

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mentouri de Constantine
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Electronique

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de
Doctorat d'Etat

Option : Contrôle

Par

KIDOUCHE MADJID

THEME

Calcul Généré de la Fonction de Lyapunov des
Systemes Non Linéaires de Grande Dimension

Devant le Jury:

Président :	Dr. N. Mansouri	Professeur	Université Mentouri de Constantine
Rapporteur :	Dr. A. Charef	Professeur	Université Mentouri de Constantine
Examineurs :	Dr. A. Bennia	Professeur	Université Mentouri de Constantine
	Dr. H. Tebbikh	Professeur	Université de Guelma
	Dr. Y. Ferdi	M.C	Université de Skikda

2006

CALCUL GÉNÉRAL DE LA FONCTION DE LYAPUNOV DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES DE GRANDE DIMENSION

Where shall we begin?... “There is no beginning. Start where you arrive. Stop before what first entices you. And work! You enter little by little into the entirety. Method will be born in proportion to your interest; elements which your attention at first separates in order to analyze them will unite to compose the whole. In the calm exile of work, we first learn patience, which in turn teaches energy, and energy gives us eternal youth made of self-collectedness and enthusiasm. From such vantage we can see and understand life...”

Auguste Rodin

(“Where shall we begin?” Chapter ONE-II

Cathedrals of France, Translated by

Elisabeth Chase Geissbuhler)

Table des matières

Preface

Résumé	vii
Notation	x
Organisation et résumé des contributions	xi
Remerciements	xv
Introduction générale	xvi

1. Concept de la fonction de Lyapunov et la théorie des graphes

1.1 Introduction	3
1.2 Description mathématique des systèmes non linéaires	3
1.2.1 Systèmes non autonomes	3
1.2.2 Systèmes autonomes	5
1.2.2.1 Changement de coordonnées	5
1.2.3 Stabilité	6
1.2.3.1 Stabilité locale et stabilité globale	7
1.2.3.2 Stabilité au sens de Lyapunov	8
1.3 Définition de la stabilité	9
1.4 Fonction de signe positif	10
1.4.1 Forme quadratique	13
1.4.2 M- matrice	16
1.5 Analyse des performances	16
1.6 Principe de comparaison	18
1.7 Estimation du taux de convergence d'un système non linéaire	19
1.8 Principe de linéarisation	23
1.9 Analyse de la perturbation	24
1.10 Connective stability	24
1.11 Stabilité des systèmes de grande dimension	25
1.12 Vocabulaire de la théorie des graphes	26
1.13 Matrice d'adjacence	27
1.14 Forte connexité	27

1.14.1	Identification des (cfc) de la matrice d'adjacence	27
1.14.2	Condensation	28
1.15	Ordre topologique	28
1.16	Décomposition par la théorie des graphes	28
1.17	Matrice d'interaction	31
1.18	Conclusion	33
2.	Stabilité de Lyapunov par le principe de comparaison	
2.1	Introduction	35
2.2	Analyse qualitative des systèmes non linéaires de grande dimension	35
2.3	Analyse de la stabilité par la fonction de Lyapunov	39
2.4	Fonction définie positive révisée	40
2.5	Analyse des systèmes linéaires invariant	41
2.6	Atténuation de la perturbation	43
2.7	Stabilité au sens de Lyapunov par le principe de comparaison	49
2.8	Conclusion	54
3.	Construction récursive de La fonction de Lyapunov	
3.1	Introduction	56
3.2	Structure cascade	56
3.3	Fonction de Lyapunov composée	57
3.4	Backstepping intégrator	59
3.5	Design récursif	64
3.5.1	Backstepping	64
3.5.2	Linéarisation par bouclage	66
3.6	Système considéré	68
3.7	Méthode proposée	70
3.8	Calcul généré de la fonction de Lyapunov	70
3.9	Conclusion	75
4.	Construction de la fonction de Lyapunov par la méthode du gradient variable	
4.1	Introduction	77
4.2	Concept du gradient variable	77

4.3 Procédure du gradient variable	80
4.4 Système considéré	80
4.5 Système interconnecté	81
4.6 L'approche proposée	83
4.6.1 Sous système isolé	83
4.6.2 Sous système composé séquentiel	83
4.7 Conclusion	89
Conclusion Générale	90
Références	93
Références Personnelles	98

Résumé

Le concept de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension a suscité de nombreux travaux et a lui seul, il constitue la matière d'ouvrage spécialisé. Pour ces types de systèmes, on fait souvent appel à la méthode directe de Lyapunov, qui est un outil très efficace de l'analyse de la stabilité. Malheureusement, cette méthode est très limitée quand elle est appliquée aux systèmes de grande dimension. On se trouve souvent confronté à un sérieux problème, et on se révèle incapable de surmonter la complexité que cette fameuse fonction de Lyapunov nous engendre. Le problème majeur de la méthode de Lyapunov est de trouver une fonction de Lyapunov pour le système en l'absence de guide clair. Dans le cas non linéaire, il n'existe pas de méthode systématique pour choisir une fonction de Lyapunov convenable, d'où l'utilisation de l'expérience, de l'intuition et de considérations physiques. Il est donc souvent astucieux de faire appel à la notion de décomposition, qui consiste à partitionner le système initial en plusieurs sous-systèmes, à résoudre un certain nombre de problèmes sur ces derniers puis à coordonner l'ensemble afin d'atteindre ou d'approcher l'objectif globale. C'est l'approche que nous avons utilisée pour la construction de la fonction de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension.

Abstract

Stability concept of large scale non linear systems is becoming very challenging, and many authors investigated in this area. For stability analysis, the direct method of Lyapunov appears the most efficient technique. But despite its elegance and generality, the usefulness of the Lyapunov approach is severely limited when applied to problems of high dimension and complex interconnecting structure, because of no universal and systematic procedure available to tell us how to find the required Lyapunov function. For this reason it is frequently advantageous to view high order systems as being composed of several lower order subsystems which when interconnected in an appropriate fashion, yield the original composite system. Presumably these subsystems can be considered independently, so that solutions to the corresponding sub problems can be combined with interconnection constraints to come up with a solution to the original problems of the overall large scale systems. This is the approach that we are going to focus on.

ملخص

إن مفهوم الاستقرار لدى الأنظمة الغير الخطية ذات الامتدادات الكبيرة هو اليوم من أكبر التحديات التي تواجه الباحثون في هذا المجال.

إن تقنية ليابونوف هي الطريقة الفعالة في دراسة استقرار الأنظمة و لكن فعاليتها تصبح محدودة عند استعمالها في دراسة استقرار الأنظمة ذات الامتدادات الكبيرة والبنية المعقدة.

لذا يتطلب أولاً تحليل هذه الأنظمة ذات الامتدادات الكبيرة والبنية المعقدة و تجزئتها إلى عدة أنظمة ثانوية بحيث إذا ربطناها مع بعضها بطريقة ملائمة سوف تكون لنا النظام ذات الامتدادات الكبيرة والبنية المعقدة الذي نحاول دراسته.

في هذه الرسالة طريقة التحليل و التجزئة هي التي استعملت في دراسة الاستقرار لدى الأنظمة الغير الخطية ذات الامتدادات الكبيرة والبنية المعقدة. بعد التحليل و التجزئة نقوم بدراسة استقرار كل جزء على حدا لكي نستطيع إيجاد دالة ليابونوف له ثم نجمع كل هذه الأجزاء بطريقة ذكية لبناء دالة مركبة لدراسة استقرار النظام ذات الامتدادات الكبيرة والبنية المعقدة.

Notations

Symboles et opérateurs

$\prec (\succ)$ Inférieur (supérieur) à

$\leq (\geq)$ Inférieur (supérieur) ou égal à

\forall Quelque soit

\in Appartient à

\subset Inclu dans

\rightarrow Tend vers

\Rightarrow Implique que

$|x|$ Valeur absolue de x

$\|x\|$ Norme du vecteur x

$\|x\|_p$ Norme p de x

$\|A\|_p$ Norme de la matrice A

$\lambda(A)$ Valeurs propres de la matrice A

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

$A^{m \times n}$ Ensemble des matrices de dimension $(m \times n)$ A

R^n Espace reel euclidien de dimension n

D Sous ensemble de R^n

J Intervalle de temps $[t_0, \infty)$

∇f Vecteur gradient

$DV(\cdot)$ Dérivée supérieure à droite

$L_f h$ La dérivée de Lie

C^k Ensemble de fonctions continûment dérivables (jusqu'à l'ordre)

Organisation et résumé des contributions

Cette thèse, composée de quatre chapitres, est organisée de la façon suivante :

Le chapitre 1 est consacré aux notions et aux outils utilisés le long de la thèse. On y trouve une présentation des principales définitions et propriétés classiques de stabilité au sens de Lyapunov ainsi que le concept de la théorie des graphes. Notre objectif se limite à donner les prérequis permettant d'aborder en toute sérénité la seconde partie sur la fonction de Lyapunov. Le chapitre deux, trois, et quatre sont intégralement consacrés à la construction de la fonction de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension par différentes approches.

Le travail présenté dans cette thèse est principalement basé sur les publications suivantes:

1. M. Kidouche, A. Charef "Derivation approach of Lyapunov functions for large scale nonlinear system" 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 25-28 August, Miedzdroje, Poland, 2003

ISBN: 83-88764-77-2

Summary: A sufficient condition for asymptotic stability is proposed for large scale nonlinear systems. It is applicable if the large scale nonlinear systems can be decomposed into subsystems, if appropriate Lyapunov functions are obtained for the subsystems, and if the connections between subsystems have bounded gains.

2. M. Kidouche, A. Charef "Application of Lyapunov Method to Complex System with Nonlinear Interconnection" 6th IFAC-Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS), pt.1, paper no.39, pp 363-367, 01 – 03 Sept. Stuttgart, Germany 2004

ISBN: 1 86058 409 8

Summary: When we try to analyze stability of large scale nonlinear system, we are immediately faced with computational difficulties which rapidly grow as the scale of the systems increases. For this reason, in our approach, we refer to the method to decompose a large scale system into smaller subsystems and to make two-step analysis: first to analyze each subsystem and second to combine the results to reduce the property of the whole using the general concept of comparison functions to systems which can be decomposed into stable subsystems

3. *M. Kidouche, A. Charef* “Constructive methodology of Lyapunov function of composite system with nonlinear interconnection term”. International Journal of Robotic and Automation, vol. 21, No. 1, pp. 19-25, 2006

Ranked journal, ISSN 0826 8185

Summary: For composite systems with a coarse decomposition it is usually more difficult to find suitable Lyapunov function for the subsystems which may no longer be of low order and provides computational and analytical difficulties. In this work, we present a constructive methodology of Lyapunov function in the case of the coarse decomposition to analyze stability of the origin for a general class of nonlinear composite systems expressed in state variables as n first order nonlinear differential equations. We need to find a storage function to be used as Lyapunov function. A family of this design can be constructed by recursive procedure of different version of the same basic step: the augmentation by one equation at each step. The present results make use of graph theoretic decomposition techniques in which the composite systems lead to a sequence of coarser subsystems.

4. *M. Kidouche, A. Charef*, “The variable gradient method for generating Lyapunov function of nonlinear composite system” 11th IEEE International conference on methods and models in automation and robotics, pp 233-237, 29 Aug.- 1 Sept. Miedzyzdroje, Poland, 2005

ISBN: 83-60140-90-1

Summary: This paper further contributes to the construction of Lyapunov functions for nonlinear composite systems using variable gradient approach. We first decompose the composite system into subsystems using the techniques of decomposing a graph into its strongly connected components, and then we rewrite the system differential equations into a hierarchical form by renumbering and aggregating the original state variables. Once the system have been rearranged in its hierarchical form the analysis of the overall interconnected system is then accomplished in terms of the qualitative properties of the subsystems to derive suitable Lyapunov function of the composite system.

La liste complète de nos travaux est résumée dans ce qui suit:

M. Kidouche, A. Charef “Decentralized controller design of large scale systems using balanced realisation techniques” 12th IEEE International conference on methods and models in automation and robotics, 28-31 August, Miedzyzdroje, Poland, 2006.

M. kidouche, A. Charef “Decentralized controller design of large scale system by aggregation” 17th IMACS World Congress, Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation, paper no. T4-I-103-0789, 11-15 July, Paris, France 2005
ISBN: 9782915913040

M. Zelmat, M. kidouche “Fuzzy control of a biphasic separator for hydrocarbon field” 32 international conference of Slovak society of chemical engineering, 23-27 May, Tatraske Matliare, slovakia 2005

M. Kidouche, A. Charef “On the decentralized control of large dynamical complex system” Complex systems, intelligence and modern technology applications (CSIMTA), 19-22 Sept., Cherbourg, France 2004
ISBN: 973-685-848-0

M. Kidouche, A. Charef “An approximate designing approach of decentralized control of multi-area electric energy system” 31 International Conference of Slovak Society of Chemical Engineering, 24-28 May, Tatraske Matliare, Slovakia 2004
ISBN: 80-227-2052-6

M. Kidouche, A. Charef “Graph theory decomposition for vector Lyapunov function” 4th European Congress of Chemical Engineering, 20-25 Sept., vol.9, paper no.9.0-008 Granada, Spain, 2003

M. Kidouche, A. Charef “On vector Lyapunov function of complex system” IMACS Multiconference: Computational Engineering in Systems Application; paper no. S1-R-00-0062, 9-11 July, Lille, France, 2003
ISBN: 2-9512309-6-6

M. kidouche “Overlapping decentralized optimal control of large scale system” 8th IEEE Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, 2-5 Sept., vol. 1, pp 289-296, Miedzyzdroje, Poland 2002

ISBN: 83-88764-61-6

M. Kidouche, A. Charef “ Adaptive decentralised control of large scale power systems” 3^{eme} Séminaire National en Génie Electrique, 29 – 31 Octobre, pp. 188-192, Université Mohamed Khider, Biskra 2001

M. kidouche “Overlapping decentralized control of large scale systems” First international conference on electrical engineering, 04 – 06 November, Université M’Hamed Bougerra, Boumerdes 2000

Acknowledgements

This work could not have been completed without the help and continuous support from colleagues, friends, and family to whom I am most grateful. I would like to express my sincere gratitude to my friend Professor A. Charef for his encouragements. He has been a constant source, given me great challenges and been very supportive with all kinds of help. It has also been great fun working together as students at Drexel University U.S.A. His sense of humor has contributed for many joyful moments.

I would like to thank Professor Mansouri Nora to have accepted to be the chairperson of my examination committee. I am grateful to Professor Abdelhak Bennia, Professor Hicham Tebbikh and Dr Youcef Ferdi to have accepted to be members of my examination committee.

I owe an immense debt of gratitude to Professor D.D. Siljak, of Santa Clara University, California USA, who with his never-ending enthusiasm and his ability to pin-point the fundamentals in complex problem always has been a paragon to me. I have also been fortunate to benefit from his vast contact network. I would like also to thank him for providing me all the materials I needed in large scale systems and also for sending me his recent published book [62]

I am also most grateful to Professor M. Jamshidi, of the University of New Mexico, Albuquerque USA, for his help and also for sending me his recent published book [30].

I would like to thank some people who have not been officially connected to my work project, but nevertheless strongly have influenced its outcome. I am grateful to my colleague and friend Professor M. Zelmat “Vice Recteur” and director of Diagnostic Laboratory of the University of Boumerdes for providing me with an excellent working environment.

My family has always supported and encouraged me and has the utmost patience with me during all years. Finally, I want to express my unbounded affection for my beloved wife and our lovely son Riadh and daughters Amel and Kenza. To all four of them I owe many hours of quality time.

Introduction Générale

Les systèmes de grande dimension (complexes, ou composés de sous-systèmes interconnectés) posent des problèmes importants d'analyse, de décomposition, et d'agrégation. S'il est possible sur des systèmes de dimension réduite de passer directement de la phase analyse à la phase synthèse, il n'en est plus de même pour les systèmes de grande dimension, soit pour des raisons purement théoriques, soit pour des impératifs d'ordre économique. Un tel système étant observé sur un horizon donné, on se trouve souvent confronté à un ensemble important de données, dont l'analyse devient impossible, la simulation trop coûteuse et la réalisation d'une commande très difficile. Il est donc indispensable d'établir une théorie pour appréhender de manière systématique ces grands systèmes. Dans le cas de l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension, on fait souvent appel à la notion de décomposition [3], [4], et [5] qui consiste à partitionner le système initial en plusieurs sous-systèmes, à résoudre un certain nombre de problèmes sur ces derniers puis à coordonner l'ensemble afin d'atteindre ou d'approcher l'objectif global. Il se peut que la décomposition s'appuie sur la nature physique du processus, comme elle peut être purement mathématique ou à l'aide de la théorie des graphes.

Le concept de stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension a suscité de nombreux travaux et à lui seul il constitue la matière d'ouvrage spécialisé. Pour ces types de systèmes il a été plus difficile d'obtenir des résultats aussi simples et c'est d'abord des cas particuliers que l'on a réussi à résoudre. C'est la théorie de Lyapunov qui a permis de mettre de l'unité dans ce problème difficile. Malheureusement, si cette méthode a été fructueuse en ce qui concerne l'aspect théorique et notamment la définition même de la stabilité qui était restée très intuitive jusqu'alors, elle n'a pas conduit à des résultats très concrets en ce qui concerne son application à l'étude ou la synthèse des systèmes de commande non linéaires. La théorie de la stabilité établie par Lyapunov appelée souvent méthode directe ou encore seconde méthode de Lyapunov constitue en fait un critère de stabilité. Ce dernier utilise une fonction dite fonction de Lyapunov qui permet de définir la stabilité dans un certain domaine qui dépend précisément du choix de cette fonction. Tout

le problème pratique consiste alors à trouver une bonne fonction de Lyapunov permettant de conclure dans le domaine qui nous intéresse. Les fonctions de Lyapunov sont connues pour donner un outil très efficace d'analyse de stabilité. Il est aussi reconnu que, pour un système donné, trouver une fonction de Lyapunov appropriée est une tâche difficile, si ce n'est pas presque impossible. En général, il n'existe pas de méthode systématique permettant l'obtention d'une telle fonction de Lyapunov. En d'autres termes, la fonction de Lyapunov est très limitée quand elle est utilisée pour les systèmes de grande dimension. Pour franchir cette difficulté il est souvent intuitif de décomposer le grand système en sous-systèmes de telle sorte que chaque sous-système soit traité indépendamment des autres.

Les travaux de Bellman [4] et Bailey [3] dans les années soixante sur l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension ont jeté les bases des techniques de décomposition actuelles. L'avancement des recherches dans cet axe a prouvé la capacité et la puissance de cette approche qui a connu un intérêt certain. Plusieurs chercheurs ont utilisé cette puissance pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension [40], [47], [62]. Cette approche, consiste à décomposer le système de grande dimension en sous systèmes avec une dynamique et des interactions locales, puis chaque sous-système est considéré indépendamment telle que la stabilité de chaque sous-système est combinée avec les contraintes d'interactions pour obtenir la fonction vectorielle de Lyapunov du système non linéaire de grande dimension.

De nombreux travaux, concernant la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension ont été publiés ces dernières années [11], [20], [29], [54]. La plupart de ces travaux se sont inspirés des techniques de décomposition des systèmes en sous-systèmes. Dans la littérature, de nombreuses approches ont été développés pour étudier la stabilité des différentes catégories de système : systèmes linéaires et non linéaires, systèmes à retard...

Dans [27] l'approche proposée repose sur les fonctions de Lyapunov quadratiques pour estimer le domaine d'attraction. Cependant cette méthode s'est avérée très conservatrice du fait qu'elle néglige toutes les informations contenues dans les fonctions d'activation. Dans [8] et [12] quelques résultats sur la stabilité des systèmes non linéaires sont donnés mais ils sont restreints à une certaine catégorie de classe des systèmes non linéaires de grande dimension. Enfin, dans [14] l'étude porte sur la stabilité des systèmes non linéaires interconnectés en utilisant le principe de comparaison non linéaire. Cependant, cette

technique est aussi très restreinte vu le choix difficile des fonctions non linéaires de comparaison.

Dans notre approche, nous avons mis au point des outils plus raffinés et plus généraux pour l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension. Notamment, nous avons contribué avec des méthodes d'une généralité considérable. L'originalité de nos travaux réside sur le fait que nous avons généralisé cette notion de construction de la fonction de Lyapunov par l'approche récursive aux cas des systèmes non linéaires décomposables en composantes fortement connexes à l'aide de la théorie des graphes. Notre sujet de thèse est exclusivement basée sur la deuxième méthode de Lyapunov et sa formulation.

Ce mémoire, composé de quatre chapitres, est organisé de la façon suivante :

Le chapitre 1 est dédié aux notions et aux outils utilisés le long de la thèse. On y trouve une présentation des principales définitions et propriétés classiques de stabilité au sens de Lyapunov ainsi que le concept de la théorie des graphes. Notre objectif se limite à donner les prérequis permettant d'aborder en toute sérénité la seconde partie consacrée à l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires par la fonction de Lyapunov.

Le chapitre deux, est consacré à l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension par le principe de comparaison. Dans ce chapitre, la problématique de l'étude de la stabilité s'appuie sur une décomposition purement mathématique et sur les propriétés des M-matrices.

Les chapitres trois et quatre sont intégralement consacrés à la construction de la fonction de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension en utilisant respectivement la méthode récursive, et l'approche par la méthode du gradient variable. Dans ces deux chapitres, les systèmes non linéaires de grande dimension sont décomposés en composantes fortement connexes à l'aide de la théorie de graphes.

Enfin, il convient de noter que les résultats obtenus par les différentes techniques sont sanctionnés par un exemple numérique à la fin de chaque chapitre afin d'illustrer chaque approche proposée.

Chapitre 1

Concept de la fonction de Lyapunov et de la théorie des graphes

La grande barrière ne se situe pas entre le linéaire et le non linéaire, mais entre le convexe et le non convexe

R.T Rockafellar ; Convex analysis,
Princeton University, 2nd edition, 1970

Concept de la fonction de Lyapunov et la théorie des graphes

1. Introduction

Un système est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction. La modélisation regroupe un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système à étudier. L'automaticien construit un schéma théorique qui vise à rendre compte du comportement dynamique de ce système. On obtient alors un modèle, représentation mathématique qui doit tendre à ressembler le mieux possible à la réalité du processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématiquement exploitable. Cela signifie que l'on doit disposer d'un modèle mathématique réalisant un compromis entre sa fidélité de comportement qualitatif et sa simplicité de mise en œuvre à des fins d'analyse et de synthèse. Pour les systèmes de grande dimension ce compromis implique que l'étape de modélisation entraîne des approximations et des simplifications afin de permettre une analyse des propriétés du modèle qui ne soit pas trop complexe et une procédure de synthèse de commande efficace.

Souvent, pour décrire le comportement d'un système, une hypothèse communément faite est la linéarité du système, car les techniques d'analyse des modèles linéaires, dits LTI (linear time invariant), ont été largement développées dans la littérature. Cependant, l'hypothèse de linéarité n'est vérifiée que dans une plage de fonctionnement restreinte autour d'un point d'équilibre du système. Alors, les performances du modèle se dégradent dès qu'on s'en éloigne et la recherche d'un modèle plus adapté et notamment non linéaire devient nécessaire.

1.2 Description mathématique du système non linéaire

Un système non linéaire peut toujours être décrit par une équation différentielle de la forme suivante

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (1.1)$$

où $X(t) \in R^n$ est l'état du système. Pour la suite de ce manuscrit on admet que la fonction $f : J \times R^n \rightarrow R^n$ vérifie la condition de Lipschitz telles que les solutions

$X(t; t_0, X_0)$ de (1.1) existent et sont uniques et continues quelques soient les conditions initiales $(X_0, t_0) \in J \times R^n$, où $J = [t_0, \infty)$ est l'intervalle de temps.

1.2.1 Système non autonome

Définition 1.1 Les systèmes non autonomes (1.1) sont des systèmes à dynamique qui dépendent du temps et de l'état.

La principale difficulté dans l'étude de tels systèmes est que les solutions dépendent de l'instant initial t_0

Exemple 1.1

Soit le système variant (non autonome) suivant

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}$$

La solution est donnée par

$$x(t) = x(t_0) \frac{1+t_0}{1+t}$$

Cette solution converge vers zéro, mais la convergence dépend du temps initial t_0 .

1.2.2 Système autonome

Définition 1.2 Le système (1.1) est dit autonome ou système invariant si f ne dépend pas explicitement du temps t , où $X \in R^n$ et $t \geq 0$ $f : D \rightarrow R^n$, le domaine $D \subset R^n \rightarrow R^n$ d'où

$$\dot{X} = f(X) \tag{1.1a}$$

L'existence et l'unicité de la solution du système (1.1) sont assurées par l'introduction d'une contrainte appelée la condition de Lipschitz. L'équation (1.1) vérifie donc l'inégalité suivante

$$\|f(X_2, t) - f(X_1, t)\| \leq \kappa \|X_2 - X_1\| \tag{1.2}$$

quelques soient (X_1, t) et (X_2, t) dans un voisinage de (X_0, t_0) .

On rappelle que la norme Euclidienne d'un vecteur X est donnée par

$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \tag{1.3}$$

et que la norme d'une matrice arbitraire A est donnée par

$$\|A\| = \min\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha|X| \geq |AX|, X \in \mathbb{R}^n\} = \sqrt{\lambda_M(A^T A)} \quad (1.4)$$

Théorème 1.1 [32] Soit $f(X, t)$ une fonction continue en t vérifiant la condition de Lipschitz (1.2) $\forall x_1, x_2 \in B(r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t]$. Alors il existe un $\delta > 0$ telle que l'équation (1.1) possède une solution unique dans l'intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$.

Preuve voir [32 p.53].

L'hypothèse clé du théorème 1.1 est la condition de Lipschitz (1.2). Une fonction vérifiant (1.2) est dite qu'elle est Lipschitz en X , et κ est appelée la constante de Lipschitz.

Le système (1.1) est dit en équilibre au point $X = X_e$ si, en l'absence d'influence externe, son état ne varie pas au cours du temps, X_e est alors appelé point d'équilibre.

Définition 1.3 X_e est appelé point d'équilibre du système (1.1) si

$$f(0, t) = 0, \quad \forall t$$

Pour la suite de ce document, on considère que l'origine de l'espace d'état est un point d'équilibre $X_e = 0$ du système (1.1). Cette hypothèse très classique ne nuit en rien à la généralité du propos car si $X_e \neq 0$ est un point d'équilibre de (1.1a) alors $X_e = 0$ est un point d'équilibre du système $\dot{Z} = f(Z(t) + X_e)$ [32 p.112].

1.2.2.1 Changement de coordonnées

Considérons le système autonome décrit par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dX}{dt} = f(X) \quad (1.5)$$

soit X_e la solution de (1.5), tel que

$$\dot{X}_e = f(X_e) \quad (1.6)$$

si $X_e = \text{constante}$, alors

$$f(X_e) = 0 \quad (1.7)$$

Soit à l'instant $t = 0$ et sans perdre de généralité, le système est instantanément perturbé à une position X_0 dans l'espace d'état. La trajectoire du système pour $t > 0$ est donnée par $X(t)$. Définissons la variable locale $Z = X - X_e$. Alors (1.5) est représentée dans le nouveau repère par l'équation suivante

$$\dot{Z} = f(X_e + Z) - f(X_e) = \psi(Z) \quad (1.8)$$

Il est évident que $Z = 0$ vérifie (1.8). Donc, au lieu d'examiner la stabilité de (1.5), nous examinons la stabilité de l'origine de l'équation $\dot{Z} = \psi(Z)$ (1.8). Ceci est souvent référé comme étant le changement de coordonnées ou transformation du point d'équilibre à l'origine.

Exemple 1.2

Considérons le système suivant

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky = mg$$

et définissons les états

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y},$$

cette représentation dans l'espace d'état est

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\beta}{m}x_2 + g$$

Qui a un point d'équilibre unique $X_e = (\frac{mg}{k}, 0)$. Définissons la transformation

$Z = X - X_e$. Avec ce changement de coordonnées nous obtenons

$$z_1 = x_1 - \frac{mg}{k} \Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{x}_1$$

$$z_2 = x_2 \Rightarrow \dot{z}_2 = \dot{x}_2$$

d'où

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{k}{m}(z_1 + \frac{mg}{k}) - \frac{\beta}{m}z_2 + g = -\frac{k}{m}z_1 - \frac{\beta}{m}z_2$$

Par conséquent, $\dot{Z} = \psi(Z)$, et $\psi(Z)$ a un seul point d'équilibre à l'origine $Z_e = (0, 0)$.

1.2.3 Stabilité

Le problème de stabilité des systèmes dynamiques est un sujet de préoccupation majeur du travail des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs depuis des années. Beaucoup de livres ont été écrits dans ce domaine à la fois sur le plan théorique et sur le plan pratique [2,22,37,53].

Deux types d'études complémentaires peuvent être considérées : la conception de test pour savoir si un système est stable ou non, l'étude des lois de contre-réaction (retour d'état) qui permettent de rendre stable un système instable d'où le problème de synthèse. Les critères d'analyse de stabilité peuvent être classés en deux catégories : les critères fréquentiels (à partir des diagrammes de Bode ou de Nyquist,...) et les critères temporels (cercles de Gershgorin, deuxième méthode de Lyapunov,...). Si un système est linéaire, invariant par rapport au temps, il est facile d'étudier la stabilité avec la plupart des critères existant dans la nature. Mais, si le système est non linéaire, nous sommes confrontés à un sérieux problème pour l'étude de sa stabilité. D'une façon générale, les systèmes non linéaires sont les plus difficiles à étudier parce qu'il est délicat d'en faire l'étude dans le domaine fréquentiel.

1.2.3.1 Stabilité locale et stabilité globale

Dans le cas d'un système linéaire l'étude de la stabilité du point de l'équilibre épuise le problème de la stabilité du système. On sait, en effet, qu'un système linéaire ne possède qu'une seule position d'équilibre (point singulier). En vertu de la propriété d'homogénéité son comportement est, en tout point de l'espace de phase, homothétique de ce qu'il est au voisinage du point singulier. Donc, pour un système linéaire, parler de la stabilité du système et parler de la stabilité de l'équilibre sont une seule et même chose. Pour un système non linéaire, celui-ci, en effet, possède en général plusieurs points singuliers [17,39,41,70]. On parle donc de stabilité globale lorsque le système est stable pour toutes les valeurs que peuvent prendre les variables dans le problème qu'on étudie ; au contraire, la stabilité locale est simplement la stabilité de la position d'équilibre, sans rien préjuger du domaine de stabilité pour le système étudié. En d'autre terme, la stabilité locale ne garantit que la stabilité de la position d'équilibre ; par contre la stabilité globale dépend non seulement du système, mais des valeurs que peuvent prendre les variables dans le problème considéré.

1.2.3.1a. Stabilité locale

Définition 1.4 Un système est localement stable, si la stabilité peut être garantie autour de l'état d'équilibre X_e .

De cette définition, on conclut que la stabilité locale est reliée à la notion de voisinage, en d'autre terme, il n'est pas possible à priori de prédire le comportement du système pour une condition initiale prise loin du point d'équilibre.

Remarque 1.1

La première méthode de Lyapunov ou la méthode indirecte utilise la linéarisation du système et peut dans certains cas, apporter une réponse au problème de stabilité locale si les points d'équilibres sont non hyperboliques.

1.2.3.1b. Stabilité globale

Définition 1.5 Si un système est stable pour n'importe quelle condition initiale dans R^n , on dira que le point d'équilibre est globalement stable.

1.2.3.2 Stabilité au sens de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov s'appuie sur une observation physique fondamentale : si l'énergie totale (qui est scalaire) d'un système, linéaire ou non linéaire, est continûment dissipée, alors on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. Ainsi l'idée de Lyapunov est d'examiner la variation d'une fonction scalaire pour étudier la stabilité d'un système donné [21,56,70].

L'idée de la stabilité au sens de Lyapunov est de trouver une fonction scalaire positive $V(X)$ du système avec une dérivée $\dot{V}(X)$ négatif à l'exception du point d'équilibre où $V(X)$ admet un minimum $V(X_e)$. La fonction $V(X)$ décroît donc continûment le long des solutions $X(t; t_0, X_0)$ du système jusqu'à où elle atteint sa valeur minimale $V(X_e)$, on dit alors que le système approche le point d'équilibre X_e . Ainsi, l'idée développée par Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov (1892), spécialiste de la stabilité des systèmes, a été d'introduire des fonctions réelles et d'étudier leurs variations le long de la trajectoire du système considéré.

Considérons le système non linéaire en régime libre décrit par

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad X(t_0) = X_0 \tag{1.5}$$

Le système (1.5) est dit en équilibre autour de X_e si, en l'absence d'influence externe, son état ne varie pas au cours du temps, X_e est alors appelé point d'équilibre. Dorénavant, nous supposons que l'origine est le seul point d'équilibre de (1.5), et que cette équation vérifie la condition de Lipschitz telle que sa solution existe et est unique pour toute condition initiale X_0 .

L'objet de la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. Lyapunov a introduit la majorité des concepts et définition de base concernant la stabilité des systèmes représentés par des systèmes différentiels arbitraires, mais a aussi fourni les principaux résultats théoriques.

Ainsi, les fonctions de Lyapunov, à l'instar des fonctions intégrables premières, sont des outils globaux d'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Elles ont pour propriété d'être strictement décroissante sur toute trajectoire, et elles permettent dans le cas où le théorème de linéarisation ne s'applique pas, de montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable et d'avoir une bonne estimation de son bassin d'attraction.

1.2.3.2a. Fonction de Lyapunov

Définition 1.6 Supposons que dans la boule $B(r)$, la fonction $V(X)$ est définie positive et possède des dérivées partielles continues. Si la dérivée $\dot{V}(X)$ le long des trajectoires du système est telle que $\dot{V}(X) \leq 0$ alors $V(X)$ est une fonction de Lyapunov pour le système.

1.3 Définition de la stabilité [32,37]

L'origine est stable au sens de Lyapunov, ou simplement stable si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et $t_0 > 0$ il existe un nombre réel $\delta > 0$ qui dépend de ε et en général de t telle que pour toute condition initiale $\|X_0\| < \delta$, le mouvement de la trajectoire $\|X(t)\| < \varepsilon$ quelque soit $t > t_0$.

1.3.1 Stabilité asymptotique

Définition 1.7 L'origine est asymptotiquement stable s'il est stable et si on est capable de déterminer un voisinage du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire,

issue d'un point X_0 appartenant à un voisinage de X_e , tend vers X_e quand t tend vers l'infini, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| \rightarrow 0$.

1.3.2 Stabilité asymptotique globale

Définition 1.8 Si la propriété de stabilité asymptotique est vérifiée quelque soit X_0 , le point d'équilibre X_e est globalement asymptotiquement stable

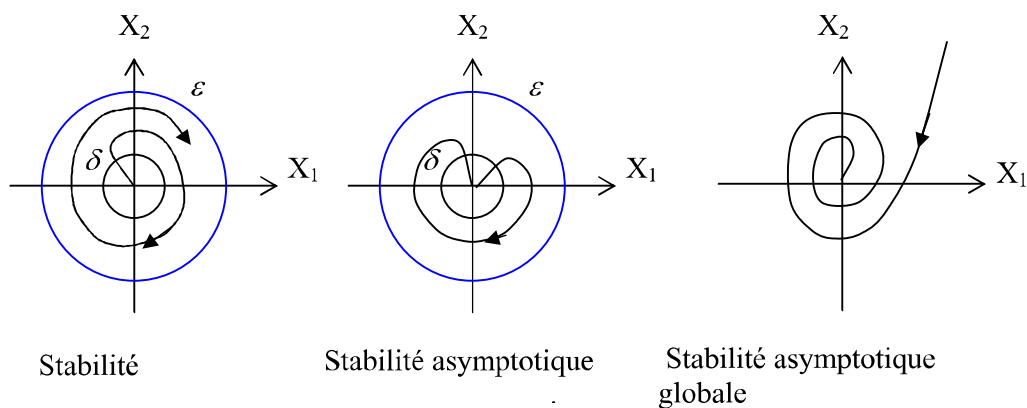


Fig.1.1 Les différentes notions de Stabilité

La notion de stabilité asymptotique, est la propriété la plus désirée dans la plupart des applications. Mais l'inconvénient principal de ce concept, c'est qu'elle ne nous renseigne en aucun cas sur la rapidité de convergence des trajectoires vers le point d'équilibre. Il existe une autre forme de stabilité plus forte qui se réfère à la stabilité exponentielle.

1.3.3 Stabilité exponentielle

Définition 1.9 Le point d'équilibre $X = X_e$ est exponentiellement stable s'il existe deux constantes réelles $\alpha, \lambda > 0$ telle que

$$\|X(t) - X_e\| \leq \alpha \|X(0) - X_e\| e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0 \quad (1.9)$$

quelque soit $\|X(0) - X_e\| < \delta$.

Clairement, la stabilité exponentielle est la plus forte notion de stabilité. Il a été démontré que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique, par contre la réciproque n'est pas vérifiée [41,64].

1.4 Fonction de signe positive

Maintenant que le concept de stabilité a été défini, la prochaine étape est dédiée à l'analyse des propriétés de cette stabilité au point d'équilibre. Ainsi, en se basant sur la théorie de Lyapunov, des conditions suffisantes de stabilité sont proposées.

Définition 1.10 Une fonction $V : D \rightarrow R$ est définie semi positive si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) $V(0) = 0$

(ii) $V(X) \geq 0, \quad \forall X \text{ dans } D - \{0\}$

$V : D \rightarrow R$ est définie positive dans D si la condition (ii) est remplacée par (ii'), où

(ii') $V(X) > 0$ dans $D - \{0\}$

Finalemnt $V : D \rightarrow R$ est définie négative (semi définie) dans D si $-V$ est définie positive (semi définie).

Exemple 1.4

Un des meilleurs moyens de comprendre à quoi correspondent physiquement les divers types de stabilité qui ont été décrites consiste tout simplement à observer le mouvement d'un pendule sous l'influence d'un déplacement périodique verticale, qui en offre tous les exemples.

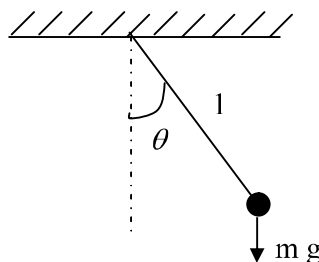


Fig. 1.2 Pendule

Si on désigne par (m, l, θ) la masse, la longueur et l'angle que la corde fait avec la verticale. On suppose que la masse est soumise à une force de résistance de friction

proportionnelle à la vitesse de la masse et de coefficient de friction k . En appliquant le premier principe de la dynamique par projection sur l'axe tangentiel, on obtient l'équation différentielle du mouvement

$$m\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - k\dot{\theta} \quad (1.10)$$

A partir de ce modèle mathématique, il est possible de représenter un modèle non linéaire dans l'espace d'état en choisissant les variables d'états $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$.

Donc les équations d'états sont données par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 = -a \sin x_1 - bx_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\text{où } a = \frac{g}{l}, \quad b = \frac{k}{m}$$

Il est clair que le pendule possède deux points d'équilibres ($x_1 = 0, x_2 = 0$) et ($x_1 = \pi, x_2 = 0$), les autres n'étant qu'une duplication mathématique de ces deux points due à la possibilité, pour le pendule, de faire un certain nombre de tours autour de son point de rotation. Notre but est de déterminer la stabilité en utilisant le concept de l'énergie. Définissons l'énergie du pendule par $E(X)$ comme étant la somme de son énergie potentielle et cinétique, et supposons que $E(0) = 0$; d'où

$$E(X) = \int_0^{x_1} a \sin \tau \, d\tau + \frac{1}{2} x_2^2 = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (1.12)$$

Quand les frottements sont négligés ($b = 0$), le système est conservatif; Il n'y a pas de dissipation d'énergie [19,20], donc $E = \text{constante}$ tout le long du mouvement du système ou en d'autres termes $dE/dt = 0$ le long des trajectoires du système. Puisque $E(X) = c$ forme un contour fermé autour de $X = 0$, c'est donc un point d'équilibre stable. Quand ($b > 0$), l'énergie sera dissipée durant le mouvement du système, donc $dE/dt \leq 0$ le long des trajectoires du système. Due aux frottements, E ne peut rester constant indéfiniment pendant que le système est en mouvement. Donc, cette énergie décroît continûment jusqu'à où elle s'annule, ce qui implique que la trajectoire tend vers $X = 0$ quand t tend vers l'infini. Cependant en examinant la dérivée de E le long des trajectoires du système, il est possible de déterminer la stabilité du point d'équilibre. Soit $V : D \rightarrow R$ une fonction continûment différentiable définie dans un domaine

$D \subset \mathbb{R}^n$ et qui contient l'origine. La dérivée de V le long de la trajectoire (1.1) est donnée par

$$\dot{V}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(X) = \frac{\partial V}{\partial X} f(X) = L_f V(X) \quad (1.13)$$

Par conséquent si $\dot{V}(X)$ est négative, $V(X)$ est décroissante le long de la solution (1.5).

Théorème 1.2 : Soit $X = 0$ un point d'équilibre de (1.5) appartenant au domaine

$D \subset \mathbb{R}^n$ et soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que :

$$V(0) = 0 \text{ et } V(X) > 0 \text{ dans } D - \{0\} \quad (1.14)$$

$$\dot{V}(X) \leq 0 \text{ dans } D \quad (1.14a)$$

(alors, $X = 0$ est stable. Cependant si

$$\dot{V}(X) < 0 \text{ dans } D - \{0\} \quad (1.14b)$$

alors $X = 0$ est asymptotiquement stable.

Preuve voir [42 p.73]

Si nous reprenons l'exemple du pendule (1.11) quand ($b = 0$). Le système résultant est

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin x_1$$

étudiant la stabilité du point d'équilibre à l'origine. Choisisant comme énergie la fonction candidate de Lyapunov donnée par la forme

$$V(x_1, x_2) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

Clairement, $V(0) = 0$ et $V(X)$ est définie positive dans l'intervalle $-2\pi < x_1 < 2\pi$. La dérivée de $V(X)$ le long des trajectoires du système est donnée par

$$\dot{V}(x_1, x_2) = ax_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = 0$$

Donc les conditions (1.14) et (1.14a) du théorème (1.2) sont vérifiées, nous concluons que l'origine est stable (n'est pas asymptotiquement stable).

1.4.1 Forme quadratique [49]

Soit une matrice symétrique P , on appelle forme quadratique le scalaire V telle que

$$V(X) = X^T P X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit définie positive est que les déterminants de cette matrice, pris en chaîne, soient tous positifs. Les déterminants pris en chaîne sont indiqués ci-dessous :

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

On remarque alors que la condition nécessaire de positivité de la matrice est que les termes de la diagonale principale soient tous positifs.

$V(X)$ est définie semi positive si P est singulière et tous les déterminants pris en chaîne sont non négatifs.

Revenons encore à l'équation du pendule en prenant en considération les frottements, c'est à dire ($b > 0$); d'où

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin x_1 - b x_2$$

Choisissant $V(X) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$ comme candidate de la fonction de Lyapunov,

sa dérivée est donnée par

$$\dot{V}(X) = a \dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = -b x_2^2$$

Cette dérivée est définie semi négative. Donc, nous pouvons conclure uniquement que l'origine est stable (n'est donc pas asymptotiquement stable).

Pour une seconde tentative, choisissons la fonction de Lyapunov en introduisant la forme quadratique, autrement dit

$$V(X) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} X^T P X$$

$$= a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Pour que la forme quadratique $\frac{1}{2}[X^T P X]$ soit définie positive, les éléments de la matrice P doivent vérifier les conditions de Sylvester suivantes :

$$p_{11} > 0; \quad p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

la dérivée est égale à

$$\dot{V}(X) = a(1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - ap_{12}x_1 \sin x_1 + (p_{11} - p_{12}b)x_1x_2 + (p_{12} - p_{22})x_2^2$$

Il faut donc choisir p_{ij} $i, j = 1, 2$ telle que $\dot{V}(X)$ soit définie négative.

En choisissant $p_{22} = 1$, et $p_{11} = bp_{12}$ où $0 < p_{12} < b$, la fonction de Lyapunov $V(X)$ est définie positive. Si on prend $p_{12} = b/2$, alors le terme quadratique est égal à

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b^2 & b \\ b & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où } \dot{V}(X) = -\frac{1}{2}(abx_1 \sin x_1 + bx_2^2)$$

Le terme $x_1 \sin x_1 > 0$ si $0 < |x_1| < \pi$. Prenons $D = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < \pi\}$, on remarque que $V(X)$ est définie positive et sa dérivée $\dot{V}(X)$ est définie négative, donc l'origine est asymptotiquement stable.

Remarques 1.2

- a) La méthode de Lyapunov donne des conditions de stabilité suffisantes mais non nécessaires, et qu'un système peut admettre une infinité de fonctions de Lyapunov. Par conséquent le fait qu'une fonction V ne puisse pas trouver la stabilité d'un système, ne permet pas de conclure quoi que ce soit sur ce système : peut-être une autre fonction permettrait-elle d'affirmer la stabilité ou l'instabilité.
- b) Quand nous étudions la stabilité d'un point d'équilibre, la première étape consiste à choisir une fonction de Lyapunov $V(X)$ définie positive. Ce choix est pratiquement facile, mais ce qui est difficile c'est de sélectionner une fonction adéquate dont sa dérivée le long de la trajectoire autour du point d'équilibre est soit défini positive ou au moins définie semi positive. La raison est que $V(X)$ est indépendante de la dynamique du système considéré, par contre sa dérivée l'est.

Théorème 1.3 Supposons que les conditions du théorème 1.2 sont vérifiées et supposons qu'il existe des constantes positives k_1, k_2, k_3 et p telles que

$$k_1 \|X\|^p \leq V(X) \leq k_2 \|X\|^p$$

$$\dot{V}(X) \leq -k_3 \|X\|^p$$

Alors l'origine est exponentiellement stable. Cependant, si les conditions sont vérifiées globalement, alors $X = 0$ est globalement exponentiellement stable.

Preuve [57]

Par hypothèse

$$\dot{V}(X) \leq -k_3 \|X\|^p$$

$$\leq -\frac{k_3}{k_2} V(X) \Rightarrow V(X) \leq V(X_0) e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \|X\| \leq \left[\frac{V(X)}{k_1} \right]^{1/p} \leq \left[\frac{V(X_0) e^{-\lambda t}}{k_1} \right]^{1/p}$$

$$\text{ou } \|X(t)\| \leq \|X_0\| [\lambda]^{1/p} e^{-(k_3/2k_2)t} \quad \text{où } \lambda = -k_3/k_2$$

1.4.2 M- Matrice [1],[30],[63]

Une matrice $A(n \times n)$ est dite matrice de Metzler (M-matrice) si

$$a_{ij} = \begin{cases} < 0 & i = j \\ \geq 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.15)$$

quelques soient $i, j \in N$

Théorème 1.4: Une Metzler matrice $A(n \times n)$ est stable si et seulement si

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall k \in N \quad (1.16)$$

Preuve voir [30 p.416]

1.5 Analyse des performances

Au cours des sections précédentes, nous étions concernés par l'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov. Mais, dès fois les fonctions de Lyapunov peuvent fournir les estimations de performance transitoire des systèmes stables. En particulier, elles nous permettent d'estimer le taux de convergence des systèmes linéaires ou non linéaires. Considérons donc le système linéaire suivant:

$$\dot{X} = AX \quad \text{où } A(n \times n) \quad (1.17)$$

Nous savons que quelques soient le temps initial t_0 et l'état initial $X_0 = X(t_0)$, le système (1.17) admet une et une seule solution $X(t; X_0, t_0)$ donnée par

$$X(t; X_0, t_0) = X_0 e^{A(t-t_0)} \quad (1.18)$$

Dans l'analyse de la stabilité du système linéaire (1.17), on s'intéresse au point d'équilibre $X_e = 0$. Cependant $X_e = 0$ est la solution constante de (1.17) pour laquelle nous avons $X(t; t_0, 0) = 0$ pour $t \geq t_0$. Donc, la plus signifiante interprétation attachée au point d'équilibre est la stabilité.

Pour illustrer l'application de la méthode de Lyapunov, trouvons les conditions de stabilité à partir des coefficients du système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\text{où } a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0 \quad (1.20)$$

Cependant, la matrice A correspondante à (1.19) est une matrice de Metzler. Si nous choisissons la fonction de Lyapunov

$$V(X) = x_1^2 + x_2^2 \quad (1.21)$$

qui est définie positive. Sa dérivée totale le long des trajectoires (1.19) est donnée par

$$\dot{V}(X) = 2x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + 2x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \quad (1.22)$$

en prenant en considération que $a_{11} < 0, a_{22} < 0$, nous pouvons reformuler (1.22) par

$$\dot{V}(X) = -2|a_{11}|x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 - 2|a_{22}|x_2^2 + 2a_{21}x_1x_2 \quad (1.23)$$

en admettant le faite que

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2 \quad (1.24)$$

$$\text{et en considérant les hypothèses } a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0, \quad (1.25)$$

nous aboutissons à l'inégalité suivante

$$\dot{V}(X) \leq -[2|a_{11}| - (a_{12} + a_{21})]x_1^2 - [2|a_{22}| - (a_{12} + a_{21})]x_2^2 \quad (1.26)$$

ce qui implique que $\dot{V}(X)$ est toujours définie négative tant que les conditions algébriques

$$2|a_{11}| > a_{12} + a_{21}, \quad 2|a_{22}| > a_{12} + a_{21} \quad (1.27)$$

sont vérifiées.

La fonction de Lyapunov $V(X)$ peut fournir des informations additionnelles sur la rapidité de convergence de $X(t; X_0, t_0)$ vers $X_e = 0$. Cependant, nous pouvons utiliser la fonction de Lyapunov $V(X)$ pour déterminer l'inégalité

$$\|X(t; X_0, t_0)\| \leq \Pi \|X_0\| e^{-\pi(t-t_0)} \quad t \geq t_0 \quad (1.28)$$

où Π et π sont des constantes positives qui sont indépendantes des conditions initiales (X_0, t_0) . Cette inégalité détermine la stabilité exponentielle globale du point d'équilibre $X_e = 0$. C'est à dire toutes les trajectoires $X(t; X_0, t_0)$ du système (1.19) approchent l'origine $X_e = 0$. Si les inégalités (1.27) sont reformulées de la façon suivante

$$|a_{11}| - a_{12} \geq \pi, \quad |a_{11}| - a_{21} \geq \pi, \quad |a_{22}| - a_{12} \geq \pi, \quad |a_{22}| - a_{21} \geq \pi \quad (1.29)$$

alors l'inégalité (1.26) peut être donnée par une inégalité différentielle

$$\dot{V} \leq -2\pi V \quad \text{où } V_0 = V(t_0) \quad (1.30)$$

Pour obtenir la solution de l'inégalité (1.28) de (1.30), nous montrons d'abord que (1.30) implique

$$V(t) \leq V_0 e^{-2\pi(t-t_0)} \quad (1.31)$$

Multiplions (1.30) des deux cotés par $e^{2\pi t}$ et faisons une transposition, nous obtenons

$$[\dot{V}(t) + 2\pi V(t)] e^{2\pi t} = \frac{d}{dt} \{V(t) e^{2\pi t}\} \leq 0 \quad (1.32)$$

Donc, la fonction $V(t) e^{2\pi t}$ a une dérivée non positive et non croissante pour $t \geq t_0$. Par conséquent,

$$V(t) e^{2\pi t} \leq V_0 e^{2\pi t_0}$$

ce qui est équivalent à (1.31)

On sait de (1.21) que $V(X) = x_1^2 + x_2^2 = \|X\|^2$, alors (1.31) peut être reformulée par

$$\|X(t)\|^2 \leq \|X_0\|^2 e^{-2\pi(t-t_0)} \quad (1.33)$$

La solution (1.28) se déduit directement de (1.33) avec $\Pi = 1$. Cependant la condition (1.29) implique la stabilité exponentielle du point d'équilibre $X_e = 0$.

1.6 Principe de comparaison [14]

1.6.1 Taux simple de convergence

Lemme 1.1: Si une fonction réelle $W(t)$ vérifie l'inégalité

$$\dot{W}(t) + \alpha W(t) \leq 0 \quad (\text{L1.1.1})$$

où α un nombre réel. Alors

$$W(t) \leq W(0)e^{-\alpha t}$$

Preuve: Définissons la fonction $Z(t)$ par

$$Z(t) = \dot{W} + \alpha W \quad (\text{L1.1.2})$$

Equation (L1.1.1) indique que $Z(t)$ est non positive. La solution de l'équation du premier ordre (L1.1.2) est donnée par

$$W(t) = W(0)e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} Z(\tau) d\tau \quad (\text{L1.1.3})$$

Puisque le second terme dans la partie droite de l'équation ci-dessus est non positif, on a

$$W(t) \leq W(0)e^{-\alpha t} \quad (\text{L1.1.4})$$

Le lemme ci-dessus implique que si $W(t)$ est une fonction non négative, alors l'authenticité de l'inégalité (L1.1.1) garantit la convergence exponentielle de $W(t)$ vers zéro. En utilisant la méthode directe de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité, il est souvent possible de mettre \dot{V} sous la forme de (L1.1.1). Dans ce cas, la convergence exponentielle de V et le taux de convergence peuvent être déduits, par conséquent, le taux de convergence exponentielle de l'état peut être déterminé.

1.7 Estimation du taux de convergence d'un système non linéaire

Souvent, quand on étudie l'équation d'état (1.1), nous devons trouver les bornes de la solution $X(t)$ sans calculer la solution elle-même. Le Lemme de comparaison est un outil qui nous permet de réaliser cet objectif. Supposons que la dérivée de la fonction de Lyapunov vérifie l'inégalité différentielle suivante

$$\dot{V} \leq -2\pi V \quad (1.30)$$

Si on associe à (1.30) l'équation différentielle

$$\dot{u} = -2\pi u \quad (1.34)$$

où $u(t_0) = u_0$. Alors si la fonction $V(t)$ vérifie (1.30) pour $t \geq t_0$, et $u(t)$ est la solution de l'équation (1.34) vérifiant les conditions initiales $u_0 = V_0$, on conclut que

$$V(t) \leq u(t), \quad t \geq t_0 \quad (1.35)$$

Il est facile maintenant de voir comment le principe de comparaison peut être appliqué à la stabilité.

Si le point d'équilibre $u_e = 0$ de l'équation (1.34) est stable et $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \rightarrow 0$, alors

$V(t)$ l'est aussi. Ce résultat peut être aussi appliqué à des inégalités différentielles non linéaires en utilisant la condition de Lipschitz et les fonctions de comparaison qui vérifient l'inégalité

$$\dot{V}(t) \leq f(V(t), t) \quad (1.36)$$

pour tout t dans un certain intervalle de temps. De telle inégalité est appelée inégalité différentielle. Le lemme de comparaison compare la solution de l'inégalité différentielle (1.34) avec la solution de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = f(u(t), t) \quad (1.37)$$

Lemme 1.2 Soit l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0 \quad (1.38)$$

où $f(u, t)$ est continue en t et localement Lipschitz en u , pour tout $t \geq 0$ et $u \in D \subset \mathbb{R}$.

Soit $[t_0, T)$ l'intervalle maximal de l'existence de la solution $u(t)$, et supposons que

$u(t) \in D$ pour tout $t \in [t_0, T)$. Soit $V(t)$ une fonction continue de dérivée supérieure à droite $DV(t)$ vérifiant l'inégalité différentielle

$$DV(t) \leq f(V(t), t), \quad V(t_0) \leq u_0 \quad (1.39)$$

où $V(t) \in D$ pour tout $t \in [t_0, T)$. Alors, $V(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in [t_0, T)$.

Preuve [32 p. 659]

La dérivée supérieure à droite $DV(t)$ est définie par

$$DV(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(h+t) - V(t)}{h}$$

Et considérons l'équation différentielle

$$\dot{z} = f(z, t) + \lambda, \quad z(t_0) = u_0 \quad (\text{L1.2.1})$$

où λ est une constante positive. Pour tout intervalle $[t_0, t_1]$, et quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $\lambda < \delta$, alors (L1.2.1) possède une solution unique $z(h, t)$ définie dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ et

$$|z(h, t) - u(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (\text{L1.2.2})$$

Proposition 1: $V(t) \leq z(h, t)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$.

Cette proposition peut être démontrée par l'absurde, car, si elle n'était pas vraie, il devait y avoir un temps $a, b \in (t_0, t_1]$ tel que $V(a) = z(a, h)$ et $V(t) > z(\lambda, t)$ pour $a < t \leq b$. Par conséquent,

$$V(t) - V(a) > z(\lambda, t) - z(\lambda, a) \quad \forall t \in [a, b]$$

ce qui implique

$$DV(a) \geq \dot{z}(\lambda, a) = f(z(\lambda, a), a) + \lambda > f(V(a), a)$$

et qui contredit l'inégalité $DV(t) \leq f(V(t), t)$

Proposition 2: $V(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$.

Encore, cette proposition peut être démontrée par l'absurde, car si elle n'était pas vraie, il devait exister $a \in (t_0, t_1]$ tel que $V(a) > u(a)$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}[V(a) - u(a)]$ et utilisons

(L1.2.2), nous obtenons

$$V(a) - z(\lambda, a) = V(a) - u(a) + u(a) - z(\lambda, a) \geq \varepsilon$$

ce qui contredit la proposition 1.

Donc, nous avons montré que $V(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Et comme elle est vraie dans tout intervalle compact, nous concluons qu'elle est préservée quelque soit $t \geq t_0$.

Dans le cas contraire, prenons $T < \infty$ comme étant le premier temps où l'inégalité n'est pas vérifiée, et comme $V(t) \leq u(t)$ quelque soit $t \in [t_0, T)$, par continuité, $V(T) = u(T)$, par conséquent, l'inégalité peut s'étendre dans l'intervalle $[T, T + \Delta]$ pour $\Delta > 0$, ce qui contredit la proposition que T est le premier temps où l'inégalité n'est pas vérifiée.

Remarque : 1.3 Si $V(t)$ est différentiable en t , alors $DV(t) = \dot{V}(t)$

Exemple 1.5

Soit le système du 1^{er} ordre donné par l'équation scalaire différentielle suivante

$$\dot{x} = f(x) = -(1+x^2)x \quad x(0) = a$$

cette équation a une solution unique dans $[0, t)$. Posons

$v(t) = x^2(t)$. La fonction $v(t)$ est différentiable et sa dérivée est donnée par

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) \leq -2x^2(t)$$

Donc, $v(t)$ vérifie l'inégalité différentielle

$$\dot{v}(t) \leq -2v(t), \quad v(0) = a^2$$

si $u(t)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = -2u(t), \quad u(0) = a^2 \Rightarrow u(t) = a^2 e^{-2t}$$

Donc, par le principe de comparaison, la solution $x(t)$ est définie pour tout $t > 0$ et vérifie

$$|x(t)| = \sqrt{v(t)} \leq |a| e^{-t}$$

Exemple 1.6

Soit le système non linéaire du second ordre suivant

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - 4x_1x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Nous allons étudier sa stabilité au voisinage du point d'équilibre à l'origine. Choisissons comme fonction candidate de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

sa dérivée \dot{V} le long de la trajectoire du système est

$$\dot{V} = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Donc, \dot{V} est définie négative dans la région définie par $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Cependant l'origine est asymptotiquement stable.

Puisque la fonction de Lyapunov $V = \|X\|^2$, et que sa dérivée \dot{V} , peut être reformulée par l'expression suivante

$$\dot{V} = 2V(V-1) \Rightarrow \frac{1}{V(1-V)} dV = -2dt$$

La solution de cette équation est aisément donnée par

$$V(X) = \frac{\beta e^{-2t}}{1 + \beta e^{-2t}} \quad \text{où } \beta = \frac{V(0)}{1 - V(0)}$$

si $\|X(0)\|^2 = V(0) < 1$, c'est à dire que la trajectoire est issue de l'intérieur du cercle de rayon unité, alors $\beta > 0$, et

$$V(t) \leq \beta e^{-2t}$$

Ce qui implique que la norme $\|X(t)\|$ du vecteur d'état converge vers zéro exponentiellement avec un taux de convergence égale à l'unité.

1.8 Principe de linéarisation [11,28,48,69]

Du fait de la diversité et de la puissance des outils développés dans le domaine linéaire, il est usuel dans un premier temps de linéariser le modèle non linéaire autour d'un point de fonctionnement et d'utiliser le modèle linéaire ainsi obtenu afin d'en extraire le maximum de renseignements. Toutefois, la méthode de linéarisation n'est pas suffisante et il est donc nécessaire de forger des outils propres à l'étude des modèles non linéaires [13,54,60]. Principalement, deux faits limitent la portée des résultats obtenus par la méthode de linéarisation. Tout d'abord, du fait que la méthode de linéarisation est une méthode par approximation, elle n'est donc valide que localement autour du point de fonctionnement concerné et ne peut certainement pas être utilisée pour en déduire un comportement global. Le deuxième point est que les dynamiques d'un système non linéaire sont beaucoup plus riches que celles d'un système linéaire dans le sens qu'elles reflètent des comportements et des phénomènes purement non linéaires.

Considérons le système dynamique suivant

$$\dot{X} = f(X, t) \tag{1.40}$$

où les dérivées partielles de $f(X, t)$ sont continues par rapport à X , alors il est possible de développer $f(X, t)$ en séries de Taylor au voisinage du point d'équilibre $X_e = 0$ pour obtenir

$$\dot{X} = f(X, t) = f(0, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=0} + HOT \tag{1.40a}$$

où HOT = higher order terms. Etant donné $X_e = 0$ est un point d'équilibre, $f(0, t) = 0$, alors on peut écrire

$$f(X, t) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=0}$$

$$\text{ou } \dot{X} = A(t)X + HOT$$

$$\text{où } A(t)X = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=0} \stackrel{def}{=} \frac{\partial f(0, t)}{\partial X} \quad (1.41)$$

Et comme les termes d'ordre supérieur à deux sont négligés au voisinage du point d'équilibre, l'équation (1.41) indique qu'au voisinage de $X_e = 0$, le comportement du système non linéaire (1.40) est identique à l'approximation linéarisée (1.41). Si nous définissons

$$g(X, t) \stackrel{def}{=} f(X, t) - A(t)X$$

alors

$$\dot{X} = A(t)X(t) + g(X, t) \quad (1.40b)$$

Ce système sera référé à un système composé.

1.9 Analyse de la perturbation

L'automatique repose sur la notion de système, représentant un ensemble d'éléments pour former un tout structuré. L'automaticien construit un schéma théorique qui vise à rendre compte du comportement dynamique interne de ce système. On obtient alors un modèle, représentation mathématique qui doit tendre à ressembler le mieux possible à la réalité du processus. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle avec le processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématique exploitable. En général, dans la modélisation, il est irréaliste de supposer que le modèle mathématique est la vraie représentation du système étudié. On aboutit souvent à des modèles mathématiques approximatifs ou incertains de la forme :

$$\dot{X}(t) = h(X, t) + g(X, t) = f(X, t) \quad (1.42)$$

où $g(X, t)$ est le terme de perturbation utilisé pour estimer l'incertitude entre les vrais états du système et son estimation donnée par $h(X, t)$.

Avec cette perturbation, la notion de "connective stability" est maintenant considérée.

1.10 Connective stability

La notion de " connective stability " introduite par Siljak [62,63] prend en considération les perturbations structurelles du système composé sur la stabilité global. Le principe est

appliqué pour les systèmes linéaires ainsi que pour les systèmes non linéaires. On peut tirer deux importantes conclusions sur la "connective stability". La première, c'est sa capacité de préserver la stabilité sous l'influence d'une perturbation instantanée, d'où la propriété de la fiabilité dynamique. La seconde, est que la stabilité du système (1.42) resterait préserver pour les fonctions d'interconnexions non linéaires $g_{ij}(X,t)$ tant qu'elles sont continues et bornées entre zéro et un.

Définition 1.11: Une fonction continue $g_i : J \times R^n \rightarrow R^{n_i}$ est dite qu'elle appartienne à la classe $K_{(1.43)}$ s'il existe des fonctions bornées $\xi_{ij} : J \times R^n \rightarrow R$ telle que

$$\|g_i(X,t)\| \leq \sum_{j=1}^s \bar{e}_{ij} \xi_{ij}(X,t) \phi_{j3}(\|X_j\|) \quad (1.43)$$

quelque soient X et t , où \bar{e}_{ij} sont des éléments de la matrice d'interaction \bar{E} ($s \times s$) (voir § 1.17) et $\phi_{j3} \in K$ (voir § 2.4).

Définition 1.12 Le point d'équilibre $X_e = 0$ d'un système est dit "connectively stable" s'il est stable pour toute matrice d'interaction \bar{E} .

Preuve voir [63 p.93]

1.11 Stabilité des systèmes de grande dimension

Nous étudions la stabilité des systèmes de grande dimension par la méthode directe de Lyapunov. Mais, malgré son élégance, cette méthode est sévèrement limitée quand elle est appliquée à des systèmes non linéaires de grande dimension [61], faute de règles générales ou d'un guide clair qui nous permettent de l'obtenir. Pour cette raison, nous abordons ce problème, en décomposant le système de grande dimension en sous-systèmes. Cette décomposition peut être purement mathématiques, comme elle peut s'appuyer sur la théorie des graphes. Le principe de cette décomposition consiste à décomposer le problème global P , dont le but est d'extrémaliser un critère global associé à un système de grande dimension, en certain nombre de sous problèmes P_i , dont on recherche la solution localement de façon à satisfaire :

Solution $[P_1, P_2, \dots, P_n] \rightarrow$ solution $P =$ problème global

1.12 Vocabulaire de la théorie des graphes

1.12.1 Introduction

Le problème de la partition d'un système se pose donc en termes de reconnaissance, de recherche d'une structure particulière à partir de la connaissance d'un modèle qualitatif ou quantitatif. Si pour des systèmes simples, cette structure est aisément reconnaissable, il n'en est pas de même en général pour les systèmes de grande dimension. Ce problème de partition doit être envisagée en utilisant la théorie des graphes [7,10,16,31]. Les premiers travaux dans ce domaine ont été réalisés par les auteurs [6, 24, 52] et concernent principalement la recherche de la réduction des matrices et la décomposition des systèmes d'équations. Ils ont montré que des structures peuvent être trouvées par l'analyse des propriétés de connexité forte d'un graphe.

1.12.2 Graphes

La théorie des graphes est devenue l'un des instruments les plus efficaces pour résoudre la plus part des problèmes d'ordonnement, d'affectation, de décomposition etc...

Considérons un ensemble fini $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ et une application $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ définie sur cet ensemble. On dit que le couple $G = (V, E)$ constitue un graphe G .

A chaque élément de V on fait correspondre un point, appelé sommet du graphe.

1.12.3 Graphes orientés (digraphe)

Le digraphe est un graphe où tous les arcs sont orientés.

Deux sommets v_i et v_j sont ensuite reliés par une flèche orientée de v_i vers v_j , cette flèche est appelée arc du graphe (graphe orienté).

Dans un graphe, on appelle chemin une suite d'arcs dont l'extrémité terminale de chacun, sauf pour le dernier, est l'extrémité initiale du suivant.

La longueur d'un chemin est le nombre de ses arcs. Un circuit de longueur (1) est une boucle

Le degré intérieur ou extérieur d'un sommet est le nombre d'arcs incidents intérieurement ou extérieurement à ce sommet.

Lorsque l'extrémité terminale du dernier arc est confondue avec l'extrémité initiale du premier arc, le chemin forme un circuit. Lorsque les arcs sont tous distincts, on dit que le chemin ou le circuit est simple, quand ils ont pour extrémité terminale des sommets tous différents, on dit qu'il est élémentaire.

1.13 Matrice d'adjacence

Tout graphe orienté peut être défini par sa matrice associée ou (matrice d'adjacence) qui est une matrice Booléenne. Dans la matrice Booléenne, l'existence d'un arc entre les sommets v_i et v_j se traduit par la présence d'un (1) à l'intersection de la ligne v_i et de la colonne v_j , l'absence d'arc, par la présence d'un zéro.

La matrice d'adjacence $A = [a_{ij}]$ d'un digraphe D^* est une matrice n par n (0,1) dont ses éléments sont

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si il existe un arc orienté du } i^{\text{eme}} \text{ sommet au } j^{\text{eme}} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1.14 Forte connexité

S'il existe au moins un chemin de v_i à v_j et au moins un chemin de v_j à v_i , alors cette relation d'équivalence correspond à une composante fortement connexe (cfc) du graphe.

1.14.1 Identification des (cfc) à partir de matrice d'adjacence [25, 47,66]

Nous proposons l'algorithme suivant pour identifier les composantes fortement connexes.

Définissons

$$M_k = \bigcup_{s=1}^k A^s$$

- 1- Posons $s = 1$, $M_k = A$, $T_s =$ nombre de 1 dans M_k
- 2- Posons $s = s + 1$ et trouvons M_s et T_s
- 3- Vérifions $T_s - T_{s-1}$. Si différent de zéro, aller à l'étape 2. Si zéro, aller à 4.
- 4- Vérifier toutes les lignes i_1, i_2, \dots, i_k ayant un (1) dans la diagonale principale. Si les lignes i_p et i_{p+q} sont identiques, alors les sommets correspondants v_p et v_{p+q} sont mutuellement atteignables, donc, ils constituent une composante fortement connexe et peuvent être considérés comme un sous système du système composé.

1.14.2 Condensation

La condensation D^* d'un digraphe est un graphe où chaque composante fortement connexes est remplacée par un sommet, et tous les arcs orientés d'une composante fortement connexe à une autre est remplacée par un sel arc orienté.

Ceci peut être démontré en examinant quelques propriétés des digraphes et leur matrice Booléenne associée (matrice d'adjacence) qui nous aide à la décomposition.

1.15 Ordre topologique (Topological sorting)

Les sommets du graphe orienté sont en ordre topologique, s'ils sont numéroté 1,2, ... m tel que chaque arc dans G commence du plus petit nombre au plus grand. En d'autre terme, les sous-systèmes sont constitués d'une suite de sommets ordonnés.

Les arcs d'un digraphe peuvent être arrangés en ordre topologique si et seulement si le digraphe est acyclique.

Il existe plusieurs méthodes de montrer que le digraphe soit acyclique, l'une d'elles c'est que la matrice d'adjacence du digraphe A vérifie la condition suivante

$$\det(I - A) \neq 0$$

où I est la matrice identité

1.15.1 Algorithme de l'ordre topologique

Etape 1- Posons $i = 1$

Etape 2 – trouver un sommet non numéroté de degré intérieur zéro, et numérotons ce sommet i . Si un tel sommet n'existe pas aller à l'étape 4

Etape 3 – Posons $i = i + 1$, aller à l'étape 2.

Etape 4 – Si chaque sommet dans G a été numéroté, stop.

Sinon, aller à l'étape 5.

Etape 5 – Si le degré extérieur de chaque sommet numéroté jusqu'à présent est non zéro, supprimer tous les arcs incidents extérieurement à chaque sommet numéroté, et aller à l'étape 2. S'il y'a quelques sommets non numérotés et le degré extérieur de chaque sommet numéroté est zéro, nous avons un circuit. Stop

1.16 Décomposition par la théorie des graphes

L'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension composés de plusieurs sous-systèmes interconnectés est un problème fastidieux. Afin de surmonter

les difficultés de calcul, on décompose le processus en sous-systèmes, ce qui nous permet de reformuler le problème global en sous problèmes séparables et plus petits, pouvant être traités dans un temps convenable. S'il est donc possible de construire un graphe associé au système non linéaire de grande dimension, le problème de décomposition de ce dernier devient un problème de partition du graphe. On convient de représenter par un graphe le système de grande dimension en adoptant les conventions suivantes :

- les sommets du graphe sont les variables
- les arcs du graphe représentent les systèmes élémentaires

Le problème de partition des systèmes de grande dimension en sous-systèmes interconnectés peut se ramener alors à l'utilisation des propriétés de connexité du graphe. D'un autre côté, l'utilisation des propriétés de forte connexité des graphes permet de mettre en évidence éventuellement des structures série parallèle existantes, l'ordre de résolution des sous- problèmes étant fixé par le rang de chaque composante fortement connexe que représente le sous système

1.16.1 Algorithme

Etape 1 – Trouver toutes les composantes fortement connexes, S_1, S_2, \dots, S_m du graphe orienté D .

Etape 2 – Procéder à une condensation de D par rapport aux (cfc). C'est à dire, nous définissons un graphe structuré D^* comme suit:

Chaque (cfc) S_p de D correspond au sommet v_p^* dans D^* et il existe un arc orienté de v_p^* à v_q^* .

Etape 3 – En utilisant l'algorithme de l'ordre topologique, on ré-numérote les sommets de D^* , tel que la matrice d'adjacence A^* se met en bloc triangulaire inférieur

Etape 4 – ré numéroté les sommets de D tel que :

- a) Ceux qui appartiennent à la (cfc) sont numérotés consécutivement
- b) Ceux qui appartiennent aux numérotations inférieures (cfc) sont numérotés inférieurement que ceux qui appartiennent aux numérotations supérieures (cfc)

Après l'étape 4, la matrice d'adjacence A de D sera mise en bloc triangulaire inférieure.

Exemple 1.7

Pour illustrer l'utilité de la décomposition par la théorie des graphes, considérons le système non linéaire de grande dimension suivant

$$\dot{z}_1 = \Psi_1(z_4, z_6)$$

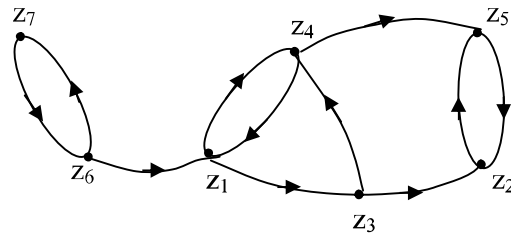
$$\dot{z}_2 = \Psi_2(z_3, z_5)$$

$$\dot{z}_3 = \Psi_3(z_1)$$

$$\dot{z}_4 = \Psi_4(z_1, z_3)$$

$$\dot{z}_5 = \Psi_5(z_2, z_4)$$

$$\dot{z}_6 = \Psi_6(z_7)$$



Ce système de grande dimension est représenté en forme condensée par

$$\dot{Z} = \Psi(Z) \tag{1.47}$$

Représentation des équations du système

C_i	1		2			3	
$v_i^* = x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$v_i = z_i$	6	7	1	4	3	2	5
7	1	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0
2	0	0	0	0	1	0	1

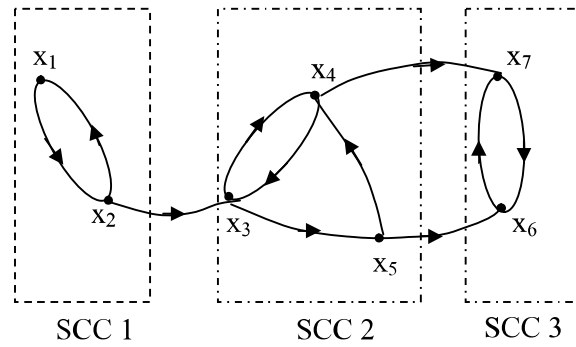
Tableau 1.1 d'ordre topologique

En utilisant l'algorithme de l'ordre topologique, nous aboutissons à la forme suivante

$$\text{sous - systeme 1} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1) \end{cases}$$

$$\text{sous - systeme 2} \quad \begin{cases} \dot{x}_3 = f_3(x_2, x_4) \\ \dot{x}_4 = f_4(x_3, x_5) \\ \dot{x}_5 = f_5(x_3) \end{cases}$$

$$\text{sous - systeme 3} \quad \begin{cases} \dot{x}_6 = f_6(x_5, x_7) \\ \dot{x}_7 = f_7(x_4, x_6) \end{cases}$$



Cette représentation est sous la forme d'un bloc triangulaire inférieure, et nous savons de l'algèbre linéaire que si une matrice est mise sous cette forme, on peut résoudre l'ensemble de ses équations d'une façon systématique.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

où chaque bloc diagonal A_{pp} (composante fortement connexe) est la matrice d'adjacence de C_p , et chaque bloc triangulaire inférieur A_{pq} (terme d'interconnexions), $p > q$ est celle de C_{pq} contenant:

- a) Tous les sommets de C_p et C_q
- b) Tous les arcs de D , orienté du sommet dans C_q au sommet dans C_p .

1.17 Matrice d'interaction

Considérons le système linéaire (1.17) et soit $n = 3$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad (1.49)$$

où son digraphe associé est donné par la figure 1.6 suivante

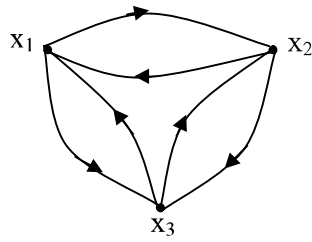
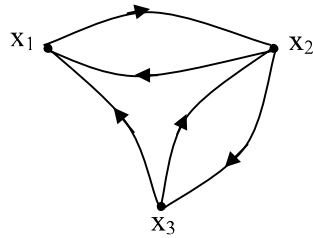


Fig.1.6 digraphe du système (1.49)

Si on suppose que $a_{31} = 0$, alors cette perturbation indique que l'interaction de x_1 à x_2 n'existe pas. Ceci peut être montré en introduisant la matrice d'interaction \bar{E} définie par

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



(1.50)

Fig. 1.7 perturbation structurelle de (1.50)

qui est une matrice binaire où son entrée \bar{e}_{ij} est un si x_j à une influence sur x_i et zéro ailleurs.

La matrice d'interaction $\bar{E} = (\bar{e}_{ij})$ de (1.50) représente la structure du système, pour ce qui suit, elle sera appelée matrice d'interaction fondamentale.

1.18 Conclusion

Ce chapitre est consacré aux notions et aux outils utilisés le long de cette thèse. Le lecteur remarquera que ce chapitre fait référence à de nombreuses notions d'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov. On y trouve une présentation des différentes approches de construction des fonctions de Lyapunov adaptées aux différents systèmes considérés, ainsi qu'un rappel de définitions de stabilité au sens de Lyapunov et de la théorie des graphes. Nous attirons l'attention sur le fait que notre objectif n'est pas de détailler ces concepts, mais se limite à la présentation du principe de fonctionnement de la classe des systèmes non linéaires liées aux méthodes d'analyse proposées tout le long de cette thèse et à donner les prérequis permettant d'aborder en toute sérénité la seconde partie sur la fonction de Lyapunov et son extension aux systèmes non linéaires de grande dimension. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter les différents articles cités en références ou dans la liste des références personnels.

Chapter II

Stabilité de Lyapunov par le principe de comparaison

Stabilité de Lyapunov par le principe de comparaison

2.1 Introduction

La théorie des systèmes linéaires invariants est bien connue dans la littérature à travers les méthodes de Nyquist, Routh Hurwitz etc...qui fournissent les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. Par contre, pour les systèmes non linéaires, de telles procédures n'existent pas. Par conséquent, le problème de la stabilité des systèmes non linéaires reste et demeure un problème non résolu. Pour cette raison, nous allons explorer la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension par la méthode directe de Lyapunov en utilisant le principe de comparaison [12,33].

Dans le cas général, il n'existe pas de méthode pour trouver toutes les fonctions candidates de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à la fonction $V(X)$ et de la structure du système. Cependant, il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier (systèmes linéaire, systèmes à retard, ...)

La méthode directe ou la seconde méthode de Lyapunov est pratiquement la seule méthode pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension.

L'idée principale de la méthode est d'évaluer le taux de change $\frac{dE}{dt}$ de l'énergie

$E(X)$ d'un système physique isolé pour toutes possibilité de l'état X sauf à l'état d'équilibre X_e , alors l'énergie décroît continûment jusqu'à où elle atteint sa valeur minimale $E(X_e)$. Quand la description d'un système est donnée par une forme mathématique, il n'est pas possible de définir l'énergie. Donc, la fonction énergie de $E(X)$ est remplacée par une fonction scalaire $V(X)$.

2.2 Analyse qualitative des systèmes non linéaires de grande dimension

Malgré son élégance et sa généralité, l'utilité de l'approche par la fonction de Lyapunov est sévèrement limitée quand elle est appliquée au problème de grande dimension, et se complique davantage si les structures d'interconnexion sont complexes. Pour cette raison, il est souvent avantageux de considérer le système d'ordre élevé comme étant

composé de sous systèmes d'ordre inférieurs, qui lorsqu'ils sont interconnectés d'une façon appropriée, donnent le système composé initial. Avec cette structure, les difficultés à lesquelles nous sommes souvent confrontés dans l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension sont surmontées.

2.2.1 Système de grande dimension

Pour fixer une idée de la méthode, considérons le système suivant :

$$\dot{z}_i(t) = A_i z_i(t) + D_i u_i(t) \quad (2.1)$$

$$y_i(t) = H_i z_i(t) \quad (2.2)$$

où $z_i \in R^{n_i}$, $\dot{z}_i = \frac{dz_i}{dt}$, A_i est une matrice $n_i \times n_i$, D_i est une matrice $n_i \times l_i$, $u_i \in R^{l_i}$,

H_i est une matrice $p_i \times n_i$ et $y_i \in R^{p_i}$. Les équations (2.1) et (2.2) décrivent les caractéristiques entrées-sorties d'un système linéaire invariant. Nous appelons ce système le i^{eme} système de transmission, où u_i est l'entrée et y_i la sortie. Au système (2.1) est associé le système décrit par l'équation linéaire

$$\dot{z}_i(t) = A_i z_i(t) \quad (2.3)$$

que nous appelons le i^{eme} sous système isolé ou le i^{eme} sous système libre.

Ensuite, considérons m systèmes de transmission $i = 1, 2, \dots, m$, interconnectés par la forme suivante

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^m B_{ij} y_j(t) + G_i u(t) \quad (2.4)$$

pour former le système composé. Ici B_{ij} est une matrice $l_i \times p_j$, G_i est une matrice $l_i \times q$ et $u \in R^q$. Dans ce cas B_{ij} représente une connexion linéaire de la sortie du j^{eme} transfert système à l'entrée du i^{eme} transfert système. Nous supposons que B_{ii} est zéro, puisque la contre réaction autour du système de transfert est souvent combiné avec la matrice A_i .

La combinaison des équations (2.1), (2.2), et (2.4) donne

$$\dot{z}_i(t) = A_i z_i(t) + \sum_{j=1}^m C_{ij} z_j(t) + K_i u(t) \quad (2.5)$$

où $C_{ij} = D_i B_{ij} H_j$ et $K_i = D_i G_i$ sont respectivement des matrices $n_i \times n_j$ et $n_i \times q$.

Posons $\sum_{i=1}^m n_i = n$, $X^T = (z_1^T, z_2^T, \dots, z_l^T) \in R^n$,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ & \ddots & \\ C_{m1} & & C_{mm} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_m \end{bmatrix}$$

alors (2.5) est reformulée par la représentation condensée suivante

$$\dot{X}(t) = AX(t) + CX(t) + Ku(t) \quad (2.6)$$

et la sortie du système composé est donnée par

$$y = HX(t) \quad (2.7)$$

où $y \in R^p$ et H est une matrice $p \times n$.

Les équations (2.6) et (2.7) décrivent l'entrée/sortie du système composé, où $u(t)$ représente l'entrée et $y(t)$ la sortie. Ce système peut être vu comme une interconnexion linéaire de m sous systèmes isolés donnés par (2.3). Par conséquent, les équations de la forme (2.6) et (2.7) sont des exemples d'un système de grande dimension. Dans le domaine de la commande ou en d'autres termes dans les problèmes de synthèse, de tels systèmes sont souvent appelés des systèmes décentralisés.

Dans l'étude de la stabilité du point d'équilibre $X_e = 0$ du système, la sortie (2.7) n'est pas prise en considération, car ce sont les systèmes non forcés dont on s'intéresse. Cependant la fonction de Lyapunov est applicable uniquement aux systèmes libres. Elle est utilisée pour étudier le comportement des systèmes dynamiques sous l'influence d'une perturbation initiale autour des points d'équilibres.

Donc, pour la stabilité au sens de Lyapunov, nous considérons l'équation différentielle

$$\dot{z}_i(t) = A_i z_i(t) + \sum_{j=1}^m C_{ij} z_j(t) \quad (2.8)$$

ce qui est équivalent à l'équation différentielle suivante

$$\dot{X}(t) = AX(t) + CX(t) = FX(t) \quad (2.9)$$

Plusieurs systèmes tels que les réseaux d'énergie électriques, les systèmes aéronautiques ..., sont décrits par des équations différentielles non linéaires ordinaires, et peuvent être considérés comme des systèmes de grande dimension. L'une des méthodes pour l'analyse de tels systèmes composés est de considérer les étapes suivantes.

- 1) Le système de grande dimension (S) est décomposé en sous systèmes. Cette décomposition peut être purement mathématique, ou par la théorie des graphes ou par d'autres techniques de décomposition.
- 2) Des paramètres adaptés sont obtenues à partir de la description qualitative du sous système isolé (type de fonction de Lyapunov,...)
- 3) Des paramètres appropriés qui reflètent la force des interactions entre les divers sous systèmes (S_i) sont obtenus à partir de la structure des connexions.
- 4) Les paramètres obtenus dans les étapes 2 et 3 sont combinés pour former le test de la matrice $s \times s$, où s dénote le nombre des sous systèmes isolés (S_i) ; Si le test de la matrice se réjouit de certaines propriétés, alors le comportement qualitative du système composé (S) peut être déduit à partir des propriétés qualitative des sous systèmes isolés (étape 2) et à partir des propriétés des interconnexions (étape 3).

Considérant le système non linéaire variant suivant

$$\dot{z}_i(t) = h_i(z_i, t) + g_i(z_1, z_2, \dots, z_m, t) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.10)$$

$$z_i \in R^{n_i}, t \in J = [t_0, \infty) t_0 \geq 0 : h_i : R^{n_i} \times J \rightarrow R^{n_i}, g_i : R^{n_1} \times \dots \times R^{n_m} \times J \rightarrow R^{n_i}$$

nous supposons que $h_i(z, t) = 0$ si et seulement si $z_i = 0$. Définissons

$$h(X, t)^T = [h_1(z_1, t)^T, \dots, h_m(z_m, t)^T]$$

$$g(X, t)^T = [g_1(z_1, \dots, z_m, t)^T, \dots, g_m(z_1, \dots, z_m, t)^T]$$

Nous pouvons représenter (2.10) sous sa forme condensée par l'équation suivante

$$\dot{X}(t) = h(X, t) + g(X, t) = f(X, t) \quad (2.11)$$

Le système composé (2.11) est formé par

$$\dot{X}(t) = h(X, t) \quad (2.12)$$

qui est considéré comme étant le sous-système libre ou isolé, et $g(X, t)$ le terme d'interconnexion ou la perturbation. En général, nous ne connaissons pas le terme $g(X, t)$, mais nous savons quelques informations, telle que sa borne supérieure.

Supposons que le sous-système libre possède un point d'équilibre à l'origine qui est asymptotiquement stable, alors que peut-on dire de la stabilité du système perturbé ?

L'approche idéale pour aborder cette question est d'utiliser la fonction de Lyapunov pour le sous-système isolé comme fonction candidate de Lyapunov du système perturbé.

La réponse à cette question dépend critiquelement du comportement de la perturbation à

l'origine. Si $g(0,t) = 0$, le système perturbé (2.11) a un point d'équilibre à l'origine. Dans ce cas, nous analysons la stabilité de l'origine comme un point d'équilibre du système perturbé. Si $g(0,t) \neq 0$, l'origine n'est plus un point d'équilibre du système perturbé, et ce cas ne fait pas parti de notre travail.

2.3 Analyse par la fonction de Lyapunov

Il existe deux approches fondamentales pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires par la méthode directe de Lyapunov appelées la fonction scalaire de Lyapunov et fonction vectorielle de Lyapunov [8]. Dans la première approche, la région de stabilité est estimée via la fonction de Lyapunov, qui est une fonction de chaque sous-système isolé. On suppose donc une fonction de Lyapunov $V_i(x_i,t)$ pour les sous-systèmes isolés, qui sont généralement faciles à trouver par rapport au système composé, et puis on utilise la somme pondérée

$$V(X,t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(x_i,t) \quad (2.13)$$

comme fonction potentielle de Lyapunov pour le système non linéaire de grande dimension où $\alpha_i > 0$ sont des facteurs de pondération. La motivation de choisir la fonction de ce type est la suivante. Nous pouvons imaginé V comme étant la représentation d'une mesure d'énergie associée au système donné, et V_i comme une mesure d'énergie fournit pour les sous systèmes isolés. Une fois ces derniers sont interconnectés pour former le système non linéaire composé, il est raisonnable de supposer que les effets qualitatifs des différents sous systèmes sur le système global varient énormément. Donc, il est raisonnable d'assigner différents facteurs de pondération $\alpha_i > 0$ pour différentes fonction V_i pour qu'on puisse trouver la fonction de Lyapunov appropriée dont sa dérivée le long de la trajectoire du système non linéaire composé est négative, ce qui nous permet de conclure la stabilité.

La dérivée de (2.13) est donnée par

$$\dot{V}(X,t)|_{(2.10)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{V}_i(x_i,t) \quad (2.14)$$

où

$$\dot{V}_i(\cdot)|_{(2.10)} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^T (h_i(x_i,t) + g_i(X,t)) = \dot{V}_i(\cdot)|_{(2.12)} + \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^T g_i(X,t) \quad (2.15)$$

et le gradient $\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}}, \dots, \frac{\partial V_i}{\partial x_{in_i}} \right)$ où n_i est l'ordre du i^{eme} sous système et

x_{ij} , $j = 1, 2, \dots, n_i$ représente le j^{eme} du i^{eme} vecteur d'état du sous système.

L'approche par la fonction vectorielle de Lyapunov, est basée sur la méthode du principe de comparaison [14] qui consiste à définir une fonction vectorielle de Lyapunov donnée par

$$V(X, t) = (V_1(x_1, t), \dots, V_n(x_n, t)) \quad (2.16)$$

Et en vertu des propriétés des M-matrices, des conditions appropriées sont attachées à la dérivée $\dot{V}(X, t)$ pour explorer la stabilité du système non linéaire de grande dimension.

A nos jours, il n'est pas encore claire laquelle des deux méthodes offre le meilleur résultat. Il est aussi reconnu que l'approche par la fonction scalaire de Lyapunov et l'approche par la fonction vectorielle de Lyapunov débouche sur des résultats pessimistes. L'approche proposée dans ce chapitre, consiste à partitionner le système non linéaire de grande dimension en sous systèmes par une décomposition purement mathématique, puis nous explorons sa stabilité par la fonction vectorielle de Lyapunov en s'aidant du principe de comparaison et les propriétés des M-matrices [33].

2.4 Fonction définie positive révisée

Définition 2.1 Une fonction continue $\varphi : [0, r_1] \rightarrow R^+$ est dite qu'elle appartienne à la **classe K**, i.e., $\varphi \in K$ si $\varphi(0) = 0$ et si φ est strictement croissante dans $[0, r_1]$.

Si $\varphi : R^+ \rightarrow R^+$, si $\varphi \in K$, et si $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$, alors φ est dite qu'elle appartienne à la

classe KR.

Définition 2.2 Une fonction V , est dite définie positive s'il existe une fonction $\varphi \in K$ tel que $V(X, t) \geq \varphi(|X|)$ pour tout $t \in J$ et $X \in B(r)$ pour $r > 0$. $J = [t_0, \infty)$, $B(r) = \{X \in R^n : |X| < r\}$. On suppose que $V(0, t) = 0$ quelque soit $t \in J$.

Lemme 2.1 $V : D \rightarrow R$ est définie positive si et seulement si, il existe deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 de classe K telles que

$$\phi_1(\|X\|) \leq V(X) \leq \phi_2(\|X\|)$$

Théorème 2.1

Si au voisinage D du point d'équilibre $X_e = 0$, il existe une fonction différentiable

$V(X, t) : D \times [0, \infty) \rightarrow R$ telle que

$$(i) V_1(X) \leq V(X, t) \leq V_2(X) \quad \forall X \in D$$

$$(ii) DV(X, t) \leq -V_3(X)$$

où $V_i, i = 1, 2, 3$ sont des fonctions définies positives dans D , alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

- Si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées pour $V(X, t) : R^n \times [0, \infty) \rightarrow R$ alors le point d'équilibre $X_e = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Exemple 2.1

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 e^{-2t}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

Nous considérons la fonction candidate de Lyapunov de la forme suivante

$$V(X, t) = x_1^2 + (1 + e^{-2t})x_2^2$$

$$\text{Clairement } V_1(X) = (x_1^2 + x_2^2) \leq V(X, t) \leq (x_1^2 + 2x_2^2) = V_2(X)$$

Donc

* $V(X, t)$ est définie positive, décroissante et non bornée, $V_1(X) \leq V(X, t)$, avec V_1 définie positive dans R^2

* $V(X, t) \leq V_2(X)$, avec V_2 aussi définie positive dans R^2 . La dérivée le long des trajectoires du système est donnée par

$$\dot{V}(X, t) = \frac{\partial V}{\partial X} f(X, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = -2[x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2(1 + 2e^{-2t})] \leq -2[x_1^2 - x_1 x_2 + 3x_2^2]$$

Ce qui implique que $\dot{V}(X, t)$ est définie négative donc l'origine est globalement asymptotiquement stable.

2.5 Analyse d'un système linéaire invariant (LTI)

Les systèmes linéaires invariants constituent une importante classe de système qui a été extensivement étudiée. Cependant pour un système (LTI) de la forme

$$\dot{X} = AX \quad A \in R^{n \times n}, \quad X(0) = X_0 \quad (2.17)$$

l'origine est stable si et seulement si toutes les valeurs propres λ de A vérifie $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$, où $\text{Re}(\lambda_i)$ représente la partie réelle de la valeur propre λ_i . Le point d'équilibre $X_e = 0$ est exponentiellement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice A vérifie la condition $\text{Re}(\lambda_i) < 0$.

La solution de l'équation différentielle (2.17) est donnée par

$$X(t) = X_0 e^{At} \quad (2.18)$$

Pour étudier la stabilité au sens de Lyapunov du système (2.17), nous choisissons une fonction de Lyapunov quadratique donnée par la forme matricielle condensée suivante

$$V(X) = X^T P X \quad (2.19)$$

où $P \in R^{n \times n}$ est symétrique définie positive. Avec ces hypothèses, $V(X)$ est définie positive. La dérivée de (2.19) est donnée par

$$\dot{V} = \dot{X}^T P X + X^T P \dot{X}$$

de (2.17) nous tirons $\dot{X}^T = X^T A^T$. Donc

$$\dot{V} = X^T A^T P X + X^T P A X = X^T (A^T P + P A) X = -X^T Q X \quad (2.20)$$

$$\text{où } PA + A^T P = -Q \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) apparaît fréquemment dans la littérature et elle est appelée équation de Lyapunov, ici la matrice Q est symétrique, puisque

$$Q^T = -(PA + A^T P)^T = -(A^T P + P A) = Q$$

Si Q est définie positive, alors $\dot{V}(X)$ est définie négative et l'origine est asymptotiquement stable. En d'autre terme, l'analyse de la stabilité asymptotique de l'origine du système linéaire invariant (2.17), revient à l'étude de la positivité de la paire (P, Q) . Ceci est accompli en deux étapes:

- (i) Choisir une matrice symétrique Q définie positive
- (ii) Trouver P de (2.21) et vérifier qu'elle est définie positive.

Théorème 2.2 [42] Les valeurs propres λ_i de la matrice $A \in R^{n \times n}$ vérifie la condition $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ si et seulement si pour une matrice définie positive Q donnée, il existe une fonction définie positive P vérifiant l'équation de Lyapunov (2.21).

Preuve: Supposons que pour une matrice $Q \succ 0$ donnée, $\exists P \succ 0$ vérifiant (2.21). Donc $V = X^T P X \succ 0$ et $\dot{V} = -X^T Q X \prec 0$ et la stabilité asymptotique découle du théorème 2.2. Pour le cas où $\text{Re}(\lambda_i) \prec 0$ et Q donnée, définissons P comme suit:

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (2.22)$$

P est bien définie, étant donné les hypothèses sur les valeurs propres de A . La matrice P est aussi symétrique, puisque $(e^{A^T t})^T = e^{A t}$. Nous pouvons conclure que P est définie positive. Pour le vérifier, essayons de raisonner par l'absurde, et supposons $\exists X \neq 0$ tel que $X^T P X = 0$.

$$X^T P X = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} X^T e^{A^T t} Q e^{A t} X dt = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} Y^T Q Y dt = 0$$

où $Y = e^{A t} X \Leftrightarrow Y = e^{A t} X = 0 \quad \forall t \geq 0$, cependant $X \neq 0$.

puisque $e^{A t}$ est non singulier $\forall t$, ceci contredit l'hypothèse, d'où P est définie positive.

Montrons maintenant que P vérifie l'équation de Lyapunov

$$PA + A^T P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} A dt + \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt =$$

$$e^{A^T t} Q e^{A t} \Big|_0^{\infty} = -Q$$

ce qui montre que P est solution de l'équation de Lyapunov. Pour compléter la preuve, il reste de montrer que P est unique. Supposons qu'il y a une solution $\tilde{P} \neq P$. Alors

$$(P - \tilde{P})A + A^T (P - \tilde{P}) = 0 \Rightarrow e^{A^T t} [(P - \tilde{P})A + A^T (P - \tilde{P})] e^{A t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{A t}] = 0$$

ce qui implique que $e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{A t}$ est constante $\forall t$. Ce qui est le cas, si et seulement si $P - \tilde{P} = 0$, ou $P = \tilde{P}$.

2.6 Atténuation de la perturbation

De l'équation (2.11), considérons le cas où $g(0, t) = 0$. Supposons que $X = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le sous système isolé (2.12), et soit la fonction de Lyapunov $V(X, t)$ vérifiant les relations

$$c_1 \|X\|^2 \leq V(X,t) \leq c_2 \|X\|^2 \quad (2.23a)$$

$$DV(X,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X} f(X,t) \leq -c_3 \|X\|^2 \quad (2.23b)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial X} \right\| \leq c_4 \|X\| \quad (2.23c)$$

pour tout $(X,t) \in [0,\infty) \times D$ et des constantes positives $c_i, i = 1,2,3,4$. Supposons que le terme de perturbation $g(X,t)$ est une fonction bornée vérifiant la contrainte suivante

$$\|g(X,t)\| \leq \xi \|X\|, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.24)$$

où ξ est une constante non négative. Étudions la stabilité du point d'équilibre à l'origine du système perturbé (2.11). La dérivée de V le long de la trajectoire (2.11) est donnée par

$$\dot{V}(X,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X} h(X,t) + \frac{\partial V}{\partial X} g(X,t) \quad (2.25a)$$

En utilisant (2.23), nous obtenons

$$\dot{V}(X,t) \leq -c_3 \|X\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial X} \right\| \|g(X,t)\| \leq -c_3 \|X\|^2 + c_4 \xi \|X\|^2 \quad (2.25b)$$

$$\text{si } \xi < \frac{c_3}{c_4} \quad (2.26)$$

$$\text{alors } \dot{V}(X,t) \leq -\beta \|X\|^2 \quad (2.25c)$$

$$\text{où } \beta = (c_3 - \xi c_4) > 0$$

Lemme 2.2 Soit $X_e = 0$ un point d'équilibre exponentiellement stable du sous système isolé. Et soit la fonction de Lyapunov $V(X,t)$ du sous système isolé vérifiant (2.23). Supposons que le terme de perturbation $g(X,t)$ vérifie (2.24). Alors, l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système perturbé (2.11) [32 p.341].

Illustration

Considérons le système suivant

$$\dot{X} = AX + g(X,t)$$

où la matrice A est Hurwitz et $\|g(X,t)\| \leq \xi \|X\|$ pour $t \geq 0$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$. Posons

$Q = Q^T \succ 0$, et résolvons l'équation de Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q$$

Du théorème 2.2, on sait qu'il existe une solution unique $P = P^T \succ 0$. La fonction de Lyapunov quadratique $V(X) = X^T P X$ vérifie les conditions (2.23). En particulier

$$\lambda_m^{1/2}(P) \|X\|^2 \leq V(X,t) \leq \lambda_M^{1/2}(P) \|X\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} A X = -X^T Q X \leq -\lambda_m^{1/2}(Q) \|X\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial X} \right\| = \|2X^T P\| \leq 2 \|P\| \|X\| = 2\lambda_M^{1/2}(P) \|X\|$$

La dérivée $V(X)$ le long de la trajectoire du système perturbé (2.11) vérifie

$$\dot{V}(X) = -\lambda_m^{1/2}(Q) \|X\|^2 + 2\lambda_M^{1/2}(P) \xi \|X\|^2$$

où λ_m et λ_M sont respectivement les valeurs propres minimales et maximales de la matrice indiquée.

Donc, l'origine est globalement exponentiellement stable si $\xi < \lambda_m^{1/2}(Q) / \lambda_M^{1/2}(P)$. Et comme cette inégalité dépend du choix de la matrice Q , il a été démontré [32] que la matrice Q qui maximise le rapport $\lambda_m^{1/2}(Q) / \lambda_M^{1/2}(P)$ est la matrice identité $Q = I$.

Exemple numérique 2.2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}; \quad g(X,t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b x_2^3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2.2})$$

La solution de l'équation de Lyapunov pour $Q = I$, donne $P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{bmatrix}$.

La fonction de Lyapunov $V(X) = X^T P X = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 3/2 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vérifie

l'inégalité (2.23) si $c_3 = 1$ et $c_4 = 2\lambda_M^{1/2}(P) = 2\sqrt{1.513} = 2.46$

Le terme de perturbation $\|g(X)\| = b \|x_2\|^3 \leq b k_2^2 \|x_2\| \leq b k_2^2 \|X\|$ pour tout $|x_2| \leq k_2$

Prenons $V(X)$ comme fonction candidate de Lyapunov du système perturbé (E.2.2), sa dérivée $\dot{V}(X) \leq -\|X\|^2 + 2.46bk_2^2\|X\|^2$, donc $\dot{V}(X)$ est définie négative si $b < 1/2.46k_2^2$

Pour estimer la borne k_2 , nous prenons le domaine $\Omega_c = \{X \in R^2 \mid V(X) \leq c\}$. Donc pour toute constante c , la surface de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 = c$$

La plus grande valeur de $|x_2|$ sur la surface $V(X) = c$ peut être déterminée en prenant la dérivée partielle de l'équation de la surface de Lyapunov par rapport à x_1 . Ce qui donne

$$3x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2/12. \text{ Un calcul simple montre que la plus grande valeur de}$$

x_2^2 appartenant à la surface de Lyapunov est $96c/29$. Donc, tous les points situés à l'intérieur du domaine Ω_c vérifient la borne $|x_2| \leq k_2$ où $k_2^2 = 96c/29$. Cependant, si $b < 29/2.46 \times 96c \approx 0.1/c$; $\dot{V}(X)$ est définie négative et nous pouvons conclure que l'origine est exponentiellement stable où Ω_c est une estimation de la région de stabilité.

Théorème 2.3 Supposons qu'il existe une fonction $V_i(X, t)$ qui est continûment Lipschitz en X , $V(0, t) = 0$, et pour chaque sous-système

$$\phi_{i1}(\|x_i\|) \leq V_i(x_i, t) \leq \phi_{i2}(\|x_i\|) \tag{2.27}$$

$$DV_i(x_i, t)_{IS} \leq -\phi_{i3}(\|x_i\|) \tag{2.28}$$

où $\phi_{ik} \in K, k = 1, 2, 3$. Supposons aussi que les fonctions d'interconnexion $g_i(X, t)$ sont des fonctions bornées (1.43) pour tout $i = 1, 2, \dots, s$. Alors la quasi-dominante propriété de la matrice agrégée $S (s \times s)$ définie par (1.16) implique que le point d'équilibre $x_{ie} = 0$ est asymptotiquement connectivement stable pour le système composé (2.11).

Preuve voir [30 p.427]

Pour illustrer l'application du théorème ci-dessus, considérons le système linéaire invariant suivant

$$\dot{X} = AX \tag{2.29}$$

où $X(t) \in R^n$ et $A = (a_{ij})$ est une matrice constante $n \times n$. Le système est décomposé en s linéaires sous systèmes (S_i)

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^s G_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2.30)$$

où $x_i(t) \in R^{n_i}$ sont les états du sous système (S_i) , et A_i, G_{ij} sont des sous matrices $n_i \times n_i$ et $n_i \times n_j$ respectivement de la matrice de A .

Nous supposons que chaque sous système isolé (S_i)

$$\dot{x}_i = A_i x_i \quad (2.31)$$

est stable, telle que pour chaque matrice symétrique $Q_i (n_i \times n_i)$ définie positive, il existe une matrice $P_i (n_i \times n_i)$ définie positive qui est solution de l'équation de Lyapunov

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -Q_i \quad (2.32)$$

Alors la fonction

$$V_i(x_i) = x_i^T P_i x_i \quad (2.33)$$

est une fonction de Lyapunov du sous système (S_i) (2.31), et vérifie l'estimation suivante

$$\lambda_m^{1/2}(P_i) \|x_i\| \leq V_i(x_i) \leq \lambda_M^{1/2}(P_i) \|x_i\| \quad (2.34)$$

$$\dot{V}_i(x_i) \Big|_{(2.31)} \leq -\lambda_m^{1/2}(Q_i) \|x_i\| \quad (2.35)$$

Pour montrer sous quelle condition la stabilité de chaque sous-système isolé (S_i) implique la stabilité du système composé (S) , nous adoptons l'approche suivante.

Comme la fonction $V_i(x_i)$ est Lipschitz, c'est à dire

$$|V_i(x_i) - V_i(y_i)| \leq \kappa_i \|x_i - y_i\| \quad (2.36)$$

$$\text{où } \kappa_i = \frac{\lambda_M(P_i)}{\lambda_m^{1/2}(P_i)}, \text{ et } x_i \neq 0 \quad (2.37)$$

et que

$$\|G_{ij} x_j\| \leq \xi_{ij} \|x_j\| \quad (2.38)$$

$$\text{où } \xi_{ij} = \lambda_M^{1/2}(G_{ij}^T G_{ij}) \quad (2.39)$$

alors l'application du théorème 2.3 nous donne

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_i)_{(2.30)} &\leq \dot{V}_i(x_i)_{(2.31)} + \kappa_i \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^s \xi_{ij} \|x_j\| \\ &\leq -\phi_{3i}(\|x_i\|) + 2\kappa_i \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^s \lambda_M^{1/2}(P_j) \lambda_m^{-1}(Q_j) \xi_{ij} \phi_{3j}(\|x_j\|) \end{aligned}$$

$$\text{où } \phi_{3i}(\|x_i\|) = \frac{1}{2} \lambda_M^{-1/2}(P_i) \lambda_m(Q_i) \|x_i\| \quad (2.40)$$

Finalement, on peut montrer [30 p.429] que les coefficients de la matrice d'agrégation S ($s \times s$) sont donnés par

$$s_{ij} = \begin{cases} -1 & i = j \\ 2\kappa_i \lambda_M^{1/2}(P_j) \lambda_m^{-1}(Q_j) \xi_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad (2.41)$$

Exemple 2.3

Considérons le système du sixième ordre suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.2 & 0.1 & \vdots & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -3 & 0.3 & \vdots & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & -1 & -2 & \vdots & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & -2 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 1 & \vdots & -0.5 & 0.2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

où $X = (x_1^T, x_2^T)^T \in S$, $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T \in S_1$, $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})^T \in S_2$

Le système de grande dimension est composé de deux sous systèmes avec une matrice d'interaction \bar{E} donnée par

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

choisissons $Q_1 = I_3$ et $Q_2 = 2I_3$ les solutions des équations de Lyapunov (2.32) sont

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.337 & 0.0121 & 0.0236 \\ 0.0121 & 0.180 & -0.037 \\ 0.0236 & -0.037 & 0.2456 \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.2513 & 0.04 & -0.0102 \\ 0.040 & 0.522 & 0.02 \\ -0.0102 & 0.02 & 0.2008 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de P_i , $i = 1, 2$ sont

$$\lambda(P_1) = \{0.3431, 0.1606, 0.259\}$$

$$\lambda(P_2) = \{0.249, 0.196, 0.528\}$$

Les valeurs des constants de Lipschitz κ_i , $i = 1, 2$ en utilisant (2.37) sont $\kappa_1 = 0.856$ et

$$\kappa_2 = 1.193$$

$$G_{12}^T G_{12} = \begin{bmatrix} 0.09 & 0.09 & 0.12 \\ 0.09 & 0.11 & 0.15 \\ 0.12 & 0.15 & 0.21 \end{bmatrix}; \quad G_{21}^T G_{21} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Utilisant (2.39) les bornes ξ_{ij} sont $\xi_{12} = 0.626$, $\xi_{21} = 1.78$;

La matrice d'agrégation S est alors

$$s_{11} = s_{22} = -1$$

$$s_{12} = 2\kappa_1 \lambda_M^{1/2}(P_2) \lambda_m^{-1}(Q_2) \xi_{12} = 0.390;$$

$$s_{21} = 2\kappa_2 \lambda_M^{1/2}(P_1) \lambda_m^{-1}(Q_1) \xi_{21} = 2.475$$

L'application du théorème 2.3 implique, la quasi-dominante propriété de la matrice agrégée S ($s \times s$) définie par (1.16), ce qui donne

$$(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0.39 \\ 2.475 & -1 \end{vmatrix} = 0.035 > 0$$

Donc le système de grande dimension est asymptotiquement connectively stable.

2.7 Stabilité au sens de Lyapunov par le principe de comparaison

Le principe de comparaison a été utilisé avec succès pour déterminer la stabilité du système linéaire composé de l'exemple précédent. Cette approche sera donc étendue aux systèmes non linéaires de grande dimension. L'avantage de cette approche est que, si une décomposition appropriée du système non linéaire de grande dimension est possible [33], alors on sera en mesure de conclure la stabilité au sens de Lyapunov.

2.7.1 Description du système

Considérons le système composé (S) décrit par l'équation différentielle suivante

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (2.42)$$

Nous supposons que ce système représente une structure d'interconnexion de s sous-systèmes décrits par les équations

$$\frac{dx_1}{dt} = h_1(x_1, t) + g_1(X, t) \quad (2.43)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = h_2(x_2, t) + g_2(X, t)$$

⋮

$$\frac{dx_i}{dt} = h_i(x_i, t) + g_i(X, t)$$

où $x_i(t) \in R^{n_i}$, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in_i})^T$ n_i est l'état du i^{eme} sous-système (S_i), les fonctions

$h_i : J \times R^{n_i} \rightarrow R^{n_i}$ représente le sous-système isolé (S_i) donné par

$$\dot{x}_i = h_i(x_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2.44)$$

et $g_i : J \times R^n \rightarrow R^{n_i}$ est la fonction d'interconnexion entre le sous-système (S_i) et le système global (S).

On suppose que

$$\begin{aligned} h_i(0, t) &= 0 \\ g_i(0, t) &= 0 \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.45)$$

Il est important d'établir les conditions que doivent vérifier les interactions entre les sous-systèmes pour conclure la stabilité du système non linéaire de grande dimension.

Il est donc supposé qu'il existe des fonctions bornées $\xi_{ij} : J \times R^n \rightarrow R^1$ telle que

$$\sup |\xi_{ij}(X, t)| = V_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, s \quad (2.46a)$$

et que l'inégalité suivante soit vérifiée

$$(\text{grad } V_i)^T g_i(X, t) \leq \sum_{j=1}^s \xi_{ij}(X, t) \phi_{j3}(\|x_j\|) \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2.46b)$$

2.7.2 Stabilité asymptotique par décomposition

Pour établir la stabilité du système composé à partir de la stabilité des sous-systèmes et de leurs interactions, nous prenons la dérivée totale $\dot{V}_i(x_i, t)_{(2.43)}$ le long des solutions de (S_i),

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_i, t)_{(2.43)} &= \dot{V}_i(x_i, t) \Big|_{(2.44)} + [\text{grad } V_i(x, t)]^T g_i(X, t) \\ &\leq -\phi_{i3}(\|x_i\|) + \sum_{j=1}^s \xi_{ij}(X, t) \phi_{j3}(\|x_j\|) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Maintenant nous introduisons la fonction vectorielle de Lyapunov

$$V = (V_1, \dots, V_s)^T \quad (2.48)$$

et le vecteur de comparaison $w : R_+^s \rightarrow R_+^s$, défini par

$$w = (\phi_{13} \quad \phi_{23} \cdots \quad \phi_{s3})^T \quad (2.49)$$

qui sont liés par le vecteur d'inégalité différentiel

$$\dot{V} \leq Aw \quad (2.50)$$

et à partir de l'expression (2.47), on détermine les coefficients a_{ij} de la matrice A qui sont donnés par [30,45,46]

$$a_{ij} = -\delta_{ij} + \alpha_{ij} \quad (2.51)$$

où δ_{ij} est le symbole de kronecker, défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.52)$$

et le nombre non négatif α_{ij} est défini par

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} \sup \xi_{ij}(X, t) + (1 - \delta_{ij}) \max \{0, \sup \xi_{ij}(X, t)\} \quad (2.53)$$

Théorème 2.4

Le point d'équilibre $X_e = 0$ du système non linéaire de grande dimension (S) est globalement asymptotiquement stable si la matrice $A = (a_{ij})$ définie par (2.51) vérifie les conditions suivantes [63 p.403]

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad (-1)^s \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} > 0 \quad (2.54)$$

Exemple 2.4

Soit le système non linéaire de grande dimension (S) suivant

$$\dot{x}_{11} = x_{12} + \frac{1}{2}\alpha x_{11}x_{12}^2 + \beta(x_{21}^3 + x_{22}^3)$$

$$\dot{x}_{12} = -2x_{11} - x_{11}^2x_{12} + \alpha x_{12}x_{11}^2 + \beta(x_{21}^3 + x_{22}^3)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \cos t - x_{21}(x_{21}^2 + x_{22}^2)(2 + \sin t) + \sigma x_{21}(x_{21}^2 + x_{22}^2) + \psi(x_1, t)$$

$$\dot{x}_{22} = -x_{21} \cos t - x_{22}(x_{21}^2 + x_{22}^2)(2 + \sin t) + \sigma x_{22}(x_{21}^2 + x_{22}^2) + \psi(x_1, t)$$

$$\text{où } |\psi(x_1, t)| \leq \gamma \phi_{13}(\|x_1\|)$$

Décomposons ce système (S) en deux sous systèmes S_1 et S_2 comme suit

$$\dot{x}_1 = h_1(x_1, t) + g_1(x, t)$$

$$\dot{x}_2 = h_2(x_2, t) + g_2(x, t)$$

$$\text{où } X = (x_1^T \ x_2^T)^T \in S, \ x_1 = (x_{11} \ x_{12})^T \in S_1, \ x_2 = (x_{21} \ x_{22})^T \in S_2$$

tels que

$$h_1(x_1, t) = \begin{bmatrix} x_{12} \\ -2x_{11} - x_{11}^2x_{12} \end{bmatrix}, \quad g_1(X, t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha x_{11}x_{12}^2 + \beta(x_{21}^3 + x_{22}^3) \\ \alpha x_{12}x_{11}^2 + \beta(x_{21}^3 + x_{22}^3) \end{bmatrix} \quad (\text{E2.3.1})$$

$$h_2(x_2, t) = \begin{bmatrix} x_{22} \cos t - x_{21}(x_{21}^2 + x_{22}^2)(2 + \sin t) \\ -x_{21} \cos t - x_{22}(x_{21}^2 + x_{22}^2)(2 + \sin t) \end{bmatrix}$$

$$g_2(X, t) = \begin{bmatrix} \sigma x_{21}(x_{21}^2 + x_{22}^2) + \psi(x_1, t) \\ \sigma x_{22}(x_{21}^2 + x_{22}^2) + \psi(x_1, t) \end{bmatrix} \quad (\text{E2.3.2})$$

Notre but est d'établir la stabilité du système global

Si les fonctions de Lyapunov pour S_1 et S_2 sont choisies comme suit

$$V_1(x_1) = \left[\frac{1}{2}(2x_{11}^2 + x_{12}^2) \right]^{1/2}, \quad V_2(x_2) = \|x_2\| \quad (\text{E2.3.3})$$

alors la dérivée de $V(x_1)$ le long du sous système S_1 est égale à

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2x_{11}^2 + x_{12}^2)^{-1/2}(4x_{11}\dot{x}_{11} + 2x_{12}\dot{x}_{12}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}V_1^{-1}(4x_{11}x_{12} + 2x_{12}(-2x_{11} - x_{11}^2x_{12})) = -\frac{1}{2}V_1^{-1}x_{11}^2x_{12}^2 \end{aligned}$$

et son gradient est donnée par $\text{grad } V_1 = \frac{1}{2} V_1^{-1} (2x_{11} \ x_{12})^T$

Pour le sous-système S_2 , $\dot{V}_2 = -V_2^{-1} \|x_2\|^4 (2 + \sin t)$ et $\text{grad } V_2 = V_2^{-1} x_2$ (E2.3.4)

de (E2.3.3) et (E2.3.4) on obtient l'estimation (2.27) et (2.28) où les fonctions de comparaison sont choisies comme suit:

$$\phi_{11}(\|x_1\|) = \frac{\sqrt{2}}{2} \|x_1\|, \quad \phi_{12}(\|x_1\|) = \|x_1\|^2, \quad \phi_{13}(\|x_1\|) = \frac{1}{4} V_1^{-1} x_{11}^2 x_{12}^2$$

$$\phi_{21}(\|x_2\|) = \phi_{22}(\|x_2\|) = \|x_2\|, \quad \phi_{23}(\|x_2\|) = \|x_2\|^3$$

En calculant les contraintes (2.46b), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\text{grad } V_1)^T g_1 &= V_1^{-1} \left[2\alpha x_{11}^2 x_{12}^2 + \beta (2x_{11} + x_{12})(x_{21}^2 + x_{22}^3) \right] \\ &\leq 2\alpha V_1^{-1} x_{11}^2 x_{12}^2 + 4\beta V_1^{-1} \|x_1\| (|x_{21}|^3 + |x_{22}|^3) \leq 8\alpha \phi_{13}(\|x_1\|) + 8\beta \phi_{23}(\|x_2\|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{grad } V_2)^T g_2 &= V_2^{-1} \left[\sigma (x_{21}^4 + 2x_{21}^2 x_{22}^2 + x_{22}^4) + (x_{21} + x_{22}) \psi(x_2, t) \right] \\ &\leq \sigma V_2^{-1} \|x_2\|^4 + \frac{1}{2} \gamma V_1^{-1} V_2^{-1} \|x_2\| x_{11}^2 x_{12}^2 \leq \sigma \phi_{23}(\|x_2\|) + 2\gamma \phi_{13}(\|x_1\|) \end{aligned}$$

l'inégalité (2.47) prend la forme suivante

$$\dot{V}_1 \leq -(1 - 8\alpha) \phi_{13}(\|x_1\|) + 8\beta \phi_{23}(\|x_2\|) \quad (\text{E2.3.5})$$

$$\dot{V}_2 \leq 2\gamma \phi_{13}(\|x_1\|) - (1 - \sigma) \phi_{23}(\|x_2\|) \quad (\text{E2.3.6})$$

Les coefficients de la matrice A de l'équation (2.50) sont obtenus des équations (E2.3.5) et (E2.3.6) d'où

$$A = \begin{bmatrix} -1 + 8\alpha & 8\beta \\ 2\gamma & -1 + \sigma \end{bmatrix}, \quad \text{et } w = \begin{bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{E2.3.7})$$

L'application du théorème 2.4 à l'équation (E2.3.7) débouche sur les conditions suivantes.

$$-1 + 8\alpha < 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 + 8\alpha & 8\beta \\ 2\gamma & -1 + \sigma \end{vmatrix} > 0$$

Ces conditions nous garantissent la stabilité asymptotique en large du système non linéaire de grande dimension. Comme on peut le remarquer de cette exemple, les propriétés des M-Matrice sont des outils puissants pour l'étude de la stabilité asymptotique des systèmes non linéaires de grande dimension décomposés en sous systèmes.

2.8 Conclusion

La stabilité des systèmes de grande dimension peut être déterminée via la stabilité de ses sous-systèmes et la nature de leurs interactions. Le processus de décomposition (purement mathématique) en une forme appropriée permet de formuler le problème global à partir d'un certain nombre de problèmes séparables et plus petits dont la structure est aisément reconnaissable et sa résolution est systématique. Cette approche, consiste à décomposer le système de grande dimension en sous systèmes avec une dynamique et des interactions locales. Puis chaque sous-système est considéré indépendamment telle que la stabilité de chacun d'eux est combinée avec les contraintes d'interactions pour obtenir la stabilité du système de grande dimension. Cette décomposition consiste donc à partitionner le système non linéaire de grande dimension en plusieurs sous systèmes, et à l'aide du principe de comparaison en s'appuyant sur les propriétés des M-matrices sa stabilité a été déterminée. Cette approche simplifie énormément le processus d'analyse de la stabilité et surmonte les difficultés que posent les systèmes non linéaires de grande dimension.

Chapitre III

Construction récursive de la fonction Lyapunov

Construction récursive de la fonction de Lyapunov

3.1 Introduction

La technique du backstepping est une technique relativement récente de commande des systèmes non linéaires. Très brièvement, il s'agit d'une technique de commande pour les systèmes non linéaires permettant de manière séquentielle et systématique de construire une fonction de Lyapunov stabilisante. Pour qu'elle puisse s'appliquer, le système non linéaire doit être sous forme triangulaire (la dérivée de chaque composante du vecteur d'état est une fonction de composantes précédentes et dépend additivement de la composante suivante).

Notre contribution est dédiée à la construction de la fonction de Lyapunov sur une idée fondée sur le backstepping design. L'approche proposée s'avère directement applicable aux systèmes non linéaires de grande dimension décomposable en composantes fortement connexes à l'aide de la théorie des graphes. Pour construire cette fonction, nous proposons un algorithme basé sur l'analyse récurrente de fonction de Lyapunov. Pour les systèmes non linéaires de grande dimension avec une décomposition rigide "coarse decomposition", il est plus difficile de trouver une fonction de Lyapunov adaptée pour les sous-systèmes composés séquentiels. Pour cette raison, nous proposons une construction méthodologique de la fonction de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension [34,35] dans le cas où la décomposition par le concept de la théorie des graphes en composantes fortement connexes est rigide.

3.2 Structure cascade

Cette approche consiste à concevoir des lois de commande en exploitant les propriétés des systèmes particuliers de façon à ce que le système en boucle fermée ait une structure cascade [44,57]. Bien que cette approche ne soit pas systématique, elle s'avère plus utile dans plusieurs cas pratiques. Soit la structure cascade suivante

$$\dot{X} = h(X) + g(X, \xi) \quad (3.1a)$$

$$\dot{\xi} = a(\xi) \quad (3.1b)$$

Nous supposons que le sous système isolé $\dot{X} = h(X)$ est stable et que sa fonction de Lyapunov $W(X)$ est connue telle que $L_h W(X) \leq 0$. On suppose aussi que le terme

d'interconnexion $g(X, \xi)$, est globalement Lipschitz en X pour tout ξ donné, et que le système (3.1) vérifie les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1

Pour la fonction $g(X, \xi)$, on suppose qu'il existe deux fonctions $\gamma_1(\cdot)$ et $\gamma_2(\cdot)$ de classe K , différentiable en $\xi = 0$, tel que

$$\|g(X, \xi)\| \leq \gamma_1(\|\xi\|)\|X\| + \gamma_2(\|\xi\|) \quad (3.2)$$

Hypothèse 3.2

La fonction définie positive $W(X)$ est C^2 , radialement non bornée et vérifie $L_h W(X) \leq 0$ pour tout X . En plus il existe des constantes c et M tel que, pour $\|X\| > M$

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial X} \right\| \|X\| \leq cW(X) \quad (3.3)$$

Proposition 3.1

Si les hypothèses (3.1) et (3.2) sont vérifiées, alors le point d'équilibre $(X, \xi) = (0, 0)$ est globalement stable

Preuve voir [58 p. 177]

3.3 Fonction de Lyapunov composée

Quand on étudie la stabilité des systèmes de grande dimension de structure cascade, on suppose que les sous systèmes isolés soient globalement stables [18,29], et la fonction de Lyapunov du système composé est formée par une somme pondérée de fonctions de Lyapunov des sous-systèmes. Pour la structure cascade (3.1) une telle fonction de Lyapunov composée serait de la forme

$$V(X, \xi) = c_1 W(X) + c_2 U(\xi) \quad (3.4)$$

sa dérivée contient les termes négatifs $c_1 L_h W(X)$ et $c_2 L_a U(\xi)$ ainsi que le terme indéfini $c_1 L_g W(X, \xi)$ due au terme d'interconnexion $g(X, \xi)$. Pour que la construction de Lyapunov soit construite avec succès, nous devons être en mesure de choisir les

constantes de pondération c_1 et c_2 tel que le terme indéfini $c_1 L_g W(X, \xi)$ est dominé par le terme défini négatif.

La construction de la fonction de Lyapunov du système non linéaire composé est encore plus limitée quand l'un des sous systèmes (dans notre cas le sous système X dans la structure cascade (3.1)), est seulement stable. Dans ce cas, le terme $L_h W$ est semi défini seulement, et en général il ne domine pas le terme indéfini $L_g W$. Ce qui nous oblige à remplacer les constantes c_1 et c_2 par les facteurs de pondération non linéaires $l(\cdot)$ et $\rho(\cdot)$ afin de construire la fonction candidate de Lyapunov du système non linéaire composé pour $\xi = 0$. Pour aboutir au résultat souhaité, nous choisissons une fonction candidate de Lyapunov de la forme

$$V(X, \xi) = l(W(X)) + \rho(U(\xi)) \quad (3.5)$$

Exemple 3.1 Considérons le système cascade

$$\dot{X} = \xi + \xi^2 = g(\xi)$$

$$\dot{\xi} = -\xi$$

ayant pour fonction de Lyapunov des sous systèmes $W(X) = X^2$ et $U(\xi) = \xi^2$, et nous examinons si la fonction

$$V(X, \xi) = \ln(X^2 + 1) + \rho(\xi^2)$$

est une fonction appropriée du système composé. Pour cela, nous devons trouver une fonction ρ de classe C^1 pour que la dérivée

$$\dot{V} = 2 \frac{X}{X^2 + 1} (\xi + \xi^2) - 2\rho'(\xi^2)\xi^2$$

soit non positive pour (X, ξ) . Prenons un X quelconque, soit $X = 1$, et vérifions si le terme négative $-2\rho'(\xi^2)\xi^2$ domine le terme indéfini $g(\xi) = \xi + \xi^2$ au voisinage de $\xi = 0$. Dans cette tentative on échoue quelque que soit le choix de la fonction ρ parce que le terme $-2\rho'(\xi^2)\xi^2$ est quadratique au voisinage de $\xi = 0$ et ne peut pas dominer le terme qui est linéaire en ξ . Si le terme linéaire n'y était pas, alors le choix $\rho(\xi^2) = \xi^2$ nous garantit que $\dot{V} \leq 0$ pour tout (X, ξ) .

Si nous avons choisi $U(\xi) = \xi^4$ comme fonction de Lyapunov du ξ -sous système, La domination serait impossible même si le terme linéaire a été supprimé de l'interconnexion.

Notre objectif est de trouver un changement de coordonné qui nous permet de supprimer le terme linéaire ξ de l'interconnexion $g(\xi) = \xi + \xi^2$. Si nous optons pour le changement de variable suivant $\eta = X + \xi$, le système devient

$$\dot{\eta} = \xi^2$$

$$\dot{\xi} = -\xi$$

telle que l'interconnexion est seulement ξ^2 . La fonction de Lyapunov composée est donc

$$V(\eta, \xi) = \ln(\eta^2 + 1) + \xi^2$$

et sa dérivée

$$\dot{V}(\eta, \xi) = 2\left(\frac{\eta}{\eta^2 + 1} - 1\right)\xi^2 \leq 0$$

est définie semi négative.

3.4 Backstepping intégrateur

Le backstepping intégrateur design est une méthode systématique de stabilisation des systèmes non linéaires qui sont transformables en systèmes triangulaires inférieur (strict feedback form)

Nous abordons ce problème avec un cas spécial du backstepping. Considérons le système

$$\dot{X} = h(X) + g(X)\xi \tag{3.6a}$$

$$\dot{\xi} = u \tag{3.6b}$$

où $[X^T, \xi]^T \in R^{n+1}$ est l'état et $u \in R$ est la commande. Les fonction $h : D \rightarrow R^n$

et $g : D \rightarrow R^n$ sont lisses dans le domaine $D \subset R^n$ contenant $X = 0$ et $h(0) = 0$. On veut le design d'une loi de commande par retour d'état qui stabilise l'origine ($X = 0, \xi = 0$).

Nous supposons que h et g sont connues. Ce système peut être considéré comme une connexion cascade de deux sous systèmes, comme le montre la figure 3.1a. La première composante est (3.6a), ayant ξ comme entrée, et la seconde composante est

l'intégrateur (3.6b). Supposons que le sous-système (3.6a) peut être stabilisé en utilisant une loi de commande par retour d'état de la forme

$$\xi = \phi(X), \quad \phi(0) = 0 \quad (3.6c)$$

l'origine de

$$\dot{X} = h(X) + g(X)\phi(X) \quad (3.7)$$

est asymptotiquement stable. Supposons en plus que nous connaissions une fonction de Lyapunov $V(X)$ définie positive et vérifiant l'inégalité

$$\frac{\partial V}{\partial X} [h(X) + g(X)\phi(X)] \leq -W(X) \quad (3.8)$$

où la fonction $W(X)$ est définie positive. Nous projetons maintenant de trouver une loi de commande par retour d'état qui stabilise asymptotiquement les systèmes (3.6a) et (3.6b). L'obtention d'une telle commande assurant les objectifs exprimés par (3.6a) et (3.6b) s'effectue de manière suivante:

En additionnant et retranchant $g(X)\phi(X)$ dans la partie droite de (3.6a), nous obtenons la représentation équivalente

$$\dot{X} = [h(X) + g(X)\phi(X)] + g(X)[\xi - \phi(X)] \quad (3.9a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (3.9b)$$

qui est donnée par la figure (3.1b). En faisant le changement de variable

$$z = \xi - \phi(X) \quad (3.10)$$

nous obtenons

$$\dot{X} = [h(X) + g(X)\phi(X)] + g(X)z \quad (3.11)$$

$$\dot{z} = \dot{\xi} - \dot{\phi}(X) = u - \dot{\phi}(X) \quad (3.12)$$

la dérivée $\dot{\phi}$ est donnée par

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial X} \dot{X} = \frac{\partial \phi}{\partial X} [h(X) + g(X)\xi] \quad (3.13)$$

et qui est montrée par la figure (3.1c).

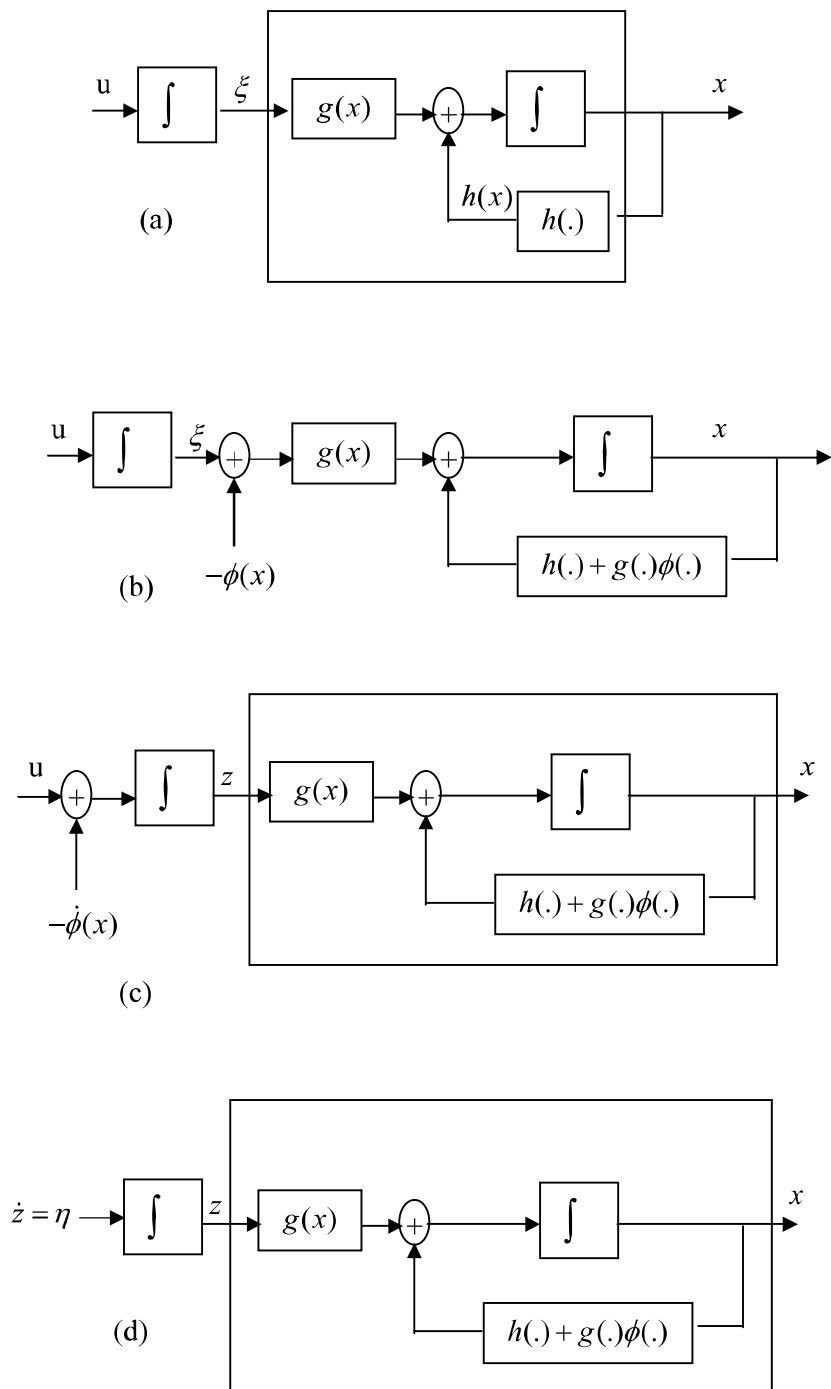


Fig.3.1 (a) Le diagramme (3.6a)-(3.6b); (b) introduction $\phi(x)$; (c) backstepping
 (d) le système final après le changement de variable

La transformation du schéma de la figure (3.1b) par (3.1c) est considérée comme le backstepping $-\phi(X)$ à travers l'intégrateur.

Prenons $\eta = u - \dot{\phi}$ ce qui réduit le système à une structure cascade

$$\dot{X} = [h(X) + g(X)\phi(X)] + g(X)z \quad (3.14)$$

$$\dot{z} = \eta \quad (3.14b)$$

qui est donné par la figure (3.1d) et qui est similaire au système initial, sauf que maintenant la première composante a une origine asymptotiquement stable quand l'entrée est zéro. Cette caractéristique sera exploitée dans le design de η pour stabiliser le système composé.

Choisissons

$$V_c(X, \xi) = V(X) + \frac{1}{2}z^2 \quad (3.15)$$

comme fonction candidate de Lyapunov, sa dérivée

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V}{\partial X} [h(X) + g(X)\phi(X)] + \frac{\partial V}{\partial X} g(X)z + z\dot{z}$$

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V}{\partial X} [h(X) + g(X)\phi(X)] + \frac{\partial V}{\partial X} g(X)z + z\eta \quad (3.16)$$

Si on pose

$$\eta = -\frac{\partial V}{\partial X} g(X) - kz, \quad k > 0 \quad (3.17)$$

alors

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V}{\partial X} [h(X) + g(X)\phi(X)] - kz^2$$

$$\dot{V}_c \leq -W(X) - kz^2 \quad (3.18)$$

Ce qui montre que l'origine ($X = 0, z = 0$) est asymptotiquement stable. Et puisque $z = \xi - \phi(X)$ et $\phi(0) = 0$ par hypothèse, le résultat implique que l'origine du système original $X = 0, \xi = 0$ est aussi asymptotiquement stable.

En substituant pour η, z , et $\dot{\phi}$ nous obtenons la loi de commande par retour d'état

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial X} [h(X) + g(X)\xi] - \frac{\partial V}{\partial X} g(X) - k[\xi - \phi(X)] \quad (3.19)$$

Si toutes les hypothèses sont vérifiées globalement, et $V(X)$ est radialement non bornée, on peut conclure que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Lemme 3.1 Considérons le système (3.6a)-(3.6b). Soit $\phi(X)$ une loi de commande par retour d'état stabilisante pour $\phi(0) = 0$, et $V(X)$ une fonction de Lyapunov qui vérifie (3.8) avec une fonction $W(X)$ définie positive. Alors, la loi de commande par retour d'état (3.19) stabilise l'origine de (3.6a) et (3.6b), ayant

$$V(X) + \frac{(\xi - \phi(X))^2}{2}$$

Comme fonction de Lyapunov. Cependant, si toutes les hypothèses sont vérifiées globalement et $V(X)$ est radialement non bornée alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Exemple 3.3

Considérons le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

Qui est de la forme (3.6a)-(3.6b) avec $x = x_1$ et $\xi = x_2$. Nous commençons par le système scalaire

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2$$

où la variable x_2 est prise comme une entrée virtuelle, et nous procédons par le design de la commande par retour d'état $x_2 = \phi(x_1)$ pour stabiliser l'origine $x_1 = 0$. En choisissant

$$x_2 = \phi(x_1) = -x_1^2 - c_1 x_1, \quad c_1 > 0$$

et en éliminant le terme non linéaire x_1^2 on obtient

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + \phi(x_1) = -c_1 x_1 - x_1^3 \tag{E3.3.1}$$

de fonction de Lyapunov $V(X) = \frac{1}{2}x_1^2$ et de dérivée

$$\dot{V} = -c_1 x_1^2 - x_1^4 \leq -c_1 x_1^2$$

Donc, l'origine de (E3.3.1) est globalement exponentiellement stable. On utilise le changement de variable par récurrence

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + c_1 x_1 + x_1^2 \Rightarrow x_2 = z_2 - c_1 x_1 - x_1^2$$

pour transformer le système à la forme

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 - x_1^3 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = u + (c_1 + 2x_1)(-c_1 x_1 - x_1^3 + z_2)$$

Prenons

$$V_c(X) = \frac{1}{2}(x_1^2 + z_2^2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + c_1 x_1 + x_1^2)^2$$

Comme fonction de Lyapunov composé, sa dérivée

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= x_1(-c_1 x_1 - x_1^3 + z_2) + z_2 \left[u + (c_1 + 2x_1)(-c_1 x_1 - x_1^3 + z_2) \right] \\ &= -c_1 x_1^2 - x_1^4 + z_2 \left[x_1 + (c_1 + 2x_1)(-c_1 x_1 - x_1^3 + z_2) + u \right] \end{aligned}$$

Pour stabiliser le système original, nous utilisons la loi de commande (3.19). Ce qui donne

$$u = -x_1 - (c_1 + 2x_1)(-c_1 x_1 - x_1^3 + z_2) - c_2 z_2$$

par conséquent

$$\dot{V}_c = -(c_1 x_1^2 + x_1^4 + c_2 z_2^2) = -(c_1 x_1^2 + x_1^4 + c_2 (x_2 + c_1 x_1 + x_1^2)^2)$$

Donc l'origine est globalement asymptotiquement stable.

3.5 Design récuratif

Le design, par retour d'état qui a été appliqué avec succès pour une structure en cascade, sera maintenant étendu pour une large classe de système non linéaires. L'idée commune des deux principales récursives procédures, le backstepping [43,58] et le forwarding [44], est d'appliquer le design à une partie réduite du système, et puis le réappliquer étape par étape en augmentant l'ordre du sous système d'une unité à chaque étape. Le design est complété une fois l'ordre n du système entier est atteint.

3.5.1 Backstepping

Le backstepping est une technique systématique de stabilisation des systèmes non linéaires adaptée aux systèmes triangulaires inférieurs.

Considérons le système du premier ordre ayant pour entrée u_1

$$\dot{x}_1 = h_1(x_1) + u_1 \tag{3.20}$$

où h est une fonction connue vérifiant $h(0) = 0$. Dans ce cas il est facile de choisir une fonction quadratique de Lyapunov de la forme $V_1(x_1) = c_1 x_1^2 / 2$, $c_1 > 0$.

Nous voulons choisir $u_1 = u_1(x_1)$ telle que la dérivée de V_1 le long de la solution de (3.20) est définie négative

$$\dot{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} [h_1(x_1) + u_1] = -c_1 x_1 [h_1(x_1) + u_1] = -c_1 x_1^2 \leq 0 \text{ for } u_1 = -x_1 - h_1(x_1) \quad (3.21)$$

Augmentant le système d'un intégrateur à l'entrée

$$\dot{x}_1 = h_1(x_1) + x_2 \quad (3.22a)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (3.22b)$$

La même approche qu'auparavant peut être utilisée. Si en premier lieu, nous considérons x_2 comme signal de commande virtuel, alors

$$x_2 = -x_1 - h_1(x_1)$$

donc le premier état sera stabilisé. Introduisons l'erreur d'état

$$z_2 = x_2 - (-x_1 - h_1(x_1))$$

et considérons la fonction candidate de Lyapunov

$$V_2 = V_1 + c_2 \frac{z_2^2}{2} \quad (3.23)$$

sa dérivée serait donc

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} &= -c_1 x_1^2 + c_1 x_1 z_2 + z_2 [\dot{x}_2 - \dot{x}_1] = -c_1 x_1^2 + z_2 [u + x_1 - z_1 + c_1 x_1] \\ &= -c_1 x_1^2 - c_2 z_2^2 < 0, \quad (x_1, z_2) \neq (0, 0) \end{aligned} \quad (3.24)$$

si $u = -x_1 + z_1 - c_1 x_1 - c_2 z_2$

La construction des lois de commande stabilisantes ressemble au procédé employé dans la théorie de la régulation non linéaire. La méthode convient bien dans les situations où nous connaissons un contrôleur stabilisant d'un modèle nominal réduit, que nous voudrions robustifier par rapport à la dynamique d'ordre plus élevé. Ceci est réalisé en concevant une loi de commande qui immerge asymptotiquement la dynamique du système entier dans celle du système d'ordre réduit. L'approche proposée s'avère directement applicable aux systèmes triangulaires inférieurs de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= h_2(x_1, x_2) + x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= h_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + x_n \\ \dot{x}_n &= h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + u \end{aligned} \quad (3.25)$$

Notons que ce système est obtenu récursivement en ajoutant à chaque fois de nouvelles coordonnées qui intègrent des fonctions de commandes et des coordonnées déjà introduites.

3.5.2 Linéarisation par bouclage

Le problème par bouclage consiste à transformer un système non linéaire en un système linéaire à l'aide d'un bouclage d'état et d'un changement de coordonnées sur l'état du système. Bien entendu, une telle transformation n'existe pas toujours mais, lorsqu'elle existe, elle permet en particulier de stabiliser le système exactement comme s'il s'agissait d'un système linéaire. Le prix à payer d'une telle simplicité est d'une part le fait que cette transformation n'est pas valable partout et peut engendrer dans certaines situations (singularité) une commande explosive (non bornée)

On considère la représentation du système non linéaire suivant

$$\dot{X} = f(X, u) \quad (3.26a)$$

et nous supposons que l'origine $X = 0$ est un point d'équilibre du système libre

$$\dot{X} = f(X, 0) \quad (3.26b)$$

Nous cherchons un bouclage d'état u de la forme

$$u = \phi(X) \quad (3.27)$$

qui garantit la stabilité asymptotique du point d'équilibre du système. En substituant (3.27) dans (3.26a) on obtient

$$\dot{X} = f(X, \phi(X)) \quad (3.26c)$$

Si l'origine du système libre (3.26c) est asymptotiquement stable, alors nous pouvons trouver une fonction définie positive V dont sa dérivée le long des trajectoires de (3.26c) est définie négative au voisinage de l'origine. Cette fonction V recherchée doit être telle que, pour chaque état x , nous devons trouver une commande u telle que :

$$L_{f(x,u)}V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) < 0 \quad (3.28)$$

Pour illustrer cette approche, prenons un exemple simple d'un système du premier ordre

$$\dot{x} = ax^2 + u$$

Choisissons un bouclage d'état

$$u = \phi(x)$$

qui permet au système d'avoir un point d'équilibre asymptotiquement stable. Une approche possible est de choisir la loi de commande u qui élimine le terme non linéaire ax^2 . Par conséquent, en posant

$$u = \phi(x) = -ax^2 - x$$

on obtient

$$\dot{x} = -x$$

qui est linéaire ayant pour fonction candidate de Lyapunov $V(x) = x^2$ et sa dérivée $\dot{V}(x) = -2x^2$. Donc le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable.

Par analogie avec le cas de la stabilité, nous cherchons une condition suffisante de stabilisation asymptotique qui s'énonce en termes d'une fonction de Lyapunov. Mais satisfaire une telle inégalité (3.28) n'est pas possible pour n'importe quelle fonction de Lyapunov. Cette structure de systèmes exploités pour la réalisation de fonctions de commande peut poser des problèmes de robustesse pour la stabilisation asymptotique globale. Cependant le fait qu'on puisse linéariser le système par bouclage nous permet d'être sûr qu'il existe une fonction de Lyapunov strictement continûment assignable.

S'inspirant de la technique du backstepping design, l'objet du reste de ce chapitre est de caractériser les systèmes de classe C^1 dissipatifs pour lesquels nous pouvons effectivement appliquer notre approche pour la construction de la fonction de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension à l'aide de la décomposition par la théorie des graphes.

En général, il n'existe pas de méthode systématique ou d'un guide clair permettant l'obtention d'une fonction de Lyapunov pour les systèmes non linéaires et en particulier les systèmes de grande dimension. A cet effet, nous présentons notre contribution [35] qui réside dans l'extension des travaux [34,55,58] et qui consiste à construire cette fonction en soulignant la récursivité de la procédure. Nous focalisons notre attention sur la classe des systèmes non linéaires de grande dimension qui admettent une décomposition en composantes fortement connexes par la théorie des graphes.

Souvent, en pratique, les systèmes non linéaires pour lesquels nous savons écrire la dynamique ont une formulation variationnelle. Il s'en suit que, pour le système non commandé, nous savons qu'une fonction d'énergie est constante ou décroît le long des solutions. De tels systèmes sont dits dissipatifs. La méthode de Lyapunov est tout à fait

adaptée à ces systèmes car la fonction énergie est une excellente candidate pour être une fonction de Lyapunov.

3.6. Système considéré

Nous considérons le système non linéaire de grande dimension décrit par l'équation différentielle de la forme:

$$\dot{z}_i(t) = \Psi_i(z_1, \dots, z_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.29a)$$

où l'état $z(t) \in R^n$ et $t \in [0, \infty) = R^+$. En utilisant la décomposition par la théorie des graphes, on peut montrer que le système (3.29a) se met sous la forme hiérarchique suivante [67,68]

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.29b)$$

où les nouveaux états x_1, \dots, x_n sont déterminés à partir de z_1, \dots, z_n en ré numérotant ces derniers selon l'algorithme topological sorting [10]

On suppose qu'une fois le système est mis sous la forme hiérarchique, l'interaction de chaque sous système se fait avec le sous système inférieur.

Equation (3.29b) est donnée sous la forme condensée par

$$\dot{X} = F(X) \quad (3.29c)$$

où $X^T = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $F(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$ tel que $X = 0$ est un point d'équilibre.

Il est suppose que (3.29c) possède une solution unique $X(t, X_0, t_0)$ pour tout $X_0 \in R^n$ défini pour $t \geq t_0 \geq 0$ et dépend continûment des conditions initiales. Nous avons $X(t, X_0, t_0) = X_0$

La stabilité de Lyapunov implique l'existence des fonctions $V : R^n \rightarrow R$. On suppose que de telles fonctions sont continues dans leur domaine respectif et vérifient la condition de Lipschitz par rapport à X et que $V(0) = 0$. La dérivée supérieure à droite de V par rapport au temps t le long de la solution (3.29) est donnée par

$$DV(X) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} \{V[X(t+h; X)] - V[X]\} \quad (3.30)$$

3.6.1 Système interconnecté

Un système non linéaire de grande dimension (3.29) est en effet difficile à appréhender dans sa totalité, aussi bien par ses auteurs que par ceux qui seraient prêt à l'utiliser. Il est donc nécessaire de le décomposer en sous-systèmes en s'appuyant sur la théorie des graphes. Par la suite, on suppose que le graphe associé à (3.29) est fortement connexes. Après renumérotation, les états x_j sont groupés comme suit

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1, x_2, \dots, x_{m_1})^T \\ X_2 &= (x_{m_1+1}, x_{m_1+2}, \dots, x_{m_2})^T \\ &\vdots \\ X_j &= (x_{m_{j-1}+1}, x_{m_{j-1}+2}, \dots, x_{m_j})^T \end{aligned} \quad (3.31)$$

où le vecteur X_j est l'état du j^{eme} sous-système avec $j = 1, \dots, m$ et m est le nombre de sous-systèmes. Le système (3.29c) prend la structure d'une suite de sous-systèmes ordonnés

$$\dot{X}_1 = H_1(X_1) = \Phi_1(X) \quad (3.32a)$$

$$\dot{X}_2 = H_2(X_2) + G_2(X_1, X_2) = \Phi_2(X) \quad (3.32b)$$

\vdots

$$\dot{X}_j = H_j(X_j) + G_j(X_{j-1}, X_j) = \Phi_j(X) \quad (3.32c)$$

$$\text{où } X_j \in R^{n_j}, \sum_{j=1}^m n_j = n, H_j : R^{n_j} \rightarrow R^{n_j}, G_j : R^n \rightarrow R^{n_j}, X^T = [X_1^T, \dots, X_m^T]$$

Sous sa forme condensée, le système (3.32) peut être exprimé par l'équation

$$\dot{X} = H(X) + G(X) \quad (3.33a)$$

$$\text{où } \begin{aligned} H(0) &= 0 \\ G(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33b)$$

$$H(X)^T = [H_1(X_1)^T, \dots, H_m(X_m)^T] \quad (3.34a)$$

$$G(X)^T = [G_1(X)^T, \dots, G_m(X)^T] \quad (3.34b)$$

$$\Phi(X)^T = [\phi_1(x_1, \dots, x_n)^T, \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)^T] \quad (3.34c)$$

Le sous système $\Phi_j(X)$ est appelé le sous système composé, la fonction $H_j(\cdot)$ est le j^{eme} sous système isolé, et le terme $G_j(\cdot)$ est la j^{eme} fonction d'interconnexion.

Selon cette ligne de décomposition, chaque sous-système composé séquentiel $\Phi_j(X)$ est de la forme

$$\dot{x}_{q_i} = \phi_{q_i}(x_{q_1}, x_{q_2}, \dots, x_{m_j}) \quad (3.35)$$

où $q_i = m_{j-1} + i$ pour $j = 2, 3, \dots, m$ et $i = 1, 2, \dots, m_j - m_{j-1}$

3.7 Méthode proposée

Pour les systèmes non linéaires de grande dimension ayant une décomposition simple (i.e, décomposition en plusieurs sous systèmes) il est souvent plus facile de trouver une fonction de Lyapunov appropriée pour chaque sous système d'ordre très réduit, par contre, dans le cas d'une décomposition rigide (i.e, décomposition en un nombre très restreint de sous systèmes), il est plus difficile de trouver la fonction de Lyapunov adaptée vu l'ordre élevé des sous systèmes engendrés. Notre but consiste donc à proposer une approche pour la construction de la fonction de Lyapunov dans le cas où la décomposition du système non linéaire de grande dimension est rigide.

Cette approche consiste à construire dans la première étape la fonction de Lyapunov $V_{n_1}^{(1)}$ du sous-système isolé donné par $\Phi_1(X)$ en utilisant l'une des techniques standards pour estimer sa région de stabilité. Puis en utilisant l'algorithme récursif de la section (3.8.2), nous construisons une séquence de fonction de Lyapunov $V_{n_j}^{(j)}$ du sous-système composé séquentiel $\Phi_j(X)$.

3.8 Calcul généré de la fonction de Lyapunov

3.8.1 Sous système isolé

Le concept de la seconde méthode de Lyapunov, nous permet d'établir la stabilité du système non linéaire de grande dimension à partir des propriétés de ses sous-systèmes et de la nature de leurs interconnexions.

Considérons le sous système isolé suivant

$$\dot{X}_1 = H_1(X_1) \quad (3.36)$$

Qui sera référé comme étant le premier sous-système isolé. Nous sommes exclusivement concerné par la stabilité des points d'équilibres $X = 0$ du système composé et $X_1 = 0$ du sous-système isolé. Dans l'étude de la stabilité du système non linéaire composé, il est souvent supposé que chaque sous-système isolé est stable. De

l'équation (3.36) il est évident que la construction de la fonction de Lyapunov est comparativement facile puisque le comportement du sous-système isolé est caractérisé par sa propre fonction de Lyapunov et ne requiert pas la connaissance du comportement des autres sous systèmes. Un tel sous-système peut être analysé par des approches bien connues dans la littérature.

3.8.2 Algorithme : Sous-système composé séquentiel

L'approche appliquée à la construction de la fonction de Lyapunov du sous-système composé séquentiel est la méthode récursive. Cette méthodologie doit procéder dans la direction "top-down" pour chaque sous-système composé séquentiel. Dans cette direction, le sous-système composé séquentiel considéré à chaque étape est augmenté par une équation, et à chaque étape du design, une fonction de Lyapunov sera construite et servira comme fonction de stockage "storage function" [50,58], de l'énergie totale accumulée.

Initialement, à partir de (3.32) nous supposons qu'il existe un sous-système isolé conservatif donné par

$$\dot{x}_{q_i} = h_{q_i}(x_p) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.37)$$

$$x_p = x_{q_1}, x_{q_2}, \dots, x_{q_r} \quad (3.38)$$

avec une intégrale première "definite first integral" $v_r^{(j)}(x_p)$ d'ordre $r = 2$. On rappelle qu'une intégrale première $\Gamma(X)$ définie dans le domaine D des espaces d'états est telle que, quand x_i 's constituât la solution, $\Gamma(X)$ prend une valeur constante C [21,53], autrement dit

$$v_r^{(j)}[X_p(t, x_0, t_0)] = C \Rightarrow \dot{v}_r^{(j)}[X_p(t, x_0, t_0)] = 0 \quad (3.39)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (3.37) ait une intégrale première est donnée par

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial h_{q_i}(x_p)}{\partial x_{q_i}} = 0 \quad (3.40)$$

Dans notre approche, on suppose que les sous-systèmes composés séquentiels sont du troisième ordre ($n_j = 3$) et $r = 2$. Autrement dit, l'équation (3.37) est équivalente à

$$\frac{dx_{q_1}}{dx_{q_2}} = \frac{h_{q_1}(x_p)}{h_{q_2}(x_p)} \quad (3.41)$$

La solution de (3.41) peut être exprimée par une intégrale d'énergie donnée par

$$I(x_p) = W(x_p) + \int_0^t U(x_p) dt = 0 \quad (3.42)$$

Si nous tentons une fonction de Lyapunov pour (3.37) par $v_r^{(j)}(x_p)$, alors

$$\dot{v}_r^{(j)} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial v_r^{(j)}}{\partial x_{q_i}} \dot{x}_{q_i} \quad (3.43)$$

où $\dot{v}_r^{(j)}(x_p)$ est la dérivée de la fonction de Lyapunov $v_r^{(j)}(x_p)$ le long des mouvements de (3.37).

La comparaison du résultat obtenu en (3.42) avec l'intégrale suivante

$$v_r^{(j)}(x_p) + \int_0^t -\dot{v}_r^{(j)}(x_p) dt = 0 \quad (3.44)$$

débouche sur les relations suivantes

$$v_r^{(j)}(x_p) = W(x_p) \quad (3.45a)$$

$$\dot{v}_r^{(j)}(x_p) = -U(x_p) \quad (3.45b)$$

Ensuite, la fonction de Lyapunov $v_{r+1}^{(j)}$ est générée à partir de $v_r^{(j)}$ en prenant la dérivée de $v_r^{(j)}$ par rapport au temps le long des trajectoires de (3.35). Ce qui donne

$$\tilde{v}_r^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial W(x_p)}{\partial x_{q_i}} \phi_{q_i}(x) = \dot{v}_r^{(j)}(x_p) + \bar{v}_{r+1}^{(j)}(x) \quad (3.46)$$

$$\text{où } x = x_1, \dots, x_{m_j} \quad (3.47)$$

Pour que $\tilde{v}_r^{(j)}$ soit au moins définie semi négative, notre stratégie consiste à éliminer les termes indéfinis dans (3.46) et de choisir astucieusement une fonction $u_{r+1}^{(j)}(x)$ telle que

$$\dot{v}_{r+1}^{(j)}(x) = \tilde{v}_{r+1}^{(j)}(x) + u_{r+1}^{(j)}(x) \leq 0 \quad (3.48)$$

La fonction de Lyapunov résultante pour le sous-système considéré est déterminée en intégrant (3.48)

$$v_{r+1}^{(j)}(x) = \lambda_j [v_r^{(j)}(x) + w_{r+1}^{(j)}(x)] = V_{n_j}^{(j)} \quad (3.49)$$

$$\text{où } w_{r+1}^{(j)}(x) = \int_0^t u_{r+1}^{(j)}(x) dt \quad (3.50)$$

Les étapes ci-dessus sont répétées itérativement pour chaque sous-système composé séquentiel jusqu'à l'obtention de la dernière fonction de Lyapunov $V_{n_j}^{(m)}$ du système non linéaire de grande dimension.

La fonction totale de Lyapunov V_T du système non linéaire de grande dimension est obtenue en ajoutant les fonctions de Lyapunov de chaque sous-système

$$V_T = \sum_{j=1}^m V_{n_j}^{(j)} \quad (3.51)$$

Exemple 3.4

Pour illustrer l'application de la méthode ci-dessus, prenons un système non linéaire de grande dimension donné par la forme

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -z_1 - z_1 z_4 \\ \dot{z}_3 &= -f(z_5) - g(z_3) \\ \dot{z}_4 &= z_2 z_1 - z_4 z_5^2 \\ \dot{z}_5 &= z_3 \end{aligned} \quad (E3.4)$$

Son digraphe associé est donné par la fig.3.2

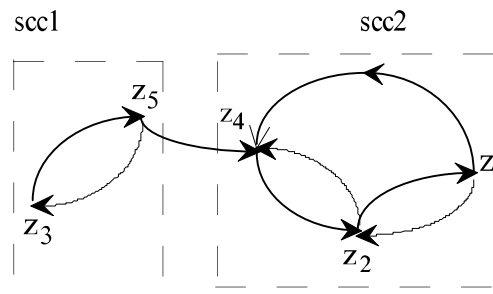


Fig.3.2 Digraph of the composite system

En utilisant l'algorithme du topological sorting, on obtient

Premier sous-système: $z_5 = x_1; \quad z_3 = x_2$

Second sous-système: $z_1 = x_3, \quad z_2 = x_4, \quad z_4 = x_5$

d'où le système(E3.4) prend la forme suivante:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{E3.4.1})$$

$$\dot{x}_2 = -f(x_1) - g(x_2) \quad (\text{E3.4.2})$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (\text{E3.4.3})$$

$$\dot{x}_4 = -x_3 - x_5 x_3 \quad (\text{E3.4.4})$$

$$\dot{x}_5 = x_3 x_4 - x_5 x_1^2 \quad (\text{E3.4.5})$$

Stabilité du sous système isolé

Le sous-système isolé est donné par (E3.4.1) et (E3.4.2).

Si x_1 est considérée comme une position alors x_2 est une vitesse, et l'équation ci dessus peut représenter une masse attachée à un ressort non linéaire. La force du ressort est $f(x_1)$ et celle de l'amortisseur $g(x_2)$. Cette analogie, nous permet d'envisager une fonction de Lyapunov constituée d'une énergie potentielle et cinétique donnée par l'expression suivante

$$V_2^{(1)}(x_1, x_2) = 0.5x_2^2 + \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi$$

Cette fonction est défini positive si $f(x_1)$ a le même signe que x_1 (une fonction impaire en x_1). En prenant sa dérivée, on obtient

$$\dot{V}_2^{(1)}(x_1, x_2) = -x_2 g(x_2) \text{ qui est définie semi négative si } g(x_2) \text{ a toujours le signe de } x_2 .$$

Stabilité du sous système composé séquentiel

En utilisant (3.37) nous obtenons

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -x_3$$

de (3.41)

$$W(x_3, x_4) = 0.5(x_3^2 + x_4^2) = v_2^{(2)} \quad (\text{A})$$

Prenons la dérivée de (A) et augmentons l'ordre du sous système d'une unité, on aura

$$\tilde{v}_3^{(2)} = -x_1^2 x_5^2 - \dot{x}_5 x_5$$

Soit $u_3^{(2)} = 0.5x_5\dot{x}_5$, alors

$$V_3^{(2)} = v_3^{(2)} = 0.5(x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)$$

La fonction de Lyapunov requise du système non linéaire de grande dimension est donnée par (3.51):

$$V_T = V_2^{(1)} + V_3^{(2)} = \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi + 0.5(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)$$

qui est définie positive. Sa dérivée

$\dot{V}_T = -(x_2 g(x_2) + x_1^2 x_5^2)$ est définie semi négative. Donc le système non linéaire de grande dimension, est stable.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, la construction de la fonction de Lyapunov est fondée sur l'idée du backstepping design. Cette technique adaptée aux systèmes présentant une structure pyramidale est basée sur la synthèse récurrente de fonctions de Lyapunov qui assure pas à pas la stabilisation de chaque étape du système. A chaque étape du processus, une commande virtuelle est ainsi générée pour assurer la convergence du système vers son état d'équilibre. C'est dans ce contexte que nous avons proposé une construction méthodologique de la fonction de Lyapunov pour les systèmes non linéaires de grande dimension par décomposition à l'aide de la théorie des graphes. Cette décomposition qui consiste à partitionner le système de grande dimension en sous systèmes a débouché sur une partition rigide du sous système composé séquentiel. Par conséquent, sa composante fortement connexe est représentée par un sous système d'ordre relativement élevé.

L'approche proposée pour la construction de la fonction de Lyapunov doit procéder dans la direction "top-down " pour chaque sous-système composé séquentiel. Dans cette direction, le sous-système composé séquentiel considéré est augmenté à chaque étape par une équation, et à chacune de ces étapes du design, une fonction de Lyapunov est construite et servira comme fonction de stockage de l'énergie totale accumulée.

Cette nouvelle approche permet fréquemment de surmonter les difficultés et les obstacles que la fonction de Lyapunov nous cause pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension. Cette construction en séquence de la fonction de Lyapunov requiert que le système de grande dimension soit décomposable en composantes fortement connexes.

Chapitre IV

Construction de la fonction de Lyapunov par la méthode du gradient variable

Construction de la fonction de Lyapunov par la méthode du gradient variable

4.1 Introduction

Il n'y a, comme toujours en matière non linéaire, aucune règle générale permettant de trouver une fonction de Lyapunov pour n'importe quel système. Selon le problème, on essaiera une fonction de telle ou telle forme. Parfois, on aura le choix entre plusieurs fonctions de Lyapunov, qui ne donneront pas obligatoirement les résultats équivalents. Parfois, on ne saura pas trouver de fonction de Lyapunov, surtout pour les systèmes de grande dimension, ce qui n'exclut pas la possibilité qu'on puisse en trouver par d'autres voies. Donc le problème majeur de cette méthode est de trouver une fonction de Lyapunov pour le système en l'absence de guide clair. Dans le cas non linéaire, il n'existe pas de méthode systématique pour choisir une fonction de Lyapunov convenable, d'où l'utilisation de l'expérience, de l'intuition et de considérations physiques et de quelques méthodes partielles telle que l'approche par le gradient variable [23,38] que nous étendons dans le cas des systèmes non linéaires de grande dimension [36].

4.2 Concept du gradient variable

Comme son nom l'indique, cette méthode est basée sur l'hypothèse d'un vecteur ∇V avec des composantes inconnues. L'avantage de la méthode du gradient variable c'est qu'elle nous permet de déterminer simultanément les deux grandeurs V et \dot{V} .

Considérons le système autonome suivant

$$\dot{X} = f(X) \tag{4.1}$$

Si une fonction particulière de Lyapunov $V(X)$ du système décrit par (4.1) existe, alors un gradient unique de cette fonction $V(X)$ existe aussi [59].

La dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (4.1) est donnée par

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n \tag{4.2}$$

ou encore sous une forme condensée

$$\dot{V} = (\nabla V)^T \dot{X} \tag{4.3}$$

La transposée du gradient $[(\nabla V)^T]$ est un vecteur ligne donné par

$$\nabla V(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \vdots \\ \nabla V_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

La fonction de Lyapunov $V(X)$ est reliée à son gradient par la relation intégrale :

$$V = \int_0^X (\nabla V)^T dX \quad (4.5)$$

$$V = \int_0^{x_1} \nabla V_1(\gamma_1, 0, \dots, 0) d\gamma_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \gamma_2, 0, \dots, 0) d\gamma_2 \\ + \dots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \gamma_n) d\gamma_n \quad (4.6)$$

où ∇V_i est la i^{eme} composante du vecteur ∇V .

Afin que la relation entre gradient et fonction scalaire soit biunivoque, la fonction gradient doit satisfaire les règles croisées :

$$\frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.7)$$

où la i^{eme} composante $\nabla_X V$ est dénotée par ∇V_i .

La condition (4.7) peut être exprimée par la condition symétrique des autres dérivées partielles des fonctions de Lyapunov possibles.

$$\nabla_X (\nabla_X V)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \end{bmatrix}$$

Si on pose le gradient $\nabla V(X) = w(X)$, alors la matrice formée par les coefficients de

$\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ doit être symétrique, d'où le théorème suivant

Théorème 4.1 Une fonction $w(X)$ est le gradient d'une fonction scalaire $V(X)$ si et seulement si la matrice

$$w(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_n} & \frac{\partial w_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

est symétrique.

Preuve voir [2 p.310]

La construction de la fonction de Lyapunov consiste donc à supposer ∇V de la forme

$$\nabla V(X) = \begin{bmatrix} \lambda_1^1(X) & \lambda_1^2(X) & \dots & \lambda_1^n(X) \\ \lambda_2^1(X) & \lambda_2^2(X) & \dots & \lambda_2^n(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1(X) & \lambda_n^2(X) & \dots & \lambda_n^n(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

où λ_i^j 's sont supposés être composés dans certain cas d'un terme constant λ_{ik}^j plus un terme variable λ_{ip}^j .

Pour que la fonction de Lyapunov $V(X)$ soit définie positive au voisinage de l'origine, les termes diagonaux $\lambda_i^i(X)$ peuvent être choisis par la forme suivante

$$\lambda_i^i(X) = \lambda_i^i(x_i) = \lambda_{ik}^i + \lambda_{ip}^i(x_i) \quad (4.9)$$

où $\lambda_{ik}^j > 0$ et $\lambda_{ip}^j(x_i)$ est une fonction paire en x_i . La détermination des coefficients inconnus du gradient ∇V est obtenue au moyen du rotationnel:

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \lambda_{ip}^j(X)}{\partial x_j} x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_j} [\lambda_{ik}^j x_j + \lambda_{ip}^j(X) x_j] \dots + \frac{\partial \lambda_{ip}^n(X)}{\partial x_j} x_n \quad (4.10)$$

et

$$\frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda_{jp}^i(X)}{\partial x_i} x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_i} [\lambda_{jk}^i x_i + \lambda_{jp}^i(X) x_i] \dots + \frac{\partial \lambda_{jp}^i(X)}{\partial x_i} x_n \quad (4.11)$$

de (4.7) les équations (4.10) et (4.11) sont égales. Ce qui implique

$$\lambda_{ik}^j = \lambda_{jk}^i \quad (4.12)$$

Puisque $\dot{V} \leq 0$, cette condition ne peut être réalisée que si les termes d'interconnexions sont éliminés [15] en groupant les termes identiques et en choisissant convenablement les termes λ_i^j 's en respectant la condition (4.7).

4.3 Procédure du gradient variable

La procédure générale de l'application de la méthode du gradient variable est donnée comme suit:

- 1) Supposons un gradient de la forme (4.8). Les termes λ_i^j peuvent être considérés en premier lieu comme étant des constantes. Ils prennent une forme plus compliquée si la structure du système l'impose.
- 2) A partir du gradient variable, formons $dV/dt = \langle \nabla V, f(X) \rangle$
- 3) En conjonction avec les conditions requises du rotationnel (4.7), on est contraint de forcer dV/dt pour qu'elle soit définie au moins semi négative
 - a- Ce qui donne quelques contraintes sur les coefficients
 - b- Utilisons le rotationnel pour déterminer le reste des coefficients inconnus
 - c- Vérifions \dot{V} car le terme additionnel requis à l'étape 3b peut l'altérer
- 4) À partir du gradient, déterminer V
- 5) Utilisons le théorème nécessaire pour établir la stabilité

Cette méthode constitue une approche formelle permettant de construire des fonctions de Lyapunov. Elle sera étendue donc aux systèmes non linéaires de grande dimension.

4.4 Système considéré

Nous considérons le système de grande dimension décrit par l'équation différentielle de la forme

$$\dot{z}_i(t) = \Psi_i(z_1, \dots, z_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.13a)$$

En utilisant la théorie des graphes, on peut montrer que le système (4.13a) se met sous la forme hiérarchique suivante

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.13b)$$

Equation (4.13b) peut être réécrite sous la forme condensée

$$\dot{X} = F(X) \quad (4.13c)$$

où $X^T = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $F(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$ tel que $X = 0$ est un point d'équilibre.

Il est supposé que (4.13c) possède une solution unique $X(t, X_0, t_0)$ pour tout $X_0 \in R^n$ défini pour $t \geq t_0 \geq 0$ et dépend continûment des conditions initiales. Nous avons $X(t, X_0, t_0) = X_0$

La stabilité de Lyapunov implique l'existence des fonctions $V : R^n \rightarrow R$. On suppose que de telles fonctions sont continues dans leur domaine respectif et vérifient la condition de Lipschitz par rapport à X et que $V(0) = 0$. La dérivée supérieure à droite d'une fonction V par rapport au temps t le long de la solution (4.13c) est donnée par

$$DV(X) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{V[X(t+h; X)] - V[X]\} \quad (4.14)$$

4.5 Système interconnecté

Un système non linéaire de grande dimension (4.13) est en effet difficile à appréhender dans sa totalité, aussi bien par ses auteurs que par ceux qui seraient prêt à l'utiliser. Il est donc nécessaire de le décomposer en sous-systèmes en s'appuyant sur la théorie des graphes. Par la suite, on suppose que le graphe associé à (4.13) est fortement connexes. Après renumérotation, les états x_j sont groupés comme suit

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1, x_2, \dots, x_{m_1})^T \\ X_2 &= (x_{m_1+1}, x_{m_1+2}, \dots, x_{m_2})^T \\ &\vdots \\ X_j &= (x_{m_{j-1}+1}, x_{m_{j-1}+2}, \dots, x_{m_j})^T \end{aligned} \quad (4.15)$$

où le vecteur X_j est l'état du j^{eme} sous-système avec $j = 1, \dots, m$ et m est le nombre de sous-systèmes. Le système (4.13) prend la structure d'une suite de sous-systèmes ordonnés

$$\dot{X}_1 = H_1(X_1) = \Phi_1(X) \quad (4.16)$$

$$\dot{X}_2 = H_2(X_2) + G_2(X_1, X_2) = \Phi_2(X) \quad (4.17)$$

\vdots

$$\dot{X}_j = H_j(X_j) + G_j(X_{j-1}, X_j) = \Phi_j(X) \quad (4.18)$$

où $X_j \in R^{n_j}$, $\sum_{j=1}^m n_j = n$, $H_j : R^{n_j} \rightarrow R^{n_j}$, $G_j : R^n \rightarrow R^{n_j}$, $X^T = [X_1^T, \dots, X_m^T]$

Sous sa forme condensée, le système (3.32) peut être exprimé par l'équation

$$\dot{X} = H(X) + G(X) \quad (4.19)$$

$$\text{où } \begin{cases} H(0) = 0 \\ G(0) = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

$$H(X)^T = [H_1(X_1)^T, \dots, H_m(X_m)^T]$$

$$G(X)^T = [G_1(X)^T, \dots, G_m(X)^T]$$

$$\Phi(X)^T = [\phi_1(x_1, \dots, x_n)^T, \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)^T]$$

Selon cette ligne de décomposition, chaque sous-système composé séquentiel

$\Phi_j(X)$ est de la forme

$$\dot{x}_{q_i} = \phi_{q_i}(x_{q_1}, x_{q_2}, \dots, x_{m_j}) \quad (4.21)$$

où $q_i = m_{j-1} + i$ pour $j = 2, 3, \dots, m$ et $i = 1, 2, \dots, m_j - m_{j-1}$

La fonction générale du gradient variable ∇V est de la forme

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 x_1 + \lambda_1^2 x_2 + \dots + \lambda_1^{q_1} x_{q_1} \\ \lambda_2^1 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \dots + \lambda_2^{q_2} x_{q_2} \\ \vdots \\ \lambda_{q_i}^1 x_1 + \lambda_{q_i}^2 x_2 + \dots + \lambda_{q_i}^{q_i} x_{q_i} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Tout en suivant la décomposition du système de grande dimension du chapitre précédent, nous proposons une approche par la technique du gradient variable pour construire la fonction de Lyapunov d'un système non linéaire de grande dimension composé de deux sous-systèmes interconnectés.

$$\dot{X}_1 = H_1(X_1) = \Phi_1(X)$$

$$\dot{X}_2 = H_2(X_2) + G_2(X_1, X_2) = \Phi_2(X) \quad (4.23)$$

Puisque le système (4.23) est sous une forme triangulaire inférieure, la fonction gradient ∇V correspondante l'est aussi, et est donnée par

$$\nabla V(X) = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 x_1 + \dots + \lambda_{m_1}^{m_1} x_{m_1} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{m_1}^1 x_1 + \dots + \lambda_{m_1}^{m_1} x_{m_1} & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \lambda_{q_1}^{q_1} x_{q_1} + \lambda_{q_1}^{q_2} x_{q_2} \\ \lambda_{q_2}^1 x_1 + \dots + \lambda_{q_2}^{m_1} x_{m_1} & \vdots & \lambda_{q_2}^{q_1} x_{q_1} + \lambda_{q_2}^{q_2} x_{q_2} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

L'avantage de cette décomposition, c'est qu'elle ne requiert pas un calcul complexe puisque les coefficients inconnus λ_i^j 's d'ordre n^2 seront réduits à un ordre inférieur.

4.6 L'approche proposée

Pour construire la fonction de Lyapunov adaptée au système non linéaire de grande dimension, notre approche consiste à utiliser la méthode du gradient variable [36]. Le mérite de cette approche est que si une décomposition appropriée du système non linéaire de grande dimension est possible, telle que la décomposition en composantes fortement connexes, alors elle ne requiert pas un calcul compliqué puisque le nombre des coefficients inconnus λ_i^j d'ordre n^2 seront réduits à un nombre nettement inférieur, et que \dot{V} et V peuvent être déterminés simultanément.

4.6.1 Sous-système isolé

Considérons le sous système isolé suivant

$$\dot{X}_1 = H_1(X_1) \quad (4.25)$$

qui sera référé comme étant le premier sous système isolé. L'idée générale de la construction de sa propre fonction de Lyapunov au point d'équilibre $X_1 = 0$ est comparativement facile puisqu'il ne requiert pas la connaissance du comportement des autres sous systèmes. Un tel sous système sera analysé par l'approche du gradient variable. L'avantage de cette approche, c'est que la dérivée et sa fonction correspondante de Lyapunov peuvent être directement déterminées à partir du gradient. Cette méthode constitue donc une approche formelle permettant de construire la fonction de Lyapunov.

4.6.2 Sous-système composé séquentiel

Puisque l'équation (4.7) doit être satisfaite, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \nabla V_{q_1}}{\partial x_{q_2}} = \frac{\partial \nabla V_{q_2}}{\partial x_{q_1}} \quad \text{où} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \nabla V_{q_1}}{\partial x_{q_2}} = x_{q_1} \frac{\partial \lambda_{q_1}^{q_1}}{\partial x_{q_1}} + \lambda_{q_1}^{q_2} + x_{q_2} \frac{\partial \lambda_{q_1}^{q_2}}{\partial x_{q_2}}$$

$$\frac{\partial \nabla V_{q_2}}{\partial x_{q_1}} = x_{q_1} \frac{\partial \lambda_{q_2}^{q_1}}{\partial x_{q_1}} + \lambda_{q_2}^{q_1} + x_{q_2} \frac{\partial \lambda_{q_2}^{q_2}}{\partial x_{q_1}}$$

Nous avons déjà vu de (4.24) que le choix du vecteur λ_j^i 's de la matrice d'interconnexion est forcé à son annulation, et pour simplifier davantage la solution, supposons

$$\frac{\partial \lambda_{q_i}^{q_j}}{\partial x_{q_i}} = \frac{\partial \lambda_{q_i}^{q_j}}{\partial x_{q_j}} = 0 \quad i, j = 1, 2$$

de (4.23) implique que $\lambda_{q_1}^{q_2} = \lambda_{q_2}^{q_1} = \eta$

$$\nabla V_{cs}(X) = \begin{bmatrix} \lambda_{q_1}^{q_1} x_{q_1} + \eta x_{q_2} \\ \eta x_{q_1} + \lambda_{q_2}^{q_2} x_{q_2} \end{bmatrix}$$

La dérivée le long de la trajectoire du sous-système composé pour $\eta = 0$ est

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \dot{V}_{cs}(X) &= (\nabla V)^T \dot{X}_j = \begin{bmatrix} \lambda_{q_1}^{q_1} x_{q_1} & \lambda_{q_2}^{q_2} x_{q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{q_1}(x_{q_1}, x_{q_2}) \\ h_{q_2}(x_{q_1}, x_{q_2}) + g_{q_2}(X) \end{bmatrix} \\ \dot{V}_{cs}(X) &= \lambda_{q_1}^{q_1} x_{q_1} h_{q_1}(x_{q_1}, x_{q_2}) + \lambda_{q_2}^{q_2} x_{q_2} [h_{q_2}(x_{q_1}, x_{q_2}) + g_{q_2}(X)] \leq 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

et comme $H_2(X_2)$ est supposée être un sous-système oscillatoire du second ordre interconnecté au système de grande dimension, sa fonction de Lyapunov correspondante est donnée par

$$V_2(x_{q_1}, x_{q_2}) = \int_0^{x_{q_1}} \lambda_{q_1}^{q_1} \gamma_{q_1} d\gamma_{q_1} + \int_0^{x_{q_2}} \lambda_{q_2}^{q_2} \gamma_{q_2} d\gamma_{q_2} \quad (4.28)$$

Exemple 4.1

Soit le système non linéaire de grande dimension suivant

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -3z_3 - z_1 b(z_1) \\
\dot{z}_2 &= -z_4 - z_2 z_1^2 \\
\dot{z}_3 &= -2z_3 + z_1 b(z_1) \\
\dot{z}_4 &= z_2
\end{aligned}
\tag{E4.1}$$

où $b(0) = 0$

En utilisant la décomposition du système non linéaire de grande dimension par la théorie des graphes, et l'algorithme de l'ordre topologique on aboutit à:

Premier sous-système (sous-système isolé): $z_1 = x_1; \quad z_3 = x_2$

Second sous-système (sous-système composé séquentiel): $z_2 = x_4, \quad z_4 = x_3$

Le système (E4.1) sera mis sous la forme triangulaire inférieure suivante:

$$\dot{x}_1 = -3x_2 - x_1 b(x_1) \tag{E4.1.1}$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_1 b(x_1) \tag{E4.1.2}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{E4.1.3}$$

$$\dot{x}_4 = -x_3 - x_4 x_1^2 \tag{E4.1.4}$$

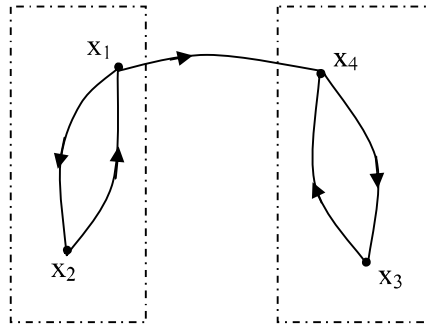


Fig. 4.1 Digraphe du système composé

$$m_1 = 2, m_2 = 4, j = 2, q_1 = m_1 + 1 = 3, q_2 = m_1 + 2 = 4, X_1 = (x_1, x_2), X_2 = (x_3, x_4)$$

Cette décomposition nous suggère une fonction gradient de la forme

$$\nabla V(X) = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 x_1 + \lambda_1^2 x_2 & \vdots & 0 \\ \lambda_2^1 x_1 + \lambda_2^2 x_2 & \vdots & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \lambda_3^3 x_3 + \lambda_3^4 x_4 & \\ \lambda_4^1 x_1 + \lambda_4^2 x_2 + & \vdots & \lambda_4^3 x_3 + \lambda_4^4 x_4 \end{bmatrix}
\tag{E4.1.5}$$

Stabilité

Stabilité du sous système isolé

Le sous-système isolé 1 est donné par (E4.1.1) et (E4.1.2).

$$\dot{x}_1 = -3x_2 - x_1 b(x_1)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_1 b(x_1)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov du sous-système isolé peut être déterminé du premier block de (E4.1.5)

$$\nabla V_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 x_1 + \lambda_1^2 x_2 \\ \lambda_2^1 x_1 + \lambda_2^2 x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.6})$$

$$\frac{dV_1}{dt} = -x_1^2 [\lambda_1^1 b(x_1) - \lambda_2^1 b(x_1)] + x_1 x_2 [-3\lambda_1^1 - \lambda_1^2 b(x_1) - 2\lambda_2^1 + \lambda_2^2 b(x_1)] - x_2^2 (2\lambda_2^2 + 3\lambda_1^2)$$

Pour que cette dérivée soit au moins définie semi négative, on doit poser

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^1 = 0 \text{ et } \lambda_1^1 = \frac{\lambda_2^2}{3} b(x_1), \text{ d'où}$$

$$\dot{V}_1(x_1, x_2) = -\frac{\lambda_2^2}{3} x_1^2 b^2(x_1) - 2\lambda_2^2 x_2^2$$

le gradient (E4.1.6) prend donc la forme suivante

$$\nabla V_1 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2^2}{3} x_1 b(x_1) \\ \lambda_2^2 x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.6a})$$

Pour obtenir la fonction de Lyapunov du sous-système, on intègre (E4.1.6a)

$$V_1(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \frac{\lambda_2^2}{3} \gamma_1 b(\gamma_1) d\gamma_1 + \int_0^{x_2} \lambda_2^2 \gamma_2 d\gamma_2$$

si $\lambda_2^2 = 6$, la fonction de Lyapunov est

$$V_1(x_1, x_2) = 2 \int_0^{x_1} \gamma_1 b(\gamma_1) d\gamma_1 + 3x_2^2$$

tant que $x_1 b(x_1)$ est dans le premier et troisième cadran, $V_1(x_1, x_2)$ est définie positive.

Le sous-système est asymptotiquement stable.

Stabilité du sous-système composé

Le sous-système composé séquentiel est donné par

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -x_3 - x_4 x_1^2$$

le terme d'interconnexion $g(X) = x_4 x_1^2$. En appliquant la construction méthodologique ci dessus et en choisissant $\lambda_{qi}^{q_i} = 1$, la dérivée (4.27) est égale à

$$\dot{V}_2(X) = x_4 [-x_4 x_1^2] = -x_1^2 x_4^2 \leq 0 \text{ qui est définie semi négative}$$

et sa fonction de Lyapunov correspondante est $V_2(x_3, x_4) = 0.5(x_3^2 + x_4^2)$

La fonction totale de Lyapunov du système non linéaire de grande dimension est

$$V_T(X) = V_1 + V_2 = 2 \int_0^{x_1} \gamma_1 b(\gamma_1) d\gamma_1 + 3x_2^2 + 0.5(x_3^2 + x_4^2)$$

et sa dérivée totale est égale à

$$\dot{V}_T(X) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = -(2x_1^2 b^2(x_1) + 12x_2^2 + x_1^2 x_4^2)$$

Cependant la dérivée totale de la fonction de Lyapunov est définie semi- négative, donc le système non linéaire de grande dimension est stable.

4.7 Conclusion

Une nouvelle approche pour générer la fonction de Lyapunov d'un système de grande dimension par la méthode du gradient variable a été proposée en décomposant le système composé en sous systèmes par la théorie des graphes. En générale, la philosophie de construire une fonction de Lyapunov adaptée aux systèmes réside dans l'extension mathématique d'une observation fondamentale de la physique. Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue alors le système devra rejoindre finalement un point d'équilibre. La procédure de base est donc de générer en premier lieu une fonction scalaire de type énergie pour le système dynamique et d'en examiner ensuite la dérivée temporelle.

L'approche présentée dans ce chapitre, est basée sur l'hypothèse d'une fonction gradient variable à partir de laquelle sont déterminées simultanément les deux grandeurs \dot{V} en premier lieu, puis sa fonction de Lyapunov V correspondante.

L'avantage de cette approche, c'est que la dérivée et sa fonction correspondante de Lyapunov peuvent être directement déterminé du gradient. Cette méthode constitue donc une approche formelle permettant de construire la fonction de Lyapunov.

Conclusion générale

Les travaux développés dans ce mémoire de thèse représentent une contribution à l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension par la méthode directe de Lyapunov. En effet, dans l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension par la méthode directe de Lyapunov, on se trouve souvent confronté à un sérieux problème, et on se révèle incapable de surmonter la complexité que cette fameuse fonction de Lyapunov nous engendre faute de règle générale ou d'un guide clair qui nous permettent de l'obtenir. Il est donc souvent astucieux de faire appel à la notion de décomposition, qui consiste à partitionner le système initial en plusieurs sous-systèmes, à résoudre un certain nombre de problèmes sur ces derniers puis à coordonner l'ensemble afin d'atteindre ou d'approcher l'objectif globale. C'est l'approche que nous avons utilisée pour la construction de la fonction de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension.

Le problème de partition des systèmes de grande dimension en sous-systèmes interconnectés peut se ramener alors à une partition purement mathématique, ou à l'utilisation des propriétés de connexité d'un graphe qui demeure la piste la plus privilégiée. Cette décomposition réside dans les possibilités de diminuer les difficultés de calcul et de réduire le conservatisme des résultats issus des fonctions de Lyapunov.

D'autre part, l'utilisation des propriétés de forte connexité des graphes permet de mettre en évidence éventuellement des structures aisément reconnaissables qui impliquent une résolution systématique. L'ordre de résolution des sous-systèmes étant fixé par le rang de chaque composante fortement connexe que représente le sous-système.

Les méthodologies développées dans ce mémoire de thèse sont essentiellement théoriques dédiées à l'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes non linéaires de grande dimension. Leur établissement fait appel exclusivement à la deuxième méthode de Lyapunov. Ainsi, l'étude que nous avons menée est basée en premier lieu sur la décomposition du système interconnecté en sous systèmes, puis en second lieu sur la construction des fonctions candidates de Lyapunov par morceaux.

Le premier chapitre a été consacré aux notions et aux outils utilisés le long de cette thèse. On y trouve une présentation des différentes approches d'obtention des fonctions de Lyapunov adaptées aux différents systèmes considérés, ainsi qu'un rappel de définitions de stabilité au sens de Lyapunov et la théorie des graphes. Notre objectif s'est limité à la présentation du principe de fonctionnement de la classe des systèmes non linéaires liées aux méthodes d'analyse proposées tout le long de cette thèse et à donner les pré requis permettant d'aborder en toute sérénité la seconde partie sur la fonction de Lyapunov et son extension aux systèmes non linéaires de grande dimension. Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié la stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension par le principe de comparaison, en s'appuyant sur les propriétés des M-matrices [33]. La décomposition du système composé était purement mathématique. Dans le chapitre trois, nous avons présenté notre contribution [35] qui réside dans l'extension des travaux [34,55,58] et qui consiste à construire la fonction de Lyapunov en soulignant la récursivité de la procédure. Nous avons focalisé notre attention sur la classe des systèmes non linéaires de grande dimension qui admettent une décomposition en composantes fortement connexes par la théorie des graphes. Au chapitre quatre, l'accent est mis sur une classe de système non linéaire de grande dimension acceptant une nouvelle fois une décomposition en composantes fortement connexes. Ainsi, en se basant sur la méthode du gradient variable, nous avons développé notre algorithme [36] pour la construction de la fonction de Lyapunov adaptée aux systèmes non linéaires de grande dimension. En d'autre terme, la plus part de nos travaux se sont inspirés des techniques de décomposition des systèmes non linéaires de grande dimension en sous systèmes, pour l'étude de leur stabilité au sens de Lyapunov. Notre démarche est exclusivement basée sur la deuxième méthode de Lyapunov et sa formulation.

Il y'a de l'apparence qu'on tirera un jour des conséquences bien utiles
de ces paradoxes, car il n'y a guère de paradoxes sans utilité

G. W. Von Leibnitz

References

- [1] M. Araki “Stability of large-scale nonlinear systems: quadratic order theory of composite system method using M-matrices” IEEE Trans. Aut. Cont. AC-23, pp 129-142, 1978
- [2] A. Bacciotti, L. Rosier “*Lyapunov functions and stability in control theory*”, 2nd edition, Springer Berlin, Heidelberg, New-York, 2005
- [3] F.N. Bailey “The application of Lyapunov’s second method to interconnected systems” SIAM Journal of control, 3, pp 443-462, 1966
- [4] R. Bellman “Vector Lyapunov functions” J. SIAM Control 1 pp 32-34, 1962
- [5] J. Bernussou, A. Titli “*Interconnected dynamical systems: Stability, decomposition and decentralization*” North Holland, New-York, 1982
- [6] C. Berge “*Graphs and Hypergraphs*” Amsterdam, the Netherlands: North Holland, 1973
- [7] V. Charara “*Applications of graph theory*” North Holland, New-York, 1970
- [8] H.D. Chiang, and L.F. Ahmed “A constructive methodology for estimating the stability regions of interconnected nonlinear systems” IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 37, no. 5, pp 577-588, May 1990
- [9] P.A. Cook “On the stability of interconnected systems” Int. J. Cont. 20, pp 407-416, 1974
- [10] N. Deo, “*Graph theory with application to engineering and computer science*” Englewood, NJ: Prentice-Hall, 1974
- [11] J.C. Doyle, A. Papachristodoulou “Methodological frameworks for large scale network analysis and design” ACM SIGCOMM Computer Communication Review, vol. 34, no. 3, pp 7-20, July 2004
- [12] K. Eugenius and A. Bhaya “A diagonal stability in the large scale system approach” Proc. of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, pp 2000-2003, Dec. 1996
- [13] J. Fantin, M. Darwish, M. Richelin “Decomposition and reduction of dynamical models of large scale power systems with application to stability studies” Proc. IFAC Symp. Large scale Systems Theory and Appl., Udine, Italy, pp 19-26, 1976

- [14] L. Fekih-Ahmed and H. D. Chiang “A new approach to estimate stability regions of interconnected nonlinear systems via the nonlinear comparison principle” IEEE International symposium on Circuits, vol. 1, pp 156-159, 1990
- [15] J. Fu “On Lyapunov stability and normal forms of nonlinear systems with a nonsemisimple critical mode-Part I: zero Eigenvalue” IEEE Trans. on Circuits and Systems-1: fundamental Theory and Applications, vol. 47, no; 6, pp 838-849, June 2000
- [16] G. Guardabassi, A.S. Vincentelli “A two levels algorithm for tearing” IEEE Trans. On Circuits and Systems, vol. CAS-23, no.12, pp 783-791, Dec. 1976
- [17] J. Guckenkeimen, P. Holmes “*Nonlinear oscillations: Dynamical systems*” Springer-Verlag, New-York, 1983
- [18] Grujic, A. A. Martynyuk, and M. Ribbens-Pavella “Large scale systems stability under structural and singular Perturbations”, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 92, Springer-Verlag, Belin, 1987
- [19] W.M. Haddad, V. Chellaboina “Vector dissipative theory for large scale impulse dynamical systems” Mathematical Problems in engineering; 3, pp 225-262, 2004
- [20] ---- “Large scale nonlinear dynamical systems: a vector dissipative systems approach” Proc. IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, pp 5603-5608, 2003
- [21] W. Hahn, "*Stabilty of motion*", (Springer Verlag. Berlin Heidelberg New-York, 1967
- [22] ---- “*Theory and applications of Lyapunov’s direct method*” Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1963
- [23] C.C. Hang, J.A. Chang “An algorithm for constructing Lyapunov functions based on the variable gradient method” IEEE Trans. On Automatic Control, pp 510-512, Aug. 1970
- [24] F. Harary, “A graph theoretic approach to matrix inversion by partitioning” *Numerische Mathematik*, vol. 4, 128-135, 1962
- [25] D.M. Himmelblau” *Decomposition of large scale problems*” North-Holland, Amsterdam, 1973
- [26] M. Hofbauer “Lyapunov based reasoning methods” IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, vol. 31, no. 6, pp 546-558, Nov. 2001
- [27] T. Hu and Z. Lin “Properties of the composite quadratic Lyapunov functions” IEEE Trans; on Automatic Cont., vol. 49, no. 7, pp 1162-1167, July 2004
- [28] A. Isidori “*Nonlinear control systems*” Springer Verlag, London, 1999

- [29] H. Ito “State dependent scaling characterization of stability and performance for nonlinear interconnected systems” Proc. of the 41th IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, USA, pp 3937-3943, Dec. 2002
- [30] M. Jamshidi “*Large scale system: Modeling and Control*” North-Holland, Amsterdam, 1996
- [31] A.K. Kevorkian “Structural aspects of large dynamical systems” 6th IFAC World Congress, Boston, MA, paper 19.3, pp 1-11 Aug. 1975
- [32] H.K. Khalil “*Nonlinear systems*” Third edition, Upper saddle River, New Jersey, Prentice Hall, 2002
- [33] M. Kidouche, A. Charef “Application of Lyapunov Method to Complex System with Nonlinear Interconnection” 6th IFAC-Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS), pt.1, paper no.39, pp 363-367, 01 – 03 Sept. Stuttgart, Germany 2004
- [34] M. Kidouche, “*Application of graph theory to stability of nonlinear composite systems*”, Master thesis, The Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, USA, 1986.
- [35] M. Kidouche, A. Charef “Constructive methodology of Lyapunov function of composite system with nonlinear interconnection term”. International Journal of Robotic and Automation, vol. 21, No. 1, pp. 19-25, 2006
Ranked journal, ISSN 0826 8185
- [36] M. Kidouche, A. Charef, “The variable gradient method for generating Lyapunov function of nonlinear composite system” 11th IEEE International conference on methods and models in automation and robotics, pp 233-237, 29 Aug.- 1 Sept. Miedzyzdroje, Poland, 2005
- [37] J.P. La Salle and S. Lefschetz “*Stability by Lyapunov’s direct method with application*” Academic Press, New-York 1961
- [38] D. Liberzon and R. Tempo “Common Lyapunov functions and gradient algorithms” IEEE Trans. On Automatic Control, vol. 49, no.6, pp 990-994, June 2004
- [39] Q. Lu, Y. sun, and S. Mei “*Nonlinear control systems and power systems dynamic*” Klumer Academic, Publisher Group, 2001
- [40] J. Lunze “Stability analysis of large scale systems composed of strongly coupled similar subsystems,” Automatica J. IFAC 25, no. 4, pp 561-570, 1989
- [41] V.M. Matrasov “On the theory of stability of motion” Prikladnaia Matematika I Mehanika, no.26, pp. 992-1002, 1962

- [42] H. J. Marquez “*Nonlinear control systems, analysis and design*” John Wiley and Sons. Inc. Hoboken, New-Jersey, 2003
- [43] F. Mazenc, and D. Nesic “Strong Lyapunov functions for systems satisfying the conditions of LA Salle” IEEE Trans. on Aut. Cont. vol. 49, no. 6, pp 1026- 1030, 2004
- [44] F. Mazenc and L.Praley “ Strict Lyapunov functions for feedforward systems and applications” Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, Dec. 2000
- [45] A.N. Michel, R. K. Miller “*Qualitative analysis of large scale dynamical systems*” Academic Press Harcourt Brace Jovanovich Publisher, New York 1977
- [46] A.N. Michel “*Qualitative analysis of dynamical systems*” 2nd edition, New-York, Marcel- Dekker, 2001
- [47] A.N. Michel, R.K. Miller, W. Tang “Lyapunov stability of interconnected subsystems: Decomposition into strongly connected components” IEEE Transactions on Circuits and Systems, 25(9), pp. 799-809, Sept.1978
- [48] H. Nijmeijer, A.V. Schaft ” *Nonlinear dynamical control systems*” Springer Verlag, New-York 1990
- [49] R. Ogata “*Modern Control Engineering*” Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New-Jersey, 1970
- [50] R. Ortega and B. Maschke “Passivity properties for stabilization of nonlinear cascade systems” Automatica, vol. 29, pp 423-424, 1991
- [51] U. Ozguner and W .R.Perkins “On the multilevel structure of large scale composite system” IEEE Trans. on Circuit and Systems, vol. CAS-22, no.7, pp 618-621, 1975
- [52] ----- “Some computer oriented algorithms for directed graphs” Proc. 16th Midwest Symp. On Circuit Theory, pp. X5.1-X5.10, April 1973
- [53] M. A. Pai “*Power system stability: analysis by direct method of Lyapunov*” North Holland Publishing Company, Amsterdam, New-York, 1981
- [54] A. Papachristodoulou, S. Prajna “On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition” Proceeding of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA, pp 3482-3487, December 2002
- [55] Philp S.M. Chin “Scalar-Lyapunov function method for single and multimachine problems in power systems” International Journal of Control 45(5), pp. 1737-1749, 1987
- [56] R. Reiss and G. Geiss “The construction of Lyapunov function” IEEE Trans. on Automatic Control, vol.8, issue 4, pp 382-383, 1963

- [57] S. Sastry “*Nonlinear systems: analysis, stability and control*” Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New-York, 1999
- [58] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P.V. Kokotovic “*Constructive nonlinear control*” Springer Verlag, New- York, 1997
- [59] D.G. Schultz and J.E. Gibson “ The variable gradient method for generating Lyapunov functions” Proc. AIEE, vol.81,no., pp 203-210, Sept. 1962
- [60] C. A; Schwartz, and A. Yan “ Systematic construction of Lyapunov functions for nonlinear systems in critical cases” Proc. of the 34th Conference on Decision and Control, New Orleans, pp 3779-3784, Dec. 1995
- [61] ---- “Complex dynamic systems: dimensionality, structure, and uncertainty” Large scale systems 4, pp 279-294, 1983
- [62] D.D. Siljak “*Decentralized control of complex system*” Academic Press, Inc. San Diego 1991
- [63] D. D. Siljak “*Large scale dynamic systems. Stability and structure*” North Holland series in System Science and Engineering, New-York, 1979
- [64] J.J Slotine and W. Li “*Applied nonlinear control*” Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New-Jersey, 1991
- [65] V.S. Steward “On an approach to techniques for the analysis of the structure of large systems of equations” SIAM Review, vol. 4, no. 4, pp 321-342, 1962
- [66] R. Tarjan “Depth-first search and linear graph algorithm” SIAM Journal of Computer, 1(2), 146-160. June 1972
- [67] M. Vidyasagar “Decomposition techniques for large scale systems with nonadditive interactions: stability and stabilizability” IEEE transactions on Automatic Control, vol. AC-25, no. 4, pp 773-779, Aug. 1980
- [68] M. Vidyasagar “New directions of research in nonlinear systems theory” *Proc. IEEE* 74(8), 1060-1091 Aug. 1986
- [69] Z. Vukic, L. Kuljaca, D; donlagic, and S. tesnjak “*Nonlinear control systems*” Headquarters Marcel Dekker, Inc. New-York, 2003
- [70] J.L. Willems “*Stability theory of dynamical systems*” Wiley, New-York, 1970



Références personnelles