orientations possibles dans la direction de rotation du flux. Le paramètre de contrôle est la puissance délivrée au réchauffeur. L'algorithme de contrôle consiste en une perturbation proportionnelle à la différence de température entre les régions où le flux passe du haut à la partie plus inférieure de la cellule. Le régime chaotique est dû aux changements de la direction du flux. De telles oscillations chaotiques sont supprimées une fois le contrôle activé.

1.3.3.5 Contrôle du chaos dans les systèmes biologiques

La première expérience dans ce cadre a été rapportée par Garfinkel *et al.* [36]. Les auteurs emploient la méthode OGY pour le contrôle d'un muscle cardiaque d'un lapin. La particularité de ce cas est que la perturbation, au lieu d'être appliquée sur l'amplitude du signal, elle est appliquée sur une variable du système dans le but de changer les intervalles des battements du cœur.

Un autre exemple de contrôle du chaos dans les systèmes biologiques est le contrôle de l'activité neuronale réalisée par Schiff *et al.* [110].

Piccardi et Lazzaris [111] proposent une technique basée sur la méthode OGY pour la réduction du chaos et l'épidémie chez les enfants, le modèle utilisé est un modèle continu, périodique et non linéaire. Quand il est incontrôlé, le comportement du système peut être chaotique. L'objectif du contrôle consistait en la minimisation de la valeur moyenne du nombre de cas infecté par an ainsi que la minimisation de nombre de cas détecté chaque année.

1.3.3.6 Réalisations expérimentales du contrôle à retour d'état

Les réalisations expérimentales du contrôle du chaos par la méthode de contrôle à retour d'état retardé ont été rapportées par Pyragas et Tamasevicius [112]. L'expérience consistait en un oscillateur électronique non linéaire piloté par une diode tunnel. Les auteurs utilisent essentiellement la même diode que celle employée dans l'expérience réalisée dans [34] mais

avec une fréquence plus élevée (de l'ordre de 10.3 MHz). Le signal de contrôle est choisi en comparant le signal de sortie au signal de retard d'un temps τ correspondant à la période de l'orbite désirée. En ces conditions, les auteurs pouvaient stabiliser plusieurs orbites de périodicité différente.

La même technique a été utilisée avec succès pour le contrôle des systèmes électriques et électroniques [113], et beaucoup d'autres expériences [114, 119].

1.3.3.7 Autres expériences

On devrait mentionner ici le grand nombre des réalisations expérimentales de contrôle du chaos.

Plus récemment, le contrôle du chaos a été réalisé dans les systèmes d'ordre élevé, à savoir le contrôle des convertisseurs DC-DC [121], le contrôle du chaos dans un réacteur nucléaire [122]. La suppression du chaos d'une convection magnétique [123], etc.

Pour amples détails sur les applications expérimentales du contrôle du chaos, le lecteur peut se référer aux références suivantes [124, 132].

1.4 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons présenté les principales méthodes proposées dans la littérature pour le contrôle du chaos, ainsi que leurs applications expérimentales.

Le contrôle du chaos peut avoir un impact technologique considérable. Un système chaotique ayant une infinité d'orbites périodiques, il est en effet possible, par d'infimes variations des paramètres, de commuter d'une orbite à une autre, et de tirer ainsi d'un système chaotique toute une harmonie de signaux périodiques différents. Il importe évidemment de généraliser les méthodes actuelles, notamment pour stabiliser les orbites les plus instables, ou, si l'on désire, contrôler des systèmes à grand nombre de degrés de liberté, les orbites à plusieurs directions instables. Considéré dans sa globalité, un attracteur chaotique ne révèle en toute rigueur cet ordre que dans la limite d'un temps infini. En le décomposant en orbites périodiques instables, c'est un ordre local, à court terme, qui devient accessible.

Nous soulignons que la pleine connaissance de la dynamique d'un système chaotique n'est pas nécessaire afin de le contrôler. Ainsi, nous avons besoin seulement de savoir l'endroit de l'orbite périodique désirée et la dépendance de cette dernière à la petite variation du paramètre de contrôle.

Chapitre II

CONTRÔLE DES SYSTÈMES CHAOTIQUES D'ORDRE ÉLEVÉ

2.1 Introduction

Parmi les différentes méthodes de contrôle existantes et d'après ce que l'on a pu lire, il n'y a pas de méthode générale permettant de contrôler tous les systèmes chaotiques. Chaque système a ses propres caractéristiques intrinsèques et se comporte de manière très différentes par rapport aux autres systèmes. C'est la raison pour laquelle il nous a semblé important de consacrer ce chapitre à une contribution ayant pour finalité la proposition d'une procédure de contrôle, capable de contrôler le comportement chaotique dans la plupart des systèmes chaotiques continus.

La technique proposée est simple et efficace qui se base sur la méthode OGY et la méthode de contrôle à retard d'état afin de contrôler le plus de systèmes chaotiques possibles et de montrer son efficacité sur plusieurs exemples [82, 88]. Les applications seraient énormes, s'étendant du contrôle des fluides turbulents, à la transmission des signaux chaotiques, au codage et décodage d'informations, au contrôle des vibrations cardiaques, et ainsi de suite.

Le système contrôlé doit être toujours dans un domaine où il conserve naturellement toutes ses propriétés dynamiques et chaotiques. On se propose, dans ces conditions, de lui imposer une trajectoire définie (mais aussi imposée en partie par la méthode de contrôle). Cette trajectoire constitue une orbite périodique instable et le système contrôlé évoluera de manière périodique et de manière parfaitement prédictible.

pour cela, on s'impose les objectifs suivants :

- le contrôle doit toujours être réalisable : le contrôle doit fonctionner sur un système

- chaotique indépendamment du temps où l'algorithme de contrôle qui lui est appliqué.
- la transition entre l'état libre et l'état contrôlé doit être rapide : on doit pouvoir appliquer rapidement l'algorithme de contrôle et celui-ci doit être rapidement efficace.
- le contrôle doit être durable dans le temps : une fois que le contrôle devient effectif et le système stabilisé, le système contrôle doit rester actif durablement.
- le contrôle doit être non destructif : comme nous l'avons déjà signalé, le système doit conserver ses propriétés dynamiques et ne doit donc pas être détruit ou modifié fondamentalement par le contrôle.

2.2 *Principe*

Pour les systèmes discrets, à chaque passage de la trajectoire à proximité du point fixe, la correction agit instantanément.

Dans le cas d'un système dynamique continu, le système évolue en fonction du temps. Le système doit donc mettre un certain temps pour réagir à cette action. Il est alors plus cohérent de considérer qu'il existe un retard entre le calcul de la correction à appliquer et la modification effective de la grandeur du contrôle. C'est un paramètre qui doit être modifié.

Pour le contrôle de tels systèmes, l'algorithme de contrôle à été construit comme suit :

- Détecter l'instant où la trajectoire du système passage par le point fixe : le point se trouve dans un cercle unitaire autour du point fixe selon le plan de la variable d'état choisie.
- Calculer la loi de contrôle.
- Contrairement à la méthode de Pyragas [52], le même concept que celui de la méthode de contrôle OGY est maintenu, sauf que le retard d'état est réalisé par l'introduction d'un élément assurant le retardement du contrôle. C'est cette tâche qui s'avère la plus délicate une fois le contrôle est bien défini.

Etant donné qu'une orbite périodique est représentée par des points fixes dans la section de Poincaré, on s'attend à ce que la trajectoire du système visite le voisinage de ces points

selon la loi de contrôle. Lorsque la variable d'état du système entre cette région, on va chercher à ce que la prochaine variable d'état suive la direction stable, en utilisant une petite perturbation paramétrique. En d'autres termes, on apporte une déviation $\delta x(i) = x(i) - x_f$ pour que la trajectoire se retrouve sur la direction stable linéarisée.

La loi de contrôle (2.1) est directement dérivée de la section de Poincaré :

$$\delta p(i) = \frac{\partial p}{\partial x_f}(x(i) - x_f) \quad (2.1)$$

$\frac{\partial p}{\partial x_f}$ représente l'influence d'une petite variation paramétrique sur la variation du point fixe.

Cette loi de contrôle agit instantanément sur le système. Cependant, dans de certains cas réels, l'état futur d'un système chaotique dépend aussi bien de la variation paramétrique courante que des variations paramétriques précédentes ; le système va donc prendre un certain temps pour réagir à la correction et suivre la trajectoire désirée. Il semble alors raisonnable, d'attendre un peu de temps avant d'appliquer la loi de contrôle et de modifier le paramètre de contrôle. Ceci a pu être réalisé en intégrant dans la loi de contrôle, la valeur précédente du paramètre de contrôle. L'influence de cette valeur est définie par [87] :

$$\delta p(i) = \frac{\partial p}{\partial x_f}(x(i) - x_f) + \gamma \delta p(i - 1) \quad (2.2)$$

En termes de qualité, une fois le contrôle activé, le système est maintenu à sa nouvelle trajectoire le long de son évolution. Ce critère de stabilité est assuré par un bon choix de γ pour que chaque système chaotique soit parfaitement contrôlé.

La construction la loi de contrôle est basée sur la linéarisation autour du point fixe. Le contrôle est appliqué dans le voisinage local d'un point fixe. De ce fait, la région de contrôle est définie par l'ensemble des points suivants :

$$\{\delta : \delta x_1^2(i) + \delta x_2^2(i) < 1\} \quad (2.3)$$

qui définissent un cercle unitaire autour du point fixe à stabiliser. On assume que tout point se trouvant dans le proche voisinage du point fixe, finira par la suite dans le voisinage local et sera alors contrôlé.

2.3 Applications aux systèmes d'ordre élevé

Dans ce qui suit, on applique la méthode proposée pour le contrôle de quelques systèmes chaotiques d'ordre élevé.

2.3.1 Système de Chen

Le système de Chen [16] est un système chaotique continu défini par les équations (2.4) :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a - z)x + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.4)$$

La première étape de cette étude consiste à retrouver et identifier les principales propriétés de ce système en se basant sur la théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

Ce système admet trois points d'équilibre qui sont l'origine $C^0(0, 0, 0)$, ainsi que deux points fixes symétriques :

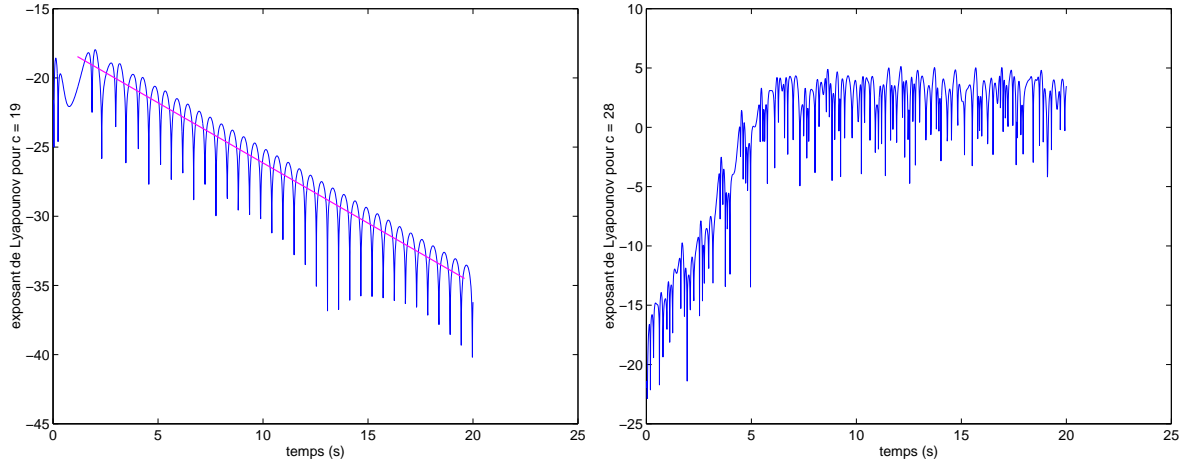
$$\begin{aligned} C^+ & \left(\sqrt{b(2c - a)}, \sqrt{b(2c - a)}, (2c - a) \right) \\ C^- & \left(-\sqrt{b(2c - a)}, -\sqrt{b(2c - a)}, (2c - a) \right) \end{aligned} \quad (2.4.a)$$

2.3.1.1 La stabilité

Le stabilité du système dépend des paramètres a, b et c . On supposera que a et b sont constants ($a = 35$ et $b = 3$) et que le paramètre c est variable. L'étude de la stabilité du système a été faite par deux méthodes : la méthode de Lyapounov et la méthode de l'espace de phase.

a/ Méthode de l'exposant de Lyapounov

On considère deux conditions initiales très proches : $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, 20)$ et $(\acute{x}_0, \acute{y}_0, \acute{z}_0) = (-3 + 10^{-5}, 2, 20)$. Le calcul de l'exposant de Lyapounov se fait à partir d'une simulation numérique et la différence logarithmique entre l'évolution des variables d'états du système x, y et z , les résultats obtenus sont représentés par les figures 2.1 (a) et (b).



(a) (b)
Figure 2.1 : Exposants de Lyapounov du système de Chen.

(a). Exposant de Lyapounov pour $c = 19$. (b). Exposant de Lyapounov pour $c = 25$.

Dans le premier cas, et pour $c = 19$, on voit bien que pour une différence de 10^{-5} sur la valeur initiale, la courbe est décroissante, avec une pente $\lambda = -0.44$. Les deux orbites se rapprochent l'une de l'autre, le système est stable. Dans le deuxième cas, l'exposant de Lyapounov est estimé à $\lambda = 1.48$, un exposant positif implique la divergence des trajectoires voisines c'est à dire que pour ces valeurs des paramètres du système, on a un comportement chaotique.

b/ Méthode de l'espace de phase

La stabilité du système dépend essentiellement du paramètre c . Une fois les points fixes déterminés, on peut calculer la matrice jacobienne du système.

Elle est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ (c - a - z) & c & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Pour étudier la stabilité du système, il faut calculer les valeurs propres du système pour chaque point fixe. Cela revient à étudier le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - J]$ pour chaque point fixe du système.

1. Au point fixe $C^0(0, 0, 0)$:

La Jacobienne est égale à :

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ (c-a) & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

d'où :

$$[\lambda I - J] = \begin{bmatrix} \lambda + a & -a & 0 \\ -(c-a) & \lambda - c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + b \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = \det [\lambda I - J] = (\lambda + b)(\lambda^2 - (c-a)\lambda + a(a-2c)) \quad (2.8)$$

Pour que le système soit stable, il faut que les parties réelles de toutes les valeurs propres soient négatives.

La première valeur propre est :

$$\lambda_1 = -b = -3 < 0 \quad (2.9)$$

Pour que le système soit stable, il faut que les racines de :

$$\lambda^2 - (c-a)\lambda + a(a-2c) \quad (2.10)$$

soient à parties réelles négatives.

Les deux racines de ce polynôme sont :

$$\lambda_{2,3} = \frac{(c-a) \pm \sqrt{(c-a)^2 - 4a(a-2c)}}{2} \quad (2.11)$$

Elle sont négatives si $c < a/2$ et positives si $c > a/2$. Donc, le système est stable au point fixe C^0 pour $c < 17.5$ et instable pour $c > 17.5$.

2. Aux points fixes C^+ et C^-

Nous avons

$$[\lambda I - J] = \begin{bmatrix} \lambda + a & -a & 0 \\ -(c - a - z) & \lambda - c & -x \\ -y & -x & \lambda + b \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

En remplaçant x, y et z par les valeurs des points fixes, on obtient :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + bc\lambda + 2ab(2c - a). \quad (2.13)$$

Ce polynôme a une racine réelle négative :

$$\lambda_1 = -b \quad (2.14.a)$$

et deux racines complexes, qu'on désigne par :

$$\lambda_{2,3} = \alpha \pm j\beta \quad (2.14.b)$$

Si α , la partie réelle de la racine complexe est positive, alors, les point fixes sont instables.

$$p(\lambda) = (\alpha \pm j\beta)^3 + (a + b - c)(\alpha \pm j\beta)^2 + bc(\alpha \pm j\beta) + 2ab(2c - a). \quad (2.15)$$

Après simplification, on obtient la formule de α :

$$\alpha^3 + (a + b - c)\alpha^2 + \frac{1}{4}(a + b - c + 2bc) + \frac{1}{8}(bc(a + b - c) - 2ab(2c - a)) = 0 \quad (2.16)$$

La stabilité se définit par rapport à α , alors :

$$\alpha = 0 \implies bc(a + b - c) - 2ab(2c - a) = 0 \quad (2.17)$$

Donc :

$$c^2 + (3a - b)c - 2a^2 = 0. \quad (2.18)$$

La stabilité des points fixes C^+ et C^- dépend de la valeur du paramètre c . Par conséquent, la valeur pour laquelle la partie réelle de la racine complexe s'annule, s'obtient à partir de l'équation (2.18) comme suit :

$$c = \frac{1}{2} \left((b - 3a) \pm \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2} \right) \quad (2.19)$$

Par référence à la théorie des bifurcations, la valeur du paramètre de contrôle pour laquelle, les racines du polynôme caractéristique sont purement imaginaires s'appelle point de bifurcation de Hopf. Elle est égale dans notre cas $c = 20.070$.

L'allure de la variation des valeurs propres en fonction du paramètre c pour les différents points fixes est représentée sur les figures suivantes :

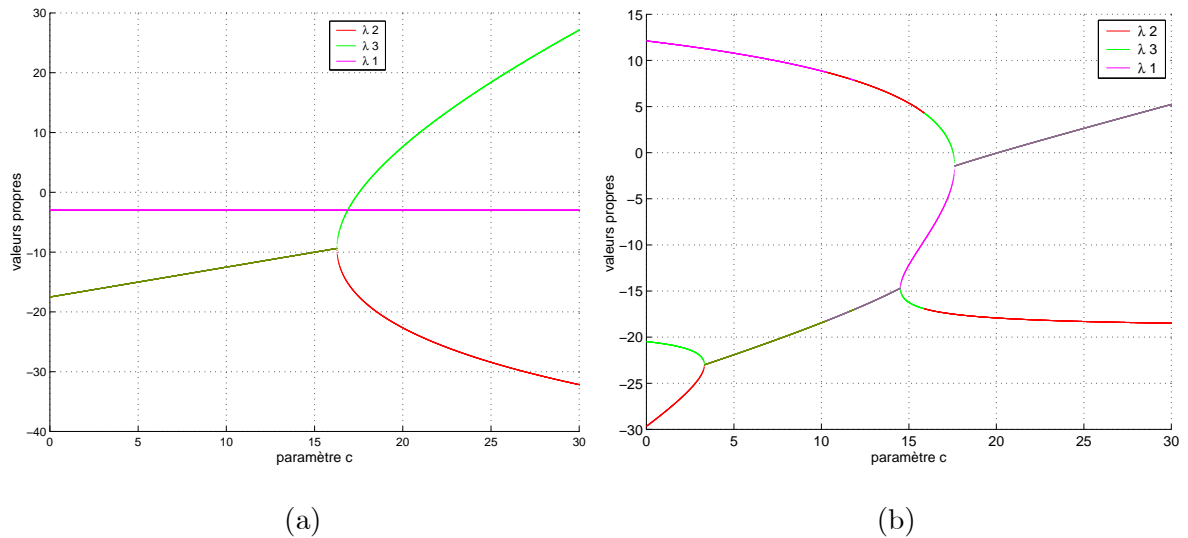


Figure 2.2 : Variation des valeurs propres du système de Chen.

(a) Pour point fixe C^0 . (b) Pour points fixes C^+ et C^- .

Le système est stable sur son point fixe C^0 pour $c < 17.5$, puis devient instable pour $c > 17.5$. Pour les deux points fixes C^+ et C^- , le système est stable pour $c < 20.07$ et instable pour $c > 20.07$.

2.3.1.2 Diagramme de bifurcation

Afin de déterminer les changements qualitatifs dans la dynamique du système lors du changement des valeurs du paramètre c ainsi que le type de bifurcation et leur nature, nous avons effectué des simulations en variant le paramètre c de 0 à 30.

La figure (2.3) représente l'évolution de la coordonnée x en fonction du paramètre c .

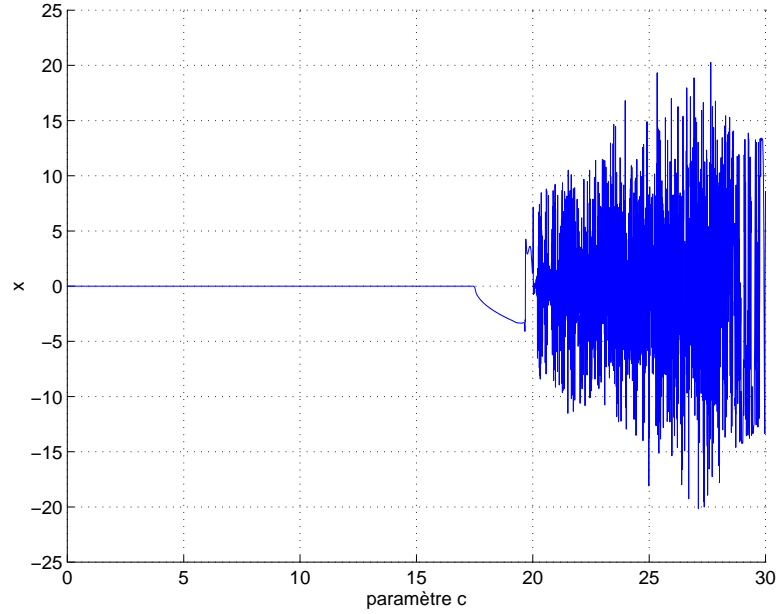


Figure 2.3 : Diagramme de bifurcation du système de Chen.

Lors de l'évolution du système en fonction du paramètre c , le comportement du système subit trois changements qualitatifs :

1. Pour $c < 17.5$ quelque soit le point initial, la trajectoire converge vers le point d'équilibre C^0 . Le système est stable autour de ce point d'équilibre.

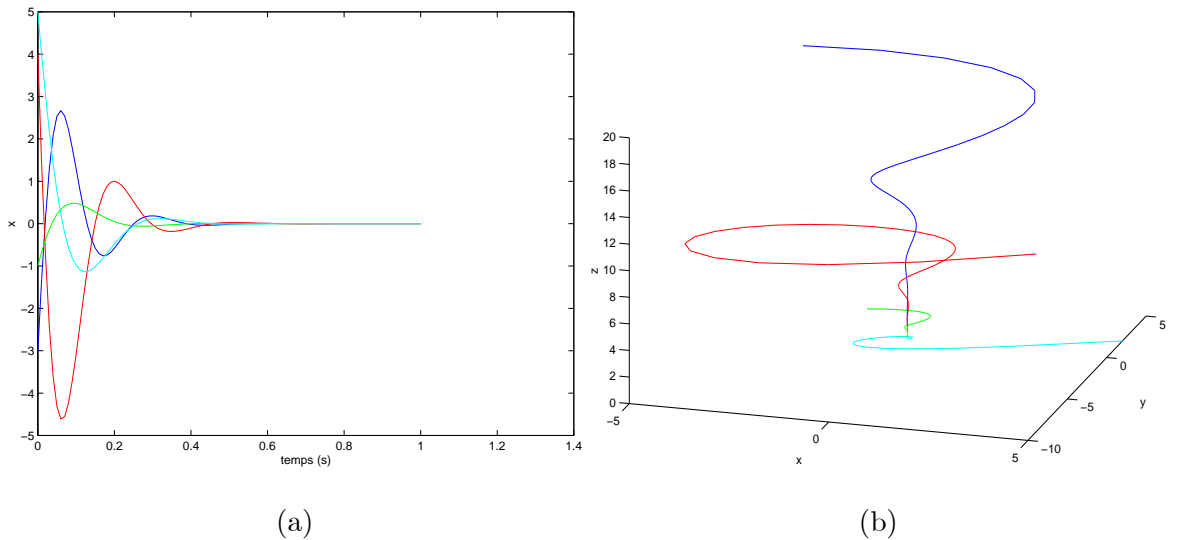


Figure 2.4 : Evolution du système pour $c = 12$. (a) Variable d'état x . (b) Espace de phase.

2. Pour $17.5 \leq c < 20.07$. Un changement de comportement se produit à partir de $c = 17.5$. Le point C^0 n'est plus un point stable, et le système se stabilise sur l'un des

points fixes C^+ ou C^- (C^- en particulier).

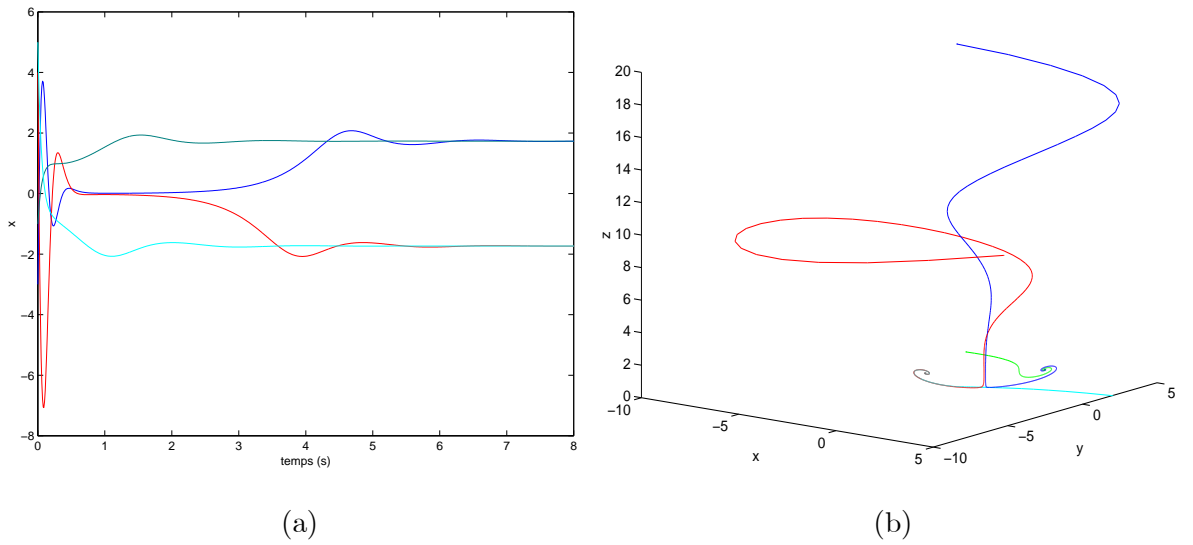


Figure 2.5 : Evolution du système pour $c = 18$. (a) Variable d'état x . (b) Espace de phase.

3. A $c = 20.07$ les deux points fixes C^+ et C^- perdent leur stabilité en une bifurcation de Hopf. Pour $c > 20.07$, le système ne contient aucun point fixe stable et devient alors chaotique. L'état du système change complètement. La trajectoire tourne toujours autour de l'attracteur et les coordonnées calculées sont alors quelconques.

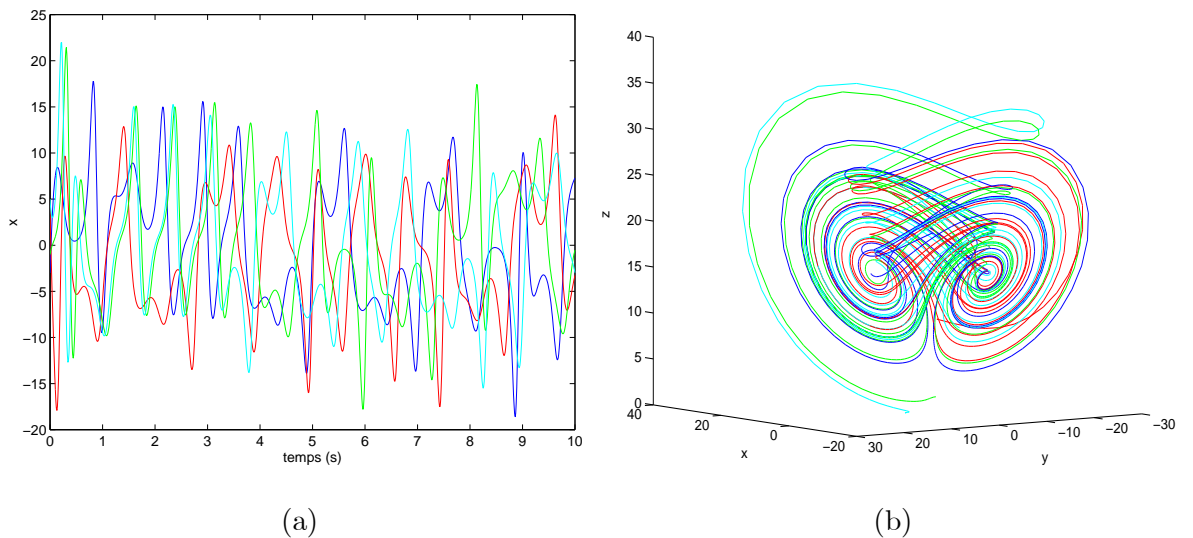


Figure 2.6 : Evolution du système pour $c = 25$. (a) Variable d'état x . (b) Espace de phase.

2.3.1.3 Contrôle du système de Chen

Pour des valeurs des paramètres $a = 35$, $b = 3$ et $c = 28$, la trajectoire du système est gouvernée par un état chaotique. Afin de contrôler ou stabiliser le système sur son orbite

périodique instable, on doit déterminer la section de Poincaré. Pour ce qui est de ce système, la section de Poincaré correspond à l'ensemble des points de l'attracteur tel que l'attracteur soit au maximum. C'est à dire : $Z = Z_{max}$.

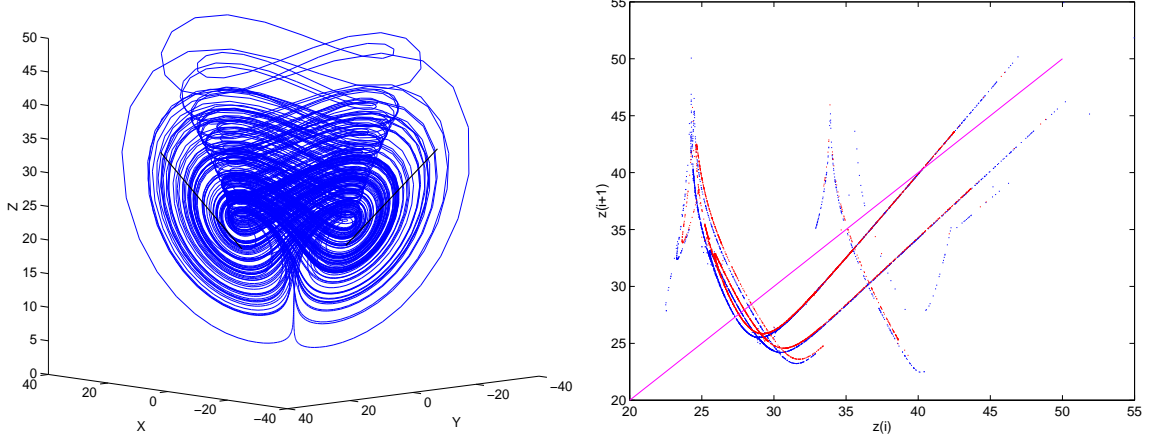


Figure 2.7 : Section de Poincaré.

Le point fixe correspond à l'intersection de la courbe du système avec la diagonale. La variable d'état z du point fixe obtenu, est :

$$z_f = 27.2725 \quad (2.20)$$

Pour déterminer l'influence du paramètre c sur la loi de contrôle, nous prenons une valeur proche $c = 28.10$, on obtient :

$$z_f = 27.5193 \quad (2.21)$$

La loi de contrôle sera donnée par :

$$\begin{aligned} \delta c(i) &= \frac{\partial c}{\partial z_f}(z(i) - z_f) + \gamma \delta c(i - 1) \\ &= \frac{28.2 - 28}{27.759 - 27.294}(z(i) - z_f) + \gamma \delta c(i - 1) \end{aligned} \quad (2.22)$$

c'est à dire :

$$\delta c(i) = 0.43(z(i) - z_f) + \gamma \delta c(i - 1) \quad (2.23)$$

Le résultat du contrôle est montré dans la figure (2.8).

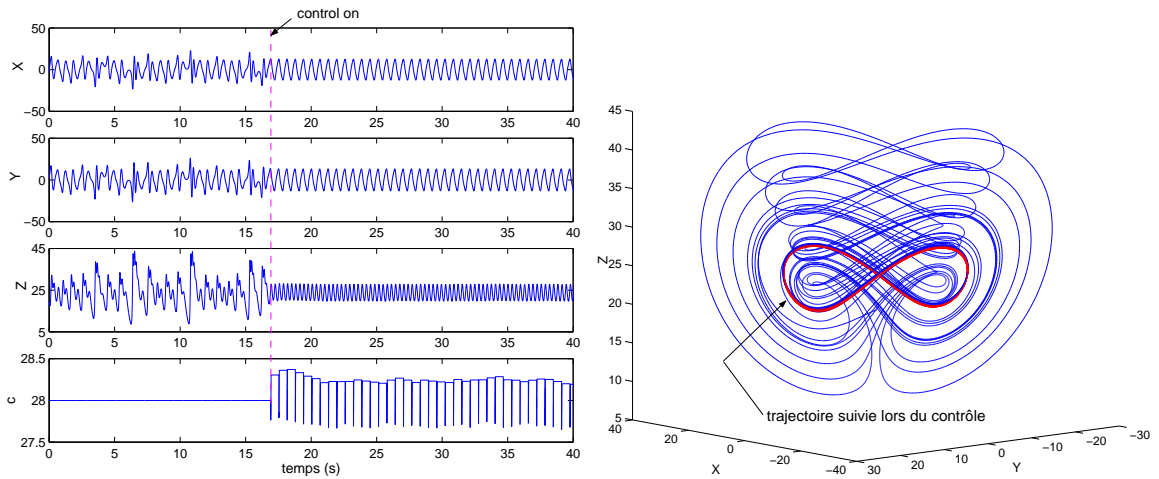


Figure 2.8 : Contrôle du système de Chen.

On peut voir que, pour stabiliser le chaos sur l'une de ses orbites périodiques instables (UPO), le contrôle génère un train d'impulsions. Chaque impulsion est activée automatiquement de sorte que, pour une amplitude déterminée par la section de Poincaré à chaque passage du point fixe, l'orbite du système converge vers l'UPO désirée. La méthode fonctionne par application des impulsions périodiques aux variables du système. Cette stratégie de contrôle est testée avec différentes conditions initiales et s'est avérée très robuste.

Si, pour différentes raisons, on veut désactiver le contrôle après l'avoir maintenu actif pendant un certain temps, le système reprend son état chaotique comme nous pouvons le constater sur la figure (2.9).

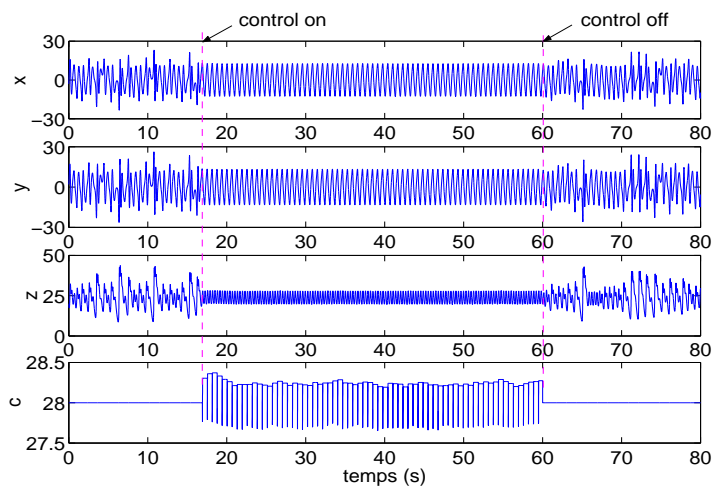


Figure 2.9 : Relâchement du contrôle.

2.3.2 Circuit de Chua

Le circuit de Chua [9, 10] est défini par l'ensemble des équations différentielles d'ordre 3 suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha (y - x - g(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (2.24)$$

où

$$g(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} (|x + 1| - |x - 1|) \quad (2.25.a)$$

représente l'élément non linéaire du circuit avec

$$g(x) = \begin{cases} m_1 x + (m_0 - m_1) & \text{si } x \geq 1 \\ m_0 x & \text{si } |x| < 1 \\ m_1 x - (m_0 - m_1) & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \quad (2.25.b)$$

Les points fixes du systèmes sont donnés par :

$C_0 = (0, 0, 0)$, ainsi que deux points fixes

$$C_1 = \left(\frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1}, 0, \frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1} \right), \quad C_{-1} = \left(\frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1}, 0, \frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1} \right). \quad (2.25.c)$$

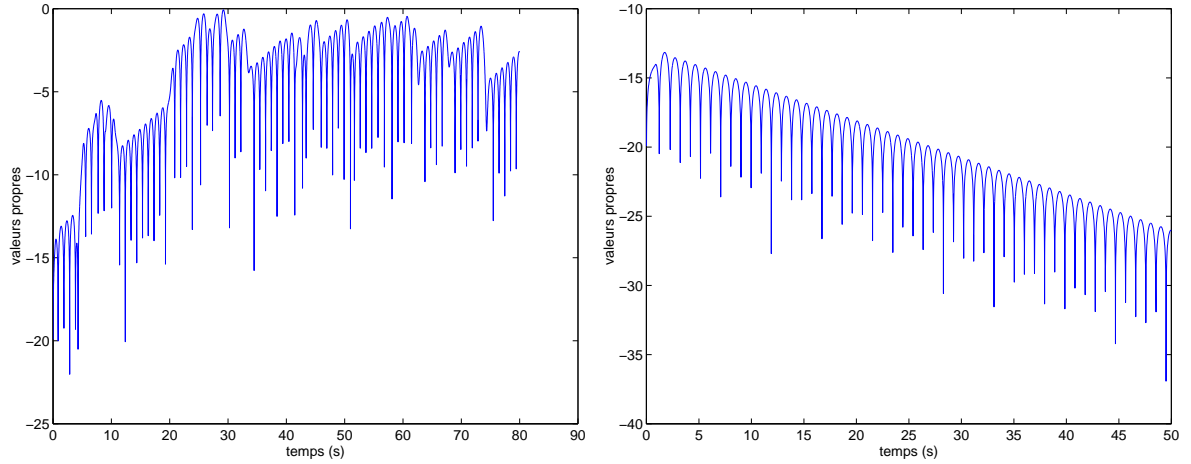
2.3.2.1 La stabilité

Pour l'étude du système, les paramètres β , m_0 et m_1 sont pris constant égaux à $\beta = 14.87$, $m_0 = -1.27$ et $m_1 = -0.68$ et α variable.

a/ Stabilité par exposant de Lyapounov

A partir de deux conditions initiales très proches et pour $\alpha = 5$ et $\alpha = 10$, on mesure le taux de divergence entre les deux orbites créés par les deux évolutions. Pour ces valeurs de α , le système a deux comportements différents.

Les deux conditions initiales sont : $(x_0, y_0, z_0) = (-0.1, -0.1, -0.1)$ et $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0) = (-0.1 + 10^{-4}, -0.1, -0.1)$.



(a) (b)
Figure 2.10 : Exposants de Lyapounov du système de Chua.

(a). Exposant de Lyapounov pour $\alpha = 5$. (b). Exposant de Lyapounov pour $\alpha = 10$.

Les figures 2.10 (a et b), montrent que pour une valeur de $\alpha = 5$, la courbe est décroissante avec une pente $\lambda = -0.25$. La valeur négative signifie que les deux orbites se rapprochent l'une de l'autre, alors le système est stable. Par contre, pour une valeur de $\alpha = 10$, l'exposant de Lyapounov est estimé à $\lambda = 0.39$. Cette valeur positive signifie une divergence entre les deux orbites initiales, le système est chaotique.

b/ Méthode de l'espace de phase

Une fois les points fixes déterminés, on calcule la matrice Jacobienne du système pour ces différents points fixes. La matrice Jacobienne est donnée par

$$J = \begin{bmatrix} \alpha(-1 - \dot{g}(x)) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

1. Au point fixe C_0

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha(1 + m_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \implies [\lambda I - J] = \begin{bmatrix} \lambda + \alpha(1 + m_0) & -\alpha & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & \beta & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $[\lambda I - J]$.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det [\lambda I - J] = (\lambda + \alpha(1 + m_0)) (\lambda(\lambda + 1) + \beta) - \alpha\lambda \\ &= \lambda^3 + (\alpha(1 + m_0) + 1) \lambda^2 + (\beta + \alpha m_0) \lambda + \alpha\beta(1 + m_0) \end{aligned} \quad (2.28)$$

2. Aux points C_1 et C_{-1}

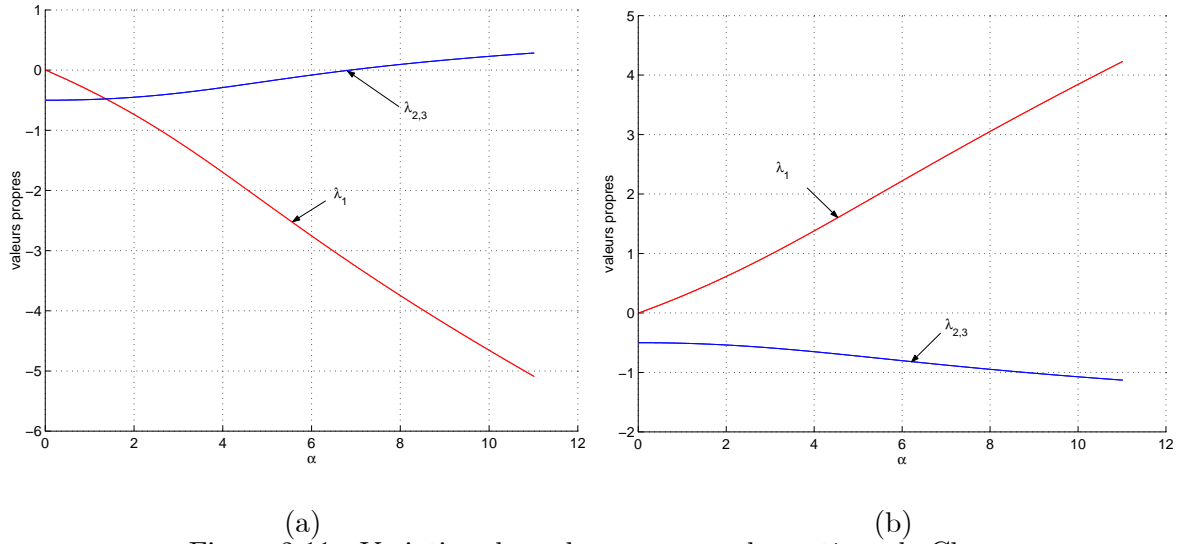
Nous obtenons :

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha(1 + m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\lambda I - J] = \begin{bmatrix} \lambda + \alpha(1 + m_1) & -\alpha & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & \beta & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ainsi, le polynôme caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det [\lambda I - J] = (\lambda + \alpha(1 + m_1)) (\lambda(\lambda + 1) + \beta) - \alpha\lambda \\ &= \lambda^3 + (\alpha(1 + m_1) + 1) \lambda^2 + (\beta + \alpha m_1) \lambda + \alpha\beta(1 + m_1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

La variation des valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 en fonction de α pour le point fixe C_0 et pour les points fixes C_1 et C_{-1} sont représentées par figure 2.11(a et b) respectivement.



(a) (b)
Figure 2.11 : Variation des valeurs propres du système de Chua.

Dans le premier cas, le point fixe C_0 est stable pour $\alpha < 6.60$, tandis que les points fixes C_1 et C_{-1} sont instables car l'une des trois valeurs propres du système a toujours une partie réelle positive.

2.3.2.2 Diagramme de bifurcation

Pour retrouver les seuils de bifurcation ainsi que leur nature en fonction du paramètre α , nous avons effectué des simulations en faisant varier le paramètre α de 6 à 10.5 avec un pas d'itération de 0.01. La figure ci-dessous représente l'évolution de la variable x obtenue en fonction des valeurs du paramètre α à chaque itération.

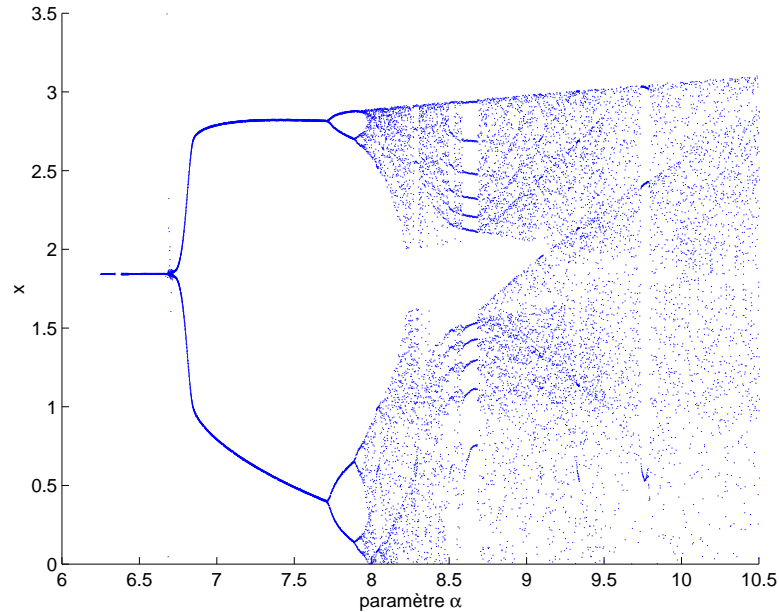


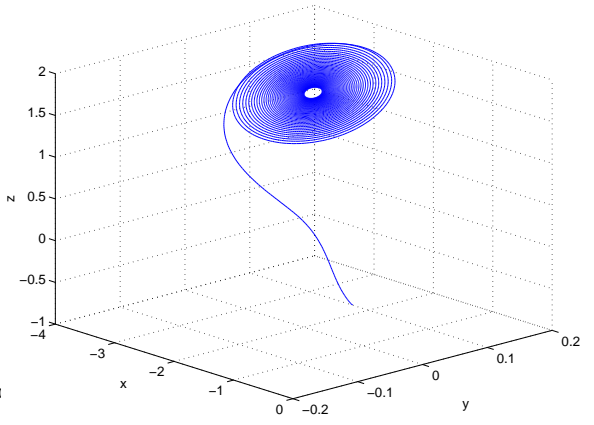
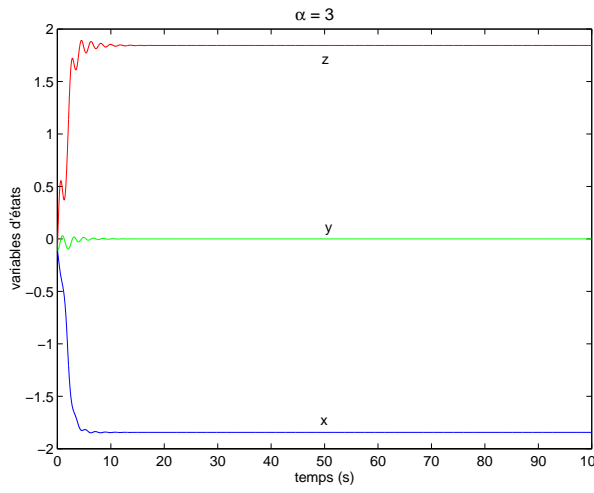
Figure 2.12 : Diagramme de bifurcation du système de Chua.

Le comportement du système peut varier d'un point fixe, d'une orbite périodique à celui d'un attracteur chaotique.

Ce diagramme de bifurcation est différent du cas du système précédent. C'est une bifurcation à doublement de période. Nous remarquons ainsi les changements suivants : Avant le doublement de période, toutes les trajectoires se stabilisent sur un point fixe pour des valeurs de α qui se situent dans l'intervalle $[0, 6.845]$, et se stabilisent sur une orbite périodique pour $\alpha \in [6.85, 7.727]$. Un 2-cycle stable commence à $\alpha = 7.73$ suivi d'un 4-cycle stable à $\alpha = 7.8975$ et ainsi de suite, la période continue de doubler pour aboutir à un comportement chaotique à la valeur de $\alpha = 7.94$.

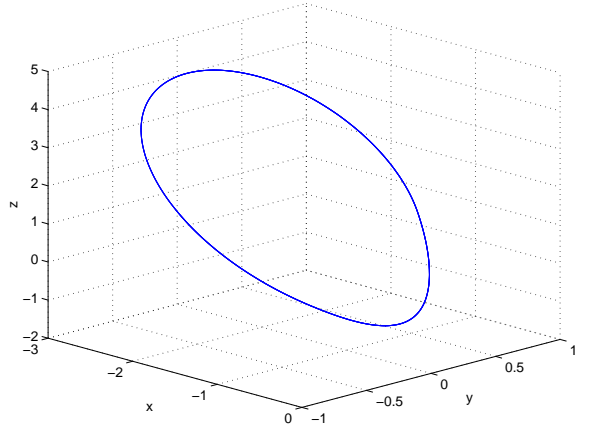
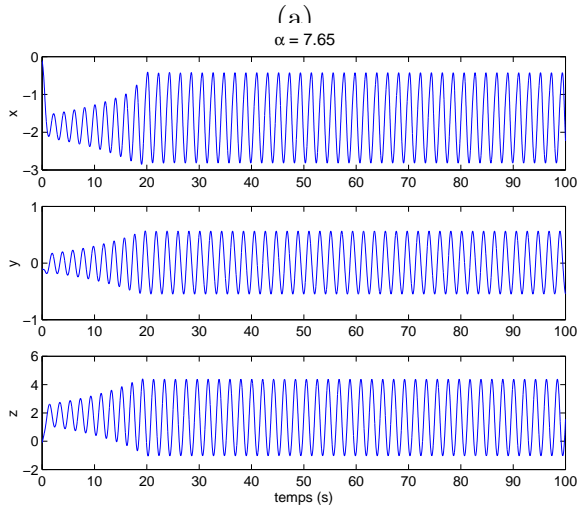
La simulation de l'attracteur pour différentes valeurs du paramètre α , confirme ce qui

vient d'être expliqué.



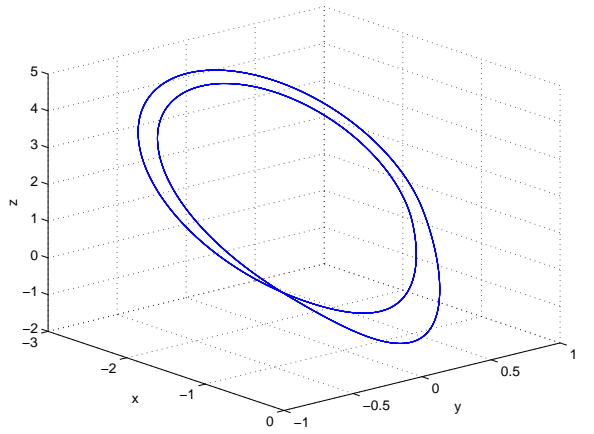
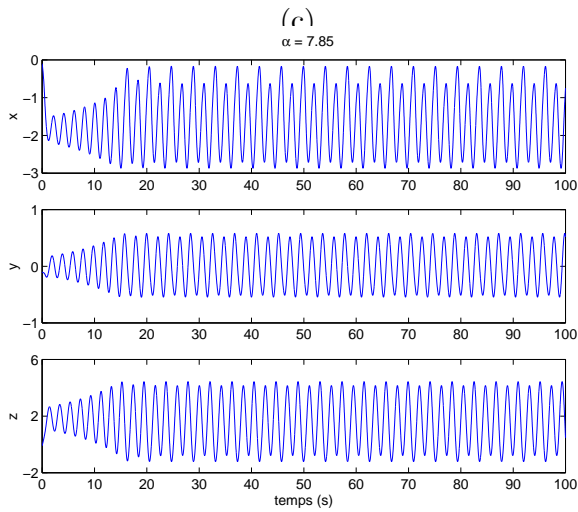
(a)

(b)



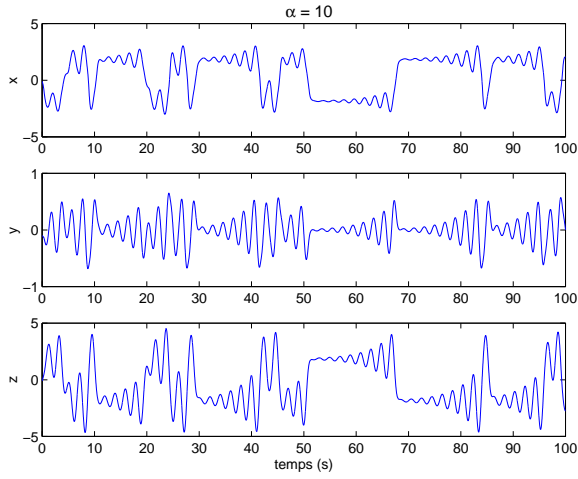
(c)

(d)

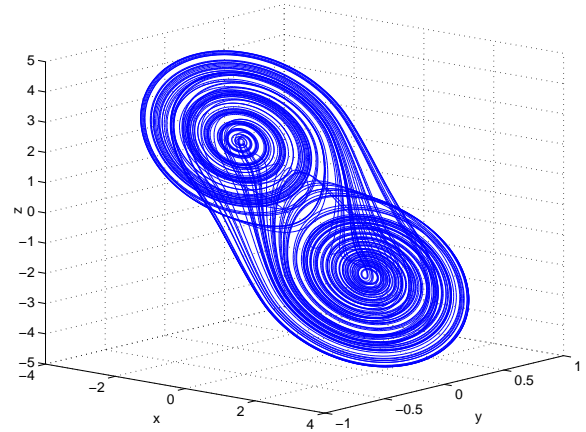


(e)

(f)



(g)



(h)

Figure 2.13 : Comportement du circuit de Chua pour différentes valeurs du paramètre α .

2.3.2.3 Contrôle du système de Chua

La section de Poincaré correspond à l'ensemble des points $X = X_{max}$.

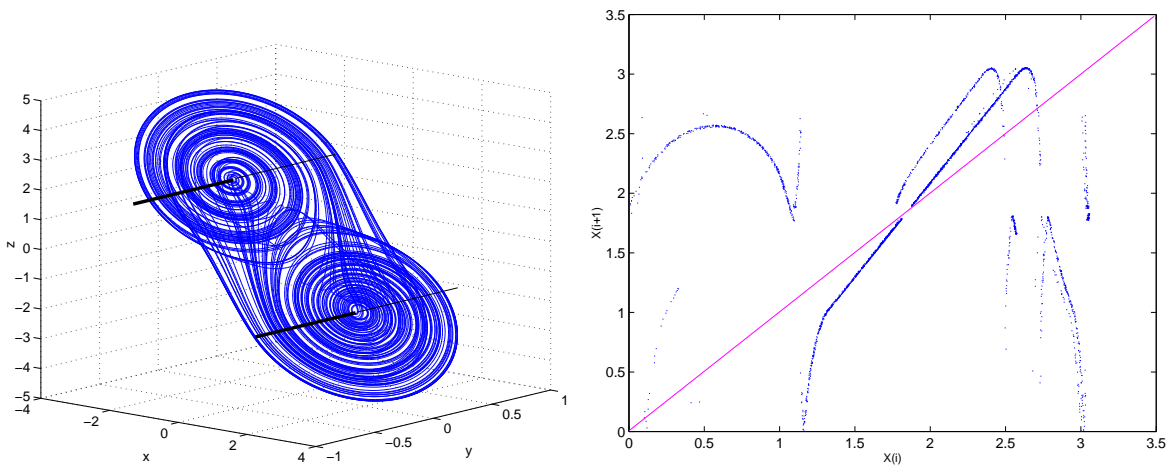


Figure 2.14 : Choix de la section de Poincaré.

La variable d'état x du point fixe est déterminée par :

$$x_f = 2.707 \quad (2.31)$$

Pour $\alpha = 10.2$, on trouve :

$$\dot{x}_f = 3.313 \quad (2.32)$$

La loi de contrôle déduite est :

$$\begin{aligned}
 \delta\alpha(i) &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_f}(x(i) - x_f) + \gamma\delta\alpha(i - 1) \\
 &= \frac{10.2 - 10}{3.313 - 2.707}(x(i) - x_f) + \gamma\delta\alpha(i - 1) \\
 &= 0.331(x(i) - x_f) + \gamma\delta\alpha(i - 1)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

La région d'activation du contrôle est définie par :

$$(x(i) - x_f)^2 + (y(i) - y_f)^2 < 1 \tag{2.34}$$

où $y_f = 0.2787$.

Partant de la même condition initiale, le résultat de l'application du contrôle est montré dans la figure (2.15).

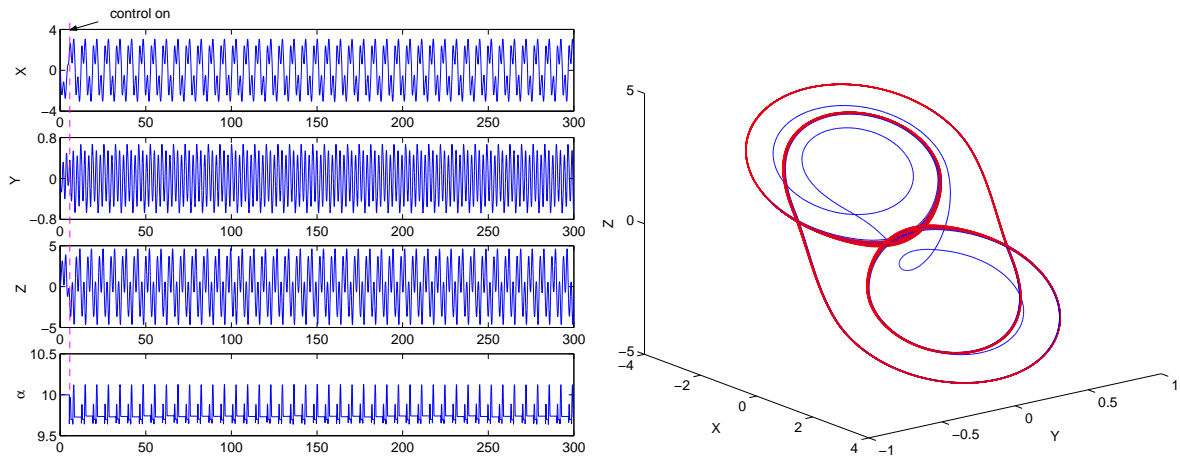


Figure 2.15 : Contrôle du système de Chua.

2.3.3 Circuit de Chua à n -scroll

Le circuit de Chua généralisé, qui génère n scrolls est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - f(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \tag{2.35}$$

avec

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}(x - 2ac) & \text{si } x \geq 2ac \\ -b \sin\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right) & \text{si } -ac < x < 2ac \\ \frac{b\pi}{2a}(x + 2ac) & \text{si } x \leq -2ac \end{cases} \quad (2.36)$$

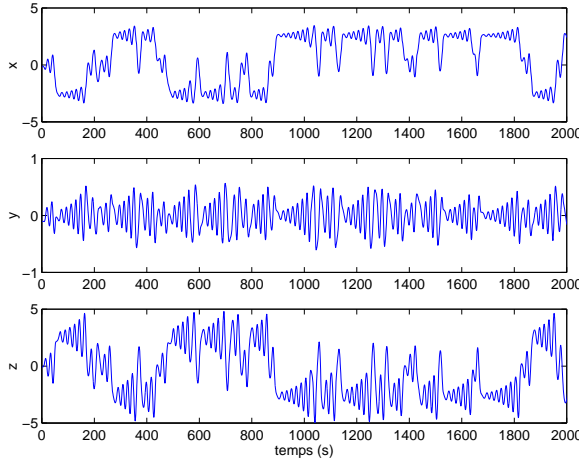
Un attracteur à n scrolls est généré pour la relation suivante :

$$n = c + 1 \quad (2.37)$$

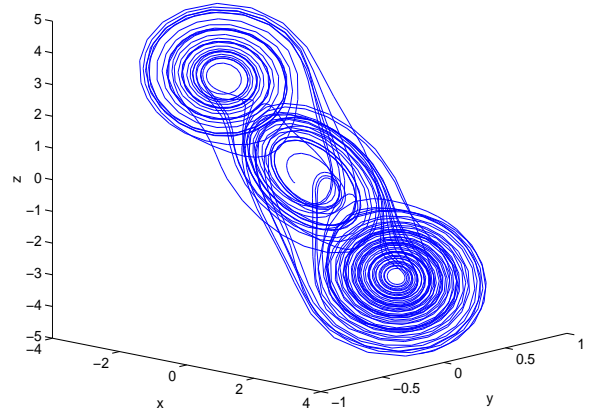
et

$$d = \begin{cases} \pi, & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad (2.38)$$

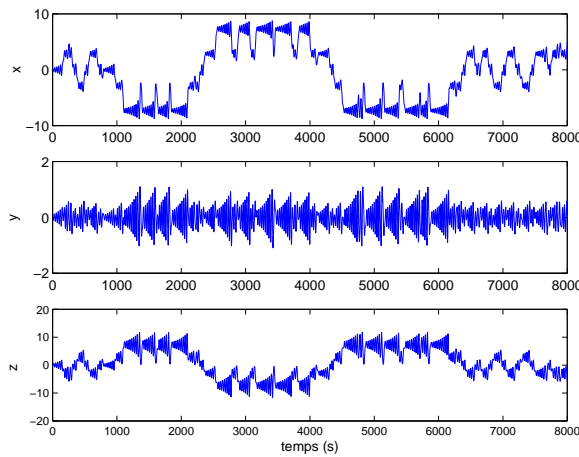
Les résultats d'une telle procédure sont donnés dans les figures suivantes.



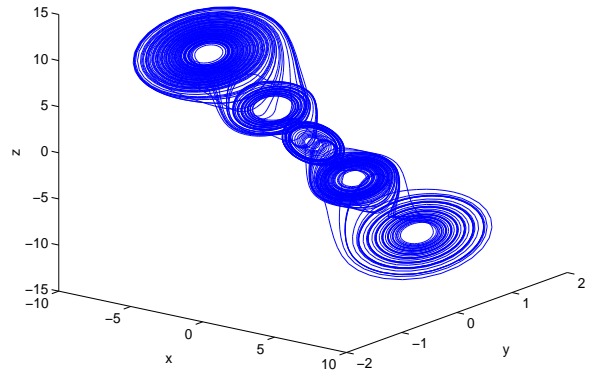
(a.1)



(a.2)



(b.1)



(b.2)

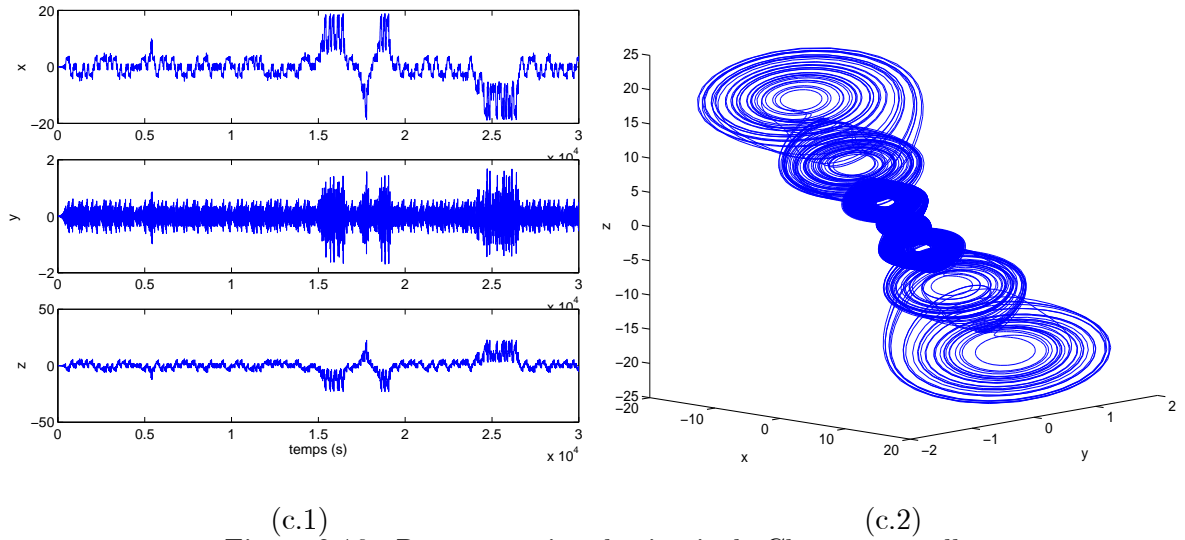


Figure 2.16 : Représentation de circuit de Chua à n -scroll.

(a) Circuit à 3-scroll. (b) Circuit à 5-scroll. (c) Circuit à 7-scroll.

Pour $\alpha = 10.814$, $\beta = 14$, $a = 1.3$, $b = 0.11$, $c = 7$ et $d = 0$, le système admet un comportement chaotique et génère un attracteur à 8-scrolls comme illustré dans la figure (2.17), partant de l'état initiale $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$.

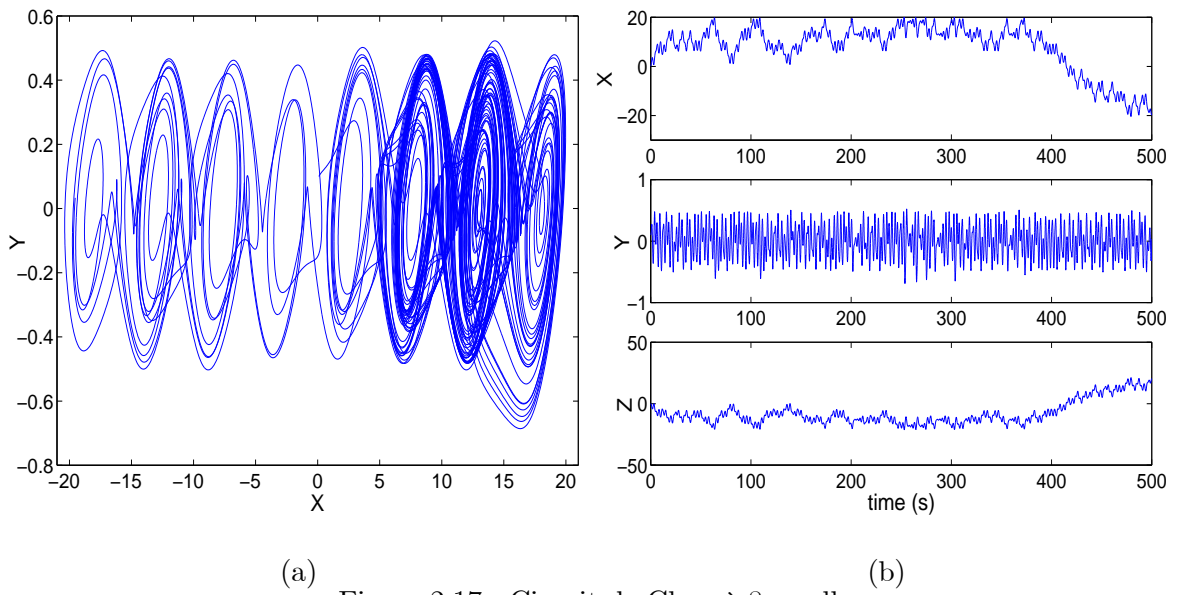


Figure 2.17 : Circuit de Chua à 8-scroll.

La section de Poincaré est choisie de la même manière que pour le système de Chua original et représente la variable maximale courante $x(i + 1)$ en fonction de la variable maximale précédente $x(i)$.

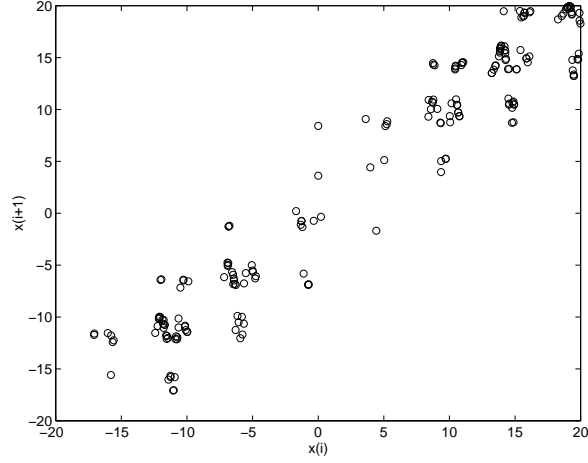


Figure 2.18 : Section de Poincaré sur x .

Les points fixes sont obtenus à l'intersection avec la diagonale. Le premier point fixe obtenu est :

$$x_{f1} = 4.507 \quad (2.39)$$

Ensuite, on génère la section de Poincaré, à une valeur proche de celle désirée, par exemple, pour $\alpha = 10.914$. Dans ce cas, on trouve :

$$x'_{f1} = 4.810 \quad (2.40)$$

La loi de contrôle est définie par :

$$\begin{aligned} \delta\alpha(i) &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_f}(x(i) - x_f) + \gamma\delta\alpha(i-1) \\ &= \frac{10.914 - 10.814}{4.810 - 4.507}(x(i) - x_f) + \gamma\delta\alpha(i-1) \\ &= 0.33(x(i) - x_f) + \gamma\delta\alpha(i-1) \end{aligned} \quad (2.41)$$

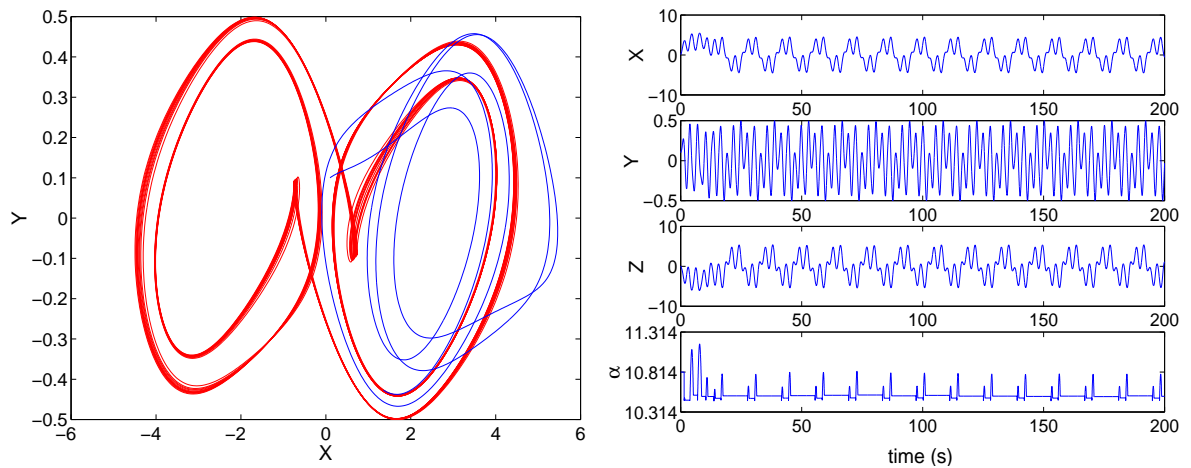
La région d'activation est :

$$(x(i) - x_f)^2 + (y(i) - y_f)^2 < 1 \quad (2.42)$$

avec $y_f = 0.2787$.

Etant donné que le circuit à n -scrolls est dérivé directement du système de Chua original, la loi de contrôle et la variable y du point fixe instable reste inchangés, seule la valeur de x change, elle sera appropriée au point fixe que l'on désire stabiliser.

Les résultats de contrôle sont représentés dans la figure (2.19).

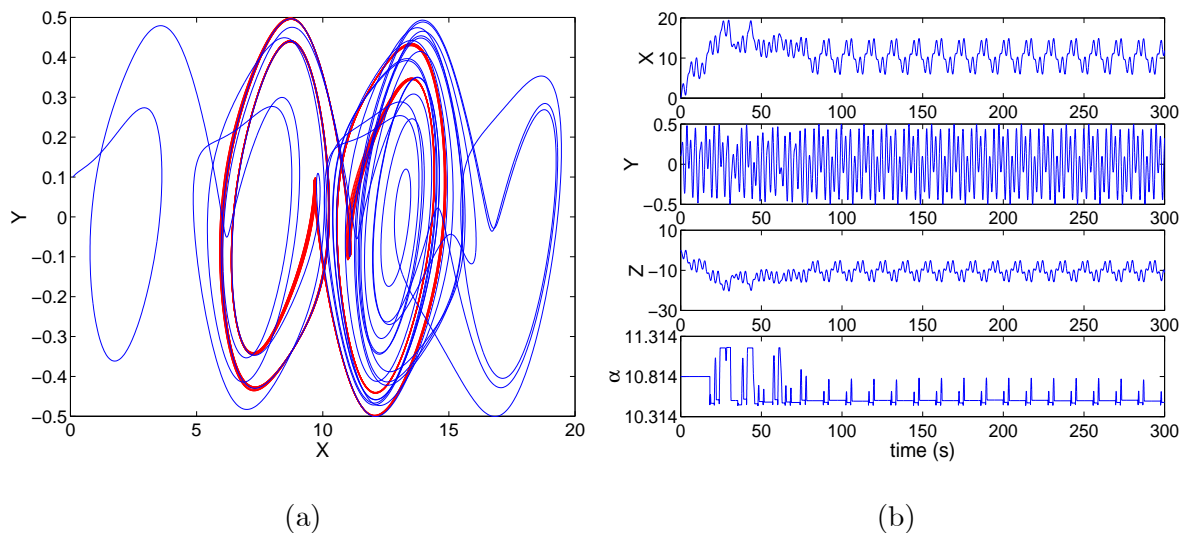


(a) (b)
Figure 2.19 : Contrôle de la première UPO. (a) Plan de phase. (b) Variables d'états.

De la même façon, et par exploration de la section de Poincaré à nouveau, on trouve :

$$x_{f2} = 14.93 \quad (2.43)$$

Le contrôleur stabilise la trajectoire sur l'orbite périodique instable appropriée.

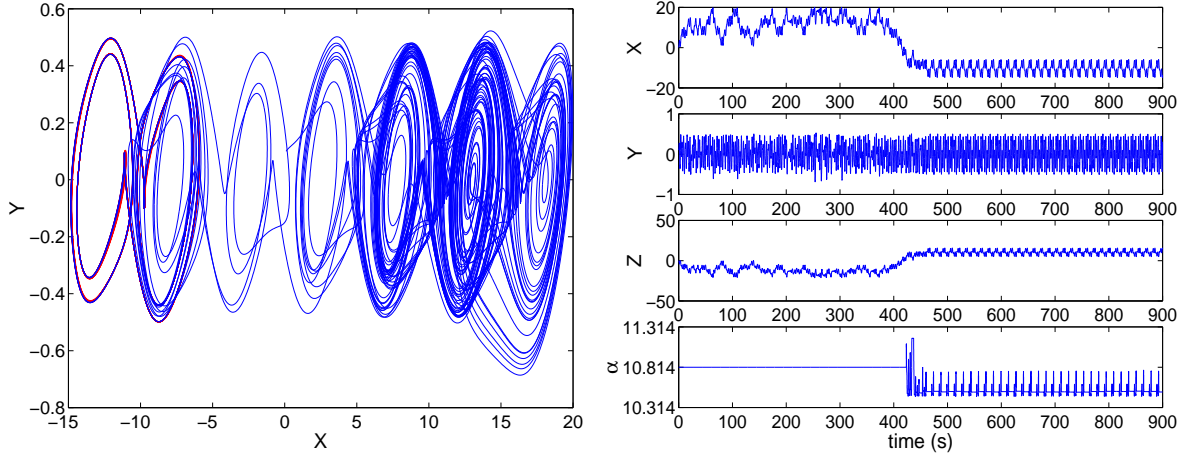


(a) (b)
Figure 2.20 : Contrôle de la seconde UPO. (a) Plan de phase. (b) Variables d'états.

Et dans le dernier cas, pour :

$$x_{f3} = -5.80 \quad (2.44)$$

Les résultats de contrôle sont démontrés dans les figures 2.21 (a et b) :

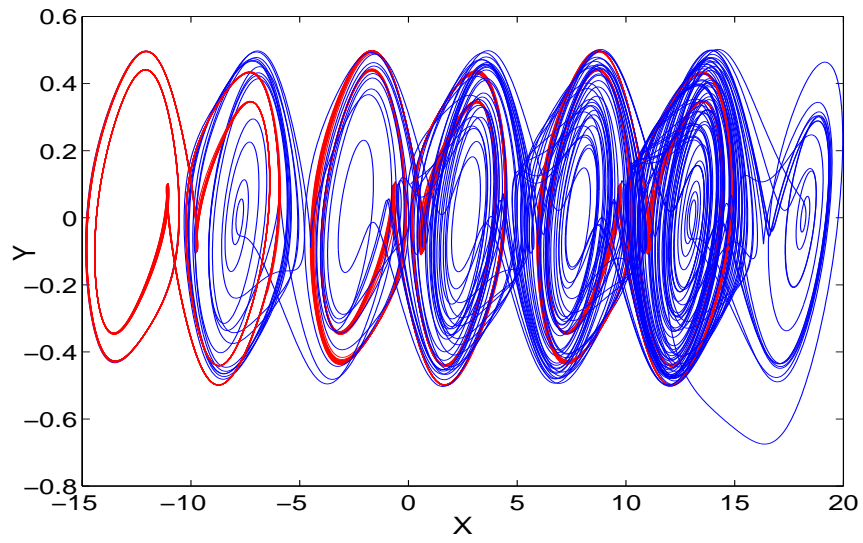


(a) (b)
Figure 2.21 : Contrôle de la dernière UPO. (a) Plan de phase. (b) Variables d'états.

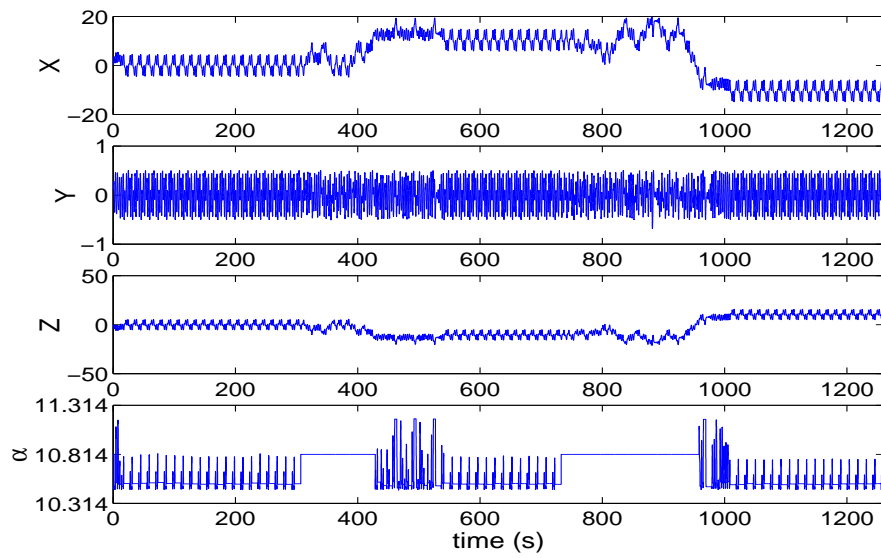
La méthode de contrôle proposée a permis la stabilisation de toutes les orbites périodiques instables du système de Chua à n -scroll. Il est à noter que le contrôle de ce type de système est étudié pour la première fois dans la référence [81], les auteurs parviennent à supprimer le chaos du système ou à le contrôler sur des orbites basses mais la stabilisation du système sur ses orbites périodiques instables originales n'a été nullement réalisé auparavant.

Pour mieux voir l'efficacité de la loi de contrôle proposée, nous présentons maintenant les résultats numériques dus au changement de la dynamique contrôlée d'une orbite périodique instable à une autre [88].

En premier lieu, le contrôle s'active et stabilise la première UPO (point fixe instable approprié x_{f1}). Une fois le contrôle désactivé, le système reprend son comportement chaotique. Lorsque le test (2.42) est vérifié à nouveau avec cette fois le deuxième point fixe instable x_{f2} comme objectif, le contrôle conduit la trajectoire du système vers l'UPO désirée. Le contrôle est maintenu pour un même temps que dans le premier cas puis relâché. La même procédure peut être appliquée pour stabiliser la dernière orbite périodique instable (point fixe instable x_{f3}). La stabilisation est obtenue dans un temps minimum. Les résultats de contrôle sont illustrés dans les figures 2.22 (a et b).



(a)



(b)

Figure 2.22 : Transition d'une UPO à une autre.

2.4 Conclusion

Les résultats obtenus, montrent bien que le problème de la stabilisation des orbites périodiques instables des systèmes dynamiques non linéaires en générale, et les systèmes dynamiques non linéaires continus en particulier, n'est pas aisée.

Notre contribution principale en ces résultats est l'élaboration d'une méthode de contrôle du chaos, qui s'avère très efficace et assez facile à mettre en oeuvre sans trop de soucis sur les propriétés des systèmes.

L'avantage principal de la méthode de contrôle proposée est qu'elle préserve le principe de la méthode de contrôle originale OGY, qui exige seulement de petites perturbations d'un paramètre de contrôle accessible de l'extérieur afin de stabiliser une orbite périodique instable du système.

Nous constatons que le contrôle peut être réalisé si on prend en compte les perturbations paramétriques précédentes. Une fois que la section de Poincaré est déterminée, un choix judicieux d'un paramètre de stabilisation assure le retardement du contrôle.

L'algorithme de contrôle proposé, appliqué à plusieurs systèmes non linéaires à comportement chaotique, a montré son efficacité pour stabiliser des orbites périodiques instables des systèmes chaotiques. De plus, si le système chaotique contient plusieurs orbites périodiques instables, le contrôle peut altérer entre différentes orbites périodiques instables du système.

Chapitre III

CONTRÔLE PRÉDICTIF

3.1 Introduction

La méthode de contrôle OGY a démontrée son efficacité et a permis d'innover la théorie du chaos. Cependant, comme toute théorie mathématique, cette méthode a des limites. En particulier, la différence entre les états actuels et les orbites à stabiliser est obtenue par calcul numérique, c'est à dire, l'orbite périodique instable est estimée par calcul des directions stables et directions instables. D'où des approximations des orbites sont employées. De plus, Nakajima [57] a prouvé que par application de la méthode de Pyragas, les orbites périodiques instables ne se stabilisent pas lorsque la matrice jacobienne possède un nombre impair de valeurs propres réelles de valeurs supérieur à l'unité.

Ushio et Yamamoto [62, 64] proposent un contrôleur dynamique à retour d'état prédictif pour les systèmes chaotiques basés sur le principe de la méthode de Pyragas [52]. La loi de contrôle est calculée à partir de la différence entre l'état actuel et l'état futur du système chaotique. Les états contrôlés par le contrôle prédictif convergeront vers les points fixes stabilisés puisque les approximations ne sont pas employées dans la boucle de retour d'état, qui est l'avantage de cette méthode.

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode de contrôle prédictif pour stabiliser les systèmes chaotiques discrets et nous développons la méthode pour stabiliser les systèmes chaotiques continus d'ordre élevé. Pour parvenir à cet objectif, nous présentons la condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation du système contrôlé. Une conclusion est donné en fin du chapitre.

3.2 Contrôle prédictif des systèmes discrets

3.2.1 Le principe de la méthode

Soit le système dynamique non linéaire discret de dimension N suivant :

$$x(i+1) = f(x(i), u(i)) \quad (3.1)$$

où $x \in R^N$ représente le vecteur d'état du système et u le vecteur de contrôle. On assume que f est différentiable.

Pour la méthode OGY, la loi de contrôle $u(i)$ est déterminée à partir de l'influence du paramètre de contrôle sur l'état actuel $x(i)$ du système chaotique, puis ce contrôle sera injecté comme une perturbation dans le paramètre de contrôle du système accessible de l'extérieur.

Dans la méthode de Pyragas, l'idée essentielle est que le contrôle $u(i)$ est déterminé par la différence entre l'état retardé à T -pas $x(i-T)$ et l'état actuel $x(i)$ puis ajoutée comme paramètre de contrôle au système.

Dans la méthode de contrôle prédictif, le contrôle $u(i)$ sera déterminé par la différence entre l'état actuel $x(i)$ et l'état prédit incontrôlé x_p .

Le schéma représentatif de la méthode est donné par la figure (3.1).

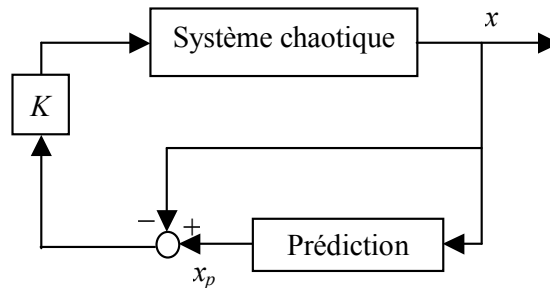


Figure 3.1 : Contrôle prédictif à retour d'état.

Le but est de stabiliser une orbite périodique instable du système chaotique.

Ainsi, le contrôle u est défini par :

$$u(i) = K(x_p - x(i)). \quad (3.2)$$

où K représente le gain du contrôle.

Soit \bar{x} l'orbite périodique instable à stabiliser, elle satisfait :

$$\bar{x} = f(\bar{x}, 0) \quad (3.3)$$

En utilisant $f(x(i), 0)$ comme une prédiction de l'orbite périodique à stabiliser. L'état prédit x_p sera donnée par :

$$x_p = f(x(i), 0) \quad (3.4)$$

L'équation (3.2) devient alors :

$$u(i) = K(f(x(i), 0) - x(i)), \quad (3.5)$$

Cette loi de contrôle n'est valide que lorsque l'état du système est au voisinage de l'orbite périodique instable à stabiliser. La zone de contrôle est déterminée par la relation suivante :

$$|x(i) - x(i-1)| < \varepsilon \quad (3.6)$$

avec ε nombre positif petit, ($\varepsilon = 0.01$).

Finalement, le contrôle est défini comme suit :

$$u(i) = \begin{cases} K(f(x(i), 0) - x(i)) & \text{si } |x(i) - x(i-1)| < \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.7)$$

et le système chaotique contrôlé sera donné par :

$$x(i+1) = f(x(i), K(f(x(i), 0) - x(i))). \quad (3.8)$$

Ainsi, on a déterminé la correction à appliquer au système chaotique pour ramener la trajectoire sur le point fixe ou l'orbite périodique instable désirée.

3.2.2 Applications

3.2.2.1 Exemple 1

On considère l'exemple du système discret non linéaire à comportement chaotique à une dimension suivant :

$$x(i+1) = ax(i)(1 - x^2(i)) \quad (3.9)$$

Pour $a = 3$, le système admet un comportement chaotique. L'évolution du système est représentée par la figure (3.2).

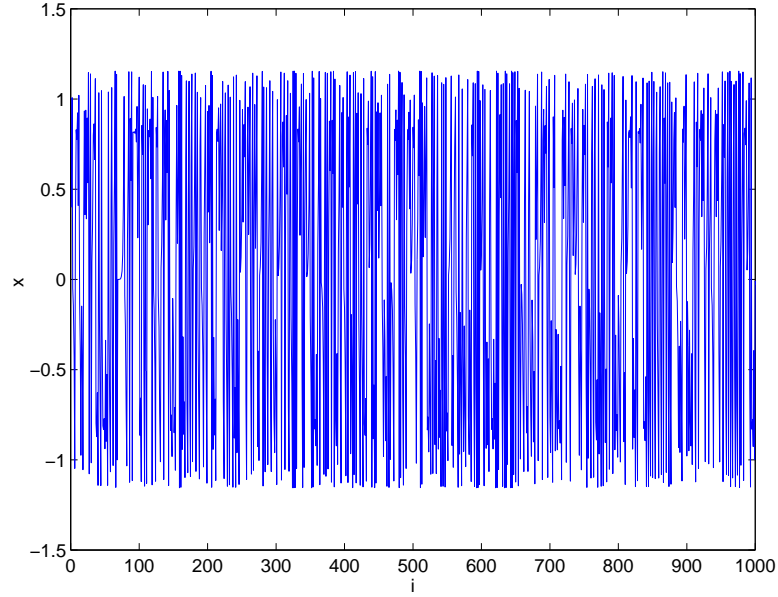


Figure 3.2 : Système (3.9).

Le système admet trois points fixes x_{f1}, x_{f2} , et x_{f3} :

$$x_{f1} = 0, x_{f2} = -x_{f3} = \sqrt{\frac{a-1}{a}} \quad (3.10)$$

Pour déterminer la correction à apporter à l'état actuel $x(i)$ du système chaotique, on calcule la loi de contrôle, qui est définie à partir de l'équation (3.7), on obtient :

$$\begin{aligned} x(i+1) &= ax(i)(1-x^2(i)) + u(i) \\ &= ax(i)(1-x^2(i)) + K(x(i+1) - x(i)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le système sous contrôle prédictif sera donné par :

$$x(i+1) = ax(i)(1-x^2(i)) + K(ax(i)(1-x^2(i)) - x(i)) \quad (3.12)$$

La linéarisation autour des points fixes est donnée par :

$$\delta x(i+1) = \frac{\partial x(i+1)}{\partial x(i)} \delta x(i) \quad (3.13)$$

avec

$$\delta x(i+1) = x(i) - x_f \quad (3.14)$$

On obtient :

$$\delta x(i+1) = (-3a(1+K)x_f^2 + aK + a - K)\delta x(i) \quad (3.15)$$

Le système se stabilise autour des points fixes par le contrôle prédictif à retour d'état si K satisfait l'égalité suivante :

$$|-3a(1+K)x_f^2 + aK + a - K| < 1, \quad (3.16)$$

Afin de stabiliser le système sur le point fixe d'origine $x_{f1} = 0$, la condition sur K devient :

$$|2K + 3| < 1 \implies -2 < K < -1 \quad (3.17)$$

Dans ce cas, on choisit $K = -1.5$.

A partir d'une condition initiale $x_0 = 0.4$, on trouve que le test (3.6) est vérifié à l'itération $i = 69$, ainsi le contrôle se déclenche et prend une valeur non nulle instantanée $u(69) = -5.6610^{-4}$ puis revient à zéro. Cette minuscule perturbation permet de stabiliser la trajectoire du système sur le point fixe instable x_{f1} . Le résultat du contrôle est représenté par la figure (3.3).

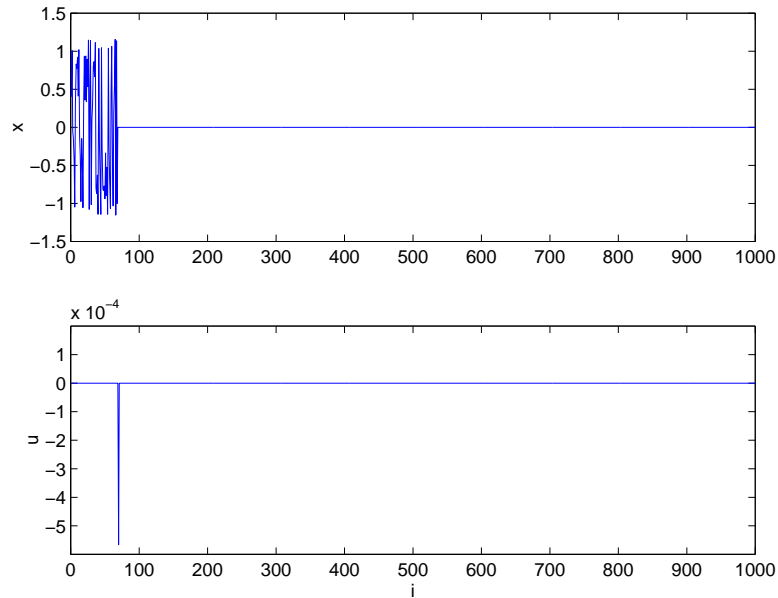


Figure 3.3 : Système chaotique sous contrôle. Evolution de $x(i)$ et $u(i)$.

Il faut noter que le choix de la valeur du gain se fait d'une façon arbitraire. Néanmoins, on peut utiliser des méthodes d'optimisation classique pour déterminer la meilleure valeur qui assure un bon contrôle et une consommation d'énergie minimale.

Dans le deuxième cas, et afin de stabiliser le système sur l'un des deux points fixes instables symétriques x_{f2} ou x_{f3} , la condition sur le gain K devient comme suit :

$$|-2a(1 + K) + 2K + 3| < 1 \quad (3.18)$$

Le choix de la valeur du gain se fait dans l'intervalle $-1 < K < -0.5$.

Ainsi, une fois le test (3.6) est vérifié et pour une valeur de $K = -0.9$, le contrôle prend une valeur non nulle à $i = 69$, mais la stabilisation échoue parce que l'état $x(69)$ n'est pas au voisinage du point fixe x_{f2} ou x_{f3} mais au voisinage de x_{f1} qui ne se stabilise pas pour la valeur de K choisit.

Lorsque $i = 269$, l'état $x(269)$ est au voisinage du point fixe x_{f2} , dans ce cas, le contrôle stabilise x_{f2} . Pour $K = -0.85$, le contrôle prédictif stabilise le point fixe x_{f3} .

Les résultats de simulations sont représentées sur les figures suivantes.

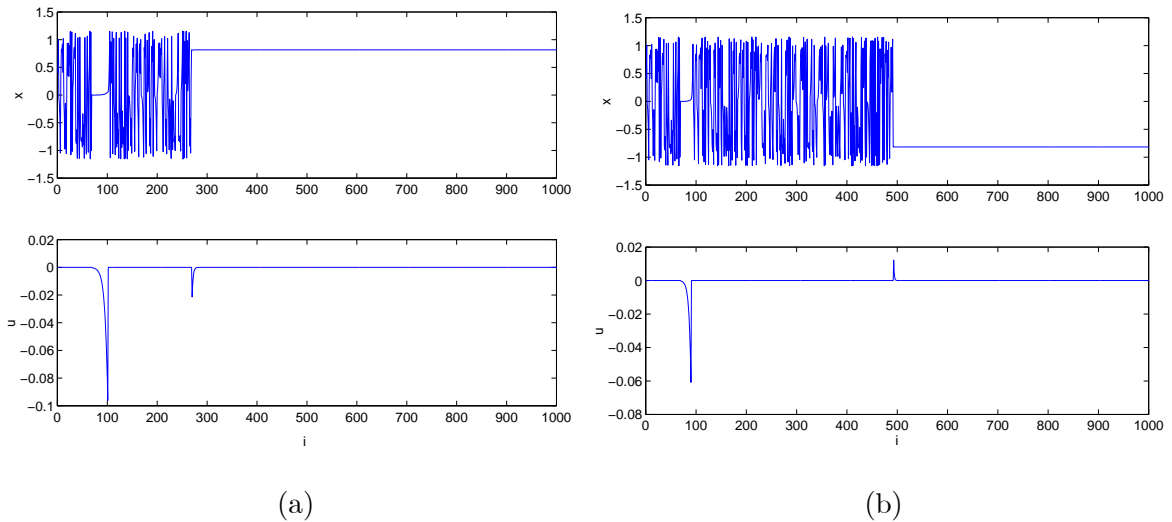


Figure 3.4 : Système chaotique sous contrôle. (a) Stabilisation sur x_{f1} . (b) Stabilisation sur x_{f2} .

3.2.2.2 Exemple 2

Dans cet exemple, on applique le contrôle prédictif à un oscillateur chaotique qui est un système dynamique non linéaire à comportement chaotique du deuxième ordre décrit par les

équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \Omega(i+1) \\ \Phi(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega(i) + \rho \tan^{-1}(\Omega(i)) + u_1(i) \\ \alpha \Phi(i) - \rho \gamma \cos(\Omega(i)) + \rho \tan^{-1}(\Omega(i)) + u_2(i) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

avec ρ, α et γ sont les paramètres du système. Pour des valeurs de $\rho = 7.1, \alpha = 0.8$ et $\gamma = 0.225$, l'oscillateur admet un comportement chaotique.

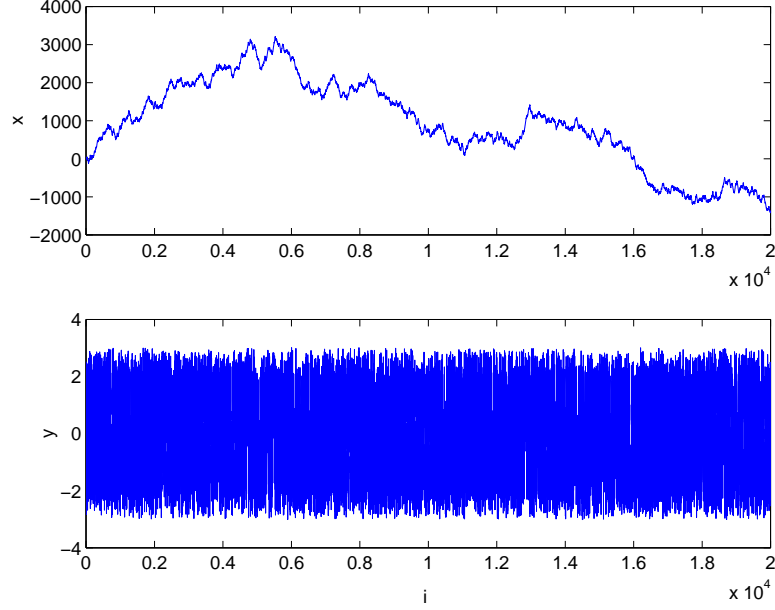


Figure 3.5 : L'oscillateur chaotique.

Dans le cas du système incontrôlé (vecteur $u(i) = [0 \ 0]$), les points fixes du système sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} \Omega_f \\ \Phi_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7243 \\ 1.2219 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

La loi de contrôle est définie par :

$$u(i) = \begin{pmatrix} u_1(i) \\ u_2(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(\rho \tan^{-1}(\Omega(i))) \\ k_2(\alpha - 1)(\Omega(i) - \rho \gamma \cos(\Omega(i)) + \rho \tan^{-1}(\Omega(i))) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

et le système chaotique contrôlé sera géré par la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} \Omega(i+1) \\ \Phi(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega(i) + \rho \gamma (k_1 + 1) \tan^{-1}(\Omega(i)) \\ (\alpha + k_2(\alpha - 1))\Phi(i) - \rho \gamma (k_1 + 1) \cos(\Omega(i)) + \rho \tan^{-1}(\Omega(i)) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Pour simplifier la tâche, on prend $k_1 = k_2 = k$.

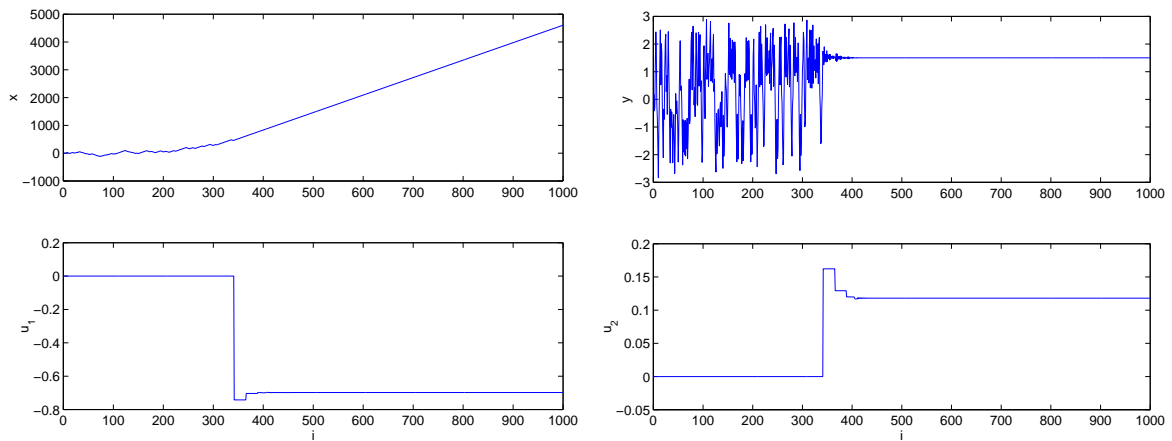
Une fois le système linéarisé autour du point fixe et afin de le stabiliser, le gain k doit satisfaire la condition suivante :

$$|\alpha + k(\alpha - 1)| < 1 \quad (3.23)$$

D'où :

$$-1 < k < 0 \quad (3.24)$$

Pour un vecteur gain $K = [-0.1 \ -0.1]$, une condition initiale $(\Omega_0, \Phi_0) = (0, 0)$ et pour $\varepsilon = 0.01$, la figure (3.6) représente la trajectoire de l'état $\Omega(i)$ soumise au contrôle prédictif [89].



(a) (b)
Figure 3.6 : Stabilisation du système (3.19) sur son point fixe (Ω_f, Φ_f) .

A l'itération $i = 341$, les états $(\Omega(i), \Phi(i))$ se trouvent aux voisinage du point fixe (Ω_f, Φ_f) . A cet instant, le contrôle déclenche, mais ne stabilise totalement le système que lorsque $i = 410$. Le vecteur de contrôle $u(i)$ change de valeur puis se stabilise sur une valeur non nulle qui maintienne $(\Omega(i), \Phi(i))$ sous contrôle toute au long de leurs évolution.

3.3 Contrôle prédictif des systèmes continus

Dans ce qui suit, nous développons la méthode de contrôle prédictif pour le contrôle des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques continus d'ordre élevé.

Il est à noter que la motivation de proposer une extension du contrôle prédictif pour le contrôle des systèmes chaotiques continus d'ordre élevé qui s'avère une déduction de la méthode de Ushio et Yamamoto [62, 63] n'été utile que parce qu'elle n'a pas été proposée auparavant.

Afin de tester l'efficacité de la méthode proposée, nous l'avons appliquée à plusieurs systèmes chaotiques continus [90, 92].

3.3.1 L'algorithme proposé

Soit le système dynamique non linéaire continu de dimension N , défini par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.25)$$

$x(t)$ représente l'état actuel du système et $u(t)$ le contrôle.

Le principe de la méthode est le même que celui des systèmes discrets. Le contrôle est donné par la relation

$$u(t) = K(x_p - x(t)) \quad (3.26)$$

$x_p(t)$ représente l'état prédit.

et le système chaotique contrôlé est ainsi donné par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K(x_p - x(t)) \quad (3.27)$$

En utilisant une prédiction d'un pas en avant, on obtient :

$$u(t) = K(\dot{x}(t) - x(t)) \quad (3.28)$$

Le système chaotique contrôlé devient

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K(\dot{x}(t) - x(t)) \quad (3.29)$$

Soit \bar{x} l'orbite périodique instable à stabiliser, elle satisfait :

$$\bar{x} = f(\bar{x}, 0) \quad (3.30)$$

Le système contrôlé est linéarisé autour de \bar{x} :

$$\begin{aligned}
\delta\dot{x}(t) &= A\delta x(t) + K(\delta\dot{x}(t) - \delta x(t)) \\
&= A\delta x(t) + K(A\delta x(t) - \delta x(t)) \\
&= (A + K(A - I))\delta x(t)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Suivant le même principe que pour les systèmes chaotiques discrets ; le voisinage du point fixe est déterminée par la relation suivante :

$$r(t) = |x(t) - x(t - 1)| \tag{3.32}$$

Le système contrôlé sera décrit par [92] :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f(x(t)) + u(t) & \text{si } r(t) < \varepsilon \\ f(x(t)) & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.33}$$

avec ε un petit nombre positif.

3.3.2 Applications

3.3.2.1 Exemple 1 : Circuit de Chua

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - g(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \tag{3.34}$$

avec $\alpha = 10, \beta = 14.87, m_0 = -1.27, m_1 = -0.68$

et

$$g(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} (|x + 1| - |x - 1|)$$

l'élément non linéaire du circuit.

Les points d'équilibres du système sont :

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) = (0, 0, 0), \tag{3.35}$$

ainsi que les deux points fixes symétriques :

$$\begin{aligned}(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2) &= \left(\frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1}, 0, \frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1} \right)^T = (1.8437, 0, -1.8437)^T, \\(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3) &= \left(\frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1}, 0, \frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1} \right)^T = (-1.8437, 0, 1.8437)^T.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Afin de contrôler le système sur l'un de ces trois points d'équilibres instables, on doit déterminer d'abord la correction qui sera appliquée à l'état actuel du système chaotique. Pour cela, on détermine l'entrée de contrôle $u(t)$ définie par l'équation (3.28).

$$u(t) = [k_1 \ k_2 \ k_3] \begin{bmatrix} (\dot{x} - x) \\ (\dot{y} - y) \\ (\dot{z} - z) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

On choisit :

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = k_1(\dot{x} - x) \\ u_2(t) = 0 \\ u_3(t) = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Les simulations prouvent que ces valeurs du gain K assure une meilleur convergence de la trajectoire vers les points d'équilibres.

Le système sous contrôle prédictif est alors donné par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) + k_1(\alpha(y - x - f(x)) - x) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y\end{aligned}\quad (3.39)$$

La variable d'état x du système est linéarisée autour de \bar{x} par :

$$\delta\dot{x} = \left. \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \delta x \quad (3.40)$$

Elle est linéarisée autour du premier point d'équilibre $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ par :

$$\delta\dot{x} = (\alpha(-1 - m_0) + k_1(\alpha(-1 - m_0) - 1))\delta x \quad (3.41)$$

Le contrôle prédictif stabilise ce point d'équilibre si la valeur du gain k_1 satisfait l'inégalité suivante :

$$|\alpha(-1 - m_0) + k_1(\alpha(-1 - m_0) - 1)| < 1 \quad (3.42)$$

$$\implies -2.176 < k_1 < -1 \quad (3.43)$$

En choisissant $k_1 = -1.5$, le vecteur gain $K = [-1.5 \ 0 \ 0]$ et à partir des conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (-0.1, -0.1, -0.1)$, les résultats obtenus suite à l'application de la loi de contrôle prédictif sont représentés par la figure (3.7). Le contrôle est activé pour $t > 30$.

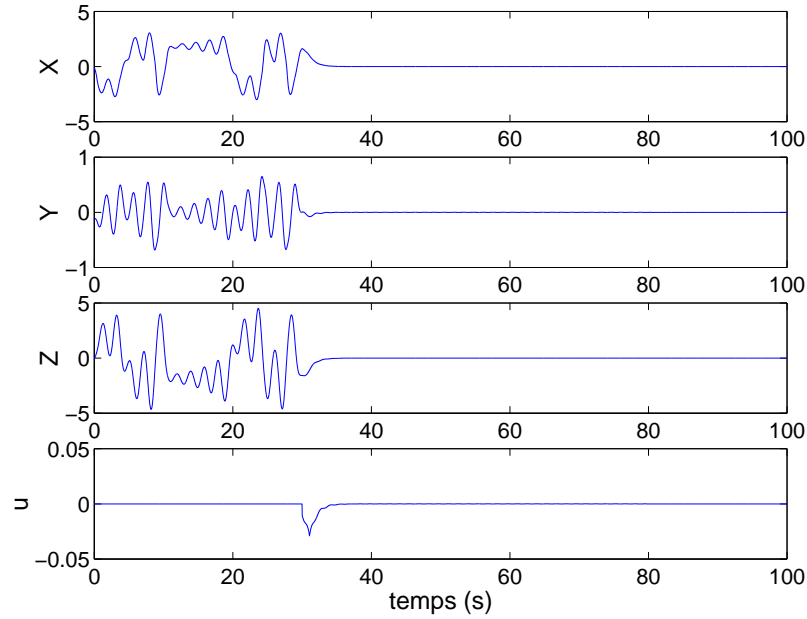


Figure 3.7 : Contrôle prédictif du point d'équilibre $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$.

L'entrée du contrôle u prend des petites valeurs, les variables d'états x, y et z sont assez proches du point d'équilibre $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$. Après un régime transitoire, la trajectoire se stabilise sur ce point d'équilibre.

De la même manière, la variable d'état x est linéarisé autour de \bar{x}_2 et de \bar{x}_3 par

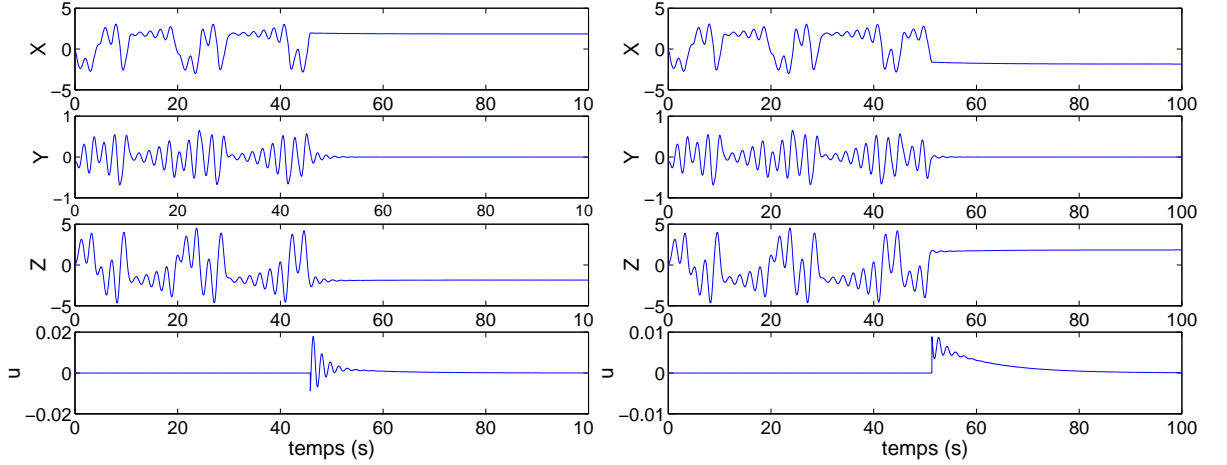
$$\delta\dot{x} = (\alpha(-1 - m_1) + k_1(\alpha(-1 - m_1) - 1))\delta x \quad (3.44)$$

Dans ce cas, k_1 doit satisfaire l'inégalité

$$|\alpha(-1 - m_1) + k_1(\alpha(-1 - m_1) - 1)| < 1 \quad (3.45)$$

$$\implies -1 < k_1 < -0.523 \quad (3.46)$$

En choisissant $K = [-0.96 \ 0 \ 0]$ et à partir des mêmes conditions d'initiales que le cas précédent, les résultats de simulation pour stabiliser le système sur les points d'équilibres $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ et $(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$ sont montrés dans la figure 3.8(a et b) respectivement. Le contrôle est activé à $t > 45$ et $t > 50$ respectivement.



(a) (b)
Figure 3.8 : Contrôle prédictif du circuit de Chua.

(a) Stabilisation de $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$. (b) Stabilisation de $(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$.

Le contrôle prédictif stabilise le comportement chaotique du système de Chua sur tous ses points d'équilibres.

3.3.2.2 Exemple 2 : Système de Rössler

Dans ce deuxième exemple, on choisit le système de Rössler donné par [4] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + (x - c)z \end{aligned} \quad (3.47)$$

où a, b et c représentent les paramètres de système. Pour des valeurs des paramètres $a = 0.398, b = 2$ et $c = 4$, le système de Rössler admet un comportement chaotique. Les points

fixes instables du système sont donnés par :

$$\begin{aligned}
(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) &= \left(\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2 - 4.ab}}{2}, -\frac{c}{2a} - \frac{\sqrt{c^2 - 4.ab}}{2a}, \frac{c}{2a} + \frac{\sqrt{c^2 - 4.ab}}{2a} \right)^T \\
&= (3.790, -9.522, 9.522)^T, \\
(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2) &= \left(\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{c^2 - 4.ab}}{2}, -\frac{c}{2a} + \frac{\sqrt{c^2 - 4.ab}}{2a}, \frac{c}{2a} - \frac{\sqrt{c^2 - 4.ab}}{2a} \right)^T \\
&= (0.210, -0.527, 0.527)^T
\end{aligned} \tag{3.48}$$

On remarque que ce système n'admet pas un point d'équilibre à l'origine.

Ce qui est du système de Rössler, le contrôle prédictif est appliqué à la deuxième variable d'état :

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = 0 \\ u_2(t) = k_2(\dot{y} - y) \\ u_3(t) = 0 \end{cases} = \begin{cases} u_1(t) = 0 \\ u_2(t) = k_2(x + ay - y) \\ u_3(t) = 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

Le système contrôlé sera donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -(y + z) \\
\dot{y} &= x + ay + k_2(x + ay - y) \\
\dot{z} &= b + (x - c)z
\end{aligned} \tag{3.50}$$

la variable d'état y est linéarisée autour de $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ par

$$\delta\dot{y} = \frac{\partial\dot{y}}{\partial y}\delta y = (a + k_2(a - 1))\delta y \tag{3.51}$$

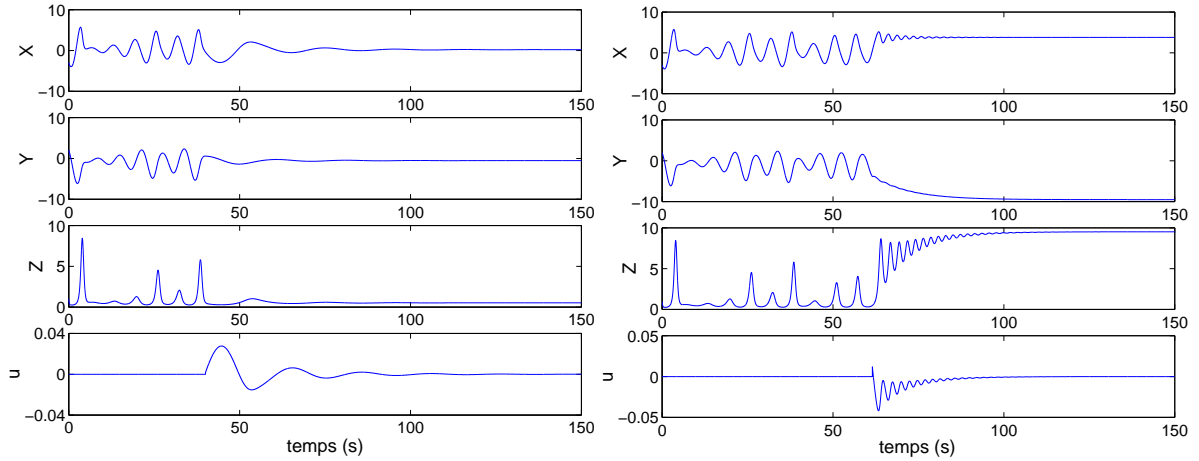
Le système est stabilisé autour de ce point fixe instable par application de la loi de contrôle prédictive si k_2 satisfait l'inégalité

$$|a + k_2(a - 1)| < 1 \tag{3.52}$$

Le gain doit satisfaire la condition :

$$|0.398 - 0.602k_2| < 1 \implies -1 < k_2 < 0 \tag{3.53}$$

Pour un gain $K = [-0.98 \ 0 \ 0]$ et à partir de $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, 1)$, les figures 3.9 (a et b) simulent le comportement du système lorsqu'on applique le contrôle à $t = 40$ et à $t = 60$ respectivement.



(a) (b)
Figure 3.9 : Contrôle prédictif du système de Rössler.

(a) Stabilisation de $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$. (b) Stabilisation de $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité les problèmes de conception de contrôleur des systèmes chaotiques discrets ainsi que des systèmes chaotiques continus d'ordre élevé, basés sur la méthode de contrôle prédictif. L'avantage de cette méthode est qu'on a pas besoin de calculer les valeurs propres, vecteurs propres et vecteurs covariances et de déterminer l'influence du paramètre de contrôle sur l'évolution du système tel que pour la méthode OGY. De plus, nous apportons la conditions nécessaire et suffisante pour la stabilisation des points fixes instables symétriques. La méthode de contrôle proposée surmonte la limitation du retard du contrôle et garanti la stabilité autour de la trajectoire stabilisée. L'application de la loi de contrôle sur quelques exemples de systèmes chaotiques discrets et continus d'ordre élevé démontre son efficacité.

Chapitre IV

CONTRÔLE PRÉDICTIF DES SYSTÈMES CHAOTIQUES DÉFINIS PAR DES DONNÉES D'ENTRÉES-SORTIES

4.1 Introduction

Le contrôle prédictif prouve son efficacité comme un outil puissant dans le cas du contrôle à retour d'état. C'est une stratégie de contrôle qui est basée sur la prédiction de la sortie, ce qui permet au contrôleur de prévoir de futurs changements du signal de mesure et de baser l'action de contrôle sur la prédiction.

Lors de son application aux systèmes chaotiques, on n'a pas besoin de calculer les trajectoires désirées, les états du système convergent immédiatement vers les points fixes instables une fois le contrôle activé comme on a pu constater dans le chapitre précédent.

Cependant, cette méthode a besoin du modèle mathématique des systèmes chaotiques. Pour un système chaotique avec des incertitudes sur un ou plusieurs de ces paramètres ou qui n'a pas une représentation mathématique précise, l'application des méthodes de contrôle directes s'avère très difficile même impossible.

La logique floue [134, 138] et les réseaux de neurones [145, 148] émergent comme des approches prometteuses pour résoudre le problème de contrôle non linéaire.

4.2 Contrôle flou

Les contrôleurs basés sur la logique floue peuvent être aperçus comme une étape vers un lien entre le contrôle mathématique conventionnel précis et la décision humaine [138].

Depuis quelques années, on trouve sur le marché des appareils de grande consommation

TAB. 4: Historique de la logique floue

1965	Le Prof. L. A. Zadeh de l'Université de Berkeley (Californie) pose les bases théoriques de la logique floue.
1973	L. A. Zadeh propose d'appliquer la logique floue aux problèmes de commande.
1974	Première application de contrôle par la logique floue appliquée à une turbine à vapeur. Suivie en 1980 par une application sur un four à ciment et en 1983 sur un épurateur d'eau.
1985	Premiers produits industriels (Japon) utilisant le principe de la logique floue appliqué au développement de processeurs dédiés à des applications de commande par la logique floue.

(appareils photos, vidéo, ...) qui sont présentés comme faisant intervenir un contrôle par la logique floue. Au delà de l'argument publicitaire, il est intéressant de comprendre ce concept et de l'appliquer au contrôle des systèmes chaotiques.

Le principe du contrôle par logique floue part du constat suivant : dans les problèmes de contrôle auxquels il est confronté, l'homme ne suit pas, à l'image de ses inventions, un modèle mathématique précis ; fait de valeurs numériques et d'équations. Au contraire il utilise des termes tel que «un peu trop chaud, aller beaucoup plus vite, freiner à fond, etc.» ainsi que ses propres connaissances qu'il a dans le domaine. Ces connaissances sont, le plus souvent, acquises de façon empirique.

Le principe de contrôle par la logique floue s'approche de la démarche humaine dans le sens que les variables traitées ne sont pas des variables logiques (au sens de la logique binaire par exemple) mais des variables linguistiques, proches du langage humain de tous les jours. De plus, ces variables linguistiques sont traitées à l'aide de règles qui font référence à une certaine connaissance du comportement du système à contrôler.

Quelques techniques de modélisation et de contrôle flou des systèmes chaotiques ont été approuvés [139, 144]. Dans ces techniques, l'accent est mis sur la suppression du chaos et de maintenir la trajectoire sur des cibles désirées.

Dans ce qui suit, nous développons une méthode de contrôle en incorporant la méthode de

contrôle prédictive avec la logique floue afin de stabiliser les points fixes instables inconnus des systèmes chaotiques inconnus [93, 94]. Mais tout d'abord, nous présentons quelques définitions de la logique floue.

4.2.1 Définitions

La logique floue est une branche des mathématiques et, à ce titre, toute une série de notions fondamentales sont développées. Ces notions permettent de justifier et de démontrer certains principes de base. Dans ce qui suit, on ne retiendra que les éléments indispensables à la compréhension du principe du contrôle par la logique floue. Ces éléments sont :

- Les variables floues
- Les règles d'inférences

Variables floues

Contrairement aux variables binaires qui sont définies par les deux états «vrai» ou «faux», les variables floues présentent toute une graduation entre la valeur «vrai» et la valeur «faux».

Règles d'inférence

On appelle règles d'inférence l'ensemble des différentes règles reliant les variables floues d'entrée d'un système aux variables floues de sortie de ce système. Ces règles se présentent sous la forme :

Si condition 1 et/ou condition 2 et/ou...

Alors action sur les sorties

Ces règles permettent de relier les variables floues d'entrée aux variables floues de sortie à l'aide de différents *opérateurs*.

Opérateurs

Les règles d'inférences font appel aux opérateurs. Le plus souvent, on utilise les opérateurs *minimum*, *maximum*, *produit* et *valeurs moyennes*.

Les opérations minimum et maximum présentent l'avantage de la simplicité lors du calcul, par contre, elles privilégient l'une des deux variables. Les opérations de produit et valeurs moyennes sont plus complexes à calculer mais elles produisent un résultat qui tient compte des valeurs des deux variables.

Intervalles flous

Ces intervalles définissent le nombre de variables floues associées à une grandeur d'entrée. La grandeur de sortie peut être définie à l'aide d'un certain nombre d'intervalles flous et diverses fonctions d'appartenances.

Fonctions d'appartenances

Les fonctions d'appartenances permettent de définir le degré de vérité de la variable floue en fonction de la grandeur d'entrée. Il s'agit d'établir une relation entre le degré de vérité de la variable floue et la grandeur d'entrée correspondante (figure 4.1). On parle de fuzzification.

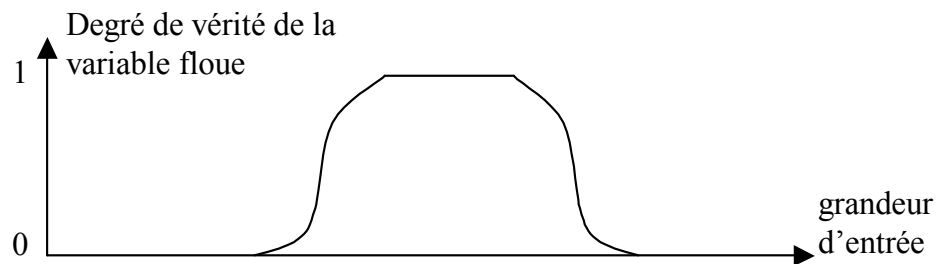


Figure 4.1 : Degré de vérité d'une variable floue.

On peut évidemment choisir n'importe quelle forme pour les fonctions d'appartenance, on utilise généralement des formes trapézoïdales ou triangulaires.

Défuzzification

Les différentes règles d'inférences produisent chacune une valeur. Ces différentes valeurs doivent être combinées afin d'obtenir les variables de sortie. Ensuite, ces variables floues de sortie doivent être converties en une grandeur de contrôle (tension, couple...) afin d'être appliquée au système à régler. On appelle cette dernière étape la défuzzification.

Les valeurs obtenues lors de la combinaison des règles appliquées aux intervalles flous de la variable de sortie défini une fonction d'appartenance. La défuzzification revient à convertir cette information en une grandeur de sortie. Plusieurs façons de faire peuvent être envisagées mais, en pratique, on utilise surtout les deux méthodes suivantes :

Défuzzification par calcul du centre de gravité

Il s'agit de calculer le centre de gravité de la fonction d'appartenance de la variable de sortie. Le calcul du centre de gravité permet d'obtenir une seule valeur pour la grandeur de sortie. Ce calcul est relativement complexe puisqu'il nécessite le calcul d'une intégrale, ou dans le cas simple d'une somme pondérée.

Défuzzification par calcul du maximum

L'opération de défuzzification consiste à prendre d'abord le minimum entre la valeur produite par la règle concernée et la valeur de la variable floue de sortie. La valeur de sortie est définie par la valeur maximale des variables floues de sortie.

Les modèles flous

L'usage des ensembles flous pour la modélisation a été suggéré initialement par L.A. Zadeh [135, 136] comme une nouvelle approche pour décrire le comportement des systèmes suffisamment complexes. Cette description est faite au moyen d'un traitement approprié de l'information basé sur des règles du type **si... alors...**, des paramètres d'incertitudes **et/ou** et des mécanismes d'apprentissage comme suit :

Si condition 1 et/ou condition 2 (et/ou...) alors action sur les sorties

Si condition 3 et/ou condition 4 (et/ou...) alors action sur les sorties

...

La modélisation floue des systèmes non linéaires se divise typiquement en deux catégories qui diffèrent dans leur capacité de représenter les différents types d'informations : le modèle

de Mamdani, basé sur l'expérience et le modèle de Takagi-Sugeno, plus approprié pour une approche basée sur les données.

Le modèle de type Mamdani

La première catégorie inclue les modèles de type Mamdani qui sont basés sur des collections de j règles définies comme suit [133] :

$$R^j : \begin{array}{l} \text{Si } \{(X_1 \text{ est } A_1^i) \text{ et } (X_2 \text{ est } A_2^i) \text{ et } \dots \text{ et } (X_p \text{ est } A_p^i)\} \\ \text{Alors } (Y \text{ est } B_q^i) \end{array} \quad (4.1)$$

Pour la règle R^j , les p variables (X_1 à X_p) qui interviennent dans l'antécédent sont associées aux ensembles flous (A_1 à A_p) et le conséquent Y est associé à un autre ensemble flou B_q . A^j et B^j représentent des termes linguistiques définis par des ensembles flous et caractérisés par des fonctions d'appartenance.

Il est clair que l'antécédent et le conséquent sont des propositions floues avec des attributs associés à des termes linguistiques et à un usage de raisonnement flou. Dans ce cas, le modèle flou représente une expression qualitative qui décrit le comportement du système en utilisant un langage naturel.

Le modèle de type Takagi-Sugeno

La deuxième catégorie des modèles flous est basée sur la méthode de raisonnement Takagi-Sugeno (TS) [134].

Ce modèle est formé des règles logiques qui ont un antécédent flou et un conséquent qui est une fonction des variables qui interviennent dans l'antécédent, de la forme :

$$R^j : \begin{array}{l} \text{Si } \{(X_1 \text{ est } A_1^i) \text{ et } (X_2 \text{ est } A_2^i) \text{ et } \dots \text{ et } (X_p \text{ est } A_p^i)\} \\ \text{Alors } (Y = f^i(X_1, \dots, X_p)) \end{array} \quad (4.2)$$

Cette paramétrisation est souhaitable dans la modélisation puisqu'elle permet de décomposer un comportement non linéaire en sous modèles locaux linéaires. La figure (4.2) est un exemple illustratif d'une fonction d'une seule variable représentée par trois règles de type TS :

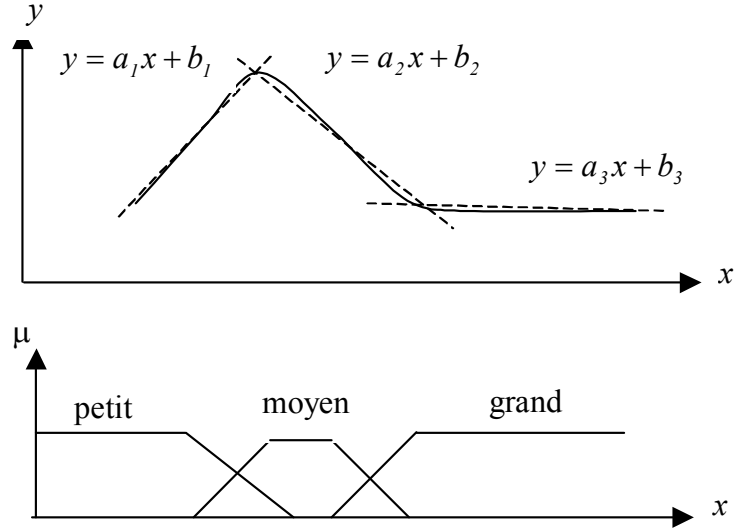


Figure 4.2 : Approximation linéaire par trois règles floues de type TS

La différence principale avec le modèle de Mamdani réside dans le fait que le conséquent Y est une fonction f^i dans laquelle interviennent les mêmes variables que dans l'antécédent. Les fonctions f^i sont choisies sous forme d'une fonction paramétrique appropriée.

4.2.2 Modélisation floue

Soit un univers U . Dans cet univers, un ensemble flou F est caractérisé par une fonction d'appartenance (membership function) $\mu_f(x)$, où $\mu_f(x) \in [0, 1]$ pour n'importe quel $x \in U$.

La base des règles comprend une collection de règles floues **si... alors...** de type Takagi-Sugeno.

Un système flou d'ordre j est généralement décrit par

$$R^{(j)} : \begin{array}{l} \text{si } x_1 \text{ est } A_1^j \text{ et } \dots \text{ et } x_N \text{ est } A_N^j \\ \text{alors } B^j = g_j(x) \end{array} \quad (4.3)$$

où $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in V \subset R^N$ et $y \in W \subset R$ dénotent les variables linguistiques liées aux entrées sortie du modèle flou, A_n^j et B^j appartient aux ensembles flous V et W respectivement, l'indice N dénote le nombre d'entrées ($l = 1, 2, \dots, N$) et j dénote le nombre de règles ($j = 1, 2, \dots, M$). $g_j(x)$ est une fonction de la forme suivante :

$$g_j(x) = a_{j0} + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_N, \quad (4.4)$$

La formule mathématique du modèle flou de Takagi-Sugeno (TS) pour la modélisation des systèmes chaotiques inconnus est donnée par :

$$y = F(x) = \frac{\sum_{j=1}^M g_j(x) \mu_j(x)}{\sum_{j=1}^M \mu_j(x)} = \frac{\sum_{j=1}^M \left(a_{j0} + \sum_{l=1}^N a_{jl} x_l \right) \mu_j(x)}{\sum_{j=1}^M \mu_j(x)} \quad (4.5)$$

où y représente la sortie du modèle flou.

La fonction d'appartenance $\mu_j(x)$ est choisie de forme *gaussienne* avec une defuzzification *moyenne*. La moyenne et la variance relatives de la fonction d'appartenance sont respectivement c_{ji} et σ_{ji} .

$$\mu_j(x(i)) = \prod_{l=1}^N \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x(i) - c_{ji}}{\sigma_{ji}} \right)^2 \right) \quad (4.6)$$

Soit le vecteur ζ défini par :

$$\zeta_j(x(i)) = \frac{\mu_j(x(i))}{\sum_{j=1}^M \mu_j(x(i))} \quad (4.7)$$

De plus, soit le vecteur de paramètre θ défini par :

$$\theta = [a_{10}, a_{20}, \dots, a_{M0}, a_{11}, a_{21}, \dots, a_{M1}, \dots, a_{1N}, a_{2N}, \dots, a_{MN}]^T. \quad (4.8)$$

La modèle floue de TS sera représenté par l'expression (4.9) :

$$y(i) = F(x(i)) = \theta^T \zeta(x(i)). \quad (4.9)$$

une modélisation à chaque pas d'itération i .

Pour obtenir le modèle flou, on doit estimer le vecteur θ en déterminant les paramètres a_{ji} de la fonction $g(x)$ et d'estimer les moyennes c_{ji} et variances σ_{ji} des fonctions d'appartenances gaussiennes aussi bien que le nombre d'ensembles flous N et le nombre maximum de règles floues M . Pour cela, et pour un système chaotique inconnu donné par des paires de données d'entrée-sortie mesurées, on cherche à réduire au minimum la fonction quadratique (4.10), qui quantifie l'erreur entre la sortie actuelle $y_s(i)$ et la sortie du modèle flou $y(i)$ pour

toutes les données mesurées à chaque itération i ($i = 1, 2, \dots, n$).

$$e_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y(i) - y_s(i))^2, \quad (4.10)$$

en ajustant les différents paramètres du système flou, qui sont : a_{ji} , c_{ji} et σ_{ji} .

L'optimisation de ces paramètres peut être obtenue par diverses méthodes d'identification telles que la méthode classique du gradient, la méthode du gradient conjugué, la méthode des moindres carrés récursif (RLS), ou l'algorithme de Levenberg-Marquardt [137, 138].

L'algorithme de Levenberg-Marquardt a la possibilité de former une approximation précise de n'importe quelle fonction non linéaire. L'équation itérative de l'algorithme pour l'optimisation des paramètres est donnée par :

$$\alpha_{new} = \alpha_{old} - (J_{\alpha_{old}}^T J_{\alpha_{old}} + \lambda I)^{-1} J_{\alpha_{old}}^T e_i, \quad (4.11)$$

où I représente la matrice identité et J_{α} la jacobienne pour chaque paramètre définie par :

$$J_{a_{ji}} = \frac{\partial g(x)}{\partial a_{ji}}, J_{c_{ji}} = \frac{\partial \mu_j(x)}{\partial c_{ji}}, J_{\sigma_{ji}} = \frac{\partial \mu_j(x)}{\partial \sigma_{ji}}. \quad (4.12)$$

Généralement, le facteur λ appelé *momentum term* sert à maintenir la recherche de se déplacer dans la bonne direction.

L'algorithme de Levenberg-Marquardt est exécuté à plusieurs reprises afin d'entraîner le système flou sur les paires de données d'entrées-sorties. L'algorithme fonctionne jusqu'à ce que tous les paramètres cessent de changer ou changent très peu sur une série de pas d'itérations. Ceci indique que la valeur de l'erreur est réduite au minimum, ainsi l'algorithme a trouvé un minimum et il peut être terminé. Les paramètres seront réinitialisés si la recherche du minimum n'aboutit pas au bout d'un certain temps.

La figure (4.3) illustre le principe de la modélisation utilisée.

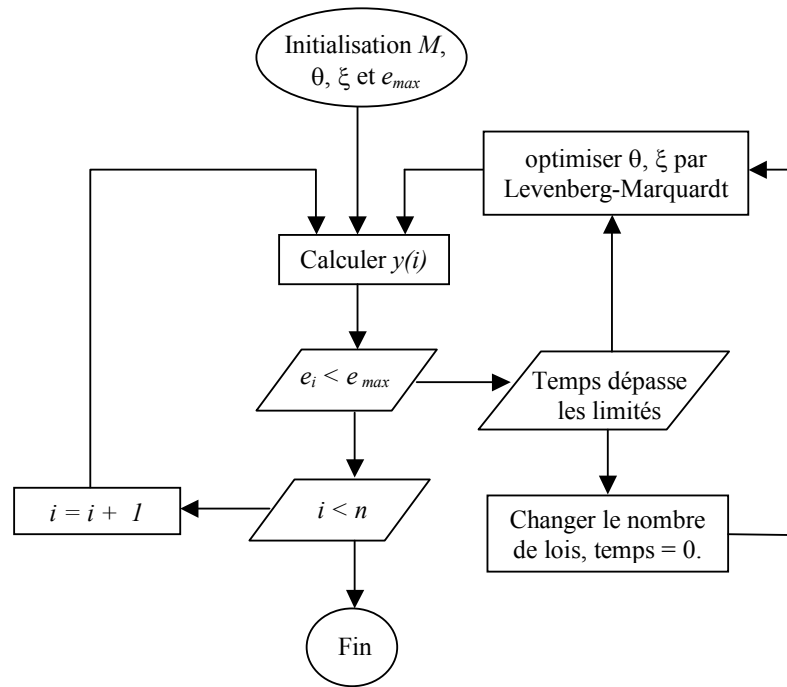


Figure 4.3 : Modélisation floue des systèmes chaotiques.

Pour obtenir le modèle flou d'un système chaotique, l'algorithme se résume comme suit :

1. Définition d'un ensemble de paires de données d'entrées-sorties à partir du système réel.
2. Initialisation du système flou, en choisissant le nombre des règles M , en initialisant c_{ji} et σ_{ji} des fonctions d'appartenances ; en initialisant le vecteur des valeurs estimées θ par l'initialisation des a_{ji} . De plus, le nombre maximal d'itération ou l'erreur maximale admissible e_{\max} doit être spécifique.
3. Choix du facteur λ . Prendre $\lambda = 0.01$.
4. Définir le vecteur de la fonction d'appartenance gaussienne.
5. Calculer la sortie $y(i)$ du modèle flou à chaque itération.
6. Former le vecteur d'erreur e_i et le Jacobien J des différents paramètres a_{ji} , c_{ji} et σ_{ji} .
7. Chercher les nouveaux paramètres par minimisation de l'erreur par l'algorithme de Levenberg-Marquardt.
8. Fin de la boucle principale.

4.2.3 Contrôle prédictif flou

Le choix de la méthode de contrôle doit faire un compromis entre la complexité de la tâche et la performance de la modélisation. D'un autre côté, le temps de modélisation est très important. Si l'algorithme prend beaucoup de temps pour donner un résultat, il n'a pas de valeur pratique.

Comme la performance du modèle flou dépend des approximations des paramètres inconnus, donc on peut constater que, plus le comportement chaotique est complexe, plus le nombre d'ensembles flous est grand. Mais, en pratique, ceci n'est pas suggéré, car on doit prendre en considération que, plus le nombre d'ensemble flou est grand, plus la modélisation devient compliquée, car le nombre de paramètres dans la fonction d'appartenance devient très important.

Le but de la modélisation floue est donc d'obtenir un modèle qui caractérise le mieux le système chaotique inconnu, ceci, par un choix adéquat des différents paramètres utilisés par la modélisation.

En se basant sur ce modèle flou, il est possible de prédire l'état futur du système à partir des paires de données d'entrées-sorties du système chaotique inconnu. Une fois la prédiction d'une variable d'état du système est achevée, elle sera d'une part injectée dans la loi de contrôle pour activer le contrôle, et d'autre part, elle sera utilisée dans la chaîne de retour pour prédire la prochaine sortie soumise au contrôle u .

L'objectif du contrôle est de conduire le système chaotique inconnu d'un régime chaotique vers un comportement régulier.

La figure (4.4) représente le schéma de base du contrôle prédictif flou où le processus sous contrôle est le système chaotique inconnu. y_s représente la sortie du système réel, y est la sortie floue, e_i est l'erreur de modélisation, y_p est la sortie prédite à partir du modèle flou et u représente l'entrée de contrôle.

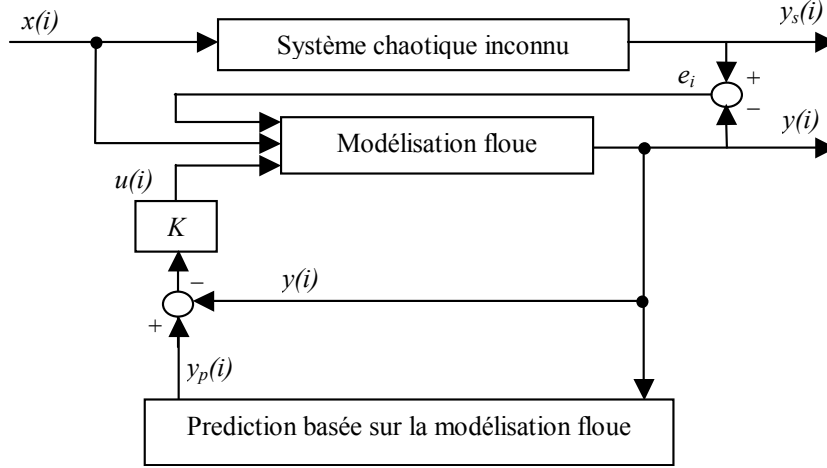


Figure 4.4 : Schéma de base du contrôle prédictif flou.

Si on considère que la trajectoire du modèle flou est dans un état chaotique, le but est de concevoir un contrôleur u , pour être introduit dans l'équation (4.9), afin de stabiliser le système contrôlé sur un point fixe instable.

$$y(i) = F(x(i)) + u(i) = \theta^T \zeta(x(i)) + u(i) \quad (4.13)$$

Le contrôleur prédictif flou est déterminé par la différence entre l'état prédit y_p et l'état actuel $y(i)$ comme suit :

$$u(i) = K (y_p - y(i)) \quad (4.14)$$

où K est le gain de contrôle.

Basé sur le modèle flou (4.9), la prédiction floue d'un état futur y_p du système chaotique inconnu non contrôlé est obtenue à partir de l'état actuel y par :

$$y_p = y(i + p) = F(x(i + p)) = \theta^T \zeta(x(i + p)) \quad (4.15)$$

Et le contrôleur u sera donné par :

$$u(i) = K (\theta^T \zeta(x(i + p)) - \theta^T \zeta(x(i))) \quad (4.16)$$

Pour un système chaotique inconnu modélisé par un système flou de type Takagi-Sugeno décrit par les données d'entrées sorties $(x(i), y_s(i), i = 1, 2, \dots, n)$, ce système peut contenir

des points fixes instables. Le but est de stabiliser le système flou sur un de ces points s'il y'en a.

Soit y_f un point fixe instable inconnu à stabiliser, il satisfait la relation :

$$y_f = F(x_f) = \theta^T \zeta(x_f). \quad (4.17)$$

Le contrôleur flou est choisi de telle manière que la trajectoire du système non contrôlé converge vers le point fixe instable inconnu y_f . La linéarisation du modèle flou autour de y_f est donnée par :

$$\delta y(i) = A \delta F(x(i)), \quad (4.18)$$

où

$$\delta y(i) = y(i) - y_f; \quad \delta F(x(i)) = F(x(i)) - x_f, \quad (4.19)$$

et A définie par

$$A = D_y F(y_f), \quad (4.20)$$

est évalué autour du point fixe y_f .

Pour que le contrôle soit simple à réaliser, nous utilisons une prédiction d'un pas, l'état futur prédit sera donné par :

$$y(i+1) = \theta^T \zeta(x(i+1)). \quad (4.21)$$

La loi de contrôle prédictive floue sera sous la forme :

$$\begin{aligned} u(i) &= K(y(i+1) - y(i)) \\ &= K(F(x(i+1)) - F(x(i))) \\ &= K(\theta^T \zeta(x(i+1)) - \theta^T \zeta(x(i))) \end{aligned} \quad (4.22)$$

et le système chaotique inconnu contrôlé défini par :

$$y(i) = F(x(i)) + K(\theta^T \zeta(x(i+1)) - \theta^T \zeta(x(i))) \quad (4.23)$$

Afin d'appliquer la loi de contrôle, nous supposons que la dynamique du système chaotique non linéaire est approximativement linéaire dans le petit voisinage du point fixe.

Ainsi, près de y_f , on peut utiliser l'approximation linéaire suivante :

$$\begin{aligned}
\delta y(i) &= A\delta F(x(i)) + \delta u(i) \\
&= A\delta F(x(i)) + K(\delta y(i+1) - \delta y(i)) \\
&= A\delta F(x(i)) + K(\delta F(x(i+1)) - \delta F(x(i))) \\
&= A\delta F(x(i)) + K(A\delta F(x(i)) - \delta F(x(i))) \\
&= (A + K(A - 1))\delta F(x(i))
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Le problème de contrôle est de concevoir $u(i)$ pour contrôler l'état $y(i)$ du système pour qu'elle tombe sur le point fixe instable inconnu y_f .

Le gain K est calculé tel que l'équation (4.24) est exponentiellement stable. Ceci implique que K doit satisfaire l'inégalité suivante :

$$|A + K(A - 1)| < 1 \tag{4.25}$$

De plus, puisque le système chaotique n'a pas une représentation mathématique, on assume que si :

$$|y(i) - y(i-1)| < \varepsilon \tag{4.26}$$

pour un petit nombre positif ε , alors l'état $y(i)$ est près du point fixe instable inconnu que l'on désire stabiliser et la valeur de A peut être approximée autour de ce point par :

$$A = \frac{y(i+1) - y(i)}{y(i) - y(i-1)}. \tag{4.27}$$

La stabilité est garantie dans le voisinage du point fixe stabilisé de même sorte que dans [33] et [62], et le système flou contrôlé devient comme suit :

$$y(i) = \begin{cases} F(x(i)) + u(i) & \text{si } |y(i) - y(i-1)| < \varepsilon \\ F(x(i)) & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{4.28}$$

Nous avons ainsi proposé un algorithme de contrôle prédictif basée sur la modélisation floue pour stabiliser les points fixes instables des systèmes chaotiques inconnus [93, 94]. Afin de tester cet algorithme, la simulation numérique sur quelques systèmes s'avère très utile.

4.2.4 Résultats et interprétations

Pour étudier l'efficacité de la méthode proposée pour la phase de modélisation et celle du contrôle prédictif flou, on l'applique sur quelques systèmes chaotiques inconnus. De plus, la comparaison avec d'autres méthodes de contrôle serait faite.

4.2.4.1 Exemple 1

L'équation logistique donnée par :

$$y_s(i) = py_s(i)(1 - y_s(i)) \quad (4.29)$$

présente un comportement chaotique pour $p = 4$ et a deux point fixes instables $x_{f1} = 0$; et $x_{f2} = 1 - 1/p$.

Pour confirmer l'étude théorique, on suppose que le système chaotique inconnu est un système de premier ordre et est représenté par les paires de données $(x(i), y_s(i))$ comme suit :

$$\begin{aligned} x(i) &= y_s(i-1) \\ y_s(i) &= px(i)(1 - x(i)) \end{aligned} \quad (4.30)$$

En se basant sur ces paires de données d'entrée-sortie, le modèle non linéaire est construit dans la structure du système flou de type Takagi-Sugeno. Le système flou est décrit comme suit :

$$R^{(j)} : \begin{array}{l} \text{si } x \text{ est } A_1^j \\ \text{alors } B^j = g_j(x) \end{array} \quad j = 1, \dots, M \quad (4.31)$$

avec $M = 3$ règles d'inférences.

La fonction d'appartenance $\mu_j(x)$ est choisie de forme *gaussienne* avec une defuzzification *moyenne* :

$$\mu_j(x(i)) = \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x(i) - c_{ji}}{\sigma_{ji}} \right)^2 \right) \quad (4.32)$$

La formule mathématique du modèle flou de Takagi-Sugeno (TS) pour la modélisation du

système chaotique inconnu (4.30) à chaque itération i est donnée par :

$$y_s(i) = F(x(i)) = \frac{\sum_{j=1}^3 g_j(x(i)) \mu_j(x(i))}{\sum_{j=1}^3 \mu_j(x(i))} = \frac{\sum_{j=1}^3 (a_j x(i)) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x(i) - c_{ji}}{\sigma_{ji}}\right)^2\right)}{\sum_{j=1}^3 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x(i) - c_{ji}}{\sigma_{ji}}\right)^2\right)} \quad (4.33)$$

une modélisation à chaque pas d'itération $i (i = 1, \dots, 100)$.

L'algorithme de Levenberg-Marquardt est utilisé pour l'optimisation des paramètres a_{ji} , c_{ji} et σ_{ji} .

La figure (4.5) représente les résultats de la modélisation floue. Dans la figure 4.5(a), la sortie y_s du système inconnu est représentée par un trait continue bleu et la sortie du modèle flou correspondante y est représentée par un trait pointillés rouge. Les deux trajectoires sont identiques.

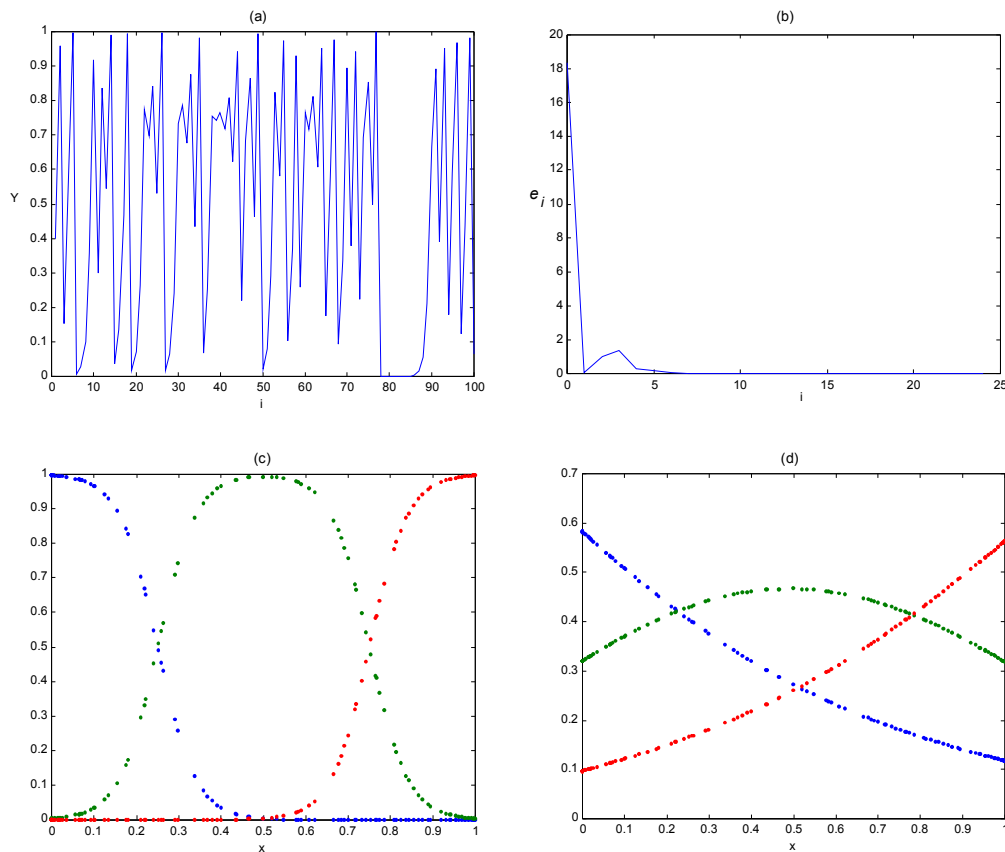


Figure 4.5 : Modélisation floue de l'équation logistique. (a) Le modèle flou. (b) Erreur de modélisation. (c) Fonctions d'appartenances (MF) initiales. (d) MF finales.

TAB. 5: Paramètres de modélisation floue de l'équation logistique

Nombre de loi $M = 3$	Nombre d'itérations 25	Erreur de modélisation $1.457 \cdot 10^{-3}$
Paramètres du modèle	Valeurs initiales	Valeurs finales
$a_{1,0} \ a_{2,0} \ a_{3,0}$	0, 0, 0	-1.1885 1.5384 2.0054
$a_{1,1} \ a_{2,1} \ a_{3,1}$	0, 0, 0	3.5371 0.2475 -3.5134
$c_{1,1} \ c_{2,1} \ c_{3,1}$	0, 0.5, 1	-0.1984 0.5081 1.1504
$\sigma_{1,1} \ \sigma_{2,1} \ \sigma_{3,1}$	0.15, 0.15, 0.15	0.6714 0.4511 0.6020

Les valeurs initiales utilisées dans la phase d'identification aussi bien que les valeurs des paramètres caractéristiques obtenus, le nombre d'itération et l'erreur de modélisation sont indiquées dans le tableau 5.

Une fois le modèle flou obtenu, le contrôle prédictif $u(i)$ est injecté afin de stabiliser les points fixes instables inconnus.

A l'itération $i = 27$, le test (4.26) est vérifié et la sortie floue correspondante est $y(27) = 0.0645$. Ceci nous laisse supposer que le système contient un point fixe instable au environ de cette valeur de y .

A partir de l'équation (4.27), la valeur de A est déduite :

$$A = \frac{y(i+1) - y(i)}{y(i) - y(i-1)} = \frac{0.2399 - 0.0645}{0.0645 - 0.0177} = 3.7563 \quad (4.34)$$

La linéarisation autour de ce point donne :

$$\delta y(i) = (3.7563 - 2.7563K)\delta F(x(i)) \quad (4.35)$$

et le point est stabilisé par la contrôle prédictif flou si :

$$|3.7563 - 2.7563K| < 1 \quad (4.36)$$

Pour que le système se stabilise, il faut que le gain K soit compris dans l'intervalle :

$$-1.7256 < K < -1 \quad (4.37)$$

On choisit $K = -1.3628$.

Après application sur le modèle flou, nous remarquons que le contrôle u prend une valeur non nulle à la prochaine itération $i = 28$ et stabilise la trajectoire du modèle flou sur le point fixe instable inconnu $y_{f1} = -3.9532 \cdot 10^{-4}$.

Dans le deuxième cas, le test se vérifie à l'itération $i = 30$, la valeur de A est :

$$A = \frac{y(31) - y(30)}{y(30) - y(29)} = \frac{0.6745 - 0.7856}{0.7856 - 0.7334} = -2.1284 \quad (4.38)$$

La linéarisation autour de ce point est donné par

$$\delta y(i) = (-2.1284 - 3.1284K)\delta F(x(i)) \quad (4.39)$$

Ainsi, le gain K doit être compris dans l'intervalle :

$$-1 < K < -0.3603 \quad (4.40)$$

i. e

$$K = -0.6801 \quad (4.41)$$

Expérimentalement, on trouve $y_{f1} = 0.7502$.

Les résultats de simulation sont donnés dans la figure (4.6).

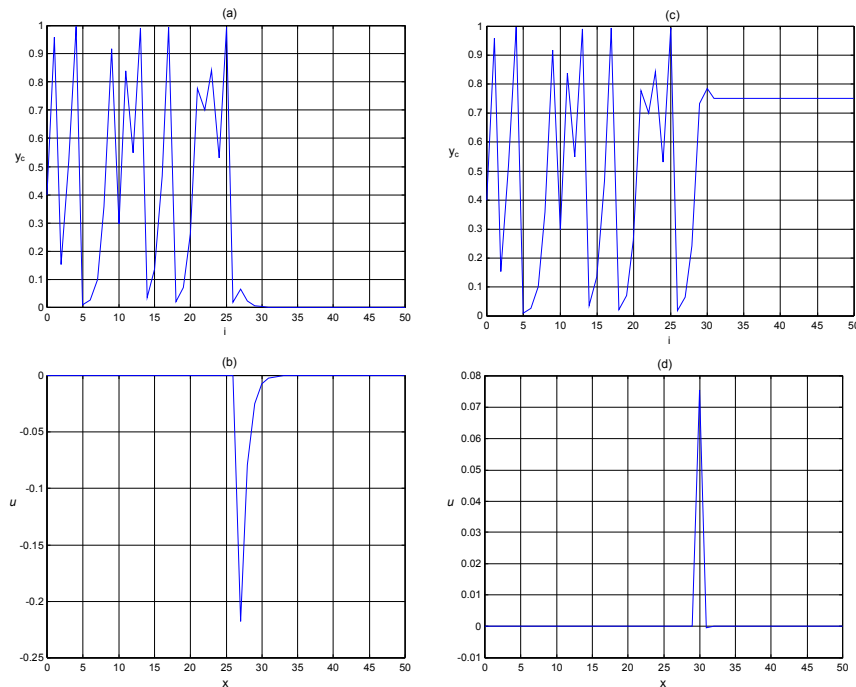


Figure 4.6 : Contrôle de l'équation logistique ($\varepsilon = 0.25$). (a,b) $t = 25; i = 27$. (c,d) $t = 30; i = 30$.

Nous avons testé différentes valeurs de ε . Ainsi, les figures représentent les résultats obtenus pour $\varepsilon = 0.25$. Contrairement au premier cas, la trajectoire du système est au voisinage du point fixe x_{f2} à l'itération $i = 24$. A cet instant, le contrôle u prend une valeur non nulle et stabilise la trajectoire sur ce point fixe. Si on compare ce résultat avec celui de la méthode de contrôle incursive [28], on remarque que le chaos est stabilisé sur un point fixe instable par contre dans le cas du contrôle incursive, il le stabilise sur une valeur désirée.

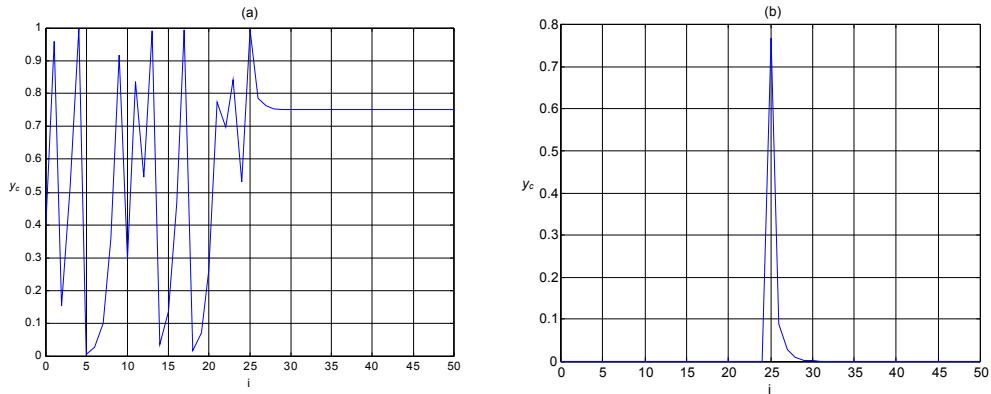


Figure 4.7 : Contrôle de l'équation logistique ($\varepsilon = 0.5$), $t = 25$.

4.2.4.2 Exemple 2

La méthode de contrôle flou proposée par Chen & Chen dans [140] utilise un contrôleur prédictif basé sur la logique floue. Cette méthode s'avère très efficace pour conduire la trajectoire chaotique du système contrôlé vers tout comportement périodique. L'activation du contrôleur se fait par choix propre à l'utilisateur. De ce fait, l'énergie consommée par le contrôleur peut être non négligeable. De plus, lors de l'activation du contrôle, la trajectoire passe par une phase transitoire pour se stabiliser ensuite sur la trajectoire désirée.

Pour comparer les résultats de cette méthode avec l'algorithme proposé, on étudie le même système chaotique que celui utilisé dans la référence [140].

Le système choisi est défini par une fonction quadratique de la forme (4.42) :

$$y_s(i) = 0.96 \sin(\pi y_s(i-1)) \quad (4.42)$$

et présente un comportement chaotique.

Nous supposons que le système chaotique inconnu est représenté par 100 paires de données d'entrées sorties $(x(i), y_s(i))$ obtenus à partir de :

$$\begin{aligned} x(i) &= y_s(i-1) \\ y_s(i) &= 0.96 \sin(\pi x(i)) \end{aligned} \quad (4.43)$$

La figure (4.8) représente les résultats de la modélisation floue.

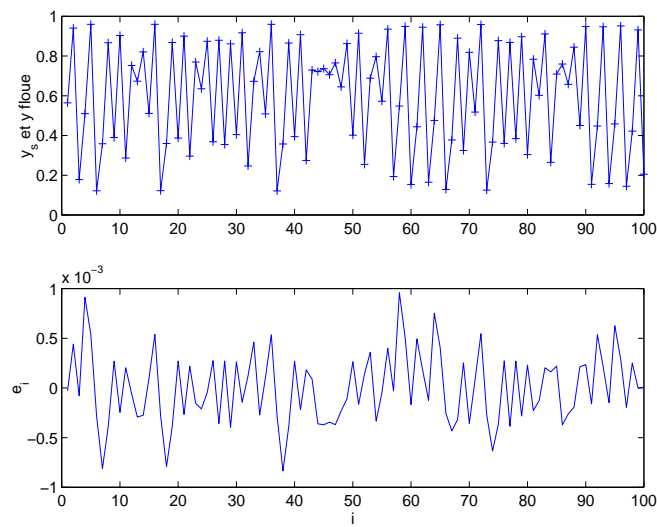


Figure 4.8 : Modélisation floue de l'équation (4.43). (a) Paires de données d'entrées-sorties et le modèle flou. (b) Erreur de modélisation.

Une fois le modèle flou obtenu, le contrôle prédictif $u(i)$ est ajouté afin de stabiliser les points fixes instables inconnus.

A l'itération $i = 45$, l'inégalité (4.26) est vérifiée et la sortie floue $y(45) = 0.7369$. Ceci nous laisse supposer que le système contient un point fixe instable au environ de cette valeur de y .

A partir de l'approximation (4.27), la valeur de A est obtenue à partir de la simulation comme suit :

$$A = \frac{y(i+1) - y(i)}{y(i) - y(i-1)} = \frac{0.7061 - 0.7369}{0.7369 - 0.7214} = -1.9871 \quad (4.44)$$

Le système contrôlé autour de son point fixe instable inconnu est donné par

$$\delta y(i) = (-1.9871 - 2.9871K)\delta F(x(i)) \quad (4.45)$$

Le point fixe est stabilisé par la contrôle prédictif flou si :

$$|-1.9871 - 2.9871K| < 1 \quad (4.46)$$

Ainsi, pour que le système se stabilise sur son point fixe instable, il faut que le gain K soit compris dans l'intervalle :

$$-1 < K < -0.3305 \quad (4.47)$$

On choisit $K = -0.8$.

A l'itération $i = 46$, le contrôle u prend une valeur très petite par rapport à celle obtenue dans la référence [126] et permet de stabiliser la trajectoire sur le point fixe instable inconnu du système flou. Les résultats de simulation sont donnés dans la figure (4.9).

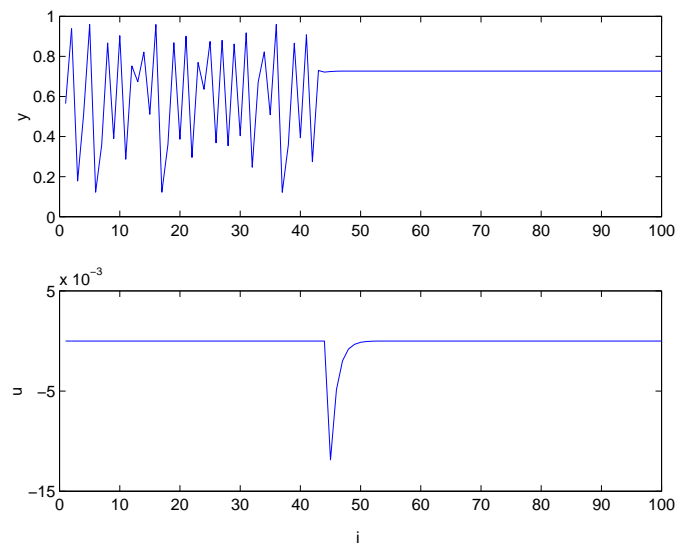


Figure 4.9 : Modèle flou sous contrôle prédictif. (a) La variable $y(i)$. (b) Le contrôle $u(i)$.

Expérimentalement, on trouve $y_f = 0.7268$.

4.2.4.3 Exemple 3

Afin de comparer la méthode de contrôle prédictif floue proposée avec la méthode de contrôle prédictif. On reprend le système (3.9) :

$$y_s(i+1) = 3y_s(i)(1 - y_s^2(i)) \quad (4.48)$$

qui peut être réécrit par :

$$\begin{aligned} y_s(i) &= x(i) \\ y_s(i+1) &= 3x(i)(1 - x^2(i)) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Les résultats de la modélisation sont données dans les figures suivantes :

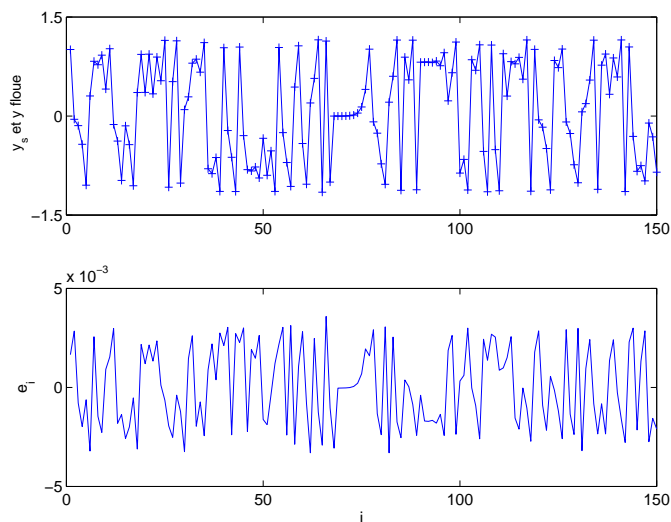


Figure 4.10 : Modélisation floue de l'équation (4.49).

Ainsi, une fois le système flou obtenu. Nous constatons que le teste (4.26) peut être vérifié trois fois.

1. A l'itération $i = 69$, le système contrôlé est donné par :

$$\delta y(i) = (4 + 3K)\delta F(x(i)). \quad (4.50)$$

en choisissant $K = -1.5$. Le contrôle $u(i)$ stabilise le premier point fixe instable inconnu y_{f1} .

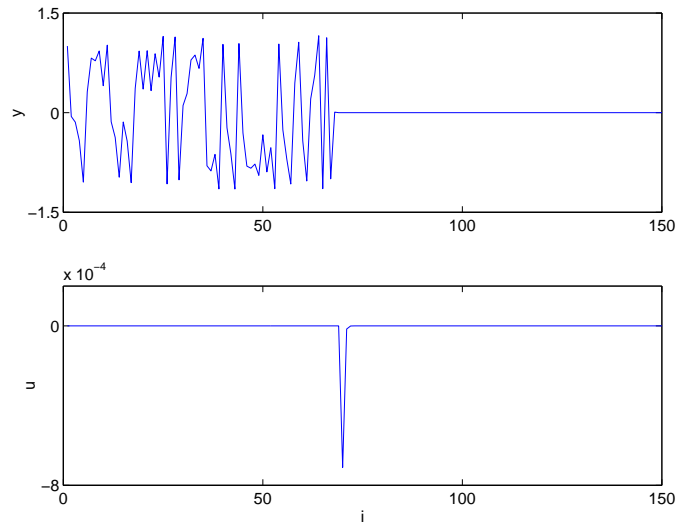


Figure 4.11 : Stabilisation du point fixe instable $y_{f1} = 0$.

2. A l'itération $i = 91$; $y(91) =$, d'où on obtient :

$$\delta y(i) = (-2.9259 - 3.9259K)\delta F(x(i)) \quad (4.51)$$

avec $K = -0.9$. Cette valeur de gain permet la stabilisation du deuxième point fixe instable inconnu y_{f2} du système chaotique inconnu.

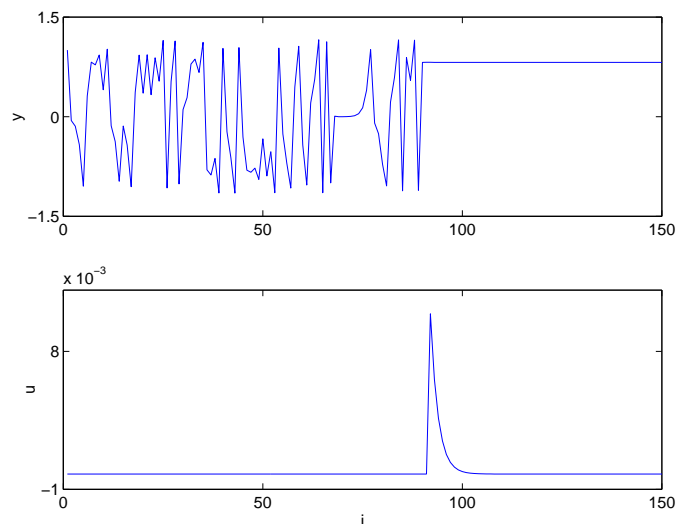


Figure 4.12 : Stabilisation du point fixe instable $y_{f2} = 0.8176$.

3. En explorant le système à nouveau, le test est vérifié à $i = 101$ et on obtient :

$$\delta y(i) = (-4.297 - 5.297K)\delta F(x(i)), \quad (4.52)$$

Le gain K est choisi de même valeur que dans le cas précédent mais cette fois u stabilise y_{f3} .

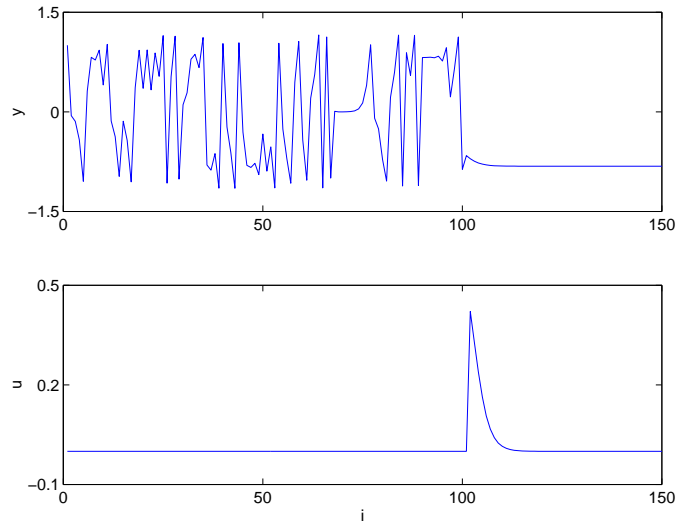


Figure 4.13 : Stabilisation du point fixe instable $y_{f3} = -0.8176$.

4.2.4.4 Exemple 4

Soit le système de Hénon donné par :

$$y_s(i) = 1.4 - y_s^2(i-1) + 0.3y_s(i-2) \quad (4.53)$$

Dans la phase de la modélisation, il est impossible de reconstruire le système chaotique par modélisation flou en appliquant la même procédure que celle utilisée dans les exemples précédents. Ceci est dû à l'ordre du système qui n'est plus du premier ordre mais du deuxième ordre.

Le système est représenté par les équations suivante :

$$\begin{aligned}x_1(i) &= y_s(i-1) \\x_2(i) &= y_s(i-2) \\y_s(i) &= 1.4 - x_1^2(i) + 0.3x_2(i)\end{aligned}\tag{4.54}$$

Dans ce cas, le système flou est caractérisé par deux entrées et une sortie. En prenant $M = 7$, les résultats de modélisation et de contrôle sont représentés par la figure (4.14) et regroupés dans le tableau (6).

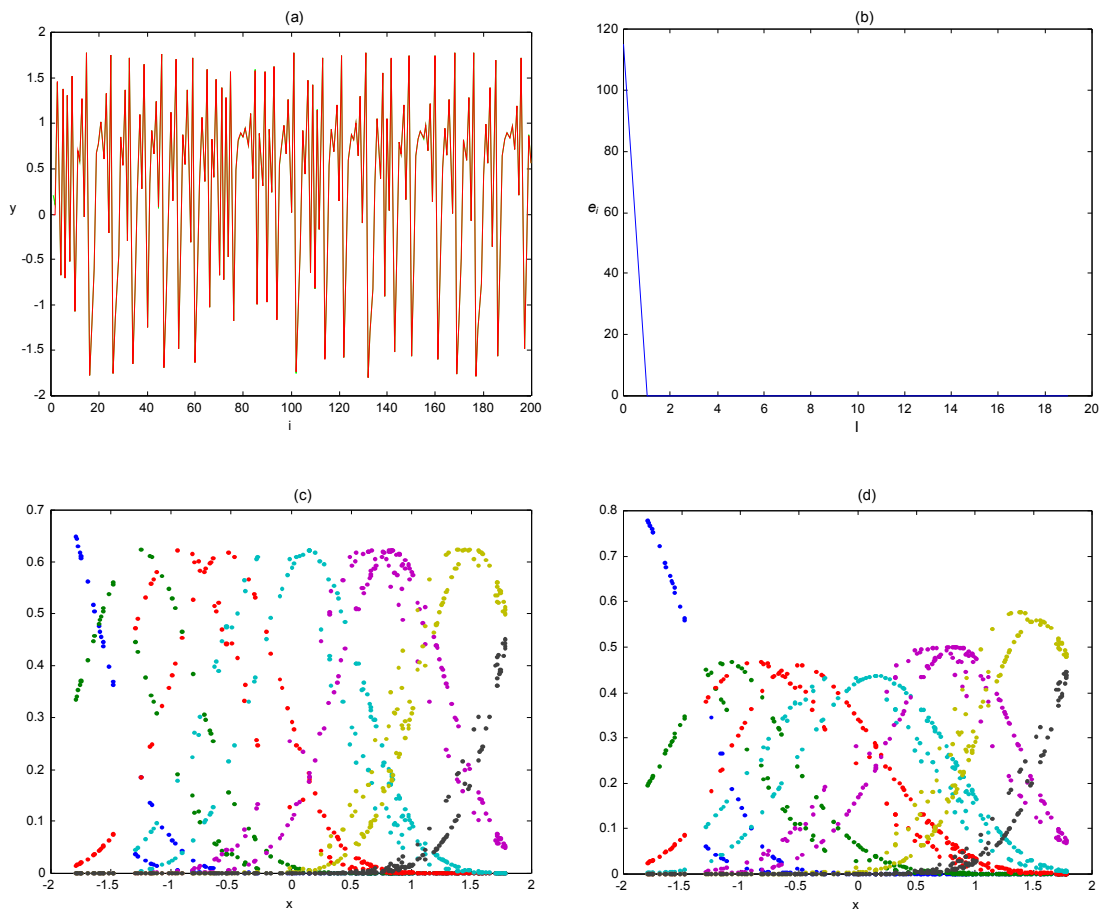


Figure 4.14 : Modélisation floue de système de Hénon. (a) Le modèle flou. (b) Erreur de modélisation. (c) Fonctions d'appartenances (MF) initiales. (d) MF finales.

Ces résultats montrent que l'algorithme d'optimisation fonctionne parfaitement même

TAB. 6: Paramètres de modélisation floue du système de Hénon

Nombre de loi $M = 7$	Nombre d'itérations 20	Erreur de modélisation $1.2332 \cdot 10^{-4}$
Paramètres du modèle	Valeurs initiales	Valeurs finales
$a_{1,0} \ a_{2,0} \ \dots \ a_{7,0}$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0	6.5822 7.6188 3.5434 0.1685 -0.0755 0.5650 0.8112
$a_{1,1} \ a_{2,1} \ \dots \ a_{7,1}$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0	4.1672 5.5811 4.3659 2.0358 0.2304 -0.8244 -2.2396
$c_{1,1} \ c_{2,1} \ c_{3,1}$	-2.5 -1.6667 -0.8333 0 0.8333 1.6667 2.5	-2.4849 -1.6259 -0.6495 0.0047 0.7437 1.6724 2.4830
$\sigma_{1,1} \ \sigma_{2,1} \ \sigma_{3,1}$	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5	0.5668 0.7029 0.6790 0.6417 0.6158 0.5510 0.5529

si le nombre de paramètres à identifier est important. Après uniquement deux itérations, l'erreur de modélisation décroît de 110 à 10^{-2} .

Les figures 4.15(a–b) montrent les résultats du contrôle. Le contrôle est activé pour $i > 60$ et pour ε égale respectivement à 0.25 et à 0.9.

Pour le premier cas, le système est à proximité d'un point fixe à $i = 79$. A cet instant, l'entrée de commande devient active et stabilise le système sur le point fixe $x_{f1} = 0.8842$. La condition de stabilisation est :

$$-1 < K < 0.3196 \quad (4.57)$$

Nous choisissons $K = -0.65$.

Pour le deuxième cas, le contrôle déclenche immédiatement à l'itération $i = 60$ et la trajectoire du système est stabilisée sur le point fixe $x_{f2} = -1.5989$. La condition sur le gain K , est :

$$-9.0297 < K < -1; \quad (4.58)$$

Nous choisissons $K = -1.5$.

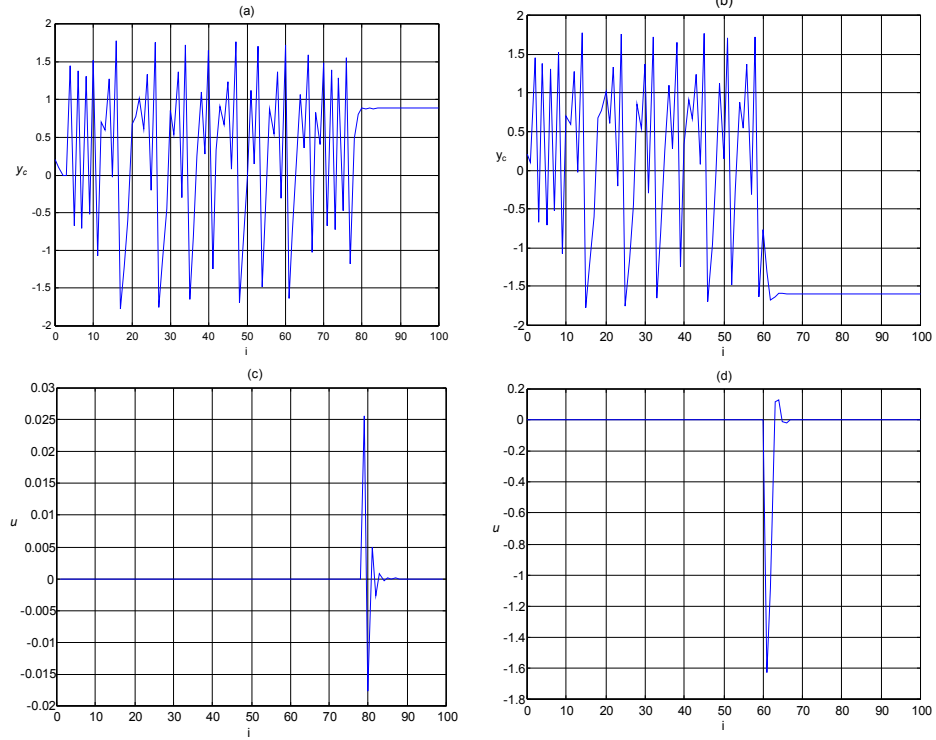


Figure 4.15 : Activation du contrôle à $t = 25$. (a) $\varepsilon = 0.25$. (b) $\varepsilon = 0.9$.

4.2.4.5 Exemple 5

Soit le système chaotique sous la forme suivante :

$$y_s(i+1) = 1.9y_s(i) - y_s^3(i) + 0.5y_s(i-1) \quad (4.59)$$

Nous supposons que le système chaotique inconnu est représenté par 200 paires de données en utilisant les paires de données d'entrées sorties $(x(i), y_s(i))$ comme suit

$$\begin{aligned} x_1(i) &= y_s(i-1) \\ x_2(i) &= y_s(i-2) \\ y_s(i) &= 1.9x_1(i) - x_1^3(i) + 0.5x_2(i) \end{aligned} \quad (4.60)$$

De ceci, le système flou sera est caractérisé par deux entrées et une sortie. Les résultats de modélisation et de contrôle sont regroupés dans la figure (4.16).

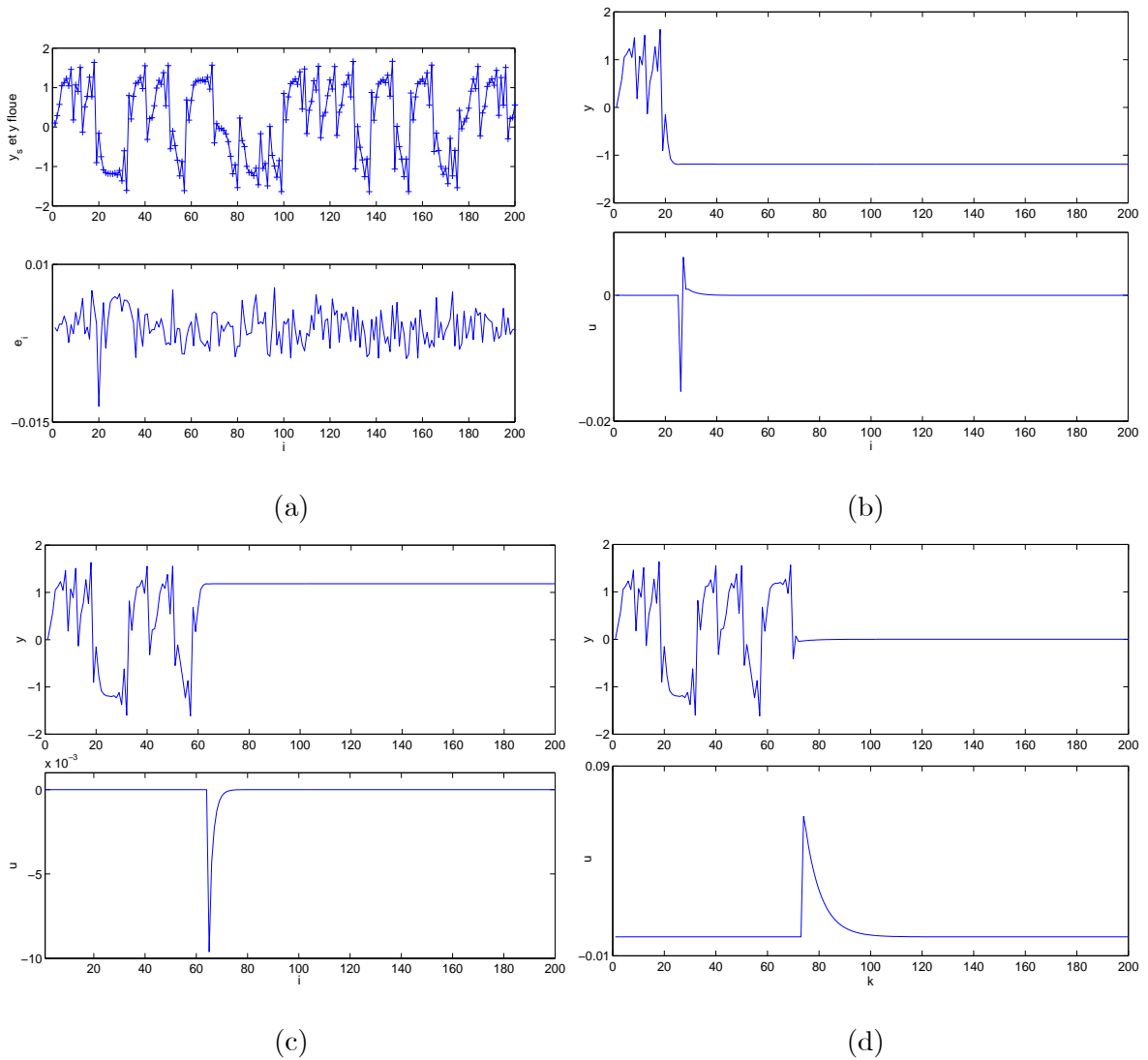


Figure 4.16 : (a) Le modèle flou y et l'erreur de modélisation e_i . (b) Le point fixe instable inconnu stabilisé $y_{f1} = -1.9$; gain $K = -0.9$. (c) $y_{f2} = 1.9$; $K = -0.9$. (d) $y_{f3} = 0$; $K = -1.1$.

4.3 Contrôle neuronal

Les réseaux de neurones artificiels sont des circuits, des algorithmes d'ordinateur, ou des représentations mathématiques de l'ensemble de neurones massivement reliées qui forment un réseau de neurones biologiques. Ils se sont avérés utiles comme une technologie de calcul alternative et prouvent leurs utilités dans une variété de domaines technologiques : identification, traitement des signaux, problèmes de contrôle, etc.

Récemment, les réseaux de neurones ont trouvé le succès comme matière prometteuse

pour résoudre les problèmes de contrôle fortement non linéaire [145, 148].

Leur application pour la contrôle de chaos a été réalisée avec succès [149, 152]. Dans [151], les réseaux de neurones ont été employés pour contrôler les systèmes dynamiques chaotiques par la méthode OGY ainsi que par la méthode de Pyragas. Dans ces techniques, l'accent est mis sur le contrôle d'un système chaotique sur une trajectoire désirée. Ren *et al.* [152] ont proposés une méthode de contrôle dynamique par réseaux de neurones pour les systèmes non linéaires continus inconnus.

Dans ce qui suit, nous examinerons la possibilité de développer un modèle simple de réseau neuronal pour la modélisation et le contrôle des systèmes chaotiques. Ceci est fait en combinant les réseaux de neurones avec le contrôleur prédictif pour contrôler le système chaotique inconnu sur une de ses orbites périodiques instables ou l'un de ses points fixes instables.

4.3.1 Définitions

4.3.1.1 Neurone formel

Un neurone formel fait une somme pondérée des entrées qui lui parviennent (chacune de ces entrées est une valeur numérique qui représente l'état du neurone qui l'a émis), puis s'active suivant la valeur de cette sommation pondérée. Si cette somme dépasse un certain seuil, le neurone est activé et transmet une réponse dont la valeur est celle de son activation. Si le neurone n'est pas activé, il ne transmet rien.

De façon plus générale, on définit un neurone comme suit :

- La nature de ses entrées : les entrées peuvent être binaires, réelles, stochastiques, etc.
- La fonction d'entrée : elle est en général une somme pondérée des entrées.
- La fonction d'activation qui définit son état interne en fonction de l'entrée.
- La fonction de sortie qui calcule la sortie du neurone en fonction de son état interne.
- La nature de sa sortie.

4.3.1.2 Réseau neuronal

Les neurones sont connectés en réseaux suivant des structures bien précises. Les deux structures les plus utilisées sont le réseau entièrement connecté et le réseau à couches. Dans le réseau entièrement connecté, la sortie de chaque neurone est connectée à l'entrée de tous les autres neurones

Dans le réseau à couches, qui est inspiré par des structures biologiques, les neurones sont regroupés en ensembles (couches) distincts. Généralement aucune connexion n'existe entre deux neurones d'une même couche, alors qu'il n'existe que des connexions allant d'un neurone d'une couche à un autre neurone de la couche suivante. La première couche du réseau est appelée *couche d'entrée*, la dernière couche est appelée *couche de sortie* et les couches intermédiaires sont dites *couches cachées*. Cette dernière structure sera utilisée dans le reste de notre étude.

4.3.2 Modélisation par réseaux de neurones

Pour un réseau de neurones avec des données d'entrée-sortie $(x(i), y_s(i))$, où $i = 1, 2, \dots, n$ représente le nombre d'itérations et une couche cachée de $j = 1, 2, \dots, M$ neurones.

Pour un tel réseau, l'entrée unité j^{th} de la couche cachée dénotée par I_j est la somme des poids de tous les entrées ajoutée au biais comme suit :

$$I_j = \sum_{i=1}^n w_{ji}x(i) + b_{ji}, \quad (4.61)$$

où w_{ji} sont les poids d'interconnexions à partir de la j^{th} fonction et la i^{th} entrée.

Ensuite, l'entrée I_j est injectée dans une fonction d'activation afin de générer la sortie O_j comme montré par la figure (4.17).

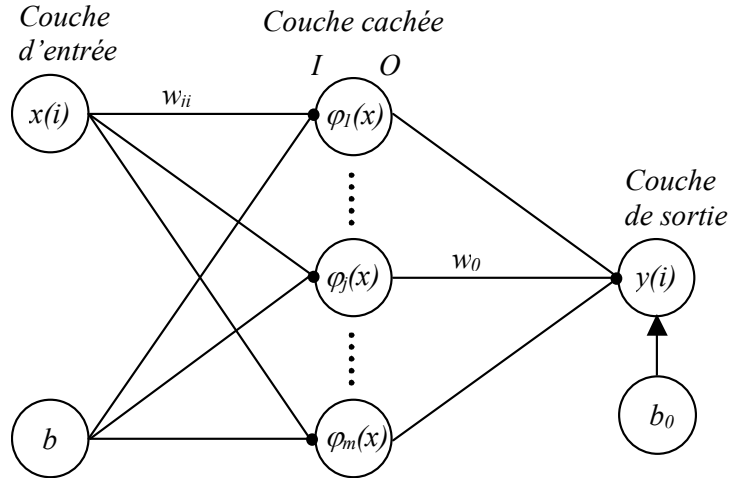


Figure 4.17 : Réseau de neurones.

La fonction d'activation est représentée par la fonction F . La sortie O_j est donnée par :

$$O_j = F(I_j) = F\left(\sum_{j=1}^M w_{ji}x + b_j\right), \quad (4.62)$$

La sortie du réseau y est calculée pour chaque entrée x associée comme suit :

$$y(i) = F(x(i)) = \sum_{j=1}^M w_o \varphi_j(x(i)) + b_o \quad (4.63)$$

Il existe plusieurs façon pour définir la fonction d'activation. L'une parmi les plus utilisées dans les réseaux de neurones est la *fonction sigmoïd* qui est utilisée dans ce réseau.

$$\varphi_j(x(i)) = \frac{1}{1 + \exp(-b_{ji} - w_{ji}x(i))} \quad (4.64)$$

Le réseau de neurone est entraîné de façon à ce qu'il puisse performer la tâche de modélisation ainsi que celle du contrôle en même temps.

Initialement, les poids et les biais w_{ji}, w_o, b_{ji}, b_o de la couche cachée et de la couche de sortie sont assignées d'une façon aléatoire.

Dans le but de minimiser l'erreur entre la sortie du réseau $y(i)$ et celle du système réel $y_s(i)$, les poids et les biais sont ajustés de façon à minimiser le vecteur d'erreur e_{\max} donné par

$$e_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_s(i) - y(i))^2 \quad (4.65)$$

On note que e_{\max} est une fonction de w_{ji} , b_{ji} , w_o et b_o .

Afin d'optimiser les paramètres w_{ji} , b_{ji} , w_o et b_o et de minimiser l'erreur e_{\max} , on utilise la méthode de Levenberg-Marquardt utilisée dans la modélisation floue.

La Jacobienne pour chaque paramètre est définie par

$$J_{w_{ji}} = \frac{\partial \varphi(x(i))}{\partial w_{ji}}, J_{b_{ji}} = \frac{\partial \varphi(x(i))}{\partial b_{ji}}, J_{w_o} = \frac{\partial F(x(i))}{\partial w_o} \text{ et } J_{b_o} = \frac{\partial F(x(i))}{\partial b_o} \quad (4.67)$$

L'algorithme de modélisation est montré par l'organigramme de la figure (4.18).

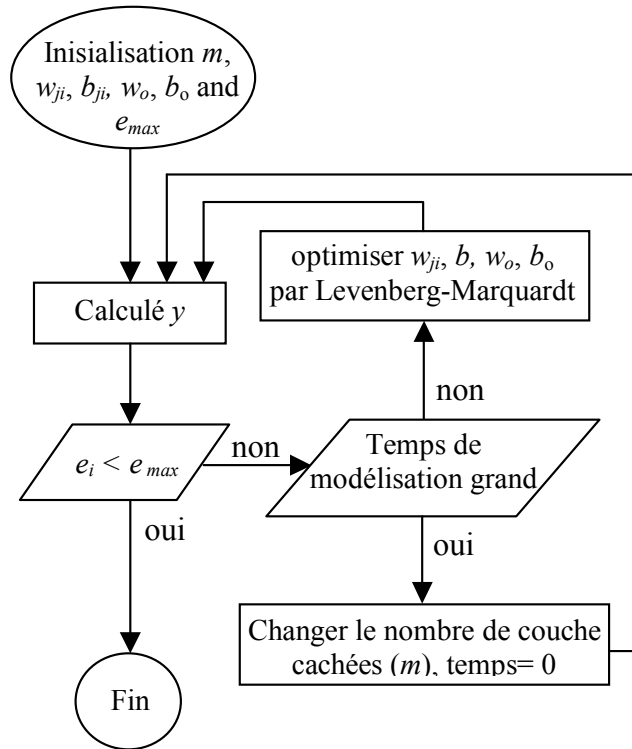


Figure 4.18 : Algorithme de modélisation neuronale.

4.3.3 Contrôle prédictif neuronal

L'objectif du contrôle est de stabiliser le chaos, c'est à dire, de conduire le système chaotique inconnu vers l'un de ses comportements réguliers [95, 96].

La figure (4.19) montre le schéma fonctionnel du contrôle prédictif neuronal, y_s est la sortie du système réel, y est la sortie neuronale, e_i est l'erreur de modélisation, y_p est la

sortie prédite et u représente le contrôle.

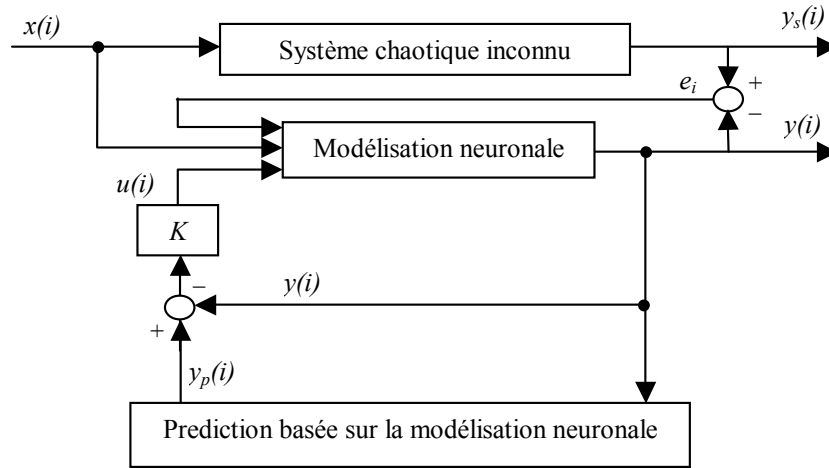


Figure 4.19 : Schéma bloqué du contrôle prédictif neuronal.

On suppose que le modèle neuronal possède un point fixe instable \bar{y} , il satisfait :

$$\bar{y} = F(\bar{x}) \quad (4.68)$$

Le but de la loi de contrôle prédictive est d'assurer que le système converge asymptotiquement vers \bar{y} en appliquant un contrôleur u d'une amplitude extrêmement petite.

Le contrôleur $u(i)$ est ajouté comme suit :

$$y(i) = F(x(i)) + u(i) \quad (4.69)$$

$u(i) \in \mathfrak{R}^n$ est déterminé par la différence entre l'état prédit y_p et l'état actuel $y(i)$.

$$u(i) = K(y_p - y(i)) \quad (4.70)$$

K est un gain de contrôleur réglable.

En se basant sur le modèle neuronal (4.63), la prédiction neuronale d'un état futur y_p de système chaotique inconnu non contrôlé est déterminée par

$$y_p = y(i + p) = F(x(i + p)) \quad (4.71)$$

En utilisant une prédiction à pas unique, le système chaotique inconnu contrôlé est alors donné par :

$$y(i) = F(x(i)) + K(F(x(i + 1)) - F(x(i))) \quad (4.72)$$

La procédure de contrôle est de même type que dans le cas du contrôle prédictif flou. Sauf que dans ce cas, le contrôle est appliqué sur le modèle neuronal [96].

4.3.4 Résultats et interprétations

4.3.4.1 Exemple 1

Dans cet exemple, on utilise l'équation logistique :

$$\begin{aligned} x(i) &= y_s(i-1), \\ y_s(i) &= 3.75x(i)(1-x(i)). \end{aligned} \tag{4.73}$$

(x, y_s) sont les données d'entrées-sorties obtenu à partir du système chaotique inconnu.

Premièrement, on génère les pairs de données en utilisant le système réel, puis, ces mêmes données seront utilisées pour l'apprentissage du modèle neuronal. Le réseau de neurone est caractérisé par une entrée x , une couche cachée de 10 neurones ($M = 10$) et une sortie y .

Le modèle neuronal résultant comparé aux pairs de données d'entrées sorties générées à partir du système chaotique inconnu ainsi que l'erreur de modélisation sont données en figures 4.20 (a, b).

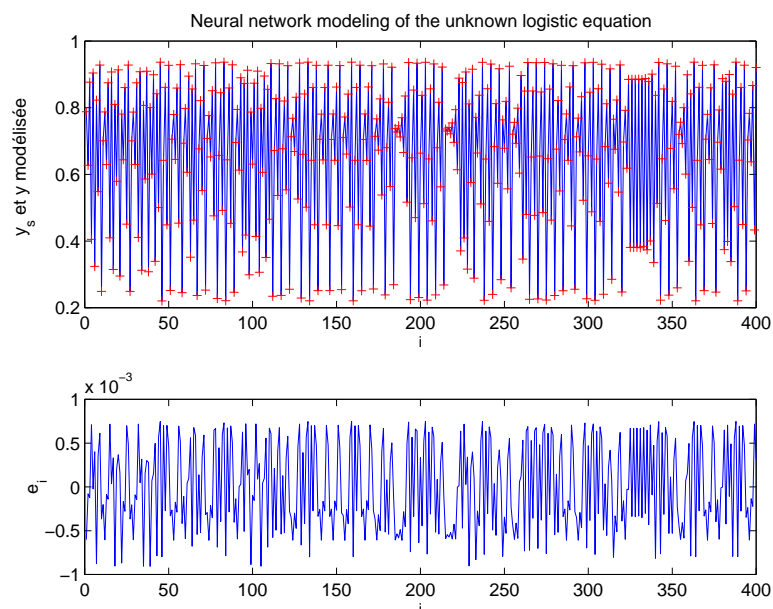


Figure 4.20 : Modélisation neuronale de l'équation logistique. (a) Pairs de données d'entrées-sorties et le modèle neurale. (b) Erreur de modélisation.

Une fois la modélisation établie et afin d'appliquer la méthode de contrôle prédictif neuronal proposée, on doit déterminer la correction à appliquer à proximité du point fixe pour ajuster le prochain point pour qu'il tombe sur le point fixe. On doit calculer la jacobienne A et le gain K .

A partir de $x_0 = 0.7$, à l'itération $i = 216$, le teste (4.27) est vérifié. Ceci indique l'existence d'un point fixe instable.

La valeur de A est obtenue à partir de la simulation comme suit :

$$A = \frac{y(i+1) - y(i)}{y(i) - y(i-1)} = \frac{0.7401 - 0.7294}{0.7294 - 0.7356} = -1.7258 \quad (4.74)$$

Le système contrôlé autour de son point fixe instable inconnu est donné par

$$\delta y(i) = (-1.7258 - 2.7258K)\delta F(x(i)) \quad (4.75)$$

Le point fixe est stabilisé par la méthode de contrôle proposée si

$$|-1.7258 - 2.7258K| < 1 \implies -1 < K < -0.2663 \quad (4.76)$$

On prend $K = -0.65$.

Les résultats de simulation suite à l'application de la loi de contrôle sont montrés dans les figures 4.21 (a, b). Ils montrent que le contrôle du système neuronal au point fixe inconnu fonctionne très bien.

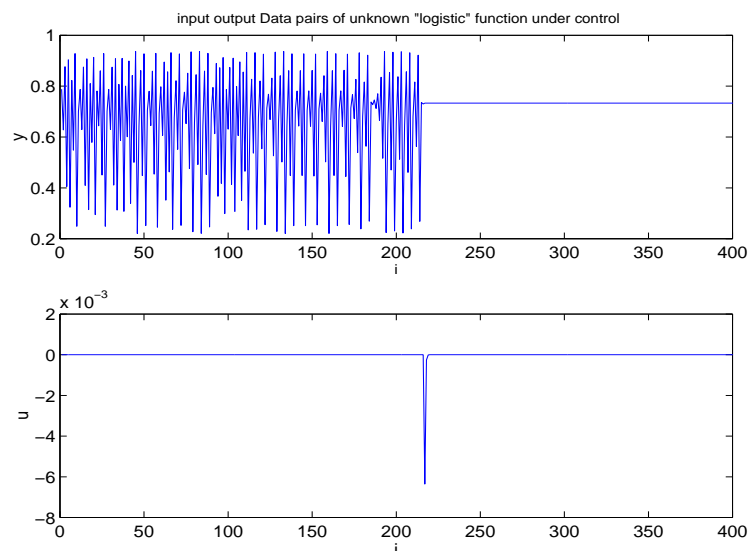


Figure 4.21 : (a) Contrôle prédictif du modèle neuronal. (b) L'entrée de contrôle.

4.3.4.2 Exemple 2

Les simulations sur des systèmes d'ordre supérieur ont été également effectuées. L'expérience prouve que plus la dimension est supérieure, plus le temps de simulation sera long. Cependant, en termes de qualité de contrôle, elles sont identiques. On montre un exemple discret d'ordre deux. Le système de Hénon qui est représenté par la relation :

$$y_s(i) = a - y_s^2(i-1) + by_s(i-2) \quad (4.77)$$

Pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$, le système admet un régime chaotique. Il peut être décrit par :

$$\begin{aligned} x_1(i) &= y_s(i-1) \\ x_2(i) &= y_s(i-2) \\ y_s(i) &= a - x_1^2(i) + bx_2(i) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Dans la phase de modélisation, le réseau de neurone est caractérisé par deux entrées x_1 et x_2 , une couche cachée de 30 neurones ($M = 30$) et une sortie y .

La simulation commence par $x(0) = 0.01$ et $x(1) = 0.02$. A l'itération $i = 80$, $y(80) = 0.8856$. La valeur de A est estimée à $A = -1.3023$.

Le système contrôlé autour de son point fixe est donné par

$$\delta y(i) = (-1.3023 - 2.3023K)\delta F(x(i)) \quad (4.79)$$

Le point fixe est stabilisé si

$$|-1.3023 - 2.3023K| < 1 \implies -1 < K < -0.1313 \quad (4.80)$$

On choisit $K = -0.8$.

Les résultats de simulation de la phase de modélisation et contrôle neuronal du système chaotique inconnu de Hénon sont récapitulés ensembles dans figure (4.22).

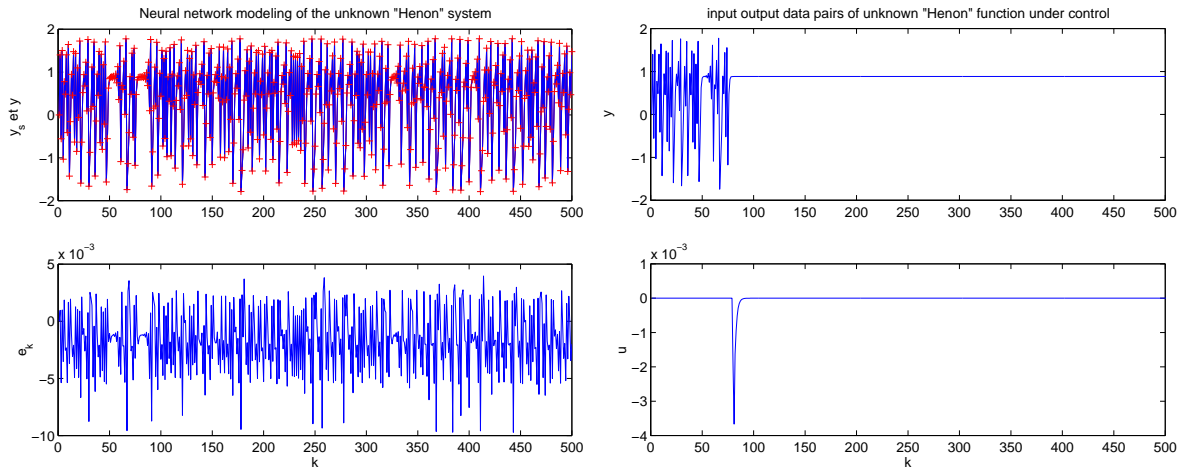


Figure 4.22 : (a) Modèle neuronal et les pairs de donnée d'entrée sortie. (b) L'erreur de modélisation. (c) Modèle neuronal sous contrôle prédictif. (d) L'entrée de contrôle.

4.4 Conclusion

Lorsque le système chaotique contient des incertitudes sur l'un de ses paramètres ou plus encore, lorsqu'il n'a pas une représentation mathématique, dans de telles situations, l'étude devient plus compliquée et on a recours aux méthodes de modélisation mathématique.

Ainsi, dans ce chapitre, nous avons développé deux méthodes de modélisations et contrôle des systèmes chaotiques inconnus représentés uniquement par des pairs de données d'entrées sorties : la modélisation floue et la modélisation neuronale. Ensuite, une loi de contrôle prédictive sera appliquée sur ces modèles afin de contrôler la trajectoire chaotique et la stabiliser sur un point fixe instable inconnu.

A partir de toutes les simulations, on a obtenu des résultats très satisfaisants. Les résultats de simulation prouvent que ce procédé de contrôle fonctionne bien et permet la stabilisation des points fixes instables.

Chapitre V

APPLICATIONS DU CONTRÔLE DU CHAOS

5.1 *Introduction*

L'atout majeur des systèmes chaotiques est la capacité de les réaliser au niveau circuit. Ce domaine de recherche, qui n'en est encore qu'à ses débuts sur le plan international, est certainement appelé à se développer de manière importante dans les années à venir.

Parmi les potentialités du contrôle du chaos est la résolution des problèmes tels que la synchronisation des systèmes chaotiques [153, 159] ainsi que la communication chaotique [160, 167].

Les oscillateurs chaotiques utilisés à l'émission réalisent simultanément deux fonctions : ils étalent le spectre du signal tout en assurant une forme de cryptage. Ainsi, la transmission est difficilement détectable et il est quasiment impossible de retrouver les symboles d'information pour l'observateur qui ne connaît pas les paramètres de l'émetteur.

On peut dire que le but de la synchronisation chaotique est de pouvoir l'utiliser dans plusieurs domaines dont la communication, cryptage, sécurité de communication, dynamique des populations, physiologie humaine, problèmes en électronique, mécanique, modélisées par des équations discontinues, etc.

Dans le présent chapitre, nous donnons quelques applications du contrôle du chaos, qui consiste à concevoir un contrôleur afin de permettre la transmission d'une information d'un émetteur de message vers un récepteur le long d'une ligne de communication. Pour que le récepteur reconstruit l'information, cela nécessite une synchronisation avec le signal émis afin d'extraire le signal information. De plus, le signal information peut être lui même un signal chaotique, mais comme que le signal chaotique est originalement imprédictible, il sera contrôlé de sorte qu'il ne change pas de comportement mais portant un signal bien utile.

5.2 Application à la synchronisation chaotique

La synchronisation représente un mécanisme approprié afin de reconstruire l'état d'un certain système sur la base d'un certain signal de mesure donné.

A priori, il paraît impossible d'arriver à synchroniser deux exemplaires d'un même système chaotique. D'une part, parce que dans un cas réel, il est extrêmement difficile de construire deux circuits à l'identique à cause de la tolérance sur les composants ainsi que dû à la présence du bruit dans tout système électronique. D'autre part, la sensibilité des systèmes chaotiques aux conditions initiales. Une petite différence entre les conditions initiales de deux circuits conduira à des signaux totalement différents. Cela signifie que la reproduction de ces conditions initiales dans un système réel est impossible.

L'idée d'utiliser un signal chaotique pour transmettre une information est apparue au début des années 1990. Il a été prouvé que deux systèmes chaotiques peuvent être synchronisés [153]. Dès lors, plusieurs méthodes ont été proposées dans le but de synchroniser des signaux chaotiques et l'appliquer dans divers domaines technologiques [154, 159].

5.2.1 Le principe

On va maintenant présenter une méthode de contrôle du chaos pour des buts de synchronisation basée sur la notion de "Maître-Esclave" (Master-Slave).

Le message transmis est modulé en utilisant une porteuse chaotique. A la réception, le message est extrait de la porteuse, la synchronisation permet de coordonner les deux signaux chaotiques.

Soit le système donné par :

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.1}$$

Ce système sera nommé maître. Et le système :

$$\dot{\tilde{x}} = g(\tilde{x}, u) \tag{5.2}$$

celui ci sera nommé esclave.

On suppose que x et \tilde{x} sont de même dimension n . Le système esclave dépend d'une loi de contrôle u de la forme :

$$u = \alpha(\tilde{x}, x) \quad (5.3)$$

où α est une fonction définie selon la forme de l'esclave et les mesures disponibles du système maître.

Le système esclave sous contrôle du maître sera décrit par :

$$\dot{\tilde{x}} = g(\tilde{x}, \alpha(\tilde{x}, x)) \quad (5.4)$$

Le but de la synchronisation est que \tilde{x} et x coïncident parfaitement avec x . C'est à dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{x} - x) = 0 \quad (5.5)$$

Le problème majeur consiste à trouver, si c'est possible, une loi de contrôle à retour d'état appropriée pour que les deux systèmes (5.1) et (5.2) soient synchronisés.

Le problème de trouver un contrôleur approprié qui réalise la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur est en général assez difficile. D'autre part, une analyse systématique permet de résoudre de tels problèmes. Par exemple, le choix de l'émetteur sera de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \zeta(Cx) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5.6)$$

Et la dynamique du récepteur est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \zeta(Cx) + \beta u. \quad (5.7)$$

où la variable y dépend du paramètre C convenablement choisi.

5.2.2 Applications

Dans ce qui suit, nous allons appliquer une méthode de contrôle du chaos pour la synchronisation d'un système dynamique non linéaire à comportement chaotique [158].

L'exemple choisi est appelé équation de Jerk et est une des représentations des circuits électroniques non linéaires à comportement chaotique. Elle est donnée par un ensemble d'équations différentielles ordinaires du 3^{ème} ordre décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\mu z - y + G(x) \end{cases} \quad (5.8)$$

$G(x)$ est un élément non linéaire. Pour $\mu = 0.6$, le système admet un comportement chaotique. Ce système peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x = G(x), \quad (5.9)$$

En fonction de l'élément non linéaire $G(x)$, l'équation de Jerk a des comportements totalement différents ;

$$G(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{(a)} \\ -6 \max(x, 0) + 0.5 & \text{(b)} \\ -1.2x + 2\text{sgn}(x) & \text{(c)} \end{cases} \quad (5.10)$$

Les figures (5.1) à (5.3) montrent le comportement du système pour chaque cas de l'élément non linéaire $G(x)$ et sous des conditions initiales identiques : $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0, 0)$.

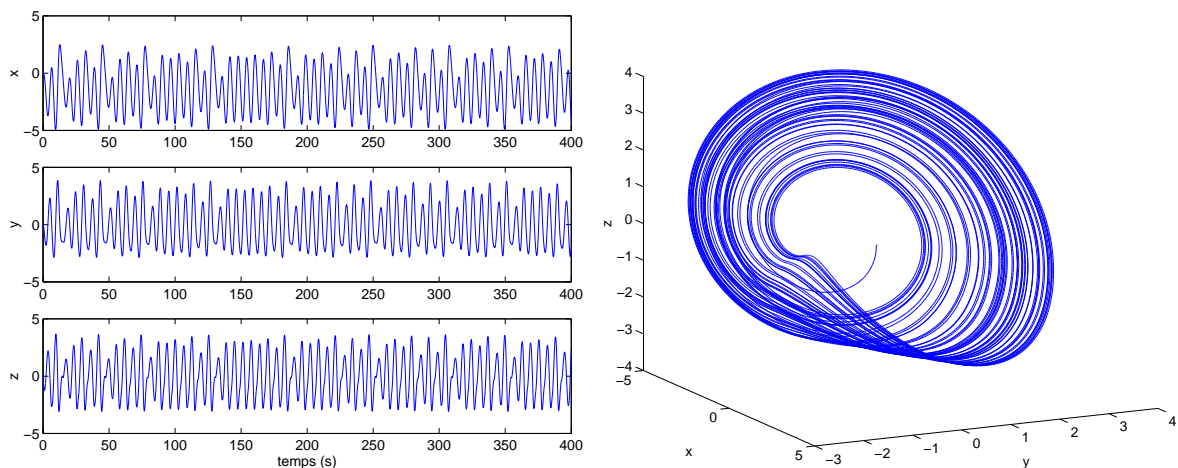


Figure 5.1 : Élément non linéaire $G(x)$ donné par (5.10.a).

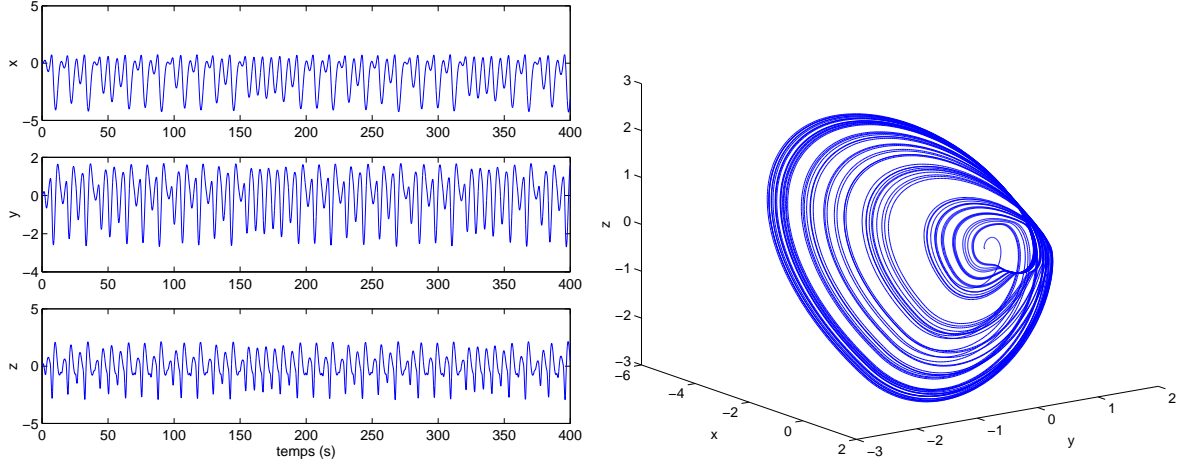


Figure 5.2 : Elément non linéaire $G(x)$ dans le cas (5.10.b).

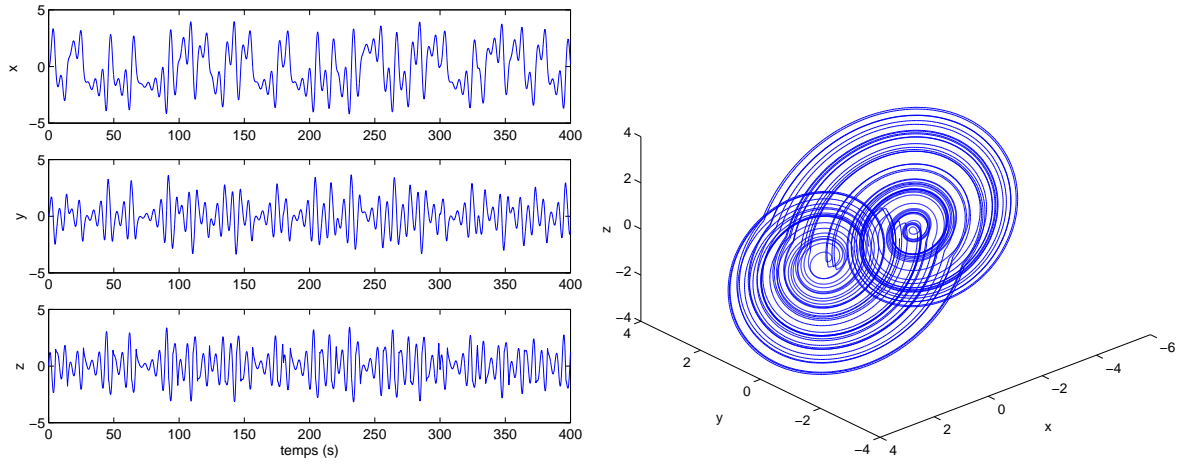


Figure 5.3 : Elément non linéaire $G(x)$ de la forme (5.10.c).

5.2.2.1 Synchronisation des nonlinéarités identiques :

Les équations qui décrivent le maître sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = z_1 \\ \dot{z}_1 = -\mu z_1 - y_1 + G(x_1) \end{cases} \quad (5.11)$$

et les équations qui décrivent l'esclave sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 + u_1 \\ \dot{y}_2 = z_2 + u_2 \\ \dot{z}_2 = -\mu z_2 - y_2 + G(x_2) + u_3 \end{cases} \quad (5.12)$$

Afin de déterminer les différents paramètres u_1 , u_2 et u_3 du contrôleur, on examine la différence entre les trois variables d'états :

$$\begin{aligned}x_3 &= x_2 - x_1 \\y_3 &= y_2 - y_1 \\z_3 &= z_2 - z_1\end{aligned}\tag{5.13}$$

Si le contrôleur u choisi permet de satisfaire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_3 = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_3 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_3 = 0\tag{5.14}$$

Alors, on peut dire que les deux systèmes sont synchronisés et l'esclave suit parfaitement le maître.

En utilisant (5.13) et les deux équations du maître et l'esclave, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = y_3 + u_1, \\ \dot{y}_3 = z_3 + u_2, \\ \dot{z}_3 = -\mu z_3 - y_3 + G(x_2) - G(x_1) + u_3. \end{cases}\tag{5.15}$$

Les paramètres de contrôle sont choisis comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -x_3 - y_3 \\ u_2 = -y_3 - z_3 \\ u_3 = y_3 + (\mu - 1)z_3 - G(x_2) + G(x_1) \end{cases}\tag{5.16}$$

Et, le système (5.15) sera donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -x_3 \\ \dot{y}_3 = -y_3 \\ \dot{z}_3 = -z_3 \end{cases}\tag{5.17}$$

L'esclave est sous synchronisation contrôlée définie par :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 - (x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = z_2 - (y_2 - y_1) - (z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 = -\mu z_2 - y_2 + (y_2 - y_1) + (\mu - 1)(z_2 - z_1) + G(x_1) \end{cases}\tag{5.18}$$

Pour une condition initiale du maître $(x_{01}, y_{01}, z_{01}) = (0.01, 0, 0)$. Le contrôle est activé à $t = 100$ et pour une condition initiale du système esclave donnée par

a. $(x_{02}, y_{02}, z_{02}) = (-0.15, -1.5, 0.9)$; on obtient les résultats suivants :

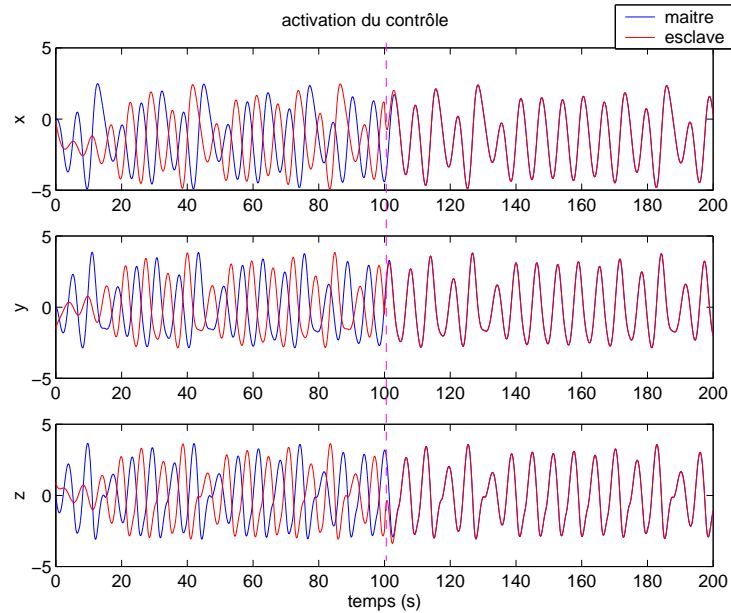


Figure 5.4 : Synchronisation du comportement chaotique. $G(x)$ de la forme (5.10.a).

b. $(x_{02}, y_{02}, z_{02}) = (-0.01, -0.01, 1)$; on obtient :

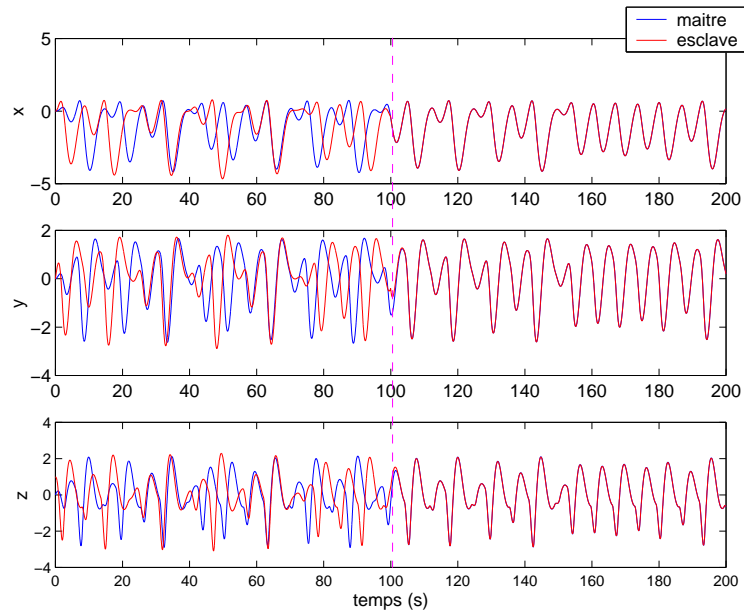


Figure 5.5 : Synchronisation du comportement chaotique. $G(x)$ de la forme (5.10.b).

c. $(x_{02}, y_{02}, z_{02}) = (-0.1, -1, 0.9)$; on trouve :

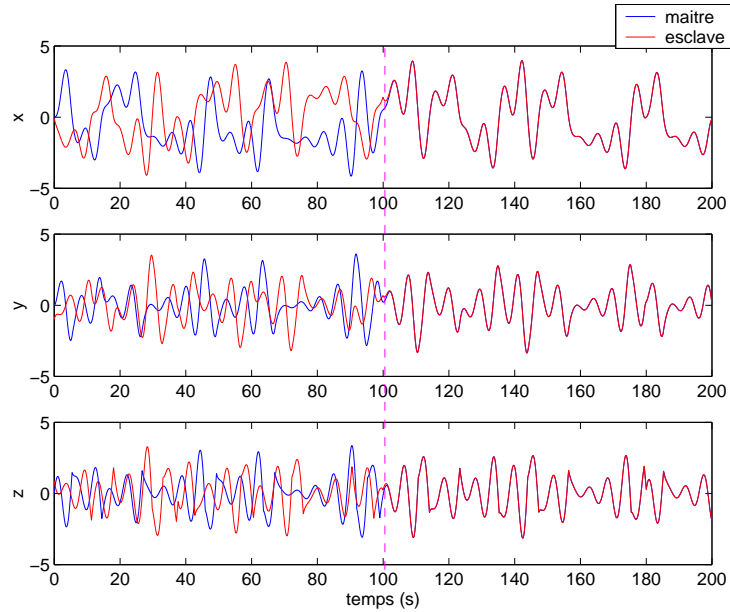


Figure 5.6 : Synchronisation du comportement chaotique. $G(x)$ de la forme (5.10.c)

Dans chaque cas, on voit bien que les trajectoires des variables d'états (x, y, z) des systèmes maître et esclave divergent avant le déclenchement du contrôle. Ceci est dû à la sensibilité aux conditions initiales. Une fois le contrôle déclenche, ces mêmes trajectoires convergent rapidement et deviennent identiques ce qui prouve l'efficacité du contrôle du chaos pour la synchronisation entre deux systèmes chaotiques de linéarité identique.

5.2.2.2 Synchronisation des nonlinéarités non identiques :

Dans ce qui suit ; on va traiter le contrôle du chaos pour la synchronisation de deux systèmes chaotiques de non linéarité différente. On reprend le système maître :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = z_1 \\ \dot{z}_1 = -\mu z_1 - y_1 + G(x_1), \text{ avec } G(x_1) = |x_1| - 2 \end{cases} \quad (5.19)$$

Et le système esclave :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 + u_1 \\ \dot{y}_2 = z_2 + u_2 \\ \dot{z}_2 = -\mu z_2 - y_2 + G(x_2) + u_3, \text{ avec } G(x_2) = -6 \max(x_2, 0) + 0.5 \end{cases} \quad (5.20)$$

Dans ce cas, les paramètres de contrôle u_1, u_2 et u_3 sont choisis de la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1 = -(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1), \\ u_2 = -(y_2 - y_1) - (z_2 - z_1), \\ u_3 = G(x_1) - G(x_2). \end{cases} \quad (5.21)$$

L'esclave est sous contrôle de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 - (x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = z_2 - (y_2 - y_1) - (z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 = -\mu z_2 - y_2 + G(x_1) \end{cases} \quad (5.22)$$

Les systèmes maître et esclave ont la même condition initiale : $(x_{01}, y_{01}, z_{01}) = (x_{02}, y_{02}, z_{02}) = (0.01, 0, 0)$. Les résultats de simulation sont représentés dans la figure (5.7).

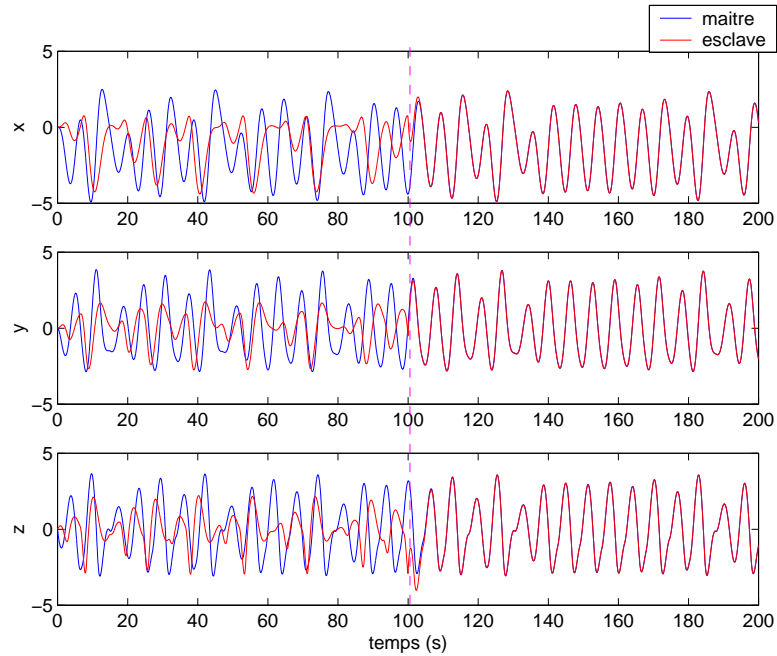


Figure 5.7 : Synchronisation des nonlinéarités non identiques

Les deux systèmes ont un comportement chaotique différent. Après application du contrôle, la convergence des trajectoires montre une synchronisation parfaite.

5.3 Application à la communication chaotique

Parmi les applications possibles pratiquement illimitées du contrôle du comportement chaotique, qui a attiré considérablement la communauté scientifique au cours de ces dernières années ; à savoir le contrôle du comportement chaotique pour la communication avec le chaos. Dans ce cas, un système chaotique est commodément perturbé, afin de réaliser une trajectoire chaotique particulière diffusant un message donné.

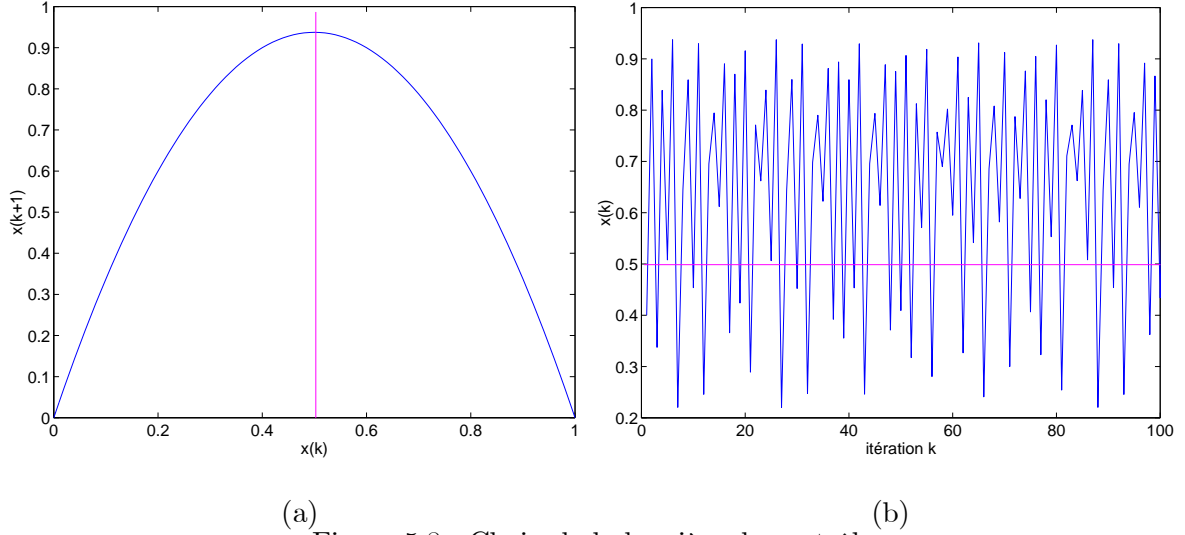
Il y a un lien simple entre le chaos et la théorie de communication. Les systèmes chaotiques peuvent être vu, en effet, comme émetteurs d'informations qui produisent naturellement des signaux numériques. La dynamique symbolique du système devient une source de symbole. Le contrôle doit prendre en compte la transmission d'un message désiré sans changer effectivement les équations du système [160, 167].

Dans ce qui suit, nous développons une méthode de contrôle du chaos pour manipuler la dynamique d'un système chaotique afin de permettre la transmission d'un signal utile en appliquant seulement des petits perturbations.

5.3.1 L'algorithme de contrôle

L'idée d'utiliser un signal chaotique pour transmettre une information est apparu avec la nécessité de transmettre des messages confidentiels et les rendre plus difficile à détecter. Ainsi, nous nous sommes intéressé à ce type d'application et nous avons essayé de proposer une technique de contrôle simple afin de transmettre des signaux numériques qui portent des messages utiles.

Pour illustrer le principe de la méthode proposée, on va s'intéresser à l'équation logistique. La dynamique symbolique de cette équation peut être définie en mettant la partition symbolique au point critique $x_c = 0.5$. Les figures 5.8 (a , b) suivantes illustrent le choix de ce point.



(a) (b)
Figure 5.8 : Choix de la barrière de contrôle.

Ces deux figures montrent l'évolution dynamique de la trajectoire sans contrôle.

Notre but est de contrôler cette trajectoire afin de porter un message numérique désiré. Pour cela, on utilise des petites perturbations paramétriques pour que la trajectoire reste chaotique. Donc, un point de la trajectoire porte le symbole "0" si $x < x_c$ et le symbole "1" si $x \geq x_c$.

La procédure de contrôle est la suivante :

En premier lieu, le message à transmettre est converti en une séquence binaire en utilisant le code ASCII standard. Ce message est stocké dans un registre symbolique. En second lieu, en déclenchant le codage de l'information par la dynamique symbolique précitée, et à chaque itération, on applique un test sur l'état futur $x(i+1)$ du système. Si le symbole correspond à la valeur de $x(i)$ est identique à celui du bit du message, le système suit sa trajectoire librement, sinon, le contrôle s'active pour forcer $x(i+1)$ à prendre la valeur correspondante au symbole du message. Ceci est réalisé par des perturbations δp sur le paramètre p .

Nous supposons que le message est stocké sous des symboles (bites) $b(i)$, alors δp est donné par :

$$\delta p = \frac{x_{des}}{x(i)(1-x(i))} \quad (5.23)$$

Un autre exemple est de générer la séquence «SALAM» donnée comme suit :

$$\overbrace{101001111000001100110010000011001101}^{S \quad A \quad L \quad A \quad M} \quad (5.26)$$

Le contrôle est activé au même instant que dans le cas précédent, le résultat d'une telle procédure est donné dans la figure suivante :

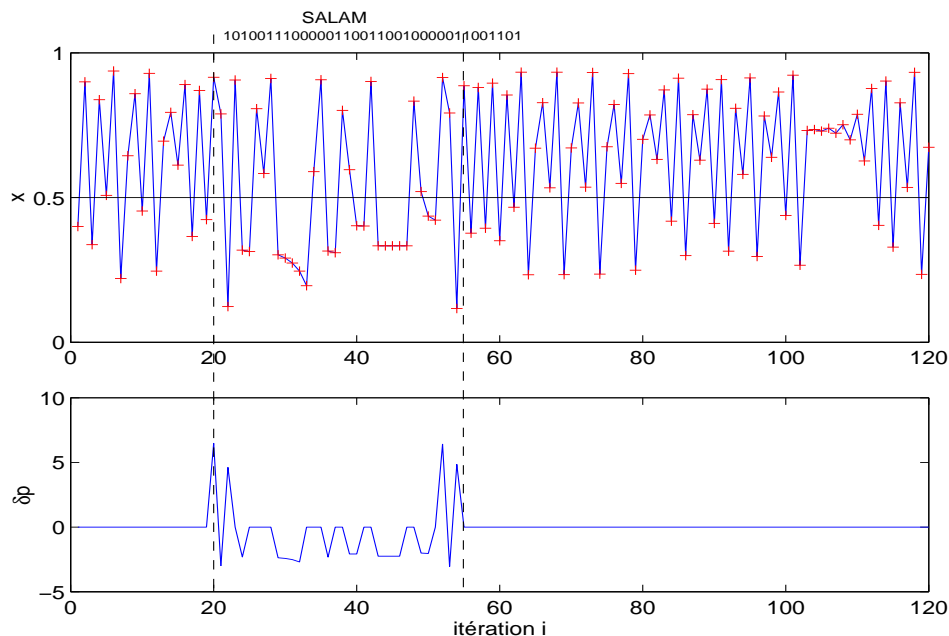


Figure 5.10 : Le codage numérique de l'expression (5.26).

Les résultats montrent qu'on a contrôlé la trajectoire chaotique afin de porter le message désiré sans trop changer l'aspect chaotique.

5.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de faire le lien entre les systèmes dynamiques chaotiques et les systèmes de communication.

En utilisant les techniques numériques, nous avons démontré qu'il est possible de synchroniser des comportements chaotiques dans des systèmes non linéaires identiques et de linéarité différente. La méthode de contrôle du chaos appliquée à la synchronisation est basée sur le principe de "Maître-Esclave". Reste à trouver les paramètres de contrôle adéquats afin d'obtenir une synchronisation parfaite entre les deux systèmes maître et esclave.

La deuxième partie de ce chapitre présente un système de communication chaotique basé sur le codage numérique du chaos. Il s'agit d'une méthode de contrôle pour laquelle on exploite la caractéristique de la sensibilité du chaos aux petites perturbations comme un avantage pour manipuler le contrôle des dynamiques symboliques et de forcer le flot chaotique à porter un message numérique désiré. Le récepteur reprend les mêmes éléments que l'émetteur et son architecture est identique à celle de l'émetteur. Ainsi, le message reçu est parfaitement reconstruit.

Chapitre VI

ANTI-CONTRÔLE DU CHAOS

6.1 Introduction

Le chaos existe dans une grande variété de processus normaux, il peut également se produire parce qu'on souhaite concevoir une expérience physique, biologique ou chimique, avec un comportement chaotique.

En effet, il est parfois préférable de maintenir ou générer même l'état chaotique. Par exemple, les processus épileptiques sont associés à une synchronisation périodique du réseau neuronal. Pour éviter ce comportement naturellement périodique et éviter l'épilepsie, on peut mettre en application une technique semblable à celle de la méthode OGY qui génère le chaos [110].

L'anticontrôle ou *la chaotification* des systèmes dynamiques est une méthode de contrôle qui permet de donner à un système non chaotique, un comportement chaotique.

Depuis l'apparition de ce nouveau concept [168, 169], les chercheurs accordent de plus en plus d'intérêt à cet aspect [170, 175].

Comme pour le contrôle des systèmes dynamiques non linéaire à comportement chaotique, l'anti-contrôle est une tâche difficile.

Dans ce qui suit, nous présentons les méthodes d'anti-contrôle les plus utilisées. La chaotification des systèmes discrets est en générale plus simple que celle des systèmes continus. Pour ces derniers, il n'existe pas de méthode générale ; tout d'abord, on applique la méthode de contrôle proposée dans [169] pour l'anti-contrôle des systèmes stables qui convergent vers un cycle limite, puis, on se propose de développer une méthode pour chaotifier les systèmes chaotiques continus définis dans la zone non chaotique.

6.2 *Anti-contrôle des systèmes discrets*

Soit un système dynamique discret originellement stable et qui ne présente aucun comportement chaotique ou complexe lors de son évolution :

$$\begin{cases} x(i+1) = f(x(i)), \\ x_0 \text{ donnée} \end{cases} \quad (6.1)$$

x représente les variables d'état du système ; x_0 l'état initial et f une fonction continue et différentiable.

Ce système peut être linéaire ou non linéaire, variant ou invariant dans le temps.

Sachant que le système est originellement stable et que tous ses exposants de Lyapounov sont négatifs, le but de la chaotification est de rendre un ou plusieurs de ces exposants plus grand qu'une valeur positive donnée.

L'objectif est donc de concevoir un contrôleur u qui sera injecté dans ce système de sorte que le nouveau système contrôlé :

$$x(i+1) = f(x(i)) + u(i) \quad (6.2)$$

se comporte de manière chaotique.

Il est important de noter que le contrôleur doit avoir une structure plus simple que celle du système à contrôler lui-même. La raison principale, est que le contrôleur puisse être applicable à n'importe quelle forme de système dynamique et pratiquement réalisable pour diverses applications.

Le choix du contrôleur est généralement par retour d'état, de la forme [168] :

$$u(i) = B(i)x(i) \quad (6.3)$$

où B est une matrice gain dont la dimension N reste à déterminer et qui influe directement sur le système.

Le système sous anti-contrôle est donné par :

$$x(i+1) = f(x(i)) + B(i)x(i) \quad (6.4)$$

La jacobienne du système contrôlé autour d'un point d'équilibre \bar{x} est donnée par :

$$J = f'(\bar{x}) + B(i) / f'(\bar{x}) = \left. \frac{\partial x(i+1)}{\partial x(i)} \right|_{x=\bar{x}} \quad (6.5)$$

où

$$(6.6)$$

Les exposants de Lyapounov de l'ensemble $\{x(i)\}_{i=0}^{\infty}$ du système contrôlé (6.2) sont définis comme suit :

$$\lambda_j = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \ln \{J\}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.7)$$

Ces exposants sont choisis arbitrairement, avec la condition :

$$0 < c < \lambda_j < \infty \quad (6.8)$$

c un nombre positif défini.

Le but de l'anti-contrôle est d'injecter la séquence $\{B(i)\}_{i=0}^{\infty}$ de sorte qu'un ou plusieurs exposant de Lyapounov du système, deviennent strictement positifs.

De plus, l'algorithme doit assurer que la séquence $\{B(i)\}_{i=0}^{\infty}$ soit uniforme et bornée.

$$\sup_{0 \leq i < \infty} \|B(i)\| \leq M < \infty \quad (6.9)$$

pour une constante M .

La séquence $B(i)$ peut donc être déterminée à chaque itération i ($i = 0, 1, 2, \dots$), en posant :

$$B(i) = -f'(x(i)) + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, N \quad (6.10)$$

On note que les exposants de Lyapounov obtenus $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$, ont des valeurs bien définies et strictement positives.

L'algorithme de l'anti-contrôle peut être résumé comme suit :

Etape 1. Calculer la Jacobienne du système J .

Etape 2. Concevoir le contrôleur par retour d'état en choisissant une constante $\lambda > 0$ tel que la matrice gain B soit uniformément bornée.

Etape 3. Appliquer le contrôle et retour à Etape 1.

Par cette démarche, on peut assurer que le système contrôlé garantisse la génération du comportement chaotique dans le sens de Devaney et aussi de Li-Yorke.

La loi d'anti-contrôle peut être réécrite sous la forme suivante :

$$x(i+1) = f(x(i)) + B(i)(x(i) \bmod \varepsilon) \quad (6.11)$$

où mod est l'opération modulo qui permet de borner l'anti-contrôle sur un petit intervalle d'amplitude caractérisé par le nombre positif ε .

6.2.1 Applications

6.2.1.1 Exemple 1

Le modèle étudié est un système discret du deuxième ordre défini comme suit :

$$x(i+2) = \frac{1}{1 + \frac{A^{1+b} x^{ab}(i)(1-x(i))^{b^2}}{[1+Ax^a(i)(1-x(i))^b]^{a+b}}} \quad (6.12)$$

avec les valeurs des paramètres donnés par : $A = 3$, $a = 1.6$ et $b = -0.4$. Pour ces valeurs, le système présente un comportement périodique comme représenté par la figure (6.1).

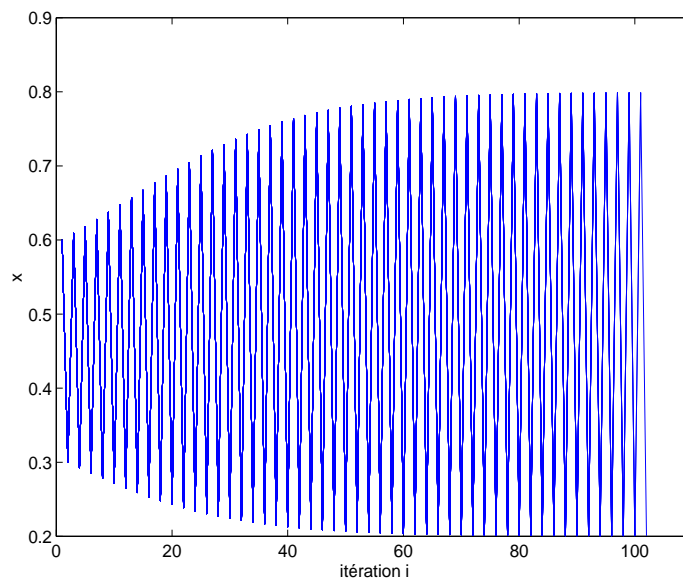


Figure 6.1 : Représentation du système (6.12).

Originellement, ce système n'admet aucun comportement chaotique quelque soit la valeurs de ses paramètres. L'objectif est d'appliquer une loi de contrôle afin de rendre le système chaotique.

La Jacobienne du système est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & S(i+2, i) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} / S(i+2, i) = \left(\frac{1-x(i+2)}{1-x(i)} \right) \left(\frac{x(i+2)}{x(i)} \right) [(a+b)x(i+1) - a] [(a+b)x(i) - a] \quad (6.13)$$

où

$$(6.14.a)$$

Après calcul, on obtient les exposant de Lyapounov suivants :

$$\lambda_1 = -0.64 \text{ et } \lambda_2 = -0.69 \quad (6.14.b)$$

L'objectif est de rendre une des deux valeurs propres positive. De ce fait, Les valeurs choisies sont $\lambda_1 = 0.64$ et $\lambda_2 = -0.69$.

Afin d'appliquer la loi d'anti-contrôle ; $u(i)$ est donné par :

$$u(i) = B(i)x(i) \quad (6.15)$$

avec

$$B(i) = -f'(x(i)) + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64 & -S(i+2, i) \\ -1 & -0.69 \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

Donc la matrice gain B sera donnée par :

$$B(i) \quad (6.17)$$

L'anti-contrôle est activé à $i = 0$; la figure (6.2) représente les résultats de l'anti-contrôle.

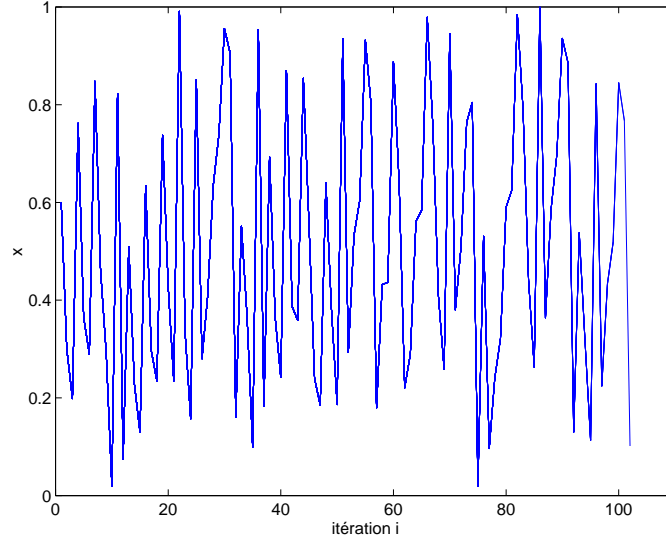


Figure 6.2 : Anti-contrôle du système (6.12).

6.2.1.2 Exemple 2

Dans cet exemple, on applique la loi de l'anti-contrôle sur un système non linéaire chaotique mais dans sa partie stable.

Dans un premier lieu, on va considérer deux équations logistiques identiques. Les deux systèmes sont définis dans la partie stable. Le but est d'appliquer l'anti-contrôle sur l'un des deux systèmes (6.19). Puis, comparer les résultats avec ceux du système incontrôlé (6.18).

$$x_1(i+1) = px_1(i)(1-x_1(i)), \quad (6.18)$$

$$x_2(i+1) = px_2(i)(1-x_2(i)) + u(i) / u(i) = B(i)(x_2(i) \bmod \varepsilon). \quad (1)$$

$$(6.19)$$

où

$$, \quad (6.20)$$

avec

$$B(i) = -f'(x_2(i)) + \lambda / f'(x_2(i)) = p - 2px_2(i) \quad (6.21)$$

J représente la jacobienne du système à chaque itération. Elle est donnée par :

$$(6.22)$$

et λ représente l'exposant de Lyapounov souhaité qui doit être de valeurs strictement positive afin de générer le chaos.

Pour des valeurs différentes du paramètre p défini dans la partie non chaotique de l'équation logistique ($p < 3.56$). L'anti-contrôle est activé à l'itération $i = 50$. Dans toutes les applications, on prend $\varepsilon = 0.1$. Les résultats de la simulation sont illustrés dans les figures (6.3, 6.4 et 6.5). De plus, on représente la différence entre les deux trajectoires des deux systèmes par :

$$x(i) = x_2(i) - x_1(i) \quad (6.23)$$

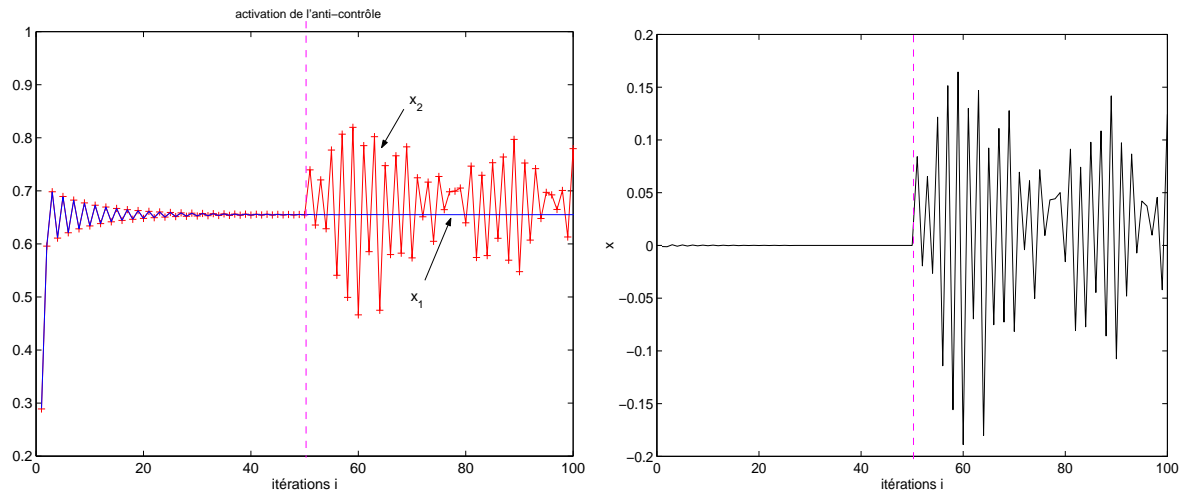


Figure 6.3 : Anti-contrôle de l'équation logistique pour $p = 2.9$.

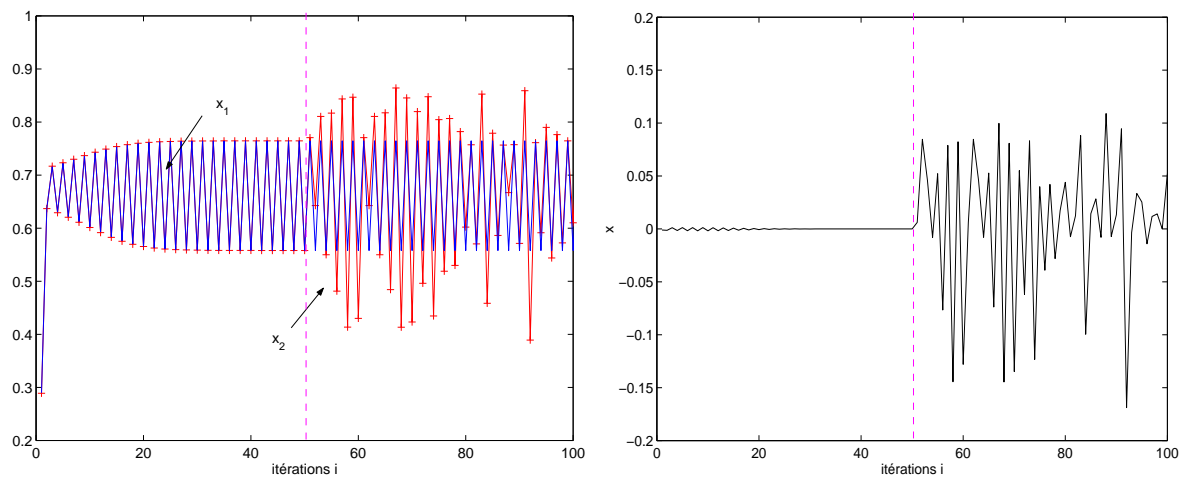


Figure 6.4 : Anti-contrôle de l'équation logistique pour $p = 3.1$.

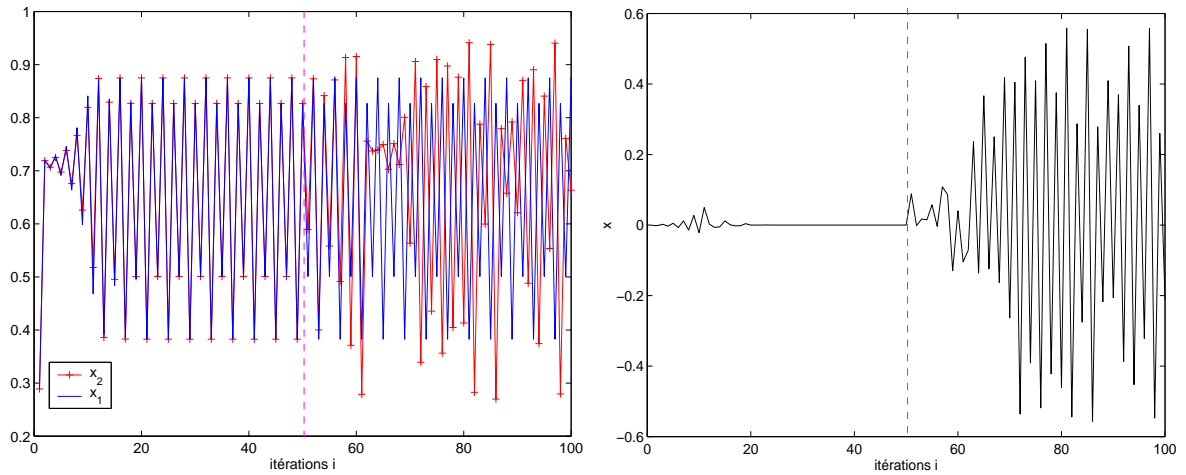


Figure 6.5 : Anti-contrôle de l'équation logistique pour $p = 3.5$.

D'après les résultats de la simulation, on remarque qu'avant le déclenchement du contrôle, les trajectoires des deux systèmes se rapprochent l'une vers l'autre pour former un point fixe ; une orbite périodique de 2-cycle ou une orbite périodique de 4-cycle. Une fois l'anti-contrôle activé, à l'itération $i = 50$; la trajectoire du deuxième système diverge de celle du premier et prend une forme chaotique dans toutes les applications ; la différence entre ces deux trajectoires devient chaotique et le système n'est plus stable sur ces points fixes et orbites périodiques.

D'après ces résultats ; on voit que l'anti-contrôle de l'équation logistique peut être réalisé et ceci quelque soit son état d'équilibre que se soit un point fixe ou une solution périodique.

6.3 *Anti-contrôle des systèmes continus*

Dans cette section, on va aborder l'anti-contrôle des systèmes dynamiques continus.

6.3.1 **Anti-contrôle par application du contrôle impulsif**

6.3.1.1 *Le principe*

Soit le système dynamique continu de dimension $N \geq 3$ de la forme :

$$\dot{X}(t) = f(X(t)), \quad (6.24)$$

où le vecteur $X \in R^N$ et la fonction $f : R^N \rightarrow R^N$ est une fonction continue.

Comme dans le cas des systèmes discrets stables, l'objectif consiste à appliquer des petites perturbations au système stable pour le rendre chaotique. Dans cette première approche, le contrôle u est appliqué d'une manière *impulsive* et *périodique*, afin de forcer la carte de Poincaré du système à devenir identique à celle d'une carte chaotique près désignée.

Cela revient à choisir une carte chaotique convenable de dimension $(N - 1)$.

Pour une matrice $B (N - 1) \times (N - 1)$, la carte :

$$q(i + 1) = Bq(i) + u(i), \quad q, u \in R^{N-1} \quad (6.25.a)$$

peut être chaotique si un contrôle approprié $\{u(i)\}_{i=0}^{\infty}$ est appliqué.

En effet, on peut utiliser comme pour le cas discret, la formule suivante :

$$u(i) = (D + \lambda) q(i) \text{ mod } \varepsilon \quad (6.25.b)$$

avec D et ε constantes positives convenablement choisies.

On peut vérifier que tous les exposants du Lyapounov de la carte contrôlée (6.25) sont strictement positifs et que l'orbite contrôlée est bornée.

Ainsi, le contrôle impulsif u est ajouté au système de la manière suivante :

$$\dot{X}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i \delta(t - iT), \quad (6.26)$$

$\delta(t)$ représente l'impulsion de Dirac, $g \in R^N$ sont des vecteurs constants qui déterminent la perturbation aux instants $t = T, 2T, \dots, iT, \dots$

Pendant l'intervalle du temps où le contrôleur n'applique pas les impulsions, le système incontrôlé (6.26) est de la même forme que le système original (6.24).

Afin d'appliquer la loi d'anti-contrôle, $q(i+1)$ doit satisfaire la carte chaotique près choisie (6.25). L'expression de g_i est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} g_i &= [I_1, \dots, I_{N-1}] (q(i+1) - q(i)) - i (x(i) - \bar{x}) i \\ &= [I_1, \dots, I_{N-1}] B^{-1} U_{B,J} (q(i)) - i (x(i) - \bar{x}) i \\ &= [I_1, \dots, I_{N-1}] B^{-1} U_{B,J} \left([I_1, \dots, I_{N-1}]^T \right) (x(i) - \bar{x}) - i (x(i) - \bar{x}) i \end{aligned} \quad (6.27)$$

I est la matrice identité, \bar{x} est un point fixe du système.

6.3.1.2 Application

Soit un système dynamique non linéaire d'ordre 3 représenté par un ensemble d'équations différentielles ordinaires et n'admettant pas de comportement chaotique (système stable) lors de son évolution :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 10y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = 10x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{z} = -z \end{cases} \quad (6.28)$$

Ce système converge vers un cycle limite stable $\gamma : p(t)$ de période $T > 0$. La figure (6.6) montre le comportement stable du système originale partant des conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$:

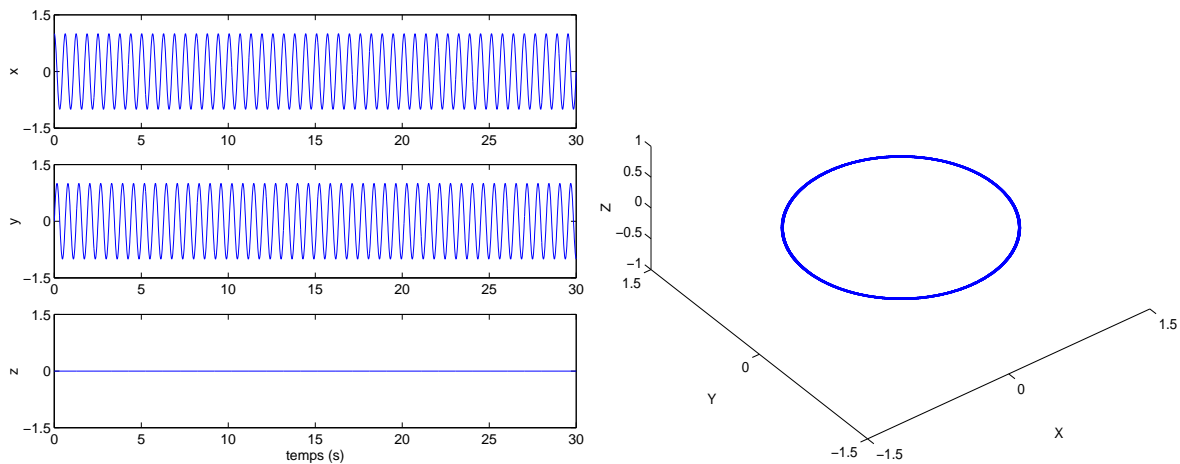


Figure 6.6 : Représentation du système (6.28).

Afin de chaotifier le système ; on appliqué la loi de contrôle donnée par [175] :

$$\dot{x} = f(x) + u(i) \quad (6.29)$$

avec

$$u(i) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \delta(t - iT), \quad (6.30)$$

et

$$(3 * 2) * [(2 * 3) * 3 * 1] - (3 * 1) * 1 * 3 * 3 * 1$$

$$g_i = \begin{pmatrix} e^{0.4\pi} & 0 \\ 0 & e^{0.2\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[(e^{-.02\pi} + e^1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(x(iT) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \bmod(0.2) \right] \quad (6.31)$$

$$- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(x(iT) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

avec les conditions initiales $(1.05, 0, 0.03)$, et après déclenchement de l'anti-contrôle, on trouve les résultats de la figure (6.7).

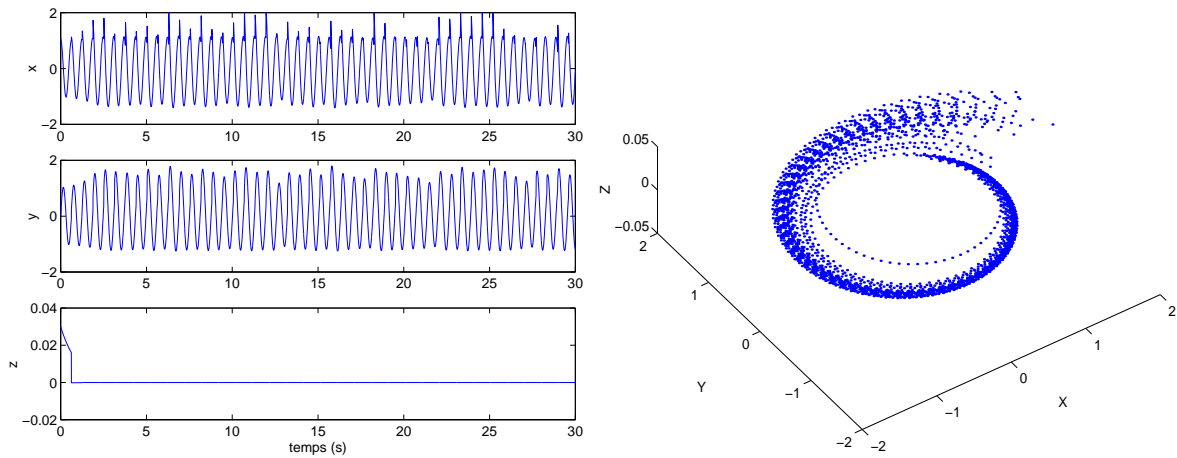


Figure 6.7 : Anti-contrôle du système (6.28).

La figure (6.7) montre bien l'apparition du comportement chaotique. L'anti-contrôle permet de chaotifier le comportement du système original par application des impulsions à chaque période du système afin de le déstabiliser de son orbite périodique et de générer un ensemble d'orbites périodiques instables (UPO).

6.3.2 Extension de l'algorithme d'anti-contrôle

Cette méthode propose une modification de la loi d'anti-contrôle comme suit :

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) + u(t) / u(t) = g(KX(t)) \quad (6.32)$$

avec

$$(6.33)$$

où K représente le gain d'anti-contrôle.

6.3.2.1 Anti-contrôle du système de Lorenz

L'application de cette loi d'anti-contrôle sur le système de Lorenz est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) + k_1(x/z) \\ \dot{y} &= (r - z)x - y + k_2(x/z) \\ \dot{z} &= xy - bz + k_3(x/z)\end{aligned}\tag{6.34}$$

avec $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 0.8$, et les paramètres de contrôleur donnés par $k_1 = 0.25$, $k_2 = 1.5$ et $k_3 = 0$. La figure (6.8) montre l'efficacité de la méthode proposée pour la chaotification du système de Lorenz afin de produire le chaos avant son apparition normale.

Si par intérêt, on désire relâcher le contrôle après l'avoir maintenu pendant un certain moment ; le système reprend sa trajectoire initiale qui est celle d'un point fixe.

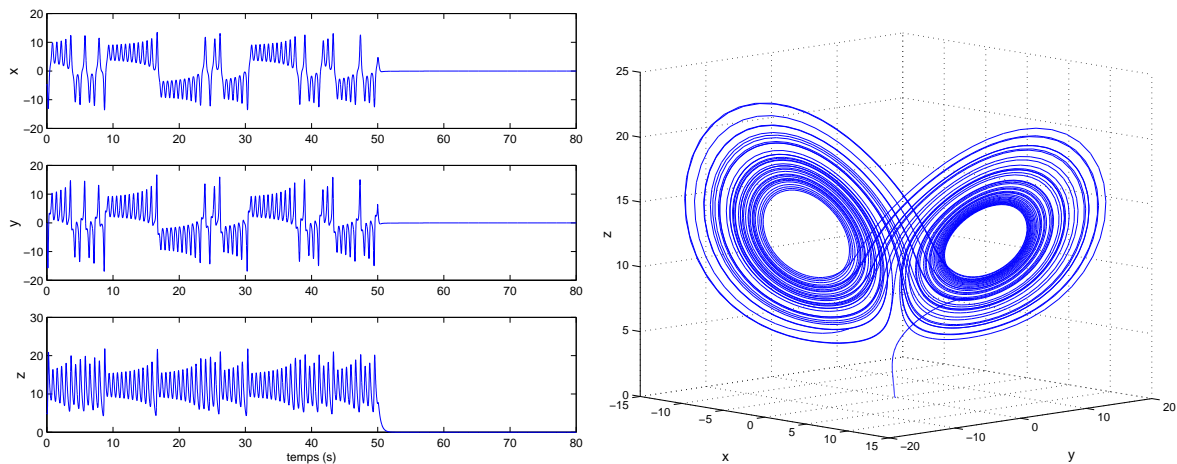


Figure 6.8 : L'anti-contrôle du système de Lorenz.

6.3.2.2 Anti-contrôle du système de Chen

Dans le cas du système de Chen ; on choisit les valeurs des paramètres $a = 35$, $b = 3$ et $c = 12$; et les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, 10)$, le système est stable et converge vers un point fixe.

Pour produire le chaos, il faut appliquer la loi d'anti-contrôle donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) + k_1(x/z) \\ \dot{y} &= (c - a - z)x - y + k_2(x/z) \\ z &= xy - bz + k_3(x/z) \end{aligned} \tag{6.35}$$

Le valeurs des paramètres de contrôle sont choisies par simulation : $k_1 = 1.1$, $k_2 = 1.6$ et $k_3 = 0$.

Le résultat de l'application de l'anti-contrôle est montré par la figure (6.9) :

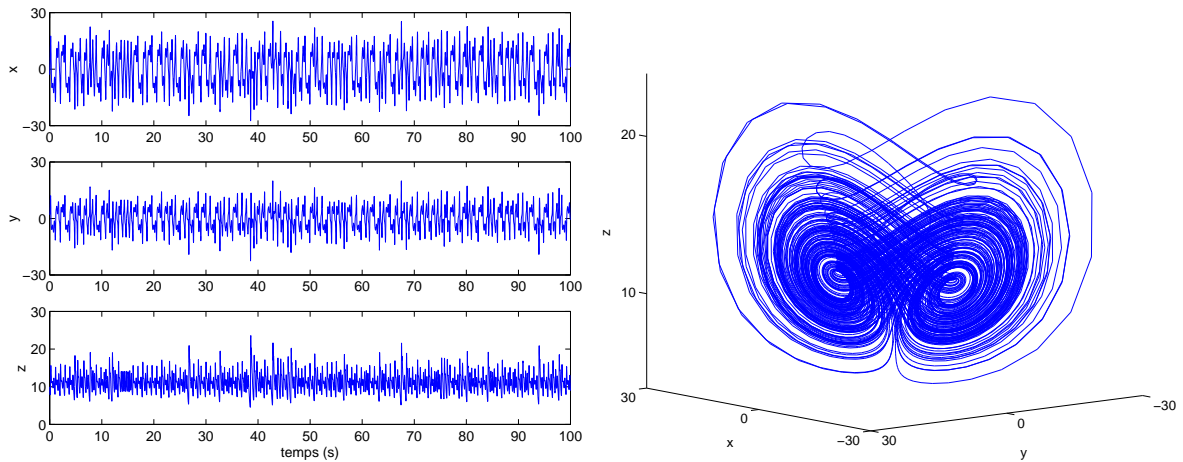


Figure 6.9 : L'anti-contrôle du système de Chen.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé les principales méthodes d'anti-contrôle des systèmes dynamiques non linéaires à temps discret et à temps continu. Nous avons présenté leurs principe de fonctionnement, lesquels appliquent des lois de contrôle autour d'un cycle limite stable ou d'un point fixe donné. L'analyse théorique montre que sous cette loi de contrôle (chaotification), l'orbite du système contrôlé est bornée et uniforme. De plus, les exposants de Lyapounov devienne strictement positifs, et par conséquent, le système devient chaotique.

D'après les résultats obtenus ; l'application de l'algorithme d'anti-contrôle permet de changer le comportement du système de celui d'un état d'équilibre à celui d'un état chaotique.

Nous avons appliqué les méthodes d'anti-contrôle sur quelques systèmes dynamiques continus. Le chaos peut être obtenu pour n'importe quelle valeur des paramètres du système qui ; originalement n'admet aucun comportement chaotique ou pour un système chaotique mais dans sa partie stable. L'efficacité de l'algorithme de contrôle a été prouvée par application sur les systèmes de Lorenz et de Chen.

Les méthodes utilisées s'avèrent très efficaces pour la chaotification des systèmes dynamiques non linéaires aussi bien discrets que continus.

CONCLUSION

Le travail développé dans le cadre de cette thèse, a eu pour objectif l'étude et le développement de différentes méthodes de contrôle du comportement chaotique dans les systèmes dynamiques nonlinéaires à temps discrets et à temps continus. L'insuffisance et les limitations des méthodes de contrôles nous ont incitées à proposer des méthodes de contrôle associée aux systèmes dynamiques chaotiques discrets, continus, d'ordre élevé, sans modèles mathématiques précis, ayant des incertitudes sur l'un des paramètres, la stabilisation des points fixes instables symétriques, la stabilisation des orbites périodiques instables ainsi que l'application du contrôle du chaos pour la synchronisation chaotique, la communication chaotique et l'anticontrôle du chaos.

Pour atteindre ces objectifs, nous nous sommes appuyés sur quelques méthodes de contrôle existantes dans la littérature et nous avons proposé de nouvelles procédures de contrôle du chaos.

En effet, les méthodes que nous avons développées présentent les caractéristiques suivantes :

- Le contrôle des systèmes chaotiques continus d'ordre élevé. En effet, les publications antérieures se sont basées sur l'application des lois de contrôle associées à des chaque type de système chaotique. Pour notre part, nous avons généralisé cette loi de contrôle pour être applicable à toute sorte de systèmes chaotiques.
- La stabilisation des points fixes instables. Ceci peu s'avérer gênant pour certaines applications car il est certain que les systèmes chaotiques peuvent avoir des points fixes instables symétriques.
- Les systèmes chaotiques représentés par des paires de donnée d'entrées-sorties ou qui contiennent des incertitudes sur les paramètres, sont difficiles à contrôler surtout si on

ne connais pas la relation mathématique qui relie l'entrée du système avec la sortie. Dans une telle situation, les approches intelligentes telle que la logique floue et les réseaux de neurones se révèlent très efficaces.

Nous avons abordé dans le chapitre 2 le contrôle du chaos dans les systèmes chaotiques d'ordre élevé ; nous avons proposé une méthode de contrôle qui associe la méthode OGY avec la méthode de contrôle à retard d'état. Cette solution présente les caractéristiques suivantes :

- Elle associe aux orbites périodiques instables à stabiliser des zones de contrôle définies à l'intérieur d'un cercle unité. Cette condition est nécessaire au contrôle ; les solutions proposées dans les publications antérieures pour vérifier cette condition (telle que le produit du gain du contrôle avec l'orbite à stabiliser) sont très complexe à mettre en oeuvre, car la condition du voisinage peut ne pas être vérifiée. La solution que nous avons proposée permet justement de résoudre ce type de problème.
- L'orbite périodique instable peut être stabilisée grâce à un paramètre ' γ ', qui dans la plupart des cas, assure la stabilisation grâce à un choix pratique.

La stabilisation des points fixes instables symétriques dans les systèmes chaotiques discrets et continus est étudiée et développée dans le chapitre 3. La méthode de contrôle proposée est basée sur le principe de contrôle prédictif. La solution obtenue satisfait la condition suffisante et nécessaire de la stabilité locale autour d'un point d'équilibre. La difficulté reste à trouver les instants de déclenchement de la loi de contrôle pour assurer le contrôle de chaque point fixe instable séparément. Reste à développer la méthode de contrôle pour la stabilisation des orbites périodiques instables qui sera étudiée dans une recherche ultérieure.

Dans des situations réelles, le système chaotique peut ne pas être défini par une relation mathématique ou plus encore, peut avoir des incertitudes sur un ou plusieurs de ses paramètres. Pour ces raisons, nous avons été amenés dans le chapitre 4 à améliorer la méthode de contrôle prédictif en proposant l'utilisation des approches de modélisation et de contrôle prédictif par logique floue et les réseaux de neurones.

Chacune de ces solutions possède des particularités qui la rend adaptée à un certain cas

de contrôle. Ces solutions consistent en :

- Le système flou est utilisé pour approximer le système à comportement chaotique inconnu. Schématiquement, le modèle flou est de type Takagi-Sugeno et est établi en utilisant les paires de données obtenues à partir du système réel, des ensembles flous ainsi que de fonctions d'appartenances. En se basant sur ce modèle flou, une stratégie de contrôle prédictif est ensuite développé pour contrôler le système dynamique chaotique inconnu. On peut conclure que la méthodologie de contrôle prédictif flou est une alternative très efficace pour le contrôle en ligne aussi bien des systèmes à comportement chaotique inconnu (ou incertain) simple, ou à dynamique assez complexe.
- Les réseaux de neurones prouvent leurs efficacité pour la modélisation et le contrôle prédictif des systèmes chaotiques inconnus. La différence avec le modèle flou est que la modélisation neuronale nécessite beaucoup plus de temps à cause du nombre important de paramètres à modéliser. De plus, l'erreur de modélisation est assez importante par rapport à la modélisation floue, mais il reste que ces deux approches sont très intéressantes dans le cas d'un contrôle en ligne des points fixes instables inconnus.

Dans un second lieu, nous nous sommes intéressées à étudier l'effet du contrôle du chaos sur quelques applications réelles tel que la synchronisation chaotique, la communication chaotique ainsi que l'introduction du concept de l'anticontrôle du chaos.

- Dans la synchronisation chaotique, le contrôle du chaos nous a permis de réaliser la synchronisation entre différent modèle chaotique. Ceci s'avère indispensable lors d'une communication chaotique où l'émetteur et le récepteur doivent être synchroniser afin d'extraire le signal utile. Ces deux applications sont traitées avec plus de détail dans le chapitre 5.
- Le chapitre 6 quant à lui traite de l'anticontrôle du chaos qui consiste à changer le comportement normale du système dynamique de celui d'un comportement régulier à celui d'un comportement chaotique

Plusieurs prolongements à ce travail peuvent être envisagés. Par exemple, au lieu d'utiliser la même valeur du paramètre de stabilisation ' γ ', il est possible d'utiliser des valeurs différentes, car une valeur différente de ce paramètre permet d'améliorer le contrôle, c'est-à-dire en apportant des corrections selon la distance qui sépare la trajectoire du système de l'orbite périodique à stabiliser.

Toutes les méthodes que nous avons proposées dans ce mémoire permettent de contrôler les systèmes chaotiques d'une manière directe (c'est-à-dire, connaissant préalablement les orbites périodique instables à stabiliser) ainsi que d'une manière indirecte (sans se soucier de l'orbite à stabiliser). Dans le deuxième cas, ceci est réalisé par stabilisation des points fixes instables. Une amélioration à cette méthode consiste en stabilisation des orbites périodiques instables de différentes périodes.

Il importe évidemment de généraliser les méthodes de modélisations proposées, notamment pour stabiliser les orbites les plus instables, ou, si l'on désire contrôler des systèmes à grand nombre de degrés de liberté, les orbites à plusieurs directions instables. Il est même possible d'aller plus loin : pouvoir forcer un système à suivre n'importe quelle trajectoire chaotique choisie à l'avance dans un système chaotique. Ainsi que l'application des modèles flous et neuronaux à la stabilisation des orbites périodiques instables des systèmes chaotiques inconnus continus d'ordre élevé.

Les différents problèmes mentionnés ci-dessus sont actuellement au stade de l'étude.

Annexe A

GLOSSAIRE

Système dynamique : Tout ensemble d'équations représentant l'évolution temporelle de l'état d'un système à partir d'une connaissance antécédente. Un système dynamique d'ordre N est défini par N équations ordinaires autonomes de premier ordre

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.1})$$

où $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$ dénote les N variables d'états, considérées en tant que vecteur dans l'espace de phase de dimension N , $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F^{(1)}(\mathbf{x}), F^{(2)}(\mathbf{x}), \dots, F^{(N)}(\mathbf{x}))$ est un vecteur en fonction de x , et $\dot{\mathbf{x}}$ dénote le dérivé dx/dt .

Vecteur propre : Un vecteur propre v d'une matrice A ($N \times N$) est un vecteur qui satisfait $Av = \lambda v$ pour une certaine $\lambda \in \mathbb{C}$. λ est la *valeur propre* de v .

Exposant de Lyapounov : Un nombre fournissant une mesure quantitative moyenne de la divergence des trajectoires voisines dans l'espace de phase. Tous les exposants négatifs représente les orbites régulières et périodiques, alors qu'au moins un exposant positif signale la présence du mouvement chaotique.

En particulier, pour un système différentiel ordinaire d'ordre N donné par (A.1) et si nous prenons le déplacement infinitésimale de l'orbite $x(t) + \delta x(t)$ et le vecteur tangent $y(t) = \delta x(t)/\delta x(0)$, pour lequel nous avons

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{DF}(\mathbf{x}(t))\mathbf{y}. \quad (\text{A.2})$$

$\mathbf{D}(\mathbf{F})$ représente la dérivée du système en fonction du temps. Ainsi, les exposants de Lyapounov sont alors donnés par

$$h(x(0), y(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(y(t)) \quad (\text{A.3})$$

Bifurcations : Une bifurcation est un changement qualitatif dans la dynamique d'un système lors d'un changement des valeurs des paramètres. Par exemple : déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur,...

Le graphe qui explicite ces bifurcations est appelé diagramme de bifurcation.

L'effet papillon : Un jour d'hiver 1961, le météorologue Edward Lorenz voulut reprendre le calcul d'un bulletin météo interrompu prématurément. Sans reprendre tous ses calculs depuis le début, il introduit son dernier listage en tronquant les nombres à 3 décimales, supposant que la différence – un pour un millier – sera sans conséquence. Lorsqu'il revient, une heure plus tard, le graphique, censé reproduire exactement le précédent, suit une évolution de plus en plus divergente jusqu'à la disparition de toute ressemblance. Ainsi, un petit changement initial avait entraîné un énorme changement sur le résultat final.

Ce que nous apprend le modèle de Lorenz, c'est qu'aucune incertitude initiale, aussi négligeable puisse-t-elle paraître, ne doit être négligée dans un système doté de sensibilité aux conditions initiales, vu ses conséquences à long terme. Cela revient aussi à dire que la prédiction à long terme n'a pas de sens, étant donné le très grand nombre de perturbations minimales mais incontrôlées présentes non seulement en météorologie, mais aussi dans beaucoup d'autres systèmes.

Il constata que la courbe résultante signalait à la fois la présence d'un désordre (aucun point ou ensemble de points n'apparaissaient deux fois) et celle d'un ordre (la courbe décrivait une sorte de spirale en trois dimensions comme les ailes d'un papillon). Cette double spirale devint célèbre sous le nom d'attracteur de Lorenz

C'est pourquoi le chaos est souvent explicité par ce qu'on appelle *l'effet papillon* : le

battement d'aile d'un papillon aujourd'hui en un endroit donné dans le globe terrestre engendre dans l'air suffisamment de remous pour influencer sur l'ordre des choses et provoquer une tempête le mois prochain à des milliers de kilomètres de cet lieu.

Le chaos impose donc une limite fondamentale à notre aptitude à prévoir la météo. Cela ne veut pas dire qu'il faut cesser d'écouter le bulletin météorologique. Les prévisions à court terme, sur un ou deux jours, et sur une superficie restreinte sont assez fiables ; en revanche, au-delà de 6 ou 7 jours, les prévisions deviennent spéculatives, voire carrément fausses. Cette limite de la connaissance est incontournable. Même si on couvrait la terre de stations météo se touchant les unes les autres, il y aurait toujours de petites fluctuations dans l'atmosphère, si minuscules qu'elles ne pourraient être détectées, pour s'amplifier et modifier le climat de la planète entière.

L'effet papillon prit une désignation technique : la sensibilité aux conditions initiales.

Annexe B

LE CIRCUIT DE CHUA

Le circuit de Chua est un circuit électrique qui se compose d'une résistance R , d'une inductance L , de deux condensateurs C_1 , C_2 et d'une résistance non linéaire Nr appelée diode de Chua comme représenté dans la figure ci dessous.

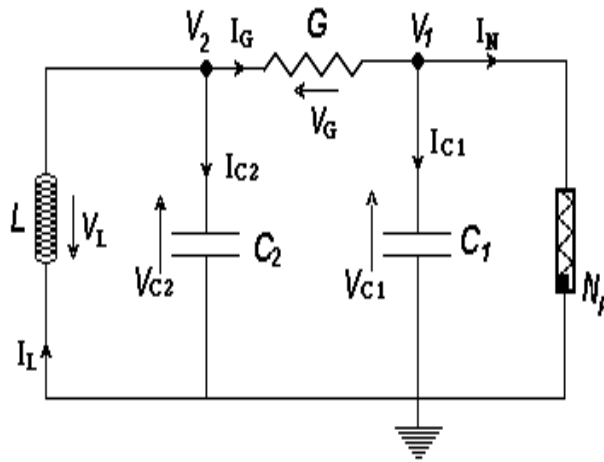


Figure B.1 : Circuit de Chua

Il y a plusieurs exemples des résistances non linéaires utilisées dans ce circuit, mais elles ont toutes la même fonction courant tension (voir la figure (B.1)). Bien que la fonction $g(v)$ est en fonction de la tension aux bornes de la résistance non linéaire Nr .

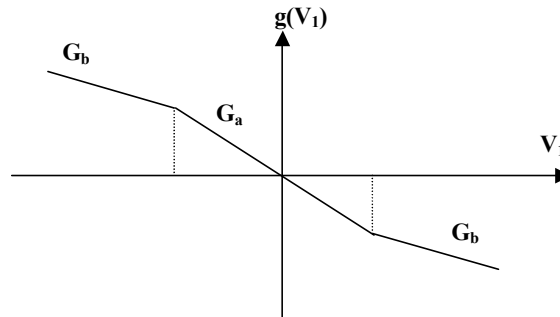


Figure B.2 : Représentation de la fonction non linéaire g .

Cette fonction nonlinéaire est donnée par la formule suivante :

$$g(v) = G_b v + 1/2(G_a - G_b) [|v + B_p| - |v - B_p|] \quad (\text{B.1})$$

Dans ce qui suit, nous allons aborder les différents points permettant de définir mathématiquement le l'ensemble d'équations du circuit de Chua.

D'après la loi de Kirchoff :

$$\sum I_{\text{entrée}} = \sum I_{\text{sortie}} \quad (\text{La loi des nœuds}) \quad (\text{B.2})$$

Donc :

$$\begin{cases} i_L = i_{C_2} + i_G \\ i_G = i_{C_1} + i_N \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Se sont les tensions aux bornes des deux condensateurs C_1 et C_2 ainsi que le courant aux bornes de l'inductance L qui varie en fonction du temps. Donc l'étude du comportement du circuit revient à étudier la variation de ces grandeurs. On obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} i_{C_1} = C_1 \frac{dv_1}{dt} \\ i_{C_2} = C_2 \frac{dv_2}{dt} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

avec :

$$\begin{aligned} i_{C_1} &= \frac{(v_2 - v_1)}{R} - g(v_1) \\ i_{C_2} &= i_L - \frac{(v_2 - v_1)}{R} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La tension aux bornes de l'inductance est donné comme suit :

$$V_L = -V_{C_2} \implies L \frac{di_L}{dt} = -v_2 \quad (\text{B.6})$$

Donc, les trois équations du système sont données par :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{(v_2 - v_1)}{R} - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} = i_L - \frac{(v_2 - v_1)}{R} \\ L \frac{di_L}{dt} = -v_2 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Afin de simplifier la notation, on pose $v_1 = x$, $v_2 = y$ et $i_L = \frac{z}{R}$.

D'où, le circuit de Chua peut être représenté par l'ensemble d'équations non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dx}{dt} = \frac{(y-x)}{R} - g(x) \\ C_2 \frac{dy}{dt} = \frac{(x-y+z)}{R} \\ \frac{L}{R} \frac{dz}{dt} = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{RC_1}(y-x) - g(x) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{RC_2}(x-y+z) \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{R}{L}y \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Lors de l'intégration du système, la variable temporelle est en fonction du paramètre de chargement du condensateur C_2 . On obtient les formule suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{C_2}{C_1}(y-x - Rg(x)) \\ \frac{dy}{dt} = (x-y+z) \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{R^2 C_2}{L}y \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Les paramètres de ce circuit dépendent essentiellement des valeurs de la résistance, de l'inductance ainsi que celles des condensateurs. On pose :

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}; \beta = \frac{R^2 C_2}{L}; m_0 = \frac{G_a}{G} \text{ et } m_1 = \frac{G_b}{G} \quad (\text{B.10})$$

avec $G = 1/R$.

D'où on obtient le système de Chua représenté par l'ensemble d'équations différentielles d'ordre 3 :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y-x - g(x)) \\ \dot{y} = x-y+z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

avec

$$g(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2}(|x+1| - |x-1|) \quad (\text{B.12})$$

représente l'élément non linéaire du circuit.

RÉFÉRENCES

- [1] Li, T.Y. & Jorke, J.A. [1975] “Period three implies chaos,” *American Mathematical Monthly*, **82**, pp. 481–485.
- [2] Devaney, R.L. [1987] *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. (Addison-Wesley, New York).
- [3] Ikeda, K. [1979] “Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system,” *Optics Communications*, **30**, pp. 257–261.
- [4] Rossler, O.E. [1979] “An equation for hyperchaos,” *Physics Letters A* **71**, pp. 155–157.
- [5] Sparrow, S. [1982] *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. (Springer-Verlag, New York).
- [6] Auerbach, D., Cvitanovic, P., Eckmann, J.-P., Gunaratne G. & Procaccia, I. [1987] “Exploring chaotic motion through periodic orbits,” *Physical Review Letters* **58**, pp. 2387–2390.
- [7] Gunaratne, G.H., Linsay, P.S. & Vinson M.J. [1989] “Chaos beyond onset : A comparison of theory and experiment,” *Physical Review Letters* **63**, pp. 1–4.
- [8] Peitgen, H.-O., Jürgens, H. & Saupe, D. [1992] *Chaos and fractals - New Frontiers of Science*. (Springer-Verlag, NY).
- [9] Chua, L.O. & Lin, G.N. [1990] “Canonical realization of Chua’s circuit family,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **37**, pp. 885–902.
- [10] Madan, R. [1993] *Chua’s circuit : Paradigm for Chaos*. (World Scientific, Singapore).
- [11] Hoppensteadt, F.C. [1993] *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*. (Springer-Verlag, New York).
- [12] Glendinning, P. [1994] *Stability, Instability and Chaos*. (Cambridge university Press, New York).
- [13] Khalil, H.K. [1996] *Nonlinear Systems*. 2nd Ed. (Prentice-Hall, NJ).
- [14] Abraham R., Gardini L. & Mira C. [1997] *Chaos in Discrete Dynamical Systems. A visual introduction in two dimensions*. (Springer-Verlag, NY).
- [15] Ogorzalek, M. [1997] *Chaos and Complexity in Nonlinear Electronic Circuits*. (World Scientific, Singapore).
- [16] Ueta, T. & Chen, G. [2000] “Bifurcation analysis of Chen’s equation,” *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **10**, pp. 1917–1931.
- [17] Plapp, B. B. & Huebler, A.W. [1990] “Nonlinear resonances and suppression of chaos in the rf-biased Josephson junction,” *Physical Review Letters* **65**, pp. 2302–2305.
- [18] Lima, R. & Pettini, M. [1990] “Suppression of chaos by resonant parametric perturbations,” *Physical Review A* **41**, 726–733.

- [19] Azevedo, A. & Rezende, S. M. [1991] “Controlling chaos in spin-wave instabilities,” *Physical Review Letters* **66**, pp. 1342–1345.
- [20] Braiman, Y. & Goldhirsch, I. [1991] “Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations,” *Physical Review Letters* **66**, 2545–2548.
- [21] Fahy, S. & Hamann, R. D. [1992] “Transition from chaotic to nonchaotic behavior in randomly driven systems,” *Physical Review Letters* **69**, pp. 761–764.
- [22] Rajasekar, S. & Lakshmanan, M. [1993] “Algorithms for controlling chaotic motion : Application for the BVP oscillator,” *Physica D* **67**, pp. 282–300.
- [23] Patidar, V. Pareek, N.K. & Sud, K.K. [2002] “Suppression of chaos using mutual coupling,” *Physics Letters A* **304**, pp. 121–129.
- [24] Nijmeijer, H. & Berguis, H. [1995] “On Lyapunov control of the duffing equation,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **42**, pp. 473–477.
- [25] Matias, M. A. & Güémez, J. [1996] “Chaos suppression in flows using proportional pulses in the system variables,” *Physical Review E* **54**, pp. 189–209.
- [26] Park, K.-S., Park, J.-B., Choi, Y.-H., Yoon, T.-S. & Chen, G. [1998] “Generalized predictive control of discrete time chaotic systems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**, pp. 1591–1587.
- [27] Femat, R., Alvarez-Ramirez, J., Castillo-Toledo, B. & Gonzalez, J. [1999] “On robust chaos suppression in a class of nondriven oscillators : application to the Chua’s Circuit,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **46**, pp. 1150–1152.
- [28] Dubois M. [1998] “Computing anticipatory systems with incursion and hyperincursion,” *CASYS, AIP Conference Proceedings* **437**, pp.3–29.
- [29] Mirus, K.A., & Sprott, J.C. [1999] “Controlling chaos in low and high-dimensional systems with periodic parametric perturbations,” *Physical Review E* **59**, pp. 5313–5324.
- [30] Basios, V., Bountis, T., & Nocolis, G. [1999] “Controlling the onset of homoclinic chaos due to parametric noise,” *Physics Letters A* **251**, pp. 250–258.
- [31] Belhaq, M., & Houssni, M. [2000] “Suppression of chaos in a averaged oscillator driven by external and parametric excitations,” *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, pp. 1237–1246.
- [32] Cai, C., Xu, Z., Xu, W., & Feng, B. [2002] “Notch filter feedback control in a class of chaotic systems,” *Automatica* **38**, pp. 695–701.
- [33] Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A. [1990] “Controlling chaos,” *Physical Review Letters* **64**, pp. 1196–1199.
- [34] Hunt, E. R. [1991] “Stabilizing high-period orbits in a chaotic system : The diode resonator,” *Physical Review Letters* **67**, pp. 1953–1955.
- [35] Rollins, R.W., Parmananda, P. & Sherard, P. [1993] “Controlling chaos in highly dissipative systems : A Simple recursive algorithm,” *Physical Review E* **47**, pp. 780–783.
- [36] Garfinkel A., Spano M. L., Ditto W. L. & Weiss J. N. [1992] “Controlling cardiac chaos” *Science* **257**, pp. 1230–1233.
- [37] Reyl, C., Flepp, L., Badii, R. & Brun, E. [1993] “Control of NMR-laser chaos in high-dimensional embedding space,” *Physical Review E* **47**, pp. 267–272.

- [38] Romeiras, F. J., Grebogi, C., Ott, E. & Dayawansa, W. P. [1992] “Controlling chaotic dynamical systems,” *Physica D* **58**, pp. 165–192.
- [39] Auerbach, D., Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J.A. [1992] “Controlling chaos in higher dimensional systems,” *Physical Review Letters* **69**, pp. 4379–3482.
- [40] Shinbrot, T., Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J.A. [1993] “Using small perturbations to control chaos” *Nature* **363**, pp. 411–417.
- [41] Kostelich E.J., Grebogi, C., Ott, E. & Yorke J.A. [1993] “Higher dimensional targeting,” *Physical Review Letters E* **47**, pp. 305–310.
- [42] Lai, Y.-C., Tél, T. & Grebogi, C. [1993] “Stabilizing chaos-scattering trajectories using control”, *Physical Review E* **48**, pp. 709–717.
- [43] Lai, Y. C. & Grebogi, C. [1994] “Converting transient chaos into sustained chaos by feedback control,” *Physical Review E* **49**, pp. 1094–1099.
- [44] Nagai, Y. & Lai, Y. C. [1995] “Selection of desirable chaotic phase using small feedback control,” *Physical Review E* **51**, pp. 3842–3848.
- [45] So, P. & Ott, E. [1995] “Controlling chaos using time delayed coordinates via stabilization of periodic orbits,” *Physical Review E* **51**, pp. 2955–2962.
- [46] Hong, Z., Yinghai, W. & Jie Y. [1997] “Stabilizing unstable orbits,” *Physics Letters A* **236**, pp. 53–59.
- [47] Aston P. J. & Bird C.M. [1998] “Using Control Chaos to Refine Approximations to Periodic Points,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**, pp. 227–235.
- [48] Yu, X., Chen, G., Xia, Y., Song, Y. & Cao, Z. [2001] “An invariant-manifold-based method for chaos control,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **48**, pp. 930–937.
- [49] Qu, Z., Hu, G. & Ma, B. [1993] “Controlling chaos via continuous feedback,” *Physics Letters A* **178**, pp. 265–270.
- [50] Barrett, M. D. [1996] “Continuous control of chaos,” *Physica D* **91**, pp. 340–348.
- [51] Bountis, T., Bergamin, J.M. & Basios V. [2002] “Stabilization of discrete breathers using continuous feedback control” *Physics Letters A* **295**, pp. 115–120.
- [52] Pyragas, K. [1992] “Continuous control of chaos by self-controlling feedback,” *Physics Letters A* **170**, pp. 421–428.
- [53] Bielawski, S., Derozier, D. & Glorieux, P. [1994] “Controlling unstable periodic orbits by a delayed continuous feedback,” *Physical Review E* **49**, pp. 971–974.
- [54] Pyragas, K (1995) “Control of chaos via extended delay feedback,” *Physics Letters A* **206**, pp. 323–330.
- [55] Bleich, M. E. & Socolar, J.E.S. [1996] “Stability of periodic orbits controlled by time-delay feedback,” *Physics Letters A* **210**, pp. 87–94.
- [56] Just, W., Bernard, T., Ostheirer, M., Reibold, E. & Benner, H. [1997] “Mechanism of time-delayed feedback control,” *Physical Review Letters* **78**, pp. 203–296.
- [57] Nakajima, H. [1997] “On analytical properties of delayed feedback control of chaos,” *Physics Letters A* **232**, pp. 207–210.

- [58] Nakajima H. & Ueda, Y. [1998] “Half-period delayed feedback control for dynamical systems with symmetries,” *Physical Review E* **58**, pp. 1757–1763.
- [59] Konishi, K. & Kokame, H. [1998] “Learning control of time-delay chaotic systems and its applications,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**, 2457–2465.
- [60] Konishi, K. & Kokame, H. [1998] “Observer-based delayed-feedback control for discrete-time chaotic systems,” *Physics Letters A*, **248**, pp. 359–368.
- [61] Chen, G. & Yu, X. [1999] “On time-delayed feedback control of chaotic systems,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **46**, pp. 767–772.
- [62] Ushio, T. & Yamamoto, S. [1998] “Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems,” *Physics Letters. A* **247**, pp. 112–118.
- [63] Ushio, T. & Yamamoto, S. [1999] “Prediction-based control of chaos,” *Physics Letters A* **264**, pp. 30–35.
- [64] Yamamoto, S., Hino, T. & Ushio, T. [2001] “Dynamic delayed feedback controllers for chaotic discrete-time systems,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **48**, pp. 785–789.
- [65] Guan, X., Chen, C., Peng, H. & Fan, Z. [2003] “Time-delay feedback control of time-delay chaotic systems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13**, pp. 193–205.
- [66] Boccaletti, S. & Arecchi, F. T. [1996] “Adaptive recognition and control of chaos,” *Physica D* **96**, pp. 9–16.
- [67] Mevay A. C. H. & Sarpeshkar R. [2003] “Predictive comparators with adaptive control,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-II* **50**, pp. 579–588.
- [68] Yu, X. [1997] “Controlling chaos using input-output linearization approach,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **7**, pp. 1659–1664.
- [69] Genesio, R., Tesi, A. & Villoresi, F. [1993] “A frequency approach for analyzing and controlling chaos in nonlinear circuits,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **40**, pp. 819–828.
- [70] Basso, M., Genesio, R. & Tesi A. [1998] “Frequency domain methods and control of complex dynamics,” *Proc. 37 IEEE Conf. Decision & Control*, USA. pp. 1936–1941.
- [71] Chanfreau P. & Lyyjynen H. [1999] “Viewing the efficiency of chaos control,” *Journal of Nonlinear Mathematical Physics* **6**, pp. 314–331.
- [72] Gadaleta, S. & Dangelmayr, G. [1999] “Optimal chaos control through reinforcement learning,” *Chaos* **9**, pp. 775–788.
- [73] Ge, S. S. & Wang, C. [2000] “Adaptive control of uncertain Chua’s circuits,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-II* **47**, pp. 1397–1402.
- [74] Piccardi, C. & Rinaldi, S. [2000] “Optimal control of chaotic systems via peak-to-peak maps,” *Physica D* **144**, pp. 298–308.
- [75] Hegazi, A., Agiza, H.N. & El-Dessoky, M.M. [2001] “Controlling chaotic behaviour for spin generator and Rossler dynamical systems with feedback control,” *Chaos, Solitons and Fractals* **12**, pp. 631–658.

- [76] Tian Y.-P. & Chen G. [2001] “A separation principle for dynamical delayed output feedback control of chaos,” *Physics Letters A* **284**, pp. 31–42.
- [77] Piccardi, C. & Rinaldi, S. [2002] “Control of complex peak-to-peak dynamics,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12**, pp. 2927–2936.
- [78] Richter H. [2002] “Controlling chaotic systems with multiple strange attractors,” *Physics Letters A* **300**, pp. 182–188.
- [79] Mahmoud, G.M. & Farghaly, A.A.M. [2003] “Stabilization of unstable periodic attractors of complex damped non-linear dynamical systems,” *Chaos Solitons and Fractals* **17**, pp. 105–112.
- [80] Yau, H.T., Chen, C.K. & Chen, C.L [2000] “Sliding mode control of chaotic systems with uncertainties,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10**, pp. 1139–1147.
- [81] Zou, Y.-L., Luo, X.-S., Jiang, P.-Q., Wang, B.-H., Chen, G., Fang J.-Q. & Quan H.-J. [2003] “Controlling the chaotic n -scroll Chua’s circuit,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13**, pp. 2709–2714.
- [82] Boukabou A. [2002] *Etude, analyse et contrôle des systèmes chaotiques par la méthode OGY*. Magistère, Constantine.
- [83] Boukabou A. & Mansouri N. [2002] “Contrôle des systèmes à comportement chaotique par la méthode OGY : Cas des systèmes discrets,” *Proc. Conférence sur le Génie Electrique : CGE 2002*. EMP. Alger. Algérie. pp. 26.
- [84] Boukabou A. & Mansouri N. [2004] “Contrôle de l’attracteur d’Ikeda par la méthode OGY,” *Proc. Conférence Tunisienne de Génie Electrique : CTGE 2004*. Tunis. Tunisie. pp. 183.
- [85] Boukabou A. & Mansouri N. [2003] “Controlling chaotic behavior in higher-order dynamical systems,” *Proc. Conférence sur le Génie Electrique : CGE 2003*. EMP. Alger. Algérie.
- [86] Boukabou A. & Mansouri N. [2003] “Control of chaotic behavior in high order dynamical systems,” *Proc. 1st Int. Conf. Physics and Control*, St. Petersburg, Russie. pp. 516–521.
- [87] Boukabou A. & Mansouri N. [2004] “Controlling chaos in higher-order dynamical systems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **14**, pp. 4019–4025.
- [88] Boukabou A. & Mansouri N. [2005] “Controlling multiple unstable periodic orbits of the n -scroll Chua’s circuit,” *Proc. ENOC-2005*, Eindhoven, Netherlands.
- [89] Boukabou A. & Mansouri N. [2003] “Contrôle prédictif des systèmes discrets à comportement chaotique,” *Proc. Conférence Internationale sur les Systèmes de Télécommunications, d’Electronique Médicale et d’Automatique : CISTEMA ’2003*. Tlemcen. Algérie.
- [90] Boukabou A. & Mansouri N. [2004] “Contrôle prédictif des systèmes continus à comportement chaotique,” *Proc. Congrès Maghrébin de Génie Electrique CMGE 2004*. Constantine. Algérie.
- [91] Boukabou A. & Mansouri N. [2004] “Predictive control of continuous chaotic systems,” *Proc. Complex Systems Intelligence and Modern Technological CSIMTA*. Cherbourg. France.

- [92] Boukabou A. & Mansouri N. [2005] “Predictive control of high dimensional chaos,” *Nonlinear Phenomena in Complex Systems* **8**, pp. 258–265.
- [93] Boukabou A. & Mansouri N. [2005] “Design of robust fuzzy prediction-based controller for unknown discrete chaotic systems,” *Proc. SSD’05. Published by IEEE*. Sousse. Tunis.
- [94] Boukabou A. & Mansouri N. [2005] “Fuzzy predictive control of high dimensional chaos,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Accépté.
- [95] Boukabou A. & Mansouri N. [2004] “Neural based prediction control of unknown chaotic systems,” *Proc. Complex Systems Intelligence and Modern Technological CSIMTA*. Cherbourg. France.
- [96] Boukabou A. & Mansouri N. [2005] “Neural predictive control of unknown chaotic systems,” *Nonlinear Analysis Modelling and Control* **10**, pp. 95–106.
- [97] Ditto W. L., Rauseau S. N., Spano M. L. [1990] “Experimental control of chaos” *Physical Review Letters* **65**, pp. 3211–3214.
- [98] Inaba, N. & Nitnai, T. [1998] “OPF chaos control in a circuit containing a feedback voltage pulse generator,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **45**, pp. 473–480.
- [99] Ogorzalek, M.J. [1993] “Taming chaos – Part I : Synchronization ; Part II : Control,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **40**, pp. 693–706.
- [100] Hartley, T.T. & Mossayebi, F. [1993] “Control of Chua’s circuit,” *Journal of Circuits and Systems Computing* **3**, pp. 173–194.
- [101] Hwang, C.C., Chow, H.Y. & Wang, Y.K. [1996] “A new feedback control of a modified Chua’s circuit system,” *Physica D* **92**, pp. 95–100.
- [102] Wu T. & Chen M.-S. [2002] “Chaos control of the modified Chua’s circuit system,” *Physica D* **164**, pp. 53–58.
- [103] Petrov, V., Gaspar, V., Masere, J. & Showalter, K. [1993] “Controlling chaos in the Belousov- Zhabotinsky reaction,” *Nature* **361**, pp. 240–242.
- [104] Qammar H., Seshadhri K.R., Gomatam R. & Venkatesan A. [1996] “Control of a chaotic polymerization reaction using linear and nonlinear controllers,” *Chemical Engineering Journal* **64**, pp. 141–148.
- [105] Bielawski, S., Derozier, D. & Glorieux, P. [1993] “Experimental characterization of unstable periodic orbits by controlling chaos,” *Physical Review A* **47**, pp. 2492–2495.
- [106] Roy, R., Murphy Jr., T. W., Maier, T. D., Gills, Z. & Hunt, E. R. [1992] “Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system,” *Physical Review Letters* **68**, pp. 1259–1262.
- [107] Meucci, R., Ciofini, M. & Abbate, R. [1996] “Suppressing chaos in lasers by negative feedback,” *Physical Review E* **53**, pp. 5537–5540.
- [108] Ciofini, M., Labate, A. & Meucci, R. [1997] “Tracking unstable periodic orbits in a modulated laser,” *Physics Letters A* **227**, pp. 31–36.
- [109] Singer, J., Wang, Y.-Z. & Bau, H. H. [1991] “Controlling a chaotic system,” *Physical Review Letters* **66**, pp. 1123–1126.

- [110] Schiff, S. J., Jerger, K., Duong, D. H., Chang, T., Spano, M. L. & Ditto, W.L. [1994] “Controlling chaos in the brain,” *Nature* **370**, pp. 615–620.
- [111] Piccardi C. & Lazzaris S. [1998] “Vaccination policies for chaos reduction in childhood epidemics,” *IEEE Transaction on Biomedical Engineering* **45**, pp. 591–595.
- [112] Pyragas, K. & Tamasevicius, A. [1993] “Experimental control of chaos by delayed selfcontrolling feedback,” *Physics Letters A* **180**, pp. 99–102.
- [113] Iu H.H.C. & Robert B. [2003] “Control of chaos in a PWM current-mode H-bridge inverter using time-delayed feedback,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **50**, pp 1125–1129.
- [114] Celka, P. [1994] “Experimental verification of Pyragas’s chaos control method applied to Chua’s circuit,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **4**, pp. 1703–1706.
- [115] Gauthier, D. J., Sukow, D. W., Concannon, H. M. & Socolar, J. E. S. [1994] “Stabilizing unstable periodic orbits in a fast diode resonator using continuous time-delay autosynchronization,” *Physical Review E* **50**, pp. 2343–2346.
- [116] Meucci, R., Gadomski, W., Ciofini, M. & Arecchi, F. T. [1994] “Experimental control of chaos by means of weak parametric perturbations,” *Physical Review E* **49**, pp. 2528–2531.
- [117] Yang, W., Ding, M., Mandell, A. J. & Ott, E. [1995] “Preserving chaos : control strategies to preserve complex dynamics with potential relevance to biological disorders,” *Physical Review E* **51**, pp. 102–110.
- [118] Chin, G., Senesac, L. R., Blass, W. E. & Hillman, J. J. [1996] “Stabilizing lead-salt diode lasers : Understanding and controlling chaotic frequency emission,” *Science* **274**, pp. 1498–1501.
- [119] Meucci, R., Labate, A. & Ciofini, M. [1997] “Controlling chaos by negative feedback of subharmonic components,” *Physical Review E* **56**, pp. 2829–2834.
- [120] Yang, S. K., Chen, C. L., & Yau, H. T. [2002] “Control of chaos in Lorenz system,” *Chaos, Solitons and Fractals* **13**, pp. 767–780.
- [121] Rodriguez, H., Ortega, R., Escobar G. & Barabanov N. [2000] “A robustly stable output feedback saturated controller for the boost DC-to-DC converter,” *Systems and Control Letters* **40**, pp. 1–8.
- [122] Fang, J.-Q., Chen G. & Luo X.-S. [2002] “Complexity analysis and control strategy for beam halo-chaos in ADS,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12**, pp. 917–930.
- [123] Saha, P., Banerjee, S. & Chowdhury A. R. [2003] “On the study of control and anti-control in magnetoconvection,” *Physics Letters A* **306**, pp. 211–226.
- [124] Lindner, J.F. & Ditto, W.L. [1995] “Removal suppression and control of chaos by nonlinear design,” *Appl. Ech. Rev.* **48**, pp. 795–807.
- [125] Poon L. & Grebogi C. [1995] “Controlling Complexity” *Physical Review Letter* **75**, pp 4023–4026.
- [126] Chen, G. & Dong, X. [1996] “From chaos to order—perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **6**, pp. 1363–1409.

- [127] Grebogi C., Lai Y.-C. & Hayes S. [1997] “Control and application of chaos,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **7**, pp 2175–2197.
- [128] Arecchi, F.T., Boccaletti, S., Ciofini, M., Meucci, R. & Grebogi, C. [1998] “The control of chaos : theoretical schemes and experimental realizations,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**, pp. 1643–1655.
- [129] Chen, G. & Dong, X. [1998] *From Chaos to Order : Methodologies, Perspectives and Applications* (World Scientific, Singapore).
- [130] Fradkov, A. L. & A. Yu. Pogromsky [1999] *Introduction to Control of Oscillations and Chaos*. (World Scientific, Singapore).
- [131] Boccaletti, S. Grebogi, C. Lai, Y.-C. Mancini, H. & Maza, D. [2000] “The control of chaos : theory and applications,” *Physics Reports*. **329**, pp. 103–197.
- [132] Chen, G. [2003] *Control of Chaos* (World Scientific, Singapore).
- [133] Mamdani E. [1976] “Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers,” *International Journal of Man-Machine Studies* **8**, pp. 669–678.
- [134] Takagi, T. & Sugeno, M. [1985] “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control,” *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics* **15**, 116–132.
- [135] Yager, R. R. & Zadeh, L.A. [1992] *An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems* (Kluwer Academic Publishers, New York).
- [136] Yen, J., Langari, R. & Zadeh, L.A. [1995] *Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*. (IEEE Press, New York).
- [137] Palm, R., Driankov, D. & Hellendoorn, H. [1997] *Model Based Fuzzy Control*. (Springer-Verlag, New York).
- [138] Passino, K. M. & Yurkovich, S. [1998] *Fuzzy Control* (Addison Wesley, Longman).
- [139] Calvo, O. & Cartwright, J.H.E. [1998] “Fuzzy control of chaos,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**, pp. 1743–1747.
- [140] Chen, L. & Chen, G. [1999] “Fuzzy predictive control of uncertain chaotic systems using time series,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9**, pp. 757–767.
- [141] Chen, L. & Chen, G. [2000] “Fuzzy modeling, prediction, and control of uncertain chaotic systems based on time series,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **47**, pp. 1527–1531.
- [142] Park, C.-W., Lee, C.-H., Kim, J.-H., Kim, S. & Park, M. [2001] “Design of an adaptive fuzzy controller and its applications to controlling uncertain chaotic systems,” *Transaction on Control, Automation and Systems Engineering* **3**, pp. 95–105.
- [143] Park, C.-W., Lee, C.-H. & Park, M. [2002] “Design of an adaptive fuzzy model based controller for chaotic dynamics in Lorenz systems with uncertainty,” *Information Sciences* **147**, pp. 245–266.
- [144] Udawatta, L., Watanabe, K., Kiguchi, K. & Izumi, K. [2002] “Fuzzy-chaos hybrid controller for controlling of nonlinear systems,” *IEEE Transaction on Fuzzy systems* **10**, pp. 401–411.

- [145] Nguyen H. & Windrow B. [1990] “Neural networks for self-learning control systems,” *IEEE Control System Magazine* **18**, pp. 18–23.
- [146] Miller W.T., Sutton R.S. & Werbos P.J. [1991] *Neural Networks for Control*, The MIT Press, Cambridge, MA.
- [147] Pham D.T. & Liu X. [1995] *Neural Networks for Identification, Prediction and Control*. (Springer-Verlag, UK).
- [148] Poznyak A.S., Yu W., Sanchez, E.N. & Perez J.P. [1999] “Nonlinear adaptive trajectory tracking using dynamic neural networks,” *IEEE Transaction on Neural Networks*, **10**, pp. 1402–1411.
- [149] Alsing M., Gavrielides A. & Kovanis V. [1994] “Using neural networks for controlling chaos,” *Physical Review E* **49**, pp. 1225–1231.
- [150] Kim K.B., Park J.B., Choi Y.H. & Chen G. [2000] “Control of chaotic dynamical systems using radial basis function network approximators,” *Information Sciences* **130**, pp. 165–183.
- [151] Ramesh M. & Narayanan S. [2001] “Chaos control of Bonhoeffer-van der Pol oscillator using neural networks,” *Chaos Solutions and Fractals*, **12**, pp. 2395–2405.
- [152] Ren X.M., Rad A.B., Chan P.T. & Lo W.L. [2003] “Identification and control of continuous-time nonlinear systems via dynamic neural networks” , *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, **50**, pp. 478–486.
- [153] Pecora, L. M. & Carroll, T. L. [1990] “Synchronization in chaotic systems,” *Physical Review Letters* **64**, pp. 821.
- [154] Lai, Y. C. & Grebogi, C. [1993] “Synchronization of chaotic trajectories using control,” *Physical Review E* **47**, pp. 2357–2360.
- [155] Pecora, L. M., Carroll, T. L., Johnson, G. A. & Mar, D. J. [1997] “Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications,” *Chaos* **7**, pp. 520–543.
- [156] Nijmeijer H. [2001] “A dynamical control view on synchronization,” *Physica D* **154**, pp. 219–228.
- [157] Agiza, H.N. & Yassen M.T. [2001] “Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control,” *Physics Letters A* **278**, pp. 191–197.
- [158] Bai, E.-W., Lonngren K. E. & Sprott J.C. [2002] “On the synchronization of a class of electronic circuits that exhibit chaos,” *Chaos, Solitons and Fractals* **13**, pp. 1515–1521.
- [159] Zhou, T., Lü, J., Chen G. & Tang Y. [2002] “Synchronization stability of three chaotic systems with linear coupling,” *Physics Letters A* **301**, pp. 231–240.
- [160] Hayes, S., Grebogi, C. & Ott, E. [1993] “Communication with chaos,” *Physical Review Letters* **70**, pp. 3031–3034.
- [161] Hayes, S., Grebogi, C., Ott, E. & Mark, A. [1994] “Experimental control of chaos for communication,” *Physical Review Letters* **73**, pp. 1781–1784.
- [162] Bollt, E., Lai, Y. C. & Grebogi, C. [1997] “Coding, channel capacity and noise resistance in communication with chaos,” *Physical Review Letters* **79**, pp. 3787–3790.
- [163] Boccaletti, S., Farini, A. & Arecchi, F. T. [1997] “Adaptive synchronization of chaos for secure communication,” *Physical Review E* **55**, pp. 4979–4982.

- [164] Boccaletti, S., Giaquinta, A. & Arecchi, F. T. [1997] “Adaptive recognition and filtering of noise using wavelets,” *Physical Review E* **55**, pp. 5393–5400.
- [165] Rosa, E., Hayes, S. & Grebogi, C. [1997] “Noise filtering in communication with chaos,” *Physical Review Letters* **78**, pp. 1247–1250.
- [166] Kolumban, G., Kennedy M. P. & Chua, L.O. [1998] “The role of synchronization in communication using chaos-Part II : Chaotic modulation and chaotic synchronization,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **45**, pp.1129–1140.
- [167] Kennedy, M. P. & Kolumban, G. [2000] “Digital communications using chaos,” *Signal Processing* **80**, pp. 1307–1320.
- [168] Chen G. & Lai, D. [1996] “Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **6**, pp. 1341–1349.
- [169] Chen, G. and Lai, D. [1997] “Making a dynamical system chaotic : feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems,” *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **44**, pp. 250–253.
- [170] Chen G. & Lai, D. [1998] “Feedback anticontrol of discrete chaos,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**, pp. 1585–1590.
- [171] Wang, X. F. & Chen, G. [1999] “On feedback anticontrol of discrete chaos,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9**, pp. 1435–1442.
- [172] Wang, X. F. & Chen, G. [2000] “Chaotifying a stable LTI system by tiny feedback control”, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I* **47**, pp. 410–415, 2000.
- [173] Wang, X. F. & Chen, G. [2000] “Chaotification via arbitrarily small feedback controls : Theory, method and applications,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10**, pp. 549–570.
- [174] Li, Z., Park, J. B., Chen, G. and Joo, Y. H. [2002] “Generating chaos via feedback control from a stable TS fuzzy system through a sinusoidal nonlinearity,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12**, pp. 2283–2291.
- [175] Yang, L., Liu, Z. & Chen, G. [2002] “Chaotifying a continuous-time system via impulsive input,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12**, pp. 1121–1128.