

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DE CONSTANTINE –DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de DOCTORAT EN SCIENCES

**Performances des Détecteurs Distribués CFAR  
Dans Un Clutter  $\alpha$ -Stable Basés Sur des Méthodes  
de Prétraitement : La Transformée en Ondelettes  
et La Compression Non Linéaire**

*Option*

TRAITEMENT DU SIGNAL

Par

MESSALI Zoubeida

PRESIDENT	K. BELARBI	PROFESSEUR	Univ de CONSTANTINE
RAPPORTEUR	F. SOLTANI	PROFESSEUR	Univ de CONSTANTINE
EXAMINATEURS	D. CHIKOUCHE	PROFESSEUR	Univ de M'SILA
	T. LAROUSI	MAITRE DE CONFERENCE	Univ de CONSTANTINE
	K. BENYOUCEF	MAITRE DE CONFERENCE	Univ de BATNA

# Remerciements

J'aime le chemin parcouru que l'arrivé au but ; je considère ce manuscrit comme mémoire de thèse de doctorat, mais aussi comme une belle histoire à raconter, une histoire d'idées et de personnes que j'espère vous faire un peu connaître.

Faire justice à tout ceux qui ont contribué à l'élaboration de ma thèse est particulièrement délicat, je n'ai pas pu dans ce cadre limité, mentionner toutes les personnes qui méritent d'y trouver leur nom. J'espère qu'ils me le pardonneront.

Je n'aurais jamais pu accomplir ce travail sans aide. Et par ordre chronologique :

Je tiens d'abord à remercier toute ma famille qui a supporté toutes les difficultés pour me soutenir tout au long de mes études supérieures. Je les garde bien au chaud, dans mon cœur. Ils savent combien ils comptent pour moi.

Je remercie ma belle famille. Sa confiance et son soutien m'ont beaucoup aidé à achever ce travail.

Je tiens à témoigner publiquement au Professeur Faouzi SOLTANI, mon Directeur de thèse, toute la reconnaissance que je lui dois. Ce dernier a suscité, développé puis accompagné mes premiers pas dans le domaine de la détection à taux de fausse alarme constant (CFAR) avec une grande patience et avec une pédagogie extraordinaire.

Je suis redevable à Dr Abed Karim Meraim, Enseignant chercheur au département TSI de l'ENST, pour m'avoir encadrer pendant mon stage de formation à l'étranger et de m'avoir accueilli comme l'un de ses étudiants. Je le remercie surtout d'avoir accepter de présenter notre travail à la conférence ISSPA 2005 à l'australie.

Je suis particulièrement redevable à Dr Mohamed Sahnoudi, Chercheur à l'Université de Villanova, pour m'avoir aider à comprendre les distributions  $\alpha$ -stable. Par ses remarques constructives, il m'a été d'une aide précieuse et m'a permis d'améliorer de manière significative certaines parties de mes travaux publiés aux conférences.

Je remercie sincèrement le Dr Ahmed Bouridane, Reader in Computer Science, School of Computer science, Quenns University of Belfast, d'avoir accepter m'accueillir au sein de son laboratoire et sous sa direction.

J'aimerais également remercier les Docteurs et Professeur Khaled BELARBI, Toufik LAROUSSE, Djamel CHIKOUCHE et Kamel BENYOUSSEF, pour avoir accepter de juger ces quelques années de travail en participant au jury de ma thèse et pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail.

Je remercie également mes collègues du Département d'Electronique de M'sila qui ont partagé avec moi leur contexte humain, en particulier : Djamel Khedrouche, Ridha Benzid et Mouhamed Chmachma.

Je tiens à saluer toutes mes amies et tous mes amis de la résidence universitaire de M'sila qui ont constitué ma deuxième famille pendant 5 ans. En particulier : Chaouch Souad, Benmadour Fadila, Boufrioua Amel, Mezahi Fatima, Abdou Latifa, Bekhouch Fatiha, Belalia Lila, Bougriou Fayda et Cherouat Soumaya. Qu'elles trouvent ici, toute ma reconnaissance pour leur soutien moral.

Le plaisir que j'ai eu à écrire ce rapport est largement du à la bonté de plusieurs personnes qui je ne saurais assez les remercier.

Je garde le meilleur pour la fin, mon tendre Farid. Tu m'a redonné confiance au moment où j'en avais le plus besoin. Tu m'as permis de continuer ce travail sans jamais abandonner. Tu as supporté avec une grande sagesse et une grande patience que je travaille plein temps. Tu as accepté de m'accompagner pour présenter mon travail à la conférence SITIS'06. Pour tous cela et bien plus encore, je ne te remercierai jamais assez, ... Un grand merci à toi « Farid ».

Zoubeida

# Table des Matières

Résumé .....	I
Remerciements .....	III
Dédicaces .....	V
Table des Matières .....	VI
Liste des Figures .....	X
Liste des Tableaux .....	XIV
Notations et Abréviations .....	XV
Publications .....	XVII

## 1 Introduction

1.1 Motivation .....	1
1.2 Position du Problème .....	3
1.3 Objectifs et Contributions .....	4
1.4 Organisation du Document .....	5

## I/ Outils Pour Le Traitement Des Signaux Non Gaussiens

## 2 Distributions à Queues Lourdes

2.1 Bref Historique .....	9
2.2 Lois Stables Univariées .....	12
2.2.1 Lois Indéfiniment Divisibles .....	12
2.2.2 Deux Définitions Equivalents des Distributions $\alpha$ -Stables .....	12
2.2.3 Stabilité de Quelques Lois Usuelles .....	14
2.2.4 Propriétés des Lois Stables .....	16
2.2.5 Simulation des Lois Stables .....	20

2.3	Autres Distributions à Queues Lourdes .....	20
2.3.1	Loi Gaussienne Généralisée .....	21
2.3.2	Loi T-Student .....	21
2.4	Conclusion .....	22

### 3 L'analyse Par Ondelettes

3.1	Motivations .....	24
3.2	Transformée de Fourier A Fenêtre Glissante .....	25
3.3	Transformée en Ondelettes Continues .....	26
3.4	Transformée en Ondelettes Discrète .....	27
3.5	Ondelettes et Multirésolution .....	27
3.5.1	Définition de L'analyse en Multirésolution .....	27
3.5.2	Implémentation .....	29
3.5.3	Ondelettes et Analyse en Multirésolution .....	30
3.6	Débruitage Par Ondelettes (Dénoising Via Wavelets) .....	34
3.6.1	Principe du Débruitage Par Ondelettes .....	34
3.6.2	Méthodes de Débruitage .....	37
3.6.3	Exemples de Débruitage .....	40
3.7	Conclusion .....	42

## II/ La Détection à Taux de Fausse Alarme Constant

### 4 Principe du Radar et Théorie de La Décision

4.1	Introduction .....	45
4.2	Equation du Radar.....	46
4.3	Théorie de La Décision .....	48
4.3.1	Rappel .....	48
4.3.2	Tests d'Hypothèses .....	48
4.3.3	Synthèse .....	52
4.3.4	Modélisation du Clutter .....	52
4.3.5	Modélisation des Cibles .....	54
4.4	Conclusion .....	55

5	La Détection à Taux de Fausse Alarme Constant CFAR	
5.1	Introduction .....	56
5.2	Motivation .....	56
5.3	La Détection CFAR .....	57
5.4	Synthèse .....	64
5.5	Les Détecteurs Distribués CFAR .....	67
5.6	Conclusion .....	70
III/	La Détection à Taux de Fausse Alarme Constant (CFAR) dans Un Environnement $\alpha$ -Stable	
6	Performances Des Processeurs CFAR Distribués Dans Un Clutter De Distribution alpha-stable (Pearson)	
6.1	Introduction .....	72
6.2	L'analyse des Détecteurs CFAR .....	73
6.2.1	Le Détecteur CA-CFAR .....	73
6.2.2	Le Détecteur GO-CFAR .....	76
6.2.3	Le Détecteur SO-CFAR .....	78
6.3	La détection Distribuée CFAR dans un Environnement $\alpha$ -stable (Pearson) .....	80
6.4	Résultats et Discussions .....	82
6.5	Conclusion .....	86
7	Performances des Processeurs CFAR Distribués Dans Un Clutter Gaussien et Non-Gaussien Basés Sur La Transformée en Ondelettes	
7.1	Introduction .....	93
7.2	Les Détecteur CA, GO et SO-CFAR Basés Sur La Méthode de Seuillage Par Ondelettes (WT-CFAR) .....	94

7.3 Les Systèmes Distribués CFAR Basés Sur La Méthode de Seuillage Par Ondelettes .....	100
7.3.1 Première Configuration de Fusion .....	100
7.3.2 Seconde Configuration de Fusion .....	100
7.3.3 Troisième Configuration de Fusion .....	102
7.4 Résultats et Discussions .....	102
7.5 Conclusion .....	114
8 Performances Des Processeurs CA, GO et SO-CFAR Distribués Dans Un Clutter Non-Gaussien Basés Sur Une Méthode de Prétraitement Non Linéaire	
8.1 Introduction .....	115
8.2 Structure Des Détecteurs CA, GO et SO-CFAR Basés Sur Une Méthode de Compression Non Linéaire (PC-CFAR) .....	116
8.2.1 Détecteur CA-CFAR Basé Sur La Méthode de Prétraitement Non Linéaire (PC-CACFAR) .....	120
8.2.2 Le Détecteur GO-CFAR Basé Sur La Méthode de Prétraitement Non Linéaire (PC-GOCFAR) .....	122
8.2.3 Le Détecteur SO-CFAR Basé Sur La Méthode de Prétraitement Non Linéaire (PC-SOCFAR) .....	123
8.3 Détecteurs Distribués PC-CACFAR Dans Un Clutter Non Gaussien .....	124
8.3.1 Première Configuration de Fusion .....	124
8.3.2 Seconde Configuration de Fusion .....	124
8.4 Résultats et Discussions .....	127
8.5 Conclusion .....	134
9 Conclusion et Perspectives	
9.1 Conclusion Générale .....	135
9.2 Perspectives .....	137
Références .....	138

# Chapitre 1

---

## Introduction

---

Ce chapitre introductif a une double finalité. La première est de préciser le cadre de la thèse et les deux problèmes qu'on a tenté de résoudre. Tandis que la seconde consiste à présenter les principales contributions de ce travail en indiquant le fil directeur reliant ses deux parties.

### 1.1 Motivation

Ce travail trouve son origine et sa motivation dans le besoin croissant de caractériser, d'analyser et de traiter les bruits non-gaussiens [1,2], surtout en détection RADAR à taux de fausse alarme constant (CFAR) [3-7].

Le développement des méthodes de traitement du signal a donné naissance à un ensemble de techniques dont l'objectif principal est d'éclairer une situation d'application donnée. Avec la complexification des situations réelles, par exemple rupture de transmission [8], phénomènes impulsifs [6], panne de capteurs [2], canal non stationnaire [9], signal non-stationnaire, effet Doppler, besoin d'instruments de mesure de plus en plus fins, ... etc., les outils de traitement du signal se spécialisent et deviennent moins flexibles: pour s'adapter à une situation particulière, les procédures d'étude et d'analyse doivent être modifiées fréquemment.

Lors de sa pratique professionnelle, le traiteur du signal a l'occasion de constater qu'il est parfois très éloigné du cadre théorique strict dans lequel certains outils ou

méthodes de traitement du signal fonctionnent. Il est confronté à des données manquantes, erronées, incomplètes, tronquées, l'hypothèse de normalité n'est pas vérifiée, l'hypothèse de stationnarité n'est pas vérifiée, ...etc. Face à ces difficultés, il ne dispose en général que de sa propre expérience et, guidé par son intuition, il essaye de "façonner" de façon empirique des outils adaptés au problème qui lui est soumis.

Le traicteur du signal se trouve donc souvent dans l'obligation de choisir entre plusieurs clés pour ouvrir une serrure, dont aucune ne correspond exactement à la serrure en question. Afin de le guider, la statistique mathématique a établi les propriétés de telle ou telle méthode dans un contexte bien spécifié, en général décrit par un modèle probabiliste donné. Cette modélisation n'est qu'une représentation quelque peu simplifiée de la réalité du phénomène étudié. En effet, le recours à la loi normale n'est parfois que la conséquence d'un acte de foi ou la reconnaissance de l'impossibilité de trouver le "vrai" mécanisme probabiliste engendrant les observations. En plus, on rencontre des systèmes non gaussiens de façon quasi permanente dans la nature du fait de la dynamique et de l'évolution rapide des systèmes étudiés.

Plusieurs époques ont été distinguées dans l'évolution chronologique des méthodes de traitement du signal. La présente phase ne peut être résumée si simplement, aussi préférons-nous parler de l'époque "des méthodes statistiques fondées sur peu d'hypothèses". Les applications du traitement du signal conduisent donc tout naturellement à l'étude des signaux non-gaussiens et de robustesse des méthodes de traitement dans cette classe de signaux.

### **Non gaussianité**

En effet, pendant très longtemps, le développement des méthodes statistiques et l'étude de leurs propriétés ont été fondés essentiellement sur la gaussianité de la famille de lois. Cela transparaît clairement, par exemple, dans toute l'approche de R. Fisher, et dans les méthodes des moindres carrés. Néanmoins, le choix d'un modèle statistique régi par la loi normale relève plus de l'acte de foi que d'une réflexion rigoureuse.

Sur le plan théorique, le développement récent de la statistique mathématique est dominé par la recherche de solutions dans un contexte où la validité d'un modèle n'est pas assurée, et où seront faites des hypothèses limitées sur la loi de probabilité. Sur le plan pratique, dans de nombreux problèmes de communication, tels que la

transmission sur le réseau électrique, les communications HF, les communications sous-marines [6] ou bien la détection RADAR, l'hypothèse classique sur la nature gaussienne du bruit, justifiée par le biais du théorème central-limite, n'est plus valide. En effet, dans de tels systèmes, des bruits à faible probabilité d'apparition mais à très fortes amplitudes dits de nature impulsive, ou des problèmes de discontinuité de comportement du bruit, (problème de rupture) interviennent et ne peuvent plus être représentés par des lois gaussiennes. De tels phénomènes peuvent en fait être modélisés à l'aide de distributions non-gaussiennes à décroissance algébrique, c'est-à-dire, en  $x^{-\alpha}$  avec  $0 < \alpha < 2$  ayant ainsi le même comportement que les distributions  $\alpha$ -stables. C'est la raison pour laquelle nous nous intéresserons à de nouveaux modèles de distributions généraux incluant certes les modèles gaussiens mais aussi des lois de type queues lourdes.

Pour illustration, le modèle gaussien est bien approprié dans le cas des données à bande limitée. Tandis que dans le cas des données à large bande, un modèle stable à variance infinie doit être utilisé comme il est présenté dans la Figure 1.1.

## 1.2 Position du Problème

Réduire l'effet du bruit additif est un problème fondamental et récurrent dans la plupart des applications en traitement du signal [10, 11] (détection RADAR par exemple [7]) et de l'image [12]. C'est d'autre part un problème théorique central en théorie statistique que ce soit pour des objectifs d'estimation ou de détection.

Le cas où le signal, bruit ou signal source, est de nature impulsive s'avère particulièrement intéressant à la fois sur le plan théorique [13] et sur le plan pratique comme la réduction de l'effet du bruit atmosphérique en détection RADAR ou en communication HF et l'effet des valeurs aberrantes sur les procédures de traitement statistique d'un signal observé. C'est aussi un cas mal ou peu étudié dans la littérature du traitement de signal relativement au cas standard où le signal est supposé de loi gaussienne.

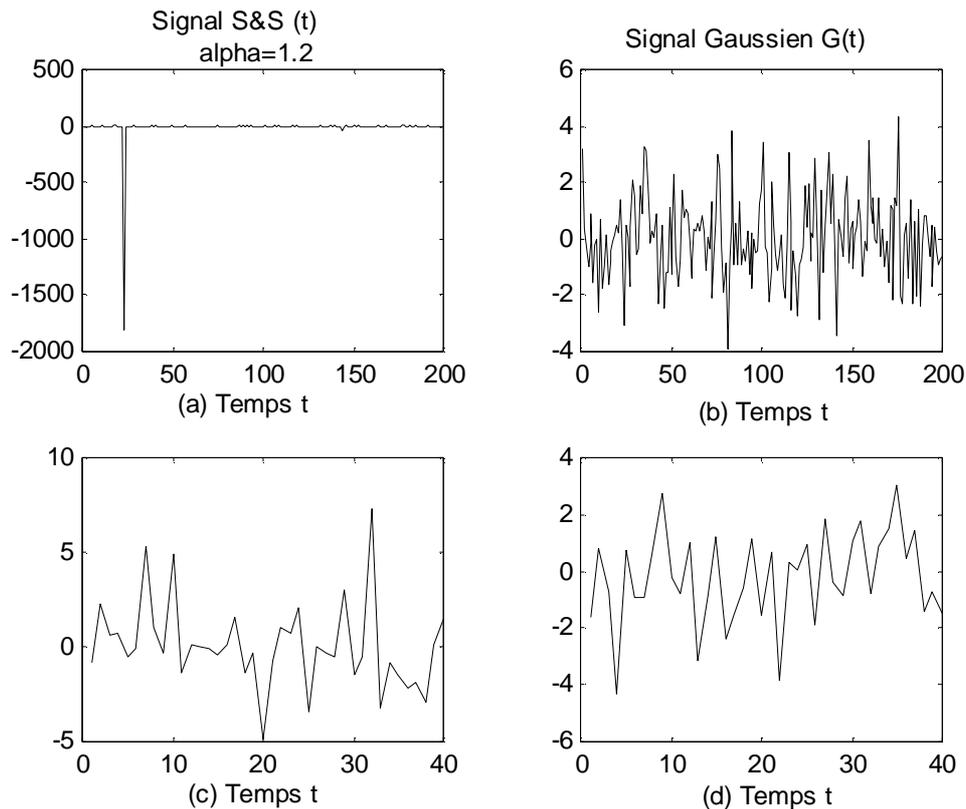


Fig. 1.1 Réalisation d'un signal gaussien et celle d'un signal  $\alpha$ -stable

Figures (c) et (d): Lorsque la taille de l'échantillon est relativement petite, les deux réalisations de la loi gaussienne et de la loi  $\alpha$ -stable sont semblables.

Figures (a) et (b): Lorsque la taille de l'échantillon est relativement large, les deux réalisations se différencient clairement.

Le but de ce travail est de développer des techniques de débruitage dans des milieux présentant des phénomènes impulsifs se caractérisant par des processus admettant des distributions à décroissance lente, appelées également, à queues lourdes et en particulier la distributions  $\alpha$ -stable (distribution Pearson ou Lévy).

### 1.3 Objectifs et Contributions

L'objectif principal est d'utiliser des théories et techniques existantes et de développer de nouvelles techniques pour le traitement des signaux de nature non-gaussienne (impulsive). Plus précisément, le travail de cette thèse de doctorat se situe au carrefour des deux grandes problématiques suivantes dans le contexte d'environnement impulsif.

**[A] L'étude des Performances des Détecteurs CFAR en Présence D'un Bruit Impulsif.**

Ce problème a été peu étudié pour certains cas statistiquement ardu. En effet lorsque le clutter est modélisé par les loi  $\alpha$ -stables, les méthodes classiques ne s'appliquent plus, car la densité de probabilité n'a pas d'expression analytique explicite, sauf dans trois cas bien précis (l'exposant  $\alpha=1$ : distribution Cauchy,  $\alpha=2$ : distribution gaussienne,  $\alpha=0.5$ : distribution Pearson ou Lévy). C'est pour cette raison que nous nous sommes limités dans notre étude au cas de la distribution Pearson. Dans ce cas nous avons étudié les performances des détecteurs basés sur l'estimation du niveau du clutter à partir de la moyenne arithmétique, à savoir le cell-averaging CFAR (CA-CFAR), le greatest of CFAR (GO-CFAR) et le smallest of CFAR (SO-CFAR). Notre but est de montrer qu'en modélisant le clutter par la distribution Pearson, la détection reste toujours à taux de fausse alarme constant.

**[B] Introduire des Méthodes de Débruitage en Détection CFAR**

La littérature reste relativement pauvre dans le cas des méthodes de prétraitement en détection RADAR à taux de fausse alarme constant et en particulier, en présence d'un bruit  $\alpha$ -stable. Pour contribuer à la résolution de ce problème, nous avons proposé des méthodes de débruitage basés sur

- ➔ La transformée en ondelettes associé à l'analyse multirésolution
- ➔ Méthode de compression non linéaire inspirée des méthodes de quantification non uniforme

Finalement, une étude numérique vient compléter les résultats théoriques et permet de comparer nos approches aux méthodes existantes dans la littérature. Notons ici que les deux problématiques traitées dans cette thèse sont très riches et attirent de plus en plus les spécialistes du traitement du signal, en particulier les radaristes.

## 1.4 Organisation du Document

Nous avons voulu présenter un exposé vivant, clair et illustré par de nombreux exemples, figures et schémas.

Ce document est constitué de la présente introduction, de trois parties illustrant les différents aspects de nos travaux et d'une conclusion. Nous avons ajouté, en début

de chaque Chapitre, une introduction détaillant plus encore le contexte et les enjeux de la partie traitée dans le dit Chapitre, ainsi que les travaux effectués. Chaque Chapitre se termine par une étude des performances de contributions. De plus, les tables de matière accompagnent les trois parties de la thèse.

Plus précisément, ce rapport de thèse est organisé comme suit

## **Introduction**

§ Chapitre 1: présente les motivations et l'originalité de ce travail de thèse, précise le cadre technique des problèmes posés et résume nos contributions principales.

## **Première Partie: Préliminaires**

§ Chapitre 2,3: constituée de deux chapitres, réunissent les notions utiles pour la suite de la famille  $\alpha$ -stable des distributions de probabilités non gaussiennes ainsi que l'outil "ondelettes" pour l'analyse des signaux. Le lecteur y trouvera toutes les définitions théorèmes et formules qu'il doit savoir pour la compréhension du manuscrit.

## **Deuxième Partie: Etude Comparative Des Détecteurs CFAR**

§ Chapitre 4: une présentation générale du principe de fonctionnement du RADAR ainsi que les différents types existants sont rappelés. Nous détaillons également la théorie de décision. Nous rappelons les critères de décision ainsi que les modèles swerling et la modélisation du clutter.

§ Chapitre 5: nous passons en revue les différents détecteurs dans le but est d'établir une comparaison des performances entre ces détecteurs.

---

## Troisième Partie: Contributions Novatrice En Détection CFAR Affectée Par Un Bruit Impulsif

§ Chapitre 6: nous étudions dans ce Chapitre les performances des détecteurs CA, GO et SO-CFAR en présence d'un bruit  $\alpha$ -stable.

§ Chapitre 7: approche de débruitage basée sur les ondelettes dans le but est de réduire l'effet du bruit impulsif. Le cas des détecteurs distribués est aussi traité. Nous proposons trois configurations de fusion pour combiner les données des détecteurs.

§ Chapitre 8: approche de débruitage basée sur une méthode de compression non linéaire. La technique est similaire à celle des méthodes de quantification non uniforme.

### Conclusion et Perspectives

§ Chapitre 9: à la fin de ce manuscrit une conclusion vient résumer les apports essentiels du présent travail ainsi que les directions futures de recherche que nous envisageons.

# Chapitre 2

---

## Distributions à Queue Lourde

---

La propriété de stabilité, le théorème de la limite centrale et la caractérisation parfaite par les moments d'ordre un (la moyenne) et d'ordre deux (la variance ou la covariance) sont des propriétés qui font de la loi gaussienne une des lois les plus utilisées en modélisation statistique. Cependant, bien que les calculs d'inférence statistique soient simples, l'hypothèse de gaussianité s'avère trop restrictive en particulier dans certains domaines pour lesquels il faut prendre en compte une plus grande variabilité des données. Dans le cadre des distributions non-gaussiennes à variance infinie sont apparues les lois  $\alpha$ -stables, dont le moment d'ordre 2 est infini dès que  $\alpha$  est strictement inférieur à 2. Ces lois sont utilisées dans de nombreux domaines tels que les télécommunications [14], le traitement du signal [6] et la finance [15], etc. ... Elles font partie de la classe des lois de probabilités non-gaussiennes à queue lourde qui englobent d'autres modèles existant dans la littérature et qui ont attiré l'attention de beaucoup de chercheurs en statistique et en traitement du signal. Le but de ce chapitre n'est pas de faire une description exhaustive des modèles non-gaussiens, il s'agit seulement d'introduire ceux qui sont particulièrement adaptés à la modélisation des phénomènes impulsifs. On présente plus en détail la famille des distributions  $\alpha$ -stables. Le seul fait que les lois stables ont une queue de type lourde ou bien asymptotiquement parétienne (pour faire référence à la loi de Pareto) ne suffit pas pour justifier leur importance. La raison profonde provient de la propriété de stabilité qui affirme que toute combinaison linéaire de v.a.r  $\alpha$ -stables est aussi de loi  $\alpha$ -stable. Après un bref rappel historique sur les lois stables, leurs distributions univariées sont définies et diverses propriétés sont

présentées dans un premier temps. Ensuite, on présente d'autres modèles non-gaussiens des signaux à queues algébriques largement utilisés pour la modélisation des signaux impulsifs.

## 2.1 Bref Historique

Au cours des développements historiques en astronomie au 18-ème siècle, Gauss a introduit sa méthode d'estimation par le critère du moindre carré et insista sur l'importance de la loi qui porte actuellement son nom [16]. Suivi par les développements de la théorie des séries de Fourier, Laplace et Poisson tentent de trouver l'expression analytique de la transformée de Fourier (TF) d'une densité de probabilité (PDF) et lancent alors la théorie des fonctions caractéristiques sur la bonne voie. Laplace, en particulier, a souligné le fait que la densité de Gauss et sa TF ont la même expression analytique. Son étudiant Cauchy étend l'analyse de Laplace et considère la TF d'une fonction de "Gauss généralisée" de forme

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-ct^n) \cos(tx) dt \text{ en remplaçant } 2 \text{ par } n. \text{ Il n'a pas réussi à résoudre le}$$

problème mais quand il a considéré le cas  $n=1$ , autre que la loi de Gauss, il a obtenu

$$\text{la fameuse loi de Cauchy } f_1(x) = \frac{c}{\pi(c^2 + x^2)} .$$

En remplaçant l'entier naturel  $n$  par le réel  $\alpha$  on obtient la fameuse famille  $f_\alpha$  des densités  $\alpha$ -stable. Cependant, à l'époque on ne savait pas qu'il s'agit d'une densité de probabilité et c'est seulement après les travaux de Polya et Bernstein que la famille  $f_\alpha$  est devenue officiellement une classe de PDF pour  $0 < \alpha \leq 2$ . En 1925, le mathématicien Français Lévy [17], en étudiant le théorème limite centrale, confirme que lorsque on relâche la condition de variance finie, la loi limite est une loi stable. Motivé par ce dernier résultat Lévy établit la TF de toutes les distributions  $\alpha$ -stable, ce qui lui attribue l'originalité de la théorie des lois stables. Plus tard en 1937, Lévy a introduit une nouvelle approche pour le traitement des lois stables qui est celle des distributions infiniment divisibles.

D'autres mathématiciens ont contribué plus tard à l'étude approfondie des lois stables, notamment de Doblin (1939) en utilisant les fonctions à variations régulières, de Gnedenko et Kolmogorov et de [18]. Quelques années plus tard dans [19], ils donnent les premières tabulations des lois symétriques  $\alpha$ -stable (S&S), ce qui va

permettre de concevoir les premiers estimateurs de ces lois. Plus tard, les efforts des statisticiens sont focalisés sur l'estimation de l'exposant caractéristique  $\alpha$  qui caractérise la loi et qui détermine si la loi est de variance finie ou infinie. Dans [20], ils ont utilisé les quantiles pour estimer le paramètre  $\alpha$  ce qui permet aux premiers tests d'apparaître du modèle i.i.d  $\alpha$ -stable. De nouvelles techniques d'estimation basées sur la fonction caractéristique vont apparaître dans les années 80 comme par exemple la méthode [21] qui semble être la meilleure méthode selon plusieurs études faites par [22] simultanément, des générateurs de variables aléatoires stables sont conçus par [23], dont les algorithmes permettent une amélioration de possibilités de simulation des situations réelles comme par exemple sur les marchés financiers ou le bruit téléphonique. Suit par les travaux de Paulouskas dans le cas multivariés [24], ils ont établi la théorie des processus linéaires des lois stables [13], ont développé la régression linéaire et non linéaire des distributions  $\alpha$ -stable et l'étude des processus stochastiques stable dans [25]. Malgré cette longue histoire de recherche scientifique, les lois  $\alpha$ -stable n'attirent que peu d'attention des chercheurs en sciences appliquées:

### **-En astronomie**

La première application des distributions  $\alpha$ -stable est apparue avant Lévy dans le domaine de l'astronomie, quand Holtsmark a montré que la force gravitationnelle exercée par le système stellaire sur un point de l'univers a une distribution  $\alpha$ -stable d'indice  $\alpha=3/2$ .

### **-En Finance**

Si on regarde par exemple les courbes boursières représentant l'évolution du prix d'un titre au cours du temps, des périodes hautes s'altèrent à des périodes basses et ainsi de suite. De plus, des fluctuations et des périodes irrégulières peuvent être observées. Mandelbrot s'appuie alors sur la loi de Pareto pour mettre en évidence un nouveau modèle de variation des prix, appelé loi  $\alpha$ -stable. [26] confirme que son modèle décrit de façon réaliste la variation de prix pratiqués sur certaines bourses des valeurs. Par la suite, [27] valide le modèle des lois  $\alpha$ -stable sur le prix du marché des actions. A la fin des années 80, plusieurs travaux semblent rejeter le modèle i.i.d  $\alpha$ -stable en se retournant vers la remise en question de l'hypothèse d'indépendance ce qui a conduit à la découverte des lois d'échelle ou loi à longue dépendance.

### **-En Télécommunication**

Les premiers travaux effectués pour l'application des lois  $\alpha$ -stables en traitement du signal ont vu le jour durant les années 70 par trois chercheurs des laboratoires de BELL (Chamber, Mallow et Stuck) en prouvant que le modèle  $\alpha$ -stable est bien adéquat pour modéliser le bruit des lignes téléphoniques. Ils ont conduit une série de travaux qui ont abouti à plusieurs résultats de références comme le critère de dispersion minimum, filtrage de Kalman des processus  $\alpha$ -stables et l'analyse de plusieurs algorithmes d'estimation et de détection dans un bruit non-gaussien. En 1993, Shao et Nikias ont publié dans IEEE Magazine un article qui a introduit la méthodologie de traitement du signal dans un environnement  $\alpha$ -stable. Plus tard, l'intérêt à ce thème devient publique et plus de 120 article de revue et de conférence sont apparus dans plusieurs applications de ce modèle. D'autre applications sont beaucoup plus récentes, dans l'Internet par exemple, le temps d'apparition d'une page Web est très variable, ce qui rappelle certains modèles à variance infinie. Dans ce contexte, [28] donnent divers exemples d'application des lois à queues lourdes et en particulier les distributions  $\alpha$ -stables. Par ailleurs, en 1999 une conférence internationale sur le sujet "application of Heavy-Tailed Distributions in Statistics, Engineering and Economic" était organisée. Quelques mois plus tard, durant la conférence IEEE Higher order statistics workshop, une session spéciale était consacrée au sujet. En 2000, la conférence ICASSP aussi consacre une session spéciale au sujet. Récemment en 2002, un numéro spécial du journal "Signal Processing" est dédié aux modèles à queues lourdes et leurs applications en Radar, images, vidéo et en analyse des données télégraphiques (No. 82, 2002).

\*

### **-D'une Manière Générale**

Notons toutefois que même si le modèle i.i.d  $\alpha$ -stables n'est pas toujours approprié, il représente un bon compromis entre exactitude de modélisation et complexité d'inférence statistique. Plusieurs livres sont consacrés à ces lois: [29] qui a étudié les lois  $\alpha$ -stables dans le contexte univarié; [13] qui ont étudié de manière approfondie beaucoup de propriétés de ces lois dans le cas univarié comme dans le cas multivarié, [6] qui ont appliqué ces lois dans le domaine du traitement du signal et [30] pour une étude de point de vue implémentation et l'intérêt que représente cette famille de distributions, il reste bien beaucoup de question à creuser surtout

dans le cas multivarié. Notre travail de recherche s'est alors axé dans le traitement des signaux impulsifs modélisés par des lois  $\alpha$ -stables.

## 2.2 Lois Stables Univariées [13]

### 2.2.1 Lois Indéfiniment Divisibles

Avant de définir les lois  $\alpha$ -stables, nous allons introduire une famille de lois plus générale: les lois *indéfiniment divisibles*. C'est à partir de ces lois que sera précisée la forme de la fonction caractéristique des lois stables. L'importance de telles lois réside dans la solution du problème suivant.

Déterminer la classe des distributions qui s'expriment comme limite d'une somme de  $n$  variables aléatoires réelles (v.a.r) indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d)?

Pour résoudre le problème, nous introduisons alors la définition suivante.

**Définition.** Une v.a.r  $X$  a une distribution indéfiniment divisible si et seulement si

$\forall n, \exists X_1, \dots, X_n$  Indépendantes et de même loi de telle que  $X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n$  où  $\stackrel{d}{=}$  signifie l'égalité en distribution.

Il faut noter que les v.a.r  $X_i$  n'ont pas forcément la même loi que  $X$  mais elles appartiennent à la même classe de distributions.

La classe des v.a.r indéfiniment divisible permet de résoudre le problème ci-dessus. En effet, on a le théorème suivant.

**-Théorème.** Une v.a.r  $X$  est la limite d'une somme de v.a.r i.i.d si et seulement si  $X$  est indéfiniment divisible.

### 2.2.2 Deux Définitions Equivalentes des Distributions $\alpha$ -Stables

**Définition.** (Propriété de Stabilité). La distribution d'une v.a.r  $X$  est stable si pour toute suite  $a_k; k \in \mathbb{N}^*$  de nombres réels et toute famille  $X_1, X_2, \dots, X_k$  i.i.d de même loi que  $X$ , il existe  $c_k > 0$  et  $b_k$ , deux réels, tel que

$$a_1 X_1 + \dots + a_k X_k \stackrel{d}{=} c X + b \tag{2.1}$$

Lorsque  $b_k = 0$ , on parle de distribution strictement stable.

**Définition.:** Fonction Caractéristique des Lois Stables (Lévy-Khinchin)

Si  $X$  a une distribution stable, alors sa fonction caractéristique s'écrit:

$$\varphi(t) = \exp\left\{iat - \gamma|t|^\alpha [1 + j\beta \text{sign}(t)\omega(t, \alpha)]\right\} \quad (2.2)$$

$$\text{où} \quad \omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2} & , \text{ si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log|t| & , \text{ si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Une loi stable notée  $S_\alpha(a, \beta, \gamma)$  est caractérisée par quatre paramètres

**- $\alpha$ : l'exposant caractéristique:**  $0 < \alpha \leq 2$ . Il caractérise les queues de distribution en mesurant leurs épaisseurs. C'est pourquoi on parle des distributions  $\alpha$ -stables à queues lourdes ou à queues épaisses. Quand  $\alpha$  est proche de 2, la probabilité d'observer des valeurs de la variable aléatoire loin de la position centrale est faible. Une valeur proche de 0 de l'indice  $\alpha$  signifie que la masse de la queue a une probabilité considérable. La valeur  $\alpha = 2$  correspond à la loi normale (loi de Gauss) pour toute valeur de  $\beta$ , alors que  $\alpha = 1, \beta = 0$  correspond à la loi de Cauchy;

**- $a$ : paramètre de position.** Il mesure la tendance centrale de la distribution. Lorsque  $\alpha > 1$ ,  $a$  représente la moyenne et si  $0 < \alpha < 1$ , alors  $a$  représente la médiane;

**- $\gamma$ : la dispersion,** mesure la dispersion de la distribution autour du paramètre de position  $a$ . lorsque  $\alpha=2$ , la variance existe et  $\gamma = \frac{1}{2} \text{Var}(X)$ ;

**- $\beta$ : paramètre de symétrie,**  $-1 \leq \beta \leq 1$ . Si  $\beta=0$ , la loi est symétrique par rapport au paramètre de position  $a$ , de fonction caractéristique  $\varphi_\alpha(t) = \exp\{iat - \gamma|t|^\alpha\}$ . Dans ce cas la loi de probabilité est dite  $\alpha$ -stable symétrique ou tout simplement S&S. Les distributions  $\alpha$ -stables symétrique représentent une sous classe importante des distributions  $\alpha$ -stable. Par exemple, la loi de Gauss et la loi de Cauchy sont des lois S&S.

Par convention, une loi  $\alpha$ -stable est dite standard si  $a=0$  et  $\gamma=1$ . Enfin, reste à noter aussi qu'il est assez courant dans la littérature de remplacer la dispersion  $\gamma$  par  $\sigma^\alpha$  et d'appeler  $\sigma$  paramètre d'échelle.

Pour donner une comparaison à la loi de Gauss, nous présentons dans la Figure 2.1 des réalisations de variables aléatoires i.i.d symétriques  $\alpha$ -stable d'exposant  $\alpha=0.1, 0.5, 0.8, 1, 1.5$ , et une réalisation gaussienne. On remarque que plus  $\alpha$  est petit, plus la variable est impulsive.

### 2.2.3 Stabilité de Quelques Lois Usuelles

**Loi de Gauss.** La loi Gauss  $N(m, \sigma^2)$  est une loi indéfiniment divisible et  $\alpha$ -stable de paramètre  $\alpha=2$ .

**Preuve**

Indéfiniment divisible: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t) &= \exp\left\{imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\} \\ &= \left[\exp\left\{i\frac{m}{n}t - t^2\frac{\sigma^2}{2n}\right\}\right]^n \end{aligned} \tag{2.4.a}$$

comme puissance nième de la fonction caractéristique d'une loi normale  $N(m/n, \sigma^2/n)$

**-Stabilité:** La loi  $N(m, \sigma^2)$  est une loi  $S_2(m, \beta, \sigma^2/2)$ .

Réciproquement une loi  $S_2(a, \beta, \gamma)$  est une loi normale  $N(a, 2\gamma)$ .

**Loi de Cauchy.** La loi de Cauchy  $C(a)$  est une loi indéfiniment divisible et  $\alpha$ -stable de paramètre  $\alpha=1$

**Preuve**

Indéfiniment divisible: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha|t| &= \exp(-a|t|) \\ &= \left[\exp\left(-\frac{a}{n}|t|\right)\right]^n \end{aligned} \tag{2.4.b}$$

comme puissance nème de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy  $C\left(\frac{a}{n}\right)$ .

**-Stabilité:** La loi de Cauchy généralisée de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - m)^2} \tag{2.5}$$

est une loi  $S_1(m, 0, \gamma)$ .

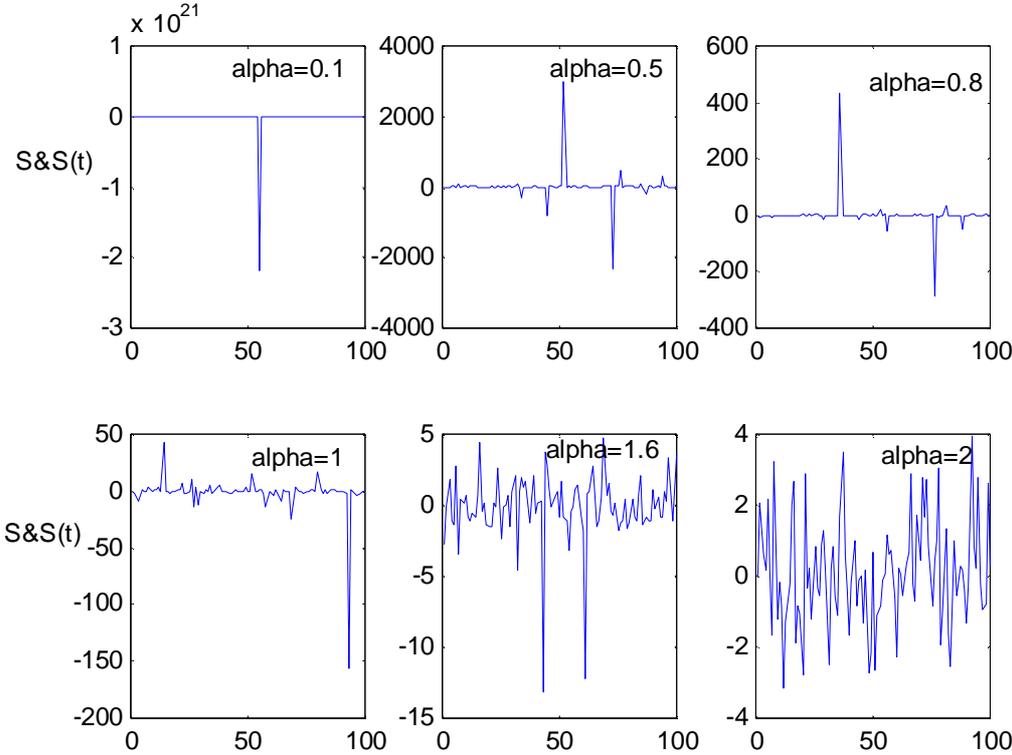


Fig.2.1 Réalisation de signaux  $\alpha$ -stables pour différentes valeurs de  $\alpha$

### 2.2.4 Propriétés des Lois Stables

Dans cette partie, les propriétés les plus importantes des lois  $\alpha$ -stables seront présentées.

#### [A]-Densité de Probabilité

Pour les v.a.  $\alpha$ -stables, il n'existe pas une expression explicite de la densité de probabilité (PDF) dans le cas général. Cependant on peut obtenir une expression sous forme d'une intégrale de la PDF à l'aide de la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique

$$\begin{aligned} f(x; \alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \Phi_{\alpha}(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-t^{\alpha}) \cos[xt + \beta t^{\alpha} \omega(t, \alpha)] dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

Quand la distribution représentée par cette densité est symétrique ( $\beta = 0$ ) autour de zéro ( $a = 0$ ), la fonction caractéristique est une fonction réelle est paire, ce qui permet de simplifier l'expression de la densité de probabilité

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma |t|^{\alpha}) \cos(tx) dt \quad (2.7)$$

#### Propriété de La Densité

1. La densité de probabilité vérifie:  $f(x; \alpha, \beta) = f(-x; \alpha, -\beta)$ .
2. La densité de probabilité d'une distribution  $\alpha$ -stable est une fonction bornée.
3. La densité de probabilité d'une distribution  $\alpha$ -stable est de classe  $C^{\infty}$ . Pour la démonstration, voir [29].

La forme explicite de la densité de probabilité de lois  $\alpha$ -stables n'existe que dans le trois cas importants suivants:

➤ La loi de Gauss  $S_2(a, 0, \gamma)$

$$\alpha = 2, \beta = 0 \Rightarrow f(x, 2, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{4\gamma}\right\} \quad (2.8)$$

➤ La loi de Cauchy  $S_1(a, 0, \gamma)$ :

$$\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow f(x; 1, 0) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + (x-a)^2)} \quad (2.9)$$

➤ La loi de Lévy  $S_{1/2}(a, 1, \gamma)$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1 \Rightarrow f(x; \frac{1}{2}, 1) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(x-a)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{2(x-a)}\right\} \quad (2.10)$$

qui est concentrée sur  $[a, \infty]$ .

**[B]- Propriétés Algébriques**

Soit  $X_1 \sim S_\alpha(a_1, \beta_1, \gamma_1)$  et  $X_2 \sim S_\alpha(a_2, \beta_2, \gamma_2)$  deux v.a.r  $\alpha$ -stables et indépendantes, alors  $X_1+X_2 \sim S_\alpha(a, \beta, \gamma)$ , tel que  $a=a_1+a_2$ ,  $\beta = \frac{\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$  et  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Soit  $X \sim S_\alpha(a, \beta, \gamma)$  une v.a.r  $\alpha$ -stable et  $c$  une constante réelle, alors  $X+c \sim S_\alpha(a+c, \beta, \gamma)$

Soit  $X \sim S_\alpha(a, \beta, \gamma)$  une v.a.r  $\alpha$ -stable et  $h$  une constante réelle non nulle, alors  $hX \sim S_\alpha(ha, \text{sign}(h)\beta, |h|^\alpha \gamma)$  si  $\alpha \neq 1$

$hX \sim S_\alpha\left(ha - \frac{2}{\pi} h \ln|h| \gamma^{1/\alpha} \beta, \text{sign}(h) \beta, |h|^\alpha \gamma\right)$  si  $\alpha=1$

**[C]- Comportement Queues Lourdes**

**Définition.** La loi de probabilité d'une v.a.r est dite à queue lourde d'indice  $\alpha$  s'il existe un nombre  $\alpha \in ]0, 2[$  et une fonction  $h$  à variation lente, c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(bx)}{h(x)} = 1 \quad \text{pour tout } b \in \mathfrak{R}^+ \text{ tel que:}$$

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x)$$

Pour une meilleure illustration des densités  $\alpha$ -stables, nous avons présenté les courbes de leurs densités de probabilités et de leurs queues pour différentes valeurs de  $\alpha$  dans la Figure 2.2 et la Figure 2.3 respectivement. Ces figures montrent l'effet de l'exposant caractéristique  $\alpha$ . Nous remarquons que plus  $\alpha$  est petit, plus la densité est impulsive et sa queue est lourde.

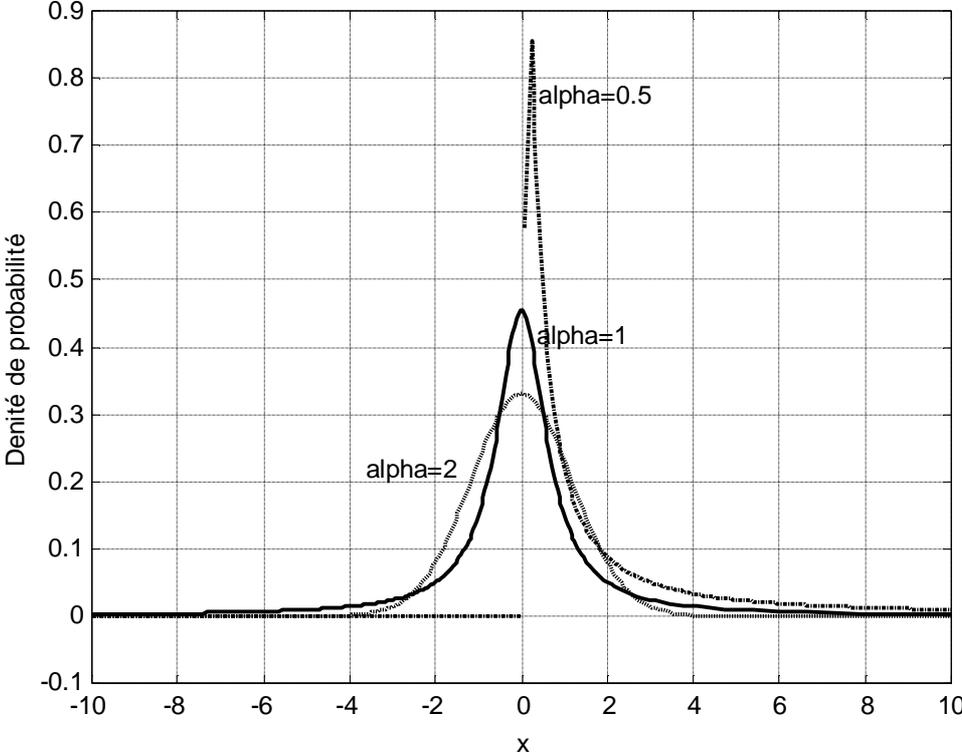


Fig.2.2 Densité de probabilité

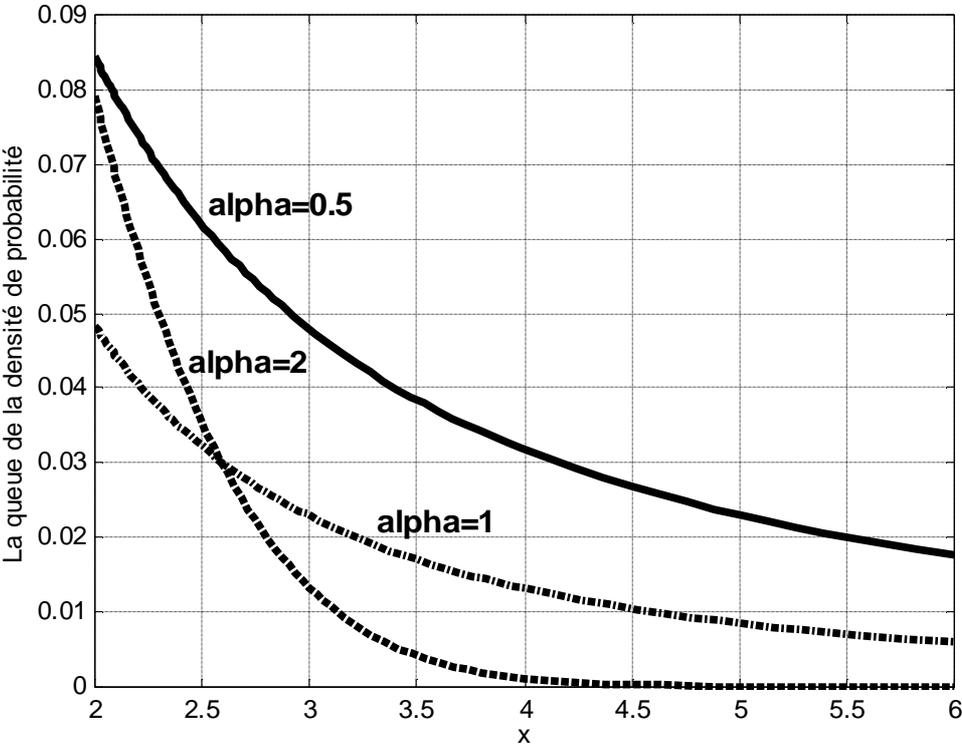


Fig. 2.3 Les queues de la densité de probabilité  $\alpha$ -stable pour différentes valeurs de  $\alpha$

### 2.2.5 Simulation des Lois Stables

Pour simuler les lois stables, Chambers et al. ont publié le premier programme en langage FORTRAN dans [31]. Le même code était amélioré par Chamber et J. Nolan est publié dans le livre [13]. Pour un programme Matlab, on peut consulter la page Web du professeur John Nolan.

#### *Quelques Exemples*

Nous avons simulé 5000 réalisations de loi S&S pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Nous avons calculé la moyenne et la variance empirique des 5000 réalisations. Les résultats confirment l'équation sur le calcul des moments. En effet, lorsque  $\alpha$  décroît vers 1, la variance diverge et lorsque  $\alpha$  devient plus petit que 1, c'est la moyenne qui commence à diverger.

#### *Estimation des Paramètres des Lois $\alpha$ -Stables*

La plupart des algorithmes de traitement du signal utilisant des lois  $\alpha$ -stables exigent l'estimation *a priori* des paramètres de la distribution  $\alpha$ -stable et en particulier l'exposant caractéristique  $\alpha$ . D'où l'importance d'avoir des techniques efficaces d'estimation des paramètres de la loi. Pour une loi  $\alpha$ -stable symétrique S&S, les paramètres de la distribution à estimer sont l'exposant caractéristique  $\alpha$  et la dispersion  $\gamma$ . De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature: le maximum de vraisemblance [32], l'utilisation des moments logarithmique de la loi S&S [33], utilisation de la fonction de répartition dans [34] et la généralisation des méthodes existantes aux cas d'une loi  $\alpha$ -stable non symétrique [35, 36].

## 2.3 Autres Distributions à Queues Lourdes

Dans cette section, nous introduisons d'autres classes de distributions à queues lourdes. La première et celle des lois gaussiennes généralisées (GG) et la deuxième classe est celle des lois appelées lois Normales Inverses Gaussiennes (NIG).

### 2.3.1 Loi Gaussienne Généralisée

Une généralisation des lois de Gauss et de Laplace est donnée par le modèle de lois gaussiennes généralisées. La distribution de ce modèle est décrite par une densité de type exponentielle de la forme

$$f_p(x) = c \exp\left(-\left|\frac{x}{\sigma}\right|^\alpha\right) \quad (2.11)$$

où  $c = \frac{\alpha}{2\sigma\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$  et  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma. Le paramètre  $\sigma > 0$  représente le

paramètre d'échelle de la distribution et  $\alpha > 0$  et le paramètre qui caractérise l'impulsivité. Notons que pour  $\alpha=2$ ,  $f_\alpha(x)$  est Gaussienne, alors que  $\alpha=1$  correspond à la loi de Laplace. Conceptuellement, plus  $\alpha$  est petit plus la distribution est impulsive. Cette classe de PDF est utilisée depuis longtemps. En raison de leur simplicité dans les calculs mathématiques elles sont largement exploitées dans les applications du traitement de la parole, l'audio ou le signal vidéo, l'image, la turbulence et les systèmes multi-utilisateurs [37].

Notons que les moments de ce type de v.a sont finis et calculables analytiquement, par opposition à d'autres PDF à queues lourdes comme les  $\alpha$ -stables présentées au début de ce chapitre.

### 2.3.2 Loi T-Student

**Définition.** (William Sealy Gosset 1908)

*Introduite par Gosset en 1908, la PDF d'une distribution T-Student est paramétrée sous la forme*

$$T_\alpha = c \left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}$$

*Il s'agit d'une densité symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

**Définition.** (Roland Aylmer Fisher 1925)

*Fisher s'intéressa aux travaux de Gosset. Il lui écrivait en 1912 pour lui proposer une démonstration géométrique de la loi Student, et pour introduire la notion de degré de liberté. Il publia notablement un article en 1925 dans lequel il*

définit la loi de Student comme rapport de deux v.a.r indépendantes  $U$  et  $Y$  suivant respectivement une loi  $N(0,1)$  et une loi  $\chi^2(\alpha)$

$$T_\alpha \equiv \frac{U}{\sqrt{\frac{Y}{\alpha}}} = \sqrt{\alpha} \frac{U}{\sqrt{Y}}$$

On dit que le quotient  $T_\alpha$  suit une loi de t-student (ou tout simplement: loi de Student) à  $\alpha$  degré de liberté.

### **Propriétés de la Loi de Student**

**L'espérance:** de l'expression de la PDF ci-dessus, on peut déduire qu'une v.a.r de loi t-Student est centrée et de moyenne nulle.

**La variance:** lorsque  $\alpha \leq 2$ , la loi de student n'admet pas de variance finie. Si  $\alpha > 2$ , le calcul de la variance donne  $\frac{\alpha}{\alpha - 2}$ .

**Queue Algébrique:** Il est facile de constater, d'après la forme de la PDF, que la loi de Student est de queue algébrique d'indice  $\alpha$ . Plus  $\alpha$  devient petit, plus la queue devient lourde.

### **Cas extrême**

1. Lorsque  $\alpha \rightarrow \infty$ , la distribution de Student est équivalente à la distribution de Gauss.
2. Lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , la distribution devient très impulsive

**Cas particulier:** Lorsque  $\alpha=1$ , le modèle correspond à celui de Cauchy.

La famille des lois t-Student était introduite en traitement du signal pour la première fois par Hall en 1966 comme modèle empirique pour le bruit atmosphérique en communication radio. Néanmoins, on trouve bien avant ce modèle dans la littérature de statistiques mathématiques indexé par un entier  $k$  au lieu du réel  $\alpha$ .

## **2.4 Conclusion**

Malgré le rôle important des lois  $\alpha$ -stables dans la modélisation des signaux à densité de probabilité à queue lourde, elles présentent des limites, nous préférons dire, elles ouvrent plusieurs questions pour surmonter les difficultés rencontrées lors de l'inférence statistique en l'absence de moments de second ordre et d'ordre supérieur.

Pour contribuer à l'amélioration des performances de la détection Radar d'une cible noyée dans un bruit impulsif de modèle  $\alpha$ -stable, nous allons proposer dans les chapitres suivants de nouvelles approches.

# Chapitre 3

---

## L'analyse Par Ondelettes

---

### 3.1 Motivations

Précisons tout d'abord les motivations ayant conduit Morlet et Grosseman [38] à développer le concept d'ondelettes pour l'analyse des signaux non-stationnaires. Beaucoup d'applications de traitement du signal nécessitent une analyse à la fois en temps et fréquence. Ceci ne pouvant être fait avec l'analyse de Fourier traditionnelle, Gabor (1946) [39] a introduit la transformée de Fourier à fenêtre glissante qui consiste à découper le signal en différentes plages de longueurs fixées, chacune de ces plages étant ensuite analysée par transformée de Fourier. Cette méthode a pour inconvénient majeur d'avoir une taille de plage de longueur fixée, ce qui rend impossible l'analyse simultanée de phénomènes dont les échelles de temps sont différentes. Pour résoudre ce problème, Morlet a introduit en 1982 la transformée en ondelettes. Un véritable engouement a alors vu le jour, Grossman (1984) [38] a démontré la formule de reconstruction, puis Daubechies (1985) [40, 41] a analysé les problèmes liés à la discrétisation, Meyer [42] a ensuite introduit le concept d'ondelettes orthogonales. Mallat [43, 44, 45] a été le premier à déceler les liens

entre la transformée par ondelettes et l'analyse multirésolution par des bancs de filtres miroirs en quadrature. Son algorithme de décomposition a conduit à la découverte par I. Daubechies d'ondelettes orthogonales à support compact [46], par des considérations sur la régularité des filtres itérés lors d'une analyse multirésolution. Comme le montre Meyer [42], les ondelettes occupent désormais une place centrale aussi bien en traitement du signal qu'en mathématiques, dans la mesure où elles permettent de relier les travaux effectués indépendamment par plusieurs mathématiciens au cours du XX<sup>ième</sup> siècle pour dépasser les limitations imposées par la transformée de Fourier. Afin de bien cerner le concept de l'analyse par ondelettes, il nous apparaît utile d'expliquer en premier lieu la transformée de Fourier à fenêtre glissante avant d'aborder la transformée en ondelettes.

### 3.2 Transformée de Fourier à Fenêtre Glissante

Afin d'analyser temporellement et fréquentiellement un signal  $f(t)$ , D. Gabor [39] a introduit en 1946 la transformée de Fourier à fenêtre glissante (TFFG) ou short time Fourier transform (STFT) défini par

$$G(\nu, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi \nu t) f(t) g(t-b) dt \quad (3.1)$$

qui consiste à positionner une fenêtre  $g(t)$  en un point  $b$  de l'axe des temps et de calculer la transformée de Fourier (TF) dans les limites de cette fenêtre. Ceci revient à effectuer le produit de  $f(t)$  avec les fonctions

$$g_{\nu, b}(t) = \exp(-j2\pi \nu t) g(t-b) \frac{1}{2} \quad (3.2)$$

Ces fonctions sont complexes, avec une enveloppe commune  $g(t)$  et avec une modulation en cosinus ou en sinus de fréquence  $\nu$  pour les parties réelles et imaginaires. Dans le travail original de Gabor, la fonction  $g(t)$  est une gaussienne. Depuis, on a généralisé cette transformation à d'autres fonctions. Lorsque la fonction  $g(t)$  est gaussienne, la TFFG est appelée transformée de Gabor. Une limitation importante de la TFFG est que, du fait qu'une seule fenêtre est utilisée pour toutes les fréquences, la résolution de l'analyse est la même en tout lieu de l'espace temps-fréquence.

### 3.3 Transformée en Ondelettes Continue

Afin d'avoir une introduction tant spatiale que fréquentielle sur un signal  $f(x)$ , il faut décomposer ce signal sur des fonctions bien localisées à la fois en temps et en fréquence. Ces fonctions sont appelées des ondelettes analysantes [42]. La localisation en temps et en fréquence a ses limites en vertu du principe d'incertitude d'Heisenberg

$$\Delta t \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi} \quad (3.3)$$

#### Définition

La transformée en ondelettes (TO) d'une fonction  $f(x)$  telle qu'elle a été définie par J. Morlet s'écrit

$$C_f(a,b) = K \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^* \left( \frac{x-b}{a} \right) dx \quad (3.4)$$

- $C_f(a,b)$  est le coefficient d'ondelettes de la fonction  $f(x)$
- $\psi^*$  est le complexe conjugué de l'ondelette analysante  $\psi$
- $a$  est le facteur d'échelle ou de dilatation
- $b$  est un paramètre de translation
- $K$  est un coefficient de normalisation. En général  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$ , mais on peut prendre aussi  $K=1$  ou  $K=1/a$ .

A une échelle donnée, la Transformée en ondelette est considérée comme un filtre, le filtre se dilatant en fonction de l'échelle d'analyse.

#### La Transformée Inverse

La transformée inverse ne peut être effectuée que si la condition dite d'admissibilité est satisfaite [47]

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} < +\infty \quad (3.5)$$

On a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.6)$$

Ce qui est équivalent à

$$|\hat{\psi}(0)| = 0 \quad (3.7)$$

La transformée inverse est définie pour  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$  par

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} C(a,b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2} \quad (3.8)$$

Le domaine de définition de la fonction sera  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$

### 3.4 Transformée en Ondelettes Discrète

La discrétisation est basée sur le théorème d'échantillonnage de Shannon: si la transformée de Fourier  $\hat{f}(v)$  d'une fonction  $f(x)$  est nulle en dehors de l'intervalle  $|v| \leq v_c$ , la fonction peut être parfaitement reconstruite à l'aide de ses échantillons  $f(nh)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Le pas d'échantillonnage  $h$  doit être inférieur ou égal à  $\frac{1}{2v_c}$ ,  $v_c$  étant la fréquence de coupure.

Il y a plusieurs manières d'introduire une analyse en ondelettes discrète. Celle de Littlewood-Paley consiste à effectuer une dichotomie de l'espace des fréquences en séparant en deux parties égales les hautes et les basses fréquences et en itérant sur la partie basse fréquence. Daubechies [41] a étudié l'effet des paramètres  $a$  et  $b$  ainsi que leurs effets sur la restauration pour des ondelettes données. Elle a remarqué que la restauration était parfaite dans certains cas où la bande de fréquence n'était pas limitée. Ceci a conduit au concept de multirésolution.

### 3.5 Ondelettes et Multirésolution

#### 3.5.1 Définition de L'analyse en Multirésolution

On cherche à écrire une fonction  $f(x)$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , comme une suite d'approximation successives.  $L^2(\mathbb{R})$  est l'espace vectoriel des fonctions mesurables de carré intégrable (the vector space of measurable, square-integrable one-dimensional functions  $f(x)$ ) Chacune d'elle étant la fonction  $f(x)$  lissée avec des fonctions de plus en plus concentrées. Ces approximations n'ont pas la même résolution. L'analyse en multirésolution est donc une suite croissante de sous-espaces linéaires  $V_{j(j \in \mathbb{Z})}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  ayant les propriétés suivantes

- ➔ Emboîtement des sous-espaces

$V_j \subset V_{j+1}$ . Si  $f(x) \in V_j$  alors  $f(x) \in V_{j+1}$

➤ Densité de l'espace engendré

$\cup V_j = L^2(\mathbb{R})$ , autrement dit, si  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , sa projection  $\bar{f}_j(x)$  dans  $V_j$  tend vers  $f(x)$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$

➤ Racine de l'analyse nulle

$\cap V_j = 0$ . La projection  $\bar{f}_j(x)$  de toute fonction  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  converge vers la fonction constante nulle lorsque  $j \rightarrow -\infty$

➤ Propriété d'invariance par translation

Si  $f_j(x) \in V_j$  alors  $\forall k \in \mathbb{Z}, f_j(x-k) \in V_j$

➤ Propriété d'invariance par dilatation

Si  $f_j(x) \in V_j$  alors  $f_j(2x) \in V_{j+1}$

➤ Le choix du facteur 2 correspond à celui de l'analyse dyadique. Celle-ci est la plus simple à mettre en œuvre. Il existe cependant d'autres analyses, où le facteur est de  $\sqrt{2}$

➤ Existence de base

Il existe une fonction  $\phi(x)$  tel que l'ensemble des fonctions  $\phi(x-k)$  forme une base de  $V_0$

➤ Discrétisation

Il existe entre  $V_0$  et  $l^2(\mathbb{Z})$  un isomorphisme  $I$ . Autrement dit, une fonction  $f(x)$  approximée dans  $V_0$  est une fonction  $\bar{f}_0(x)$  que l'on peut caractériser par un ensemble de termes  $C^{(0)}(k)$  formant un vecteur  $l^2(\mathbb{Z})$ .

Si l'ensemble des fonctions  $\phi(x-k)$  est une base de  $V_0$  alors l'ensemble des fonctions  $\sqrt{2^j} \phi(2^j x - k)$  est une base de  $V_j$ . L'échelle associée à la résolution  $j$  est

$a_j = \frac{1}{2^j}$ . On pose

$$\phi_j(x) = 2^j \phi(2^j x) \tag{3.9}$$

La base s'écrit alors

$$\left( \sqrt{2^{-j}} \phi_j(x - 2^{-j} k) \right) \tag{3.10}$$

ou en fonction de  $a_j$

$$\left( \sqrt{a_j} \phi_j(x - a_j k) \right) \tag{3.11}$$

La fonction  $\phi$  est appelée fonction d'échelle, ou base d'interpolation. La fonction  $\phi_j(x)$  n'est pas de norme unité, son intégrale vaut 1.

### 3.5.2 Implémentation

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une approximation en multirésolution et  $\phi(x)$  une base d'interpolation. Les fonctions  $\{\sqrt{2^{-j}}\phi(x - 2^{-j}k)\}$  forment une base de  $V_j$ . Or les deux sous-espaces  $V_j$  et  $V_{j+1}$  étant emboîtés, une fonction quelconque de  $V_j$  peut être exprimée en fonction de la base de  $V_{j+1}$ .  $V_j \subset V_{j+1}$ , on peut écrire

$$\phi(x - 2^{-j}k) = 2^{-j-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_j(u - 2^{-j}k), \phi_{j+1}(u - 2^{-j-1}l) \rangle \phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}l) \quad (3.12)$$

en faisant le changement de variable suivant  $2^j x - k = X/2$  avec  $dX = 2^{j+1} dx$  on obtient

$$2^{-j-1} \langle \phi_j(u - 2^{-j}k), \phi_{j+1}(u - 2^{-j-1}l) \rangle = \langle \phi_{-1}(x), \phi_0(x - (l - 2k)) \rangle \quad (3.13)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \langle f(x), \phi_j(x - 2^j k) \rangle &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{-1}(x), \phi_0(x - (l - 2k)) \rangle \\ &\langle f(x), \phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}l) \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

Posons alors

$$h(u) = \langle \phi_{-1}(x), \phi_0(x - u) \rangle, \text{ on aura}$$

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \langle f(x), \phi_j(x - 2^j k) \rangle \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l - 2k) f_{j+1}(l) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{h}(2k - l) f_{j+1}(l) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$f_j$  étant le coefficient d'interpolation à la résolution  $j$  et  $\bar{h}(l) = h(-l)$ .

$h(n)$  est un filtre discret de transformée de Fourier

$$\hat{h}(v) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-i2\pi vx} \quad (3.16)$$

$\hat{h}(v)$  est alors un filtre discret de période 1. Il vérifie les relations suivantes

$$|\hat{h}(0)| = 1 \quad (3.17)$$

$$\left| \hat{h}(v) \right|^2 + \left| \hat{h}\left(v + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1 \quad (3.18)$$

La fonction  $\phi_{-1}(x) \in V_{-1}$ , on peut la décomposer sur la base  $\phi(x-k)$  de  $V_0$ , on aura alors

$$\begin{aligned}\phi_{-1}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{-1}(x), \phi_0(x-k) \rangle \phi_0(x-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \phi_0(x-k) \\ &= \frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}\tag{3.19}$$

La transformée de Fourier de cette relation nous donne

$$\hat{\phi}(2v) = \hat{h}(v) \hat{\phi}(v)\tag{3.20}$$

La relation (3.20) est la relation caractéristique des bases emboîtées.

### 3.5.3 Ondelettes et Analyse en Multirésolution

#### Décomposition

Le passage d'une résolution à une autre revient à projeter la fonction  $f_{j+1}$  appartenant à un espace  $V_{j+1}$  sur un espace  $V_j$  dont les fonctions  $\sqrt{2^{-j}} \phi_j(x - 2^{-j}k)$  forment une base. L'information perdue lors de cette projection correspond à la projection  $C_j$  de  $f_{j+1}$  sur l'espace  $O_j$  complémentaire de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  ( $V_{j+1} = V_j \oplus O_j$ ).  $C_j$  correspond alors au détail de  $f_{j+1}$ . Par analogie, l'ensemble  $\sqrt{2^{-j}} \psi_j(x - 2^{-j}k)$  forme une base de  $O_j$  avec  $\psi_j(x) = 2^j \psi(2^j x)$ . Il est alors possible de décomposer toute fonction de  $O_j$  sur  $V_{j+1}$ . D'où

$$\psi_j(x - 2^{-j}n) = 2^{-j-1} \sum \langle \psi_j(u - 2^{-j}n), \phi_{j+1}(u - 2^{-j-1}k) \rangle \phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}k)\tag{3.21}$$

En faisant le changement de variable  $2^j x - n = X/2$ , avec  $dX = 2^{j+1} dx$  on obtient alors

$$2^{-j-1} \langle \psi_j(x - 2^{-j}n), \phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}k) \rangle = \langle \psi_{-1}(x), \phi_0(x - (k - 2n)) \rangle\tag{3.22}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}C_j(n) &= \langle f(x), \psi_j(x - 2^{-j}n) \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_{-1}(u), \phi_0(u - (k - 2n)) \rangle \langle f(x), \phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}k) \rangle\end{aligned}\tag{3.23}$$

Posons

$$g(n) = \langle \psi_{-1}(u), \phi_0(u - n) \rangle\tag{3.24}$$

On aura

$$\psi_j(x - 2^j n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k - 2n) \phi_{j+1}(x - 2^{j-1} k) \quad (3.25)$$

et

$$\begin{aligned} C_j(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k - 2n) f_{j+1}(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{g}(2n - k) f_{j+1}(k) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Avec  $\bar{g}(n) = g(-n)$

On peut alors décomposer la fonction  $\psi_{-1}(x)$  sur la base  $\phi(x - k)$  de  $V_0$  puisque  $O_{-1}$  est un sous espace de  $V_0$ , on aura alors

$$\begin{aligned} \psi_{-1}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_{-1}(x), \phi(x - k) \rangle \phi(x - k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n) \phi(x - k) \end{aligned} \quad (3.27)$$

La transformée de Fourier du filtre  $g(n)$  est définie par

$$\hat{g}(v) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i2\pi vx} \quad (3.28)$$

La relation (3.27) donne

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) \phi(x - k) \quad (3.29)$$

En prenant la transformée de Fourier, on aura alors

$$\hat{\psi}(2v) = \hat{g}(v) \hat{\phi}(v) \quad (3.30)$$

On en déduit la relation

$$\left| \hat{g}(v) \right|^2 + \left| \hat{g}\left(v + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1 \quad (3.31)$$

Les fonctions  $\left\{ \frac{1}{2} \psi_{-1}(x - 2^{-1}k) \right\}$  et  $\left\{ \frac{1}{2} \phi_{-1}(x - 2^{-1}k) \right\}$  étant orthogonales puisque les sous espaces sont complémentaires, on déduit de la formule de Poisson que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(2v + k) \hat{\psi}^*(2v + k) = 0 \quad (3.32)$$

Ce qui est équivalent à

$$\hat{h}(v) \hat{g}(v) + \hat{h}\left(v + \frac{1}{2}\right) \hat{g}^*\left(v + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (3.33)$$

Mallat choisit comme filtre la fonction dont la transformée de Fourier est

$$\hat{g}(v) = \exp(-i2\pi v) \hat{h}^* \left( v + \frac{1}{2} \right) \quad (3.34)$$

Ce qui entraîne que

$$g(n) = (-1)^{1-n} h(1-n) \quad (3.35)$$

Les filtres  $g(n)$  et  $h(n)$  sont dits filtres miroirs conjugués (Conjugate Mirror Filters CMF). On obtient donc l'approximation du signal  $f_j$  et le signal détail  $C_j$  à partir de  $f_{j+1}$  en convoluant  $f_{j+1}$  respectivement par  $\bar{h}$  et  $\bar{g}$  et en retenant un échantillon sur deux comme c'est illustré sur la Figure 3.1.

### Reconstruction

Le signal discret peut être reconstruit à partir de sa pyramide. Toute fonction  $f_{j+1}(x) \in V_{j+1}$  est décomposable sur une base de ce sous espace vectoriel, or comme  $V_{j+1} = V_j \oplus O_j$ , l'ensemble  $\left\{ \sqrt{2^{-j}} \phi_j(x - 2^{-j}k), \sqrt{2^{-j}} \psi_j(x - 2^{-j}k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthogonale de ce sous espace vectoriel, en décomposant alors  $\phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}k)$  sur cette base, on aura

$$\begin{aligned} \phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}k) &= 2^{-j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\langle \phi_j(u - 2^{-j}l), \phi_{j+1}(u - 2^{-j-1}k) \right\rangle \phi_j(x - 2^{-j}l) \\ &\quad + 2^{-j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\langle \psi_j(u - 2^{-j}l), \phi_{j+1}(u - 2^{-j-1}k) \right\rangle \psi_j(x - 2^{-j}l) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ce qui conduit en utilisant les filtres  $h(n)$  et  $g(n)$  définis précédemment à

$$\phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}k) = 2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k - 2l) \phi_j(x - 2^{-j}l) + g(k - 2l) \psi_j(x - 2^{-j}l) \quad (3.37)$$

On passe donc d'une résolution donnée à une résolution plus basse en prenant le produit scalaire

$$\begin{aligned} \left\langle f(x), \phi_{j+1}(x - 2^{-j-1}k) \right\rangle &= 2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k - 2l) \left\langle f(x), \phi_j(x - 2^{-j}l) \right\rangle \\ &\quad + 2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g(k - 2l) \left\langle f(x), \psi_j(x - 2^{-j}l) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ce qui s'écrit aussi

$$f_{j+1}(k) = 2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k - 2l) f_j(l) + g(k - 2l) C_j(l) \quad (3.39)$$

On reconstruit la fonction en mettant des zéros entre deux échantillons de  $f_j$  et  $C_j$  et en convoluant les signaux avec les filtres  $h$  et  $g$ . ce qui revient à interpoler les approximations puis à les sommer comme c'est montré sur la Figure 3.2.

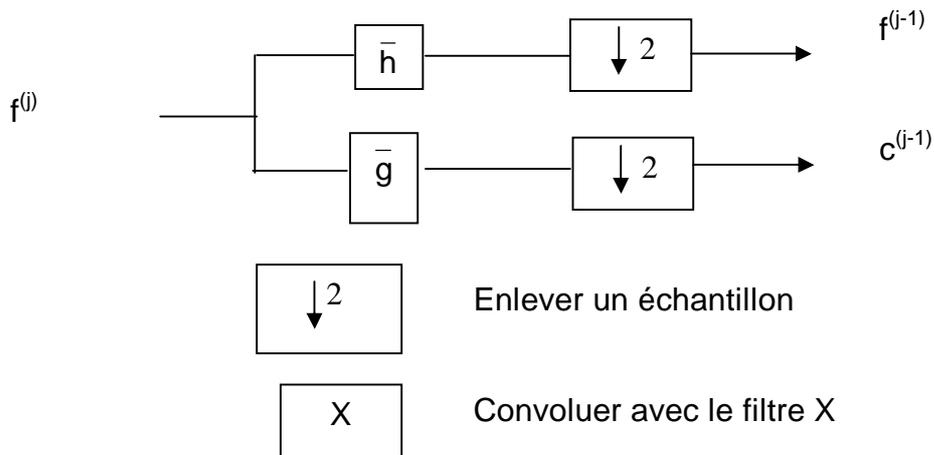


Fig. 3.1 Passage d'une résolution donnée à une résolution inférieure

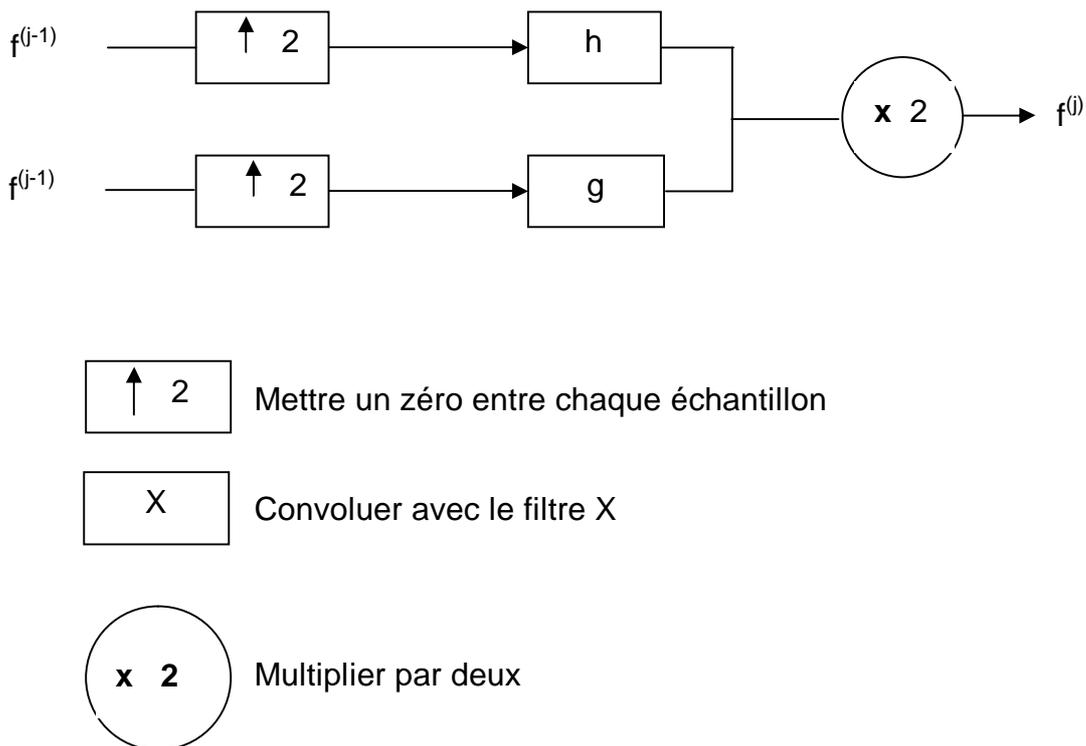


Fig. 3.2 Passage d'une résolution donnée à une autre résolution supérieure

## 3.6 Débruitage par Ondelettes (Denoising Via Wavelets)

Un des grands succès des ondelettes est le débruitage de signaux et d'images qui est souvent considérée comme un problème particulièrement difficile. Ce paragraphe tente d'en expliquer les raisons, en se concentrant sur les signaux unidimensionnels.

Le débruitage et l'estimation de fonctions se basant sur les représentations par ondelettes donnent lieu à des algorithmes simples [48, 49, 50], performant et souvent plus faciles à régler que les méthodes traditionnelles d'estimation fonctionnelle. Nous abordons tout d'abord le principe de débruitage par ondelettes, puis une introduction statistique aux méthodes de seuillage et des exemples. On se focalise sur un modèle du type

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t \quad (3.40)$$

Ce modèle est très simple et les hypothèses sur le bruit sont très fortes. Fort heureusement, le "bassin d'attraction" des méthodes de débruitage est bien plus large. Ainsi on examine deux extensions de ce modèle à travers d'exemples: dans le cas d'un bruit présentant des ruptures multiples de la variance et dans celui d'un signal réel où la structure du bruit est inconnue.

### 3.6.1 Principe du Débruitage par Ondelettes

#### *Le Modèle*

Le débruitage consiste à restaurer un signal utile à partir d'observations corrompues par un bruit additif [48].

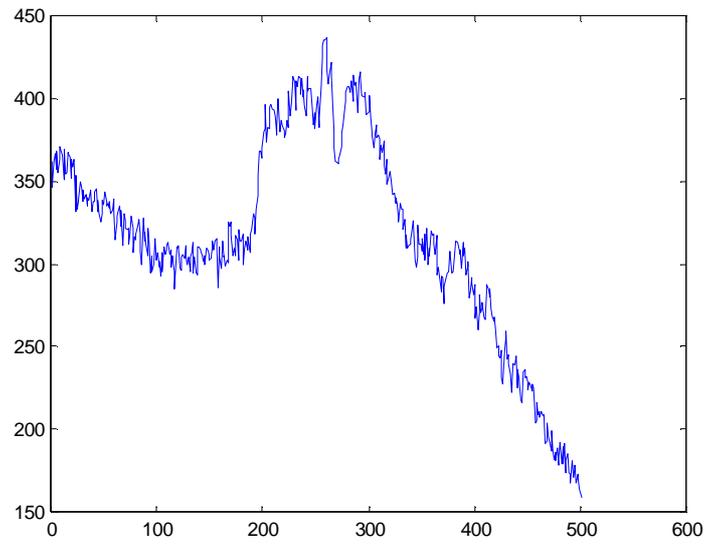
Le modèle statistique le plus simple de débruitage est le suivant

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t, t=1, \dots, n$$

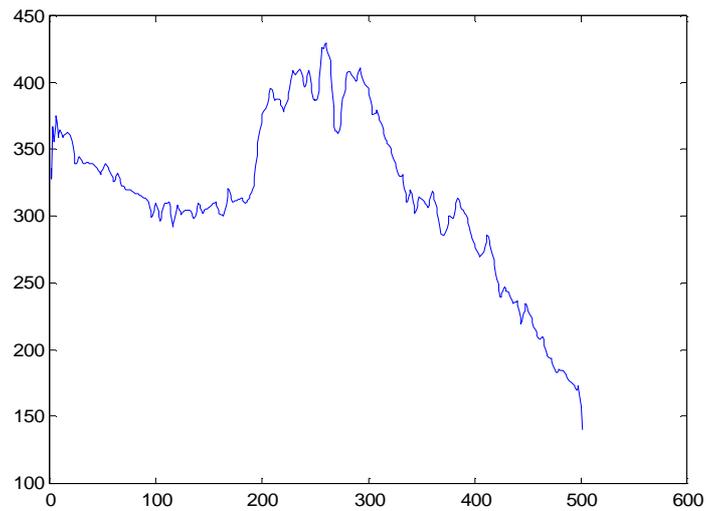
Où  $f$  est une fonction inconnue, les variables  $(Y_t)_{1 \leq t \leq n}$  sont observées et  $(\varepsilon_t)_{1 \leq t \leq n}$  est un bruit blanc gaussien inobservable, centré et de variance  $\sigma^2$  inconnue. Il s'agit alors, partant des seules observations, de reconstruire le signal  $(f(t))_{1 \leq t \leq n}$  ou d'estimer la fonction  $f$ .

#### *Débruitage: avant et après*

Le problème du débruitage est facile à saisir à partir d'un exemple. On voit sur la Figure 3.3, un signal réel bruité. Le signal débruité par ondelettes est situé en



(a)



(b)

Fig. 3.3 Débruitage par ondelettes avant et après

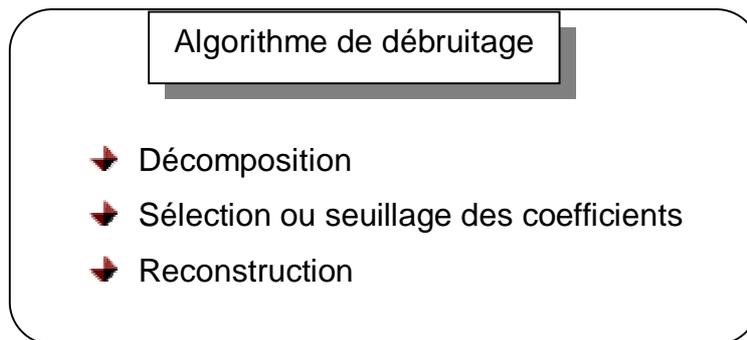
(a) Signal réel bruité

(b) Le résultat du débruitage par ondelettes

dessous. Il est manifestement bien débruité, tant dans les zones où le signal sous-jacent est lisse que dans la zone autour de la position 290 où le signal présente des irrégularités, des variations brusques. Les changements de niveau de bruit autour des abscisses entre 200 et 350 sont bien absorbés par la procédure. Les méthodes classiques sont incapables d'une telle adaptation en temps.

### **L'algorithme**

L'algorithme de base du débruitage est simple et procède en trois phases



Partant du signal original, on le décompose d'abord sur une base orthogonale d'ondelettes au moyen de transformée discrète. Ensuite, on sélectionne une partie de coefficients par seuillage, en conservant intacts les coefficients d'approximation de niveau convenablement choisi. Enfin, en utilisant les coefficients seuillés, on reconstruit un signal en leur appliquant la transformée discrète inverse. Le signal ainsi obtenu est le signal débruité.

Il convient, pour plus de clarté, de citer quelques arguments utiles

-La décomposition par ondelettes est additive, par conséquent, l'analyse de  $Y$  est égale à la somme des analyses du signal  $f$  et du bruit  $\varepsilon$ ;

-Les signaux utiles sont, dans bien des cas, assez réguliers sauf en de rares endroits comme le début et la fin de phénomènes transitoires, ou les ruptures par exemple. Ceci rend la décomposition par ondelettes de  $f$  très creuse et très bien représentée par les coefficients d'une approximation assez grossière auxquels s'ajoutent quelques grands coefficients de détail;

-Dans le cas où les irrégularités du signal engendrent des coefficients plus grands que l'échelle du bruit, la procédure de sélection retient les coefficients liés au signal pourvu que l'on sache estimer convenablement cette échelle;

-L'analyse est locale, par conséquent l'opération de seuillage conduit à régulariser localement le signal d'origine.

### 3.6.2 Méthodes de Débruitage

Dans ce paragraphe, on donne quelques éléments théoriques concernant les méthodes de débruitage.

Considérons une base orthonormale d'ondelettes sur l'intervalle obtenue en regroupant les atomes temps-échelle sans les distinguer par la double indication habituelle. On la note  $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n}$ . On décompose sur cette base

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t, \quad t=1, \dots, n$$

La décomposition par ondelettes étant additive, l'analyse de  $Y$  est égale à la somme des analyses du signal  $f$  et du bruit  $\varepsilon$ , les coefficients s'écrivent alors

$$d_j = \theta_j + w_j, \quad j=1, \dots, n \quad (3.41.a)$$

avec un lien qui peut s'exprimer par le biais d'une matrice orthogonale  $W$  associée à la transformée en ondelettes discrète (DWT)

$$d = WY, \quad \theta = Wf \quad \text{et} \quad w = W\varepsilon. \quad (3.41.b)$$

#### Remarque

La DWT transforme  $n$  données dans le domaine temporel en  $n$  coefficients dans le domaine des ondelettes. La transformée est linéaire et peut être exprimée au moyen d'une matrice de dimension  $n \times n$ , ici notée  $W$ . on note  $\psi_j$  les fonctions de la base d'ondelettes sous-jacente.

La base sur laquelle on projette étant orthonormale, les bruits  $\varepsilon$  et  $w$  ont les mêmes propriétés probabilistes.

#### *Un Premier Estimateur*

Une première idée classique en traitement du signal est l'atténuation diagonale. L'estimateur de  $f$  correspondant consiste à modifier la décomposition de

$$Y = \sum_{t=1}^n d_t g_t, \quad \text{en atténuant les coefficients } d_j \text{ au moyen d'une suite } a_j \text{ non aléatoire.}$$

L'estimateur  $\hat{f}$  est alors de la forme suivante

$$\hat{f} = \sum_{j=1}^n a_j d_j \psi_j \quad (3.42)$$

On choisit les  $a_j$  en minimisant  $R(f, \hat{f})$ . On a

$$E\left(\|f - \hat{f}\|^2\right) = E\left(\sum_{j=1}^n (\theta_j \psi_j - d_j a_j \psi_j)^2\right) = \sum_{j=1}^n E(\theta_j - d_j a_j)^2 \quad (3.43)$$

or

$$\begin{aligned} E(\theta_j - d_j a_j)^2 &= E(\theta_j - (\theta_j + w_j) a_j)^2 \\ &= \theta_j^2 (1 - a_j)^2 + a_j^2 E w_j^2 - 2\theta_j (1 - a_j) a_j E w_j \end{aligned} \quad (3.44)$$

Le bruit  $w_j$  étant centré ( $E w_j = 0$ ) et de variance  $\sigma^2$  ( $E w_j^2 = \sigma^2$ ), on a

$$E\left(\|f - \hat{f}\|^2\right) = \sum_{j=1}^n \theta_j^2 (1 - a_j^2) + \sigma^2 \sum_{j=1}^n a_j^2 \quad (3.45)$$

Cette forme permet de calculer la solution optimale qui est donnée par

$$a_j = \theta_j^2 / (\theta_j^2 + \sigma^2) \quad (3.46)$$

et conduit à  $\hat{f}_a$  tel que

$$E\left(\|f - \hat{f}_a\|^2\right) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n \theta_j^2 / (\theta_j^2 + \sigma^2) \quad (3.47)$$

Évidemment, cette solution est impossible à mettre en œuvre puisque les  $a_j$  dépendent des  $\theta_j$  qui sont les coefficients de la fonction  $f$  inconnue.

### **De La Sélection des Coefficients au Seuillage**

Une deuxième idée consiste à sélectionner certains coefficients et éliminer les autres, c'est-à-dire à rajouter la contrainte  $a_j \in \{0,1\}$  dans ce qui précède. Notons encore  $\hat{f}$  l'estimateur associé. Si l'on note  $I = \{j \in \{1,2,\dots,n\} \mid a_j = 1\}$  l'ensemble des indices sélectionnés, l'expression (3.45) permet d'écrire le critère à minimiser sous la forme suivante

$$E\left(\|f - \hat{f}\|^2\right) = \sum_{j \notin I} \theta_j^2 + \sum_{j \in I} \sigma^2 = \sum_{j \in I} \theta_j^2 + \text{card}(I) \sigma^2 \quad (3.48)$$

Autrement dit, sélectionner  $j$  dans  $I$  coûte  $\sigma^2$  et l'exclure coûte  $\theta_j^2$ , donc  $E\left(\|f - \hat{f}\|^2\right)$  est minimal si ne figurent dans  $I$  que les indices pour lesquels  $|\theta_j| \geq \sigma$ . C'est-à-dire que la stratégie de sélection optimale est un seuillage des coefficients. Seuiller un coefficient  $u$  signifie qu'on le garde si  $|u| \geq \text{seuil}$  et qu'il est remplacé par 0 sinon (keep or kill thresholding).

### **Remarque**

Rien dans ce qui précède ne dépend du fait que la base  $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n}$  soit une base d'ondelettes. L'intérêt des ondelettes, dans ce cadre, vient de leur capacité à représenter  $f$  à l'aide de très peu de coefficients significativement non nuls. Or, si la base est orthonormale, l'énergie de  $f$  est égale à la somme des carrés de ses

coefficients d'ondelettes. Par conséquent, l'énergie de  $f$  se concentre dans les quelques coefficients non nuls de  $f$  qui sont donc grands en valeur absolue. L'idée du seuillage consiste à conserver les coefficients de  $Y$  associés aux coefficients de  $f$  qui sont plus grands que l'échelle caractéristique du bruit. Pour les mêmes raisons qu'à la fin du paragraphe précédent, la stratégie de seuillage n'est pas applicable. On a en fait ici un estimateur idéal, que l'on appelle un oracle qui aurait la faculté de nous dire, connaissant les  $\theta_j$ , quels sont les coefficients à conserver.

**Le seuillage universel**

La stratégie finalement adoptée consiste à seuiller les coefficients de  $f$  au seuil  $\sigma$ , mais directement à un seuil  $T$  convenablement déterminé en fonction du modèle du bruit

Dans le cas d'un bruit blanc gaussien, l'estimateur  $\hat{f}$  obtenu en ne conservant que les coefficients de  $Y$  tel que

$$|d_j| > \sigma\sqrt{2\log(n)} \tag{3.49}$$

et en remplaçant les autres par 0, est satisfaisant. On démontre que

$$R(f, \hat{f}_s) \leq R(f, \hat{f}) \leq (2\log(n) + 1)(\sigma^2 + R(f, \hat{f}_s))$$

D'où le nom de seuil universel donné par Donoho et Johnstone [49] à  $T = \sigma\sqrt{2\log(n)}$ .

Mais d'où vient sa valeur?

Un bruit  $\varepsilon$  centré de variance  $\sigma^2$  n'est pas borné, mais on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| > \sigma\sqrt{2\log(n)} \right\} = 0 \tag{3.50}$$

Autrement dit, on peut considérer qu'essentiellement

$$|\varepsilon_i| < \sigma\sqrt{2\log(n)} \tag{3.51}$$

Ainsi la procédure s'interprète comme la mise à zéro de tous les coefficients qui pourraient être attribuables au bruit. Elle s'avère d'ailleurs parfois trop sélective en pratique et d'autres seuils ont été développés qui ne présentent pas ce défaut.

**Risque minimax**

Un deuxième éclairage sur les performances de ce type de procédure est apporté par la théorie du minimax classique dans le contexte de l'estimation de fonctions en statistiques. On cherche des estimateurs qui ont de bonnes propriétés pour des classes très larges de fonctions. Notons par  $F$  l'ensemble des fonctions d'un espace  $\mathbf{F}$  de normes plus petites que  $M$ , typiquement des boules d'espace de Sobolev, de Holder ou de Besov.

On mesure, dans ce cadre, la qualité d'un estimateur par la pire des performances atteintes sur les fonctions de  $F$ :  $\sup_{f \in F} R(f, \hat{f})$ . On recherche alors des estimateurs dont le risque  $\sup_{f \in F} R(f, \hat{f})$  est proche du risque minimum défini naturellement par  $\inf_{\hat{f}} \sup_{f \in F} R(f, \hat{f})$  est appelé risque minimax.

Le type de résultats de cette procédure est valide pour de nombreuses variantes des estimateurs par ondelettes et pour diverses fonctions de pertes non nécessairement quadratiques. Il est d'autant plus remarquable qu'il ne requiert que très peu de connaissances *a priori* sur la régularité de la fonction à estimer, contrairement aux méthodes traditionnelles.

### **Complément de Seuillage**

Il existe de nombreuses variantes de ces estimateurs par seuillage des coefficients d'ondelettes. Elles diffèrent essentiellement par la stratégie de seuillage: globale, niveau par niveau, locale en temps, par blocs; Le type de seuillage: dur et doux et d'autres régularisations. Un ingrédient utilisé par les variantes de base est l'usage de seuillage "doux" (soft thresholding) au lieu du seuillage "dur" (keep or kill) ou encore (hard thresholding). Celui-ci est défini par: pour  $y$  réel

$$\hat{y}_{\text{dur},T} = \begin{cases} y & \text{pour } |y| > T \\ 0 & \text{pour } |y| \leq T \end{cases} \quad (3.52)$$

**Le seuillage "doux"** (shrink or kill) ou encore (soft thresholding) que nous avons utilisé dans notre travail, rend cette fonction continue en rétrécissant les coefficients conservés. Il est défini par

$$\hat{y}_{\text{doux},T} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |y| \leq T \\ \text{sign}(y)(|y| - T) & \text{pour } |y| > T \end{cases} \quad (3.53)$$

Les seuillages doux et dur peuvent être interprétés d'un point de vue bayésien par des fonctions de perte convenablement choisies.

### **3.6.3 Exemples de Débruitage**

Prenons comme exemple un signal original et sa version bruitée permettant de bien saisir l'esprit de la technique de débruitage par ondelettes. On trouve dans la Figure 3.4, le signal utile à estimer et dans la Figure 3.5, le signal observé qui est

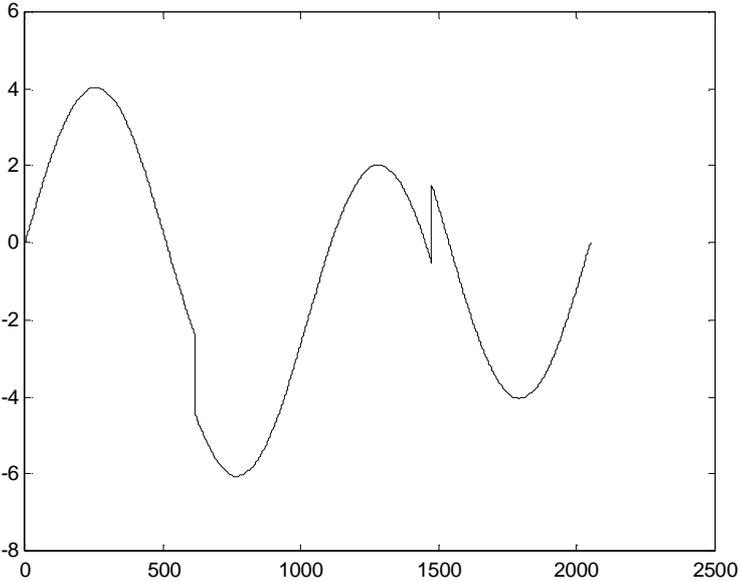


Fig. 3.4 Signal utile

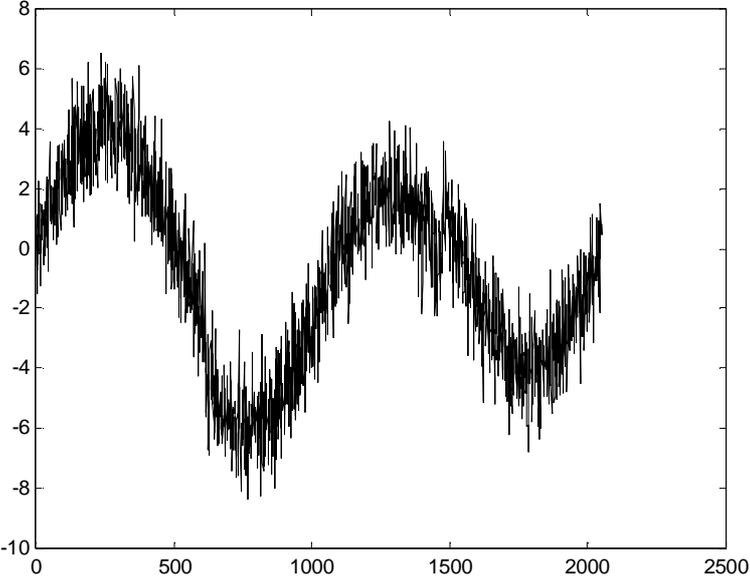


Fig. 3.5 Signal bruité

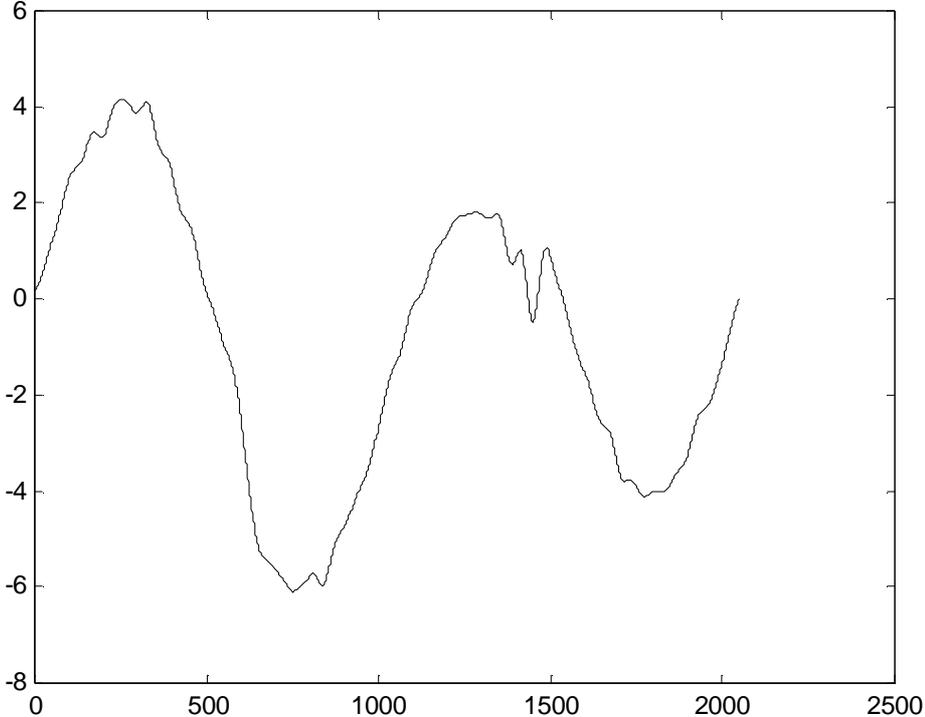


Fig. 3.6 Le signal débruité. L'ondelette 'sym8', niveaux de résolution utilisés 5, type de seuillage "doux" (soft thresholding)

une version bruitée du signal précédent. La Figure 3.6 illustre le signal débruité. Le bruit étant blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unité. L'ondelette analysante utilisé est une ondelette à support compact presque symétrique d'ordre 8 notée "sym8". Cette ondelette sera utilisée dans notre approche de détection CFAR. En raison de ses propriétés. La stratégie de débruitage consiste à

- § Conserver une approximation telle que le bruit soit absent ou très atténué (l'approximation du niveau 5 de multirésolution);
- § Compléter cette approximation par les parties des détails plus fins clairement attribuables au signal utile, en rejetant les parties que l'on considère comme provenant du bruit. En d'autres termes, seuls les quelques plus grands coefficients d'ondelettes (c'est-à-dire les coefficients de détail) sont rétrécis et conservés, les autres sont remplacés par zéro. On obtient le premier composant du signal débruité qui est de la forme

$$\hat{A}_d = \sum_k \hat{\beta}_{5,k} \phi_{5,k} \quad (3.56)$$

Les coefficients estimés  $\hat{\beta}_{5,k}$  sont simplement les coefficients obtenus par décomposition du signal initial.  $\phi$  est la fonction échelle associée à l'ondelette d'analyse. On obtient le second composant du signal débruité qui est de la forme

$$\hat{D}_d = \sum_{1 \leq j \leq 5} \sum_k \hat{d}_{j,k} \psi_{j,k} \quad (3.57)$$

Les coefficients estimés  $\hat{d}_{j,k}$  sont simplement la version seuillés de coefficients de détail obtenus par décomposition du signal initial.  $\psi$  est l'ondelette d'analyse. Ici dans l'exemple c'est la "sym8".

Le signal débruité est alors

$$\hat{S}_d = \hat{A}_d + \hat{D}_d \quad (3.58)$$

Il est visible que le résultat obtenu montré dans la Figure 3.8 est de bonne qualité.

### 3.7 Conclusion

Les ondelettes définissent un cadre formel unifiant différentes approches et leur découvertes a permis des avancées théoriques importantes. Elles sont devenues un champ scientifique. Un journal consacré aux ondelettes a été créé en 1993 (Applied Computational Harmonic Analysis), tandis que les journaux de la SIAM et de IEEE ont largement ouvert leurs colonnes aux articles sur l'application

des ondelettes à l'analyse des signaux et images. Ainsi la théorie des ondelettes a rencontré un très grand écho. Un des grands succès des ondelettes est le débruitage de signaux et d'images. Elles fournissent une méthode assez simple pour extraire les signaux du bruit. La difficulté du débruitage réside dans le fait que le bruit peut aussi bien être de haute fréquence, que de basse fréquence (bruit produit par un sous-marin par exemple). On transforme le signal en ondelettes, on élimine (seuillage dur) ou on rétrécit (seuillage doux), à toutes les résolutions, les coefficients supérieurs à un certain seuil. Ensuite, on reconstruit le signal avec les coefficients restants.

Nous nous attacherons, dans les chapitres qui suivent de tirer profit de la transformée en ondelettes pour améliorer les performances de la détection RADAR. Précisément, nous utiliserons l'algorithme de débruitage par ondelettes dans la détection CFAR pour réduire les effets indésirables du clutter. Nous montrerons, à travers les résultats de simulation que l'algorithme de débruitage associé aux détecteurs distribués CFAR augmente d'une façon considérable la probabilité de détection et offre une robustesse du système de détection contre les interférences.

# Chapitre 4

---

## Principe du RADAR et Théorie de La Décision

---

### 4.1 Introduction

Un RADAR est par définition un appareil de "Radio Detection And Ranging" (système de détection et de télémétrie par ondes radio) dont le but est de dire "*il y a quelque chose à telle distance*". Les premières idées relatives à la détection électromagnétique des cibles étaient assez simples (et elles subsistent encore). Un détecteur était constitué d'une antenne dont l'impédance était modifiée par la proximité d'un objet. Le RADAR est basé sur la propagation des ondes électromagnétiques ou plus exactement sur celle des Radio-Fréquence (RF). La plupart des RADARS construits pendant vingt ans ont utilisé le principe d'émettre des signaux brefs mais très puissants et de mesurer le temps entre l'instant d'émission et l'instant de réception du signal réfléchi par la cible, ce temps étant proportionnel à la distance de la cible. Les théories de M. Woodward [51], correctement étendues ont donné naissance à de nouvelles races de RADARS qui ont parfois des qualités (quand à la mesure de vitesse ou à l'élimination des échos parasites) que n'avaient

pas les RADARS classiques. Ces théories reposent sur les deux outils mathématiques qui sont le calcul des probabilités et le théorème d'échantillonnage. On supposera qu'on émet un signal  $s(t)$ . En l'absence de cible, on reçoit un bruit

$$y(t) = c(t) \quad (4.1)$$

En présence d'une cible, on reçoit

$$y(t) = ks(t-t_0) + c(t) \quad (4.2)$$

$t_0$  mesurant la distance de la cible.

Le problème à résoudre d'abord est de déterminer si " $y(t)$  contient-il ou non  $ks(t-t_0)$ ?"

Il convient maintenant de reprendre l'équation du RADAR avec plus de détails.

## 4.2 Equation du RADAR

Considérons un RADAR, qui peut fonctionner en impulsion ou en ondes continues [52]. Ce RADAR est équipé d'une antenne qui présente un gain  $G$ . Soit  $P$  la puissance totale rayonnée par l'antenne,  $P$  sera la puissance crête dans l'impulsion ou la puissance de l'onde continue [53, 54, 55]. La puissance rayonnée par unité d'angle solide dans la direction où le gain est  $G$  est, d'après la définition du gain [53]

$$P_1 = \frac{P}{4\pi} G \quad (4.3)$$

A une distance  $R$  où se trouve une cible, cette puissance exprimée en  $W / m^2$  est

$$P_2 = \frac{PG}{4\pi R^2} \quad (4.4)$$

Puisque l'angle solide unité découpe sur une sphère de rayon  $R$  une surface  $R^2$ . Une perte de cette puissance incidente est rayonnée par la cible dans toutes les directions, ce rayonnement ne se fait pas de façon isotrope. Cependant si la cible était ponctuelle, elle renverrait dans l'espace une certaine puissance,  $P_3$  qui est proportionnelle à  $P_2$ , soit

$$P_3 = \sigma P_2 \quad (4.5)$$

D'après la formule qui donne  $P_2$ , il est facile de voir que le facteur  $\sigma$  a les dimensions d'une surface.  $\sigma$  est appelé la surface équivalente RADAR (SER) de la cible. Par unité d'angle solide, nous aurons donc une puissance  $P_4$

$$P_4 = \frac{P_3}{4\pi} = \frac{P_2\sigma}{4\pi} = \frac{PG\sigma}{(4\pi R)^2} \quad (4.6)$$

Cette puissance  $P_4$  donne au niveau de l'antenne du RADAR une densité surfacique de puissance

$$P_4 = \frac{PG\sigma}{(4\pi R)^2} \cdot \frac{1}{R^2} \text{ W/m}^2 \quad (4.7)$$

Pour la même raison que ci-dessus. Cependant le gain  $G$  de l'antenne est lié à sa surface équivalente de réception ( $\sum_{eq}$ ) par la relation

$$G = \frac{4\pi \sum_{eq}}{\lambda^2} \quad (4.8)$$

de telle sorte que l'antenne se comporte, pour une onde plane, comme une ouverture absorbante de surface

$$\sum_{eq} = \frac{G\lambda^2}{4\pi} \quad (4.9)$$

Il s'ensuit que le signal  $s$  délivré par l'antenne est le produit de la densité de puissance  $P_4$  par  $\sum_{eq}$ , ce qui donne

$$s = \frac{PG\sigma}{(4\pi)^2 R^4} \cdot \frac{\lambda^2 G}{4\pi} \quad (4.10)$$

Soit

$$s = \frac{PG^2\lambda^2\sigma}{(4\pi)^3 R^4} \quad (4.11)$$

Si  $s$  est le signal minimal utilisable par le RADAR, sa portée est

$$R^4 = \frac{PG^2\lambda^2\sigma}{(4\pi)^3 s} \quad (4.12)$$

Cette formule met immédiatement en évidence la difficulté de construire des RADARS de très grande portée puisque celle-ci intervient à la quatrième puissance.

## 4.3 Théorie de La Décision

### 4.3.1 Rappel

Le but de ce paragraphe est de rappeler brièvement quelques concepts fondamentaux avant de détailler la détection automatique des cibles [56]. Rappelons pour mémoire que les systèmes RADAR utilisent une antenne pour détecter des cibles dans l'espace autour de cette antenne. Pour chaque cible, on désire savoir sa position, sa direction et sa vitesse. On considère ici le cas simple où on détermine uniquement la position de la cible. L'antenne du RADAR peut être dirigée de façon à émettre, à chaque instant, une impulsion  $s(t)$  seulement dans un cône angulaire étroit. S'il existe une cible dans cette direction, le signal émis est réfléchi et reçu avec un temps de retard qui est proportionnel à la distance "R" entre l'antenne et la cible

$$\begin{aligned} y(t) &= ks(t - t_0) + c(t) \\ t_0 &= 2\frac{R}{C} \end{aligned} \quad (4.13)$$

où

$y(t)$  est le signal reçu,  $c(t)$  le bruit,  $t_0$  le retard et  $k$  un paramètre qui dépend de l'altitude de la cible, de ses propriétés de réflexion, et de la distance, et  $C$  est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques.

Pour détecter la cible, le système doit donc résoudre un problème de décision entre les deux hypothèses suivantes

$$\begin{cases} H_0 : y(t) = c(t) \\ H_1 : y(t) = s(t) + c(t) \end{cases} \quad (4.14)$$

où la première hypothèse correspond à l'absence de cible, et la deuxième à la présence d'une cible à une distance qui est déterminée par le retard.

Dans ce qui suit, nous exposerons les tests d'hypothèses.

### 4.3.2 Tests D'hypothèses

Dans un système RADAR, le problème de la détection du signal RADAR revient à observer le signal reçu et à prendre une décision concernant la présence

ou l'absence d'une cible. Etant données quelques hypothèses, un critère est sélectionné et sur lequel cette décision est basée. Cette situation peut être décrite par une source qui émet deux sorties possibles appelées hypothèses. L'hypothèse nulle  $H_0$  représente un 0 (cible absente) et l'hypothèse alternative  $H_1$  représente un 1 (cible présente). Chaque hypothèse correspond à une ou plusieurs observations qui sont représentées par des variables aléatoires et le récepteur décide laquelle des hypothèses est vraie. Nous supposons que le récepteur prend une décision sur une seule observation du signal reçu  $y$ . L'ensemble des valeurs que prend la variable aléatoire  $Y$  est appelé espace d'observation  $Z$  [57]. L'espace d'observation est divisé en deux régions  $Z_0$  et  $Z_1$  de telle façon que si  $Y$  est dans  $Z_0$ , le récepteur décide en faveur de  $H_0$ , alors que si  $Y$  est dans  $Z_1$ , le récepteur décide en faveur de  $H_1$ . La règle de décision est alors équivalente à une partition de l'espace d'observations en régions  $Z_i$  associées aux différentes hypothèses ( $Z_i \leftrightarrow H_i$ ) comme on doit associer une hypothèse à chaque observation possible et comme les hypothèses sont alternatives, c'est-à-dire, l'occurrence simultanée de deux hypothèses différentes est impossible, les sous-ensembles  $Z_i$  sont disjoints. La règle de décision est facilement décrite en fonction des régions  $Z_i$ . Les fonctions densités de probabilités de  $Y$  correspondant à chaque hypothèse sont  $p_{Y/H_0}(y/H_0)$  et  $p_{Y/H_1}(y/H_1)$  où  $y$  est une valeur particulière de  $Y$ . Dans ce qui suit, nous présenterons quelques critères de décision qui sont utilisés dans la théorie de la décision ainsi que les conditions dans lesquelles ils sont utiles.

### a-Tests de Bayes

L'utilisation du critère de Bayes nécessite principalement deux hypothèses. Premièrement, la connaissance au préalable des probabilités d'événement des deux sorties de la source qui sont appelées les probabilités *a priori*  $P(H_0)=P_0$  et  $P(H_1)=P_1$ . La deuxième hypothèse consiste à attribuer un coût à chaque décision possible. Les conséquences d'une décision sont différentes de celles d'une autre décision. Par exemple dans le problème de la détection RADAR, les conséquences d'une non détection ne sont pas les mêmes que les conséquences d'une fausse alarme. Si nous dénotons par  $H_0$  et  $H_1$ , nous pouvons définir  $C_{ij}$ ,  $i, j=0,1$ , le coût associé à la décision  $D_i$  sachant que l'hypothèse  $H_j$  est vraie ( $D_i / H_j$ ). C'est-à-dire, on associe, à

chaque comportement possible du système de décision, un coût équivalent à une pénalisation ou une récompense

$$C_{ij} = \text{Coût de } H_i \text{ quand } H_j \text{ est vraie.}$$

Le test de Bayes consiste à déterminer les régions de décision  $Z_1$  et  $Z_0$  de façon à minimiser la valeur moyenne du coût

$$C = C_{00} \Pr\{D_0, H_0\} + C_{10} \Pr\{D_1, H_0\} + C_{01} \Pr\{D_0, H_1\} + C_{11} \Pr\{D_1, H_1\} \quad (4.15)$$

Chaque probabilité conjointe qui figure dans cette expression peut être écrite comme

$$\Pr\{D_i, H_j\} = \Pr\{D_i | H_j\} P(H_j) = \Pr\{y \in Z_i | H_j\} P(H_j) = P(H_j) \int_{Z_i} p_{Y/H_j}(y | H_j) dy \quad (4.16)$$

où l'on a exprimé la probabilité de décider  $H_i$  quand  $H_j$  est vraie comme la probabilité pour que les observations appartiennent à la région  $Z_i$  où on décide  $H_i$  étant donné que  $H_j$  est vraie. Dans le cas de tests binaires, les deux régions de décision sont complémentaires,  $Z_i = \overline{Z_j}$  et on peut donc écrire

$$\int_{Z_i} p_{Y/H_i}(y) dy = 1 - \int_{Z_j} p_{Y/H_j}(y) dy, \quad j \neq i; \quad i, j = 0, 1 \quad (4.17)$$

Avec ce résultat, on peut exprimer le coût de Bayes "C" en fonction d'une seule région

$$C = C_{11}P_1 + C_{10}P_0 + \int_{Z_0} [P_1(C_{01} - C_{11})p(y | H_1) - P_0(C_{10} - C_{00})p_{Y/H_0}(y | H_0)] dy \quad (4.18)$$

Les deux premiers termes dans cette expression ne dépendent pas des régions de décision, et constituent une pénalisation fixe. Pour minimiser "C", il faut donc minimiser l'intégrale. Pour cela, on doit attribuer à  $Z_0$  tous les points de l'espace des observations pour lesquels l'intégrale est négative, ce qui est équivalent à la règle de décision suivante

$$\frac{p_{Y/H_1}(y | H_1)}{p_{Y/H_0}(y | H_0)} > \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})} = \gamma \quad (4.19)$$

où on définit le seuil  $\gamma$

$$\gamma = \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})} \quad (4.20)$$

On voit donc que le test de Bayes conduit à comparer le rapport entre les densités de probabilités conditionnelles à un seuil  $\gamma$ . On appelle le rapport des densités conditionnelles dans l'équation (4.19) le rapport de vraisemblance.

### b-Rapport de Vraisemblance

Le rapport de vraisemblance (entre les densités de probabilité conditionnelles correspondant à chaque hypothèse), qui détermine les tests de Bayes, joue un rôle très important dans tous les problèmes de décision statistique et sera représenté par

$$\Lambda(y) = \frac{p_{Y/H_1}(y)}{p_{Y/H_0}(y)} \quad (4.21)$$

En fait, si on considère que les densités conditionnelles résument notre connaissance sur chacune des hypothèses, ce rapport compare directement la vraisemblance des observations sous chacune des hypothèses.

### c-Tests de Neyman-Pearson

Pour construire le test de Bayes, c'est-à-dire, le coût moyen d'une décision, il faut connaître les probabilités à *a priori*  $P_i$  qui déterminent la valeur du seuil auquel le rapport de vraisemblance est comparé. Pour beaucoup d'applications, ces valeurs ne sont pas connues, et on ne peut pas, en conséquence, appliquer l'approche Bayésienne, où encore, même si elles sont connues, le critère ajusté au problème n'est pas obtenu par des considérations de ce qui se passe pour tout l'ensemble de situations possibles. Les tests de Neyman-Pearson [57] constituent, dans ces cas, une approche alternative. Au lieu de considérer l'occurrence de chaque hypothèse comme un phénomène aléatoire, et d'optimiser la performance moyenne, les tests de Neyman-Pearson (N-P) agissent directement sur les mesures de performance suivantes

$$\begin{aligned} P_D &= \Pr\{\text{décider } D_1 \mid H_1\} \\ P_{FA} &= \Pr\{\text{décider } D_1 \mid H_0\} \\ P_m &= \Pr\{\text{décider } D_0 \mid H_1\} \end{aligned}$$

$P_D$  est appelée la probabilité de détection,  $P_{FA}$  la probabilité de fausse alarme, et  $P_m$  est la probabilité de non détection (miss). On veut, usuellement, avoir une valeur de  $P_D$  le plus grand possible, et en même temps, une valeur de  $P_{FA}$  la plus petite

possible. Cependant, ces deux contraintes ne sont pas indépendantes, et sont même contradictoires: pour augmenter  $P_D$  on doit augmenter  $Z_1$ , et pour minimiser  $P_{FA}$  on doit diminuer  $Z_1$ . Les tests de Neyman-Pearson correspondent à maximiser la probabilité de détection, avec une contrainte fixe sur la probabilité de fausse alarme

$$\max P_D \text{ sous la contrainte } P_{FA} = \alpha' \leq \alpha \quad (4.22)$$

### d-Tests Minimax

Les tests minimax sont une autre façon de résoudre des problèmes de décision quand on ne connaît pas les probabilités *a priori*, et correspondent à choisir le test qui a la meilleure performance dans le cas le plus défavorable. Pour dériver ce test, on commencera par analyser l'influence du choix du seuil sur le risque de Bayes. Admettons alors qu'une certaine valeur du seuil de décision soit fixée, soit  $\eta_0$ . Une fois que le seuil est fixé, la performance du test, obtenu en comparant le rapport de vraisemblance avec lui, est déterminée.

### 4.3.3 Synthèse

Rappelons pour conclure sur ce paragraphe sur les critères de décision, que l'utilisation du critère de Bayes nécessite principalement la connaissance au préalable des probabilités *a priori*. Contrairement aux critères de Neyman-Pearson et Minimax qui agissent directement sur les mesures des performances  $P_D$ ,  $P_{FA}$  et  $P_m$ . rappelons également que ces critères reposent tous sur les densités de probabilité :  $p_{Y/H_1}(y/H_1)$  la ddp du signal et  $p_{Y/H_0}(y/H_0)$  qui caractérise entièrement le clutter. Il apparaît dès lors et déjà naturel de prendre soin de la phase de modélisation du clutter. En effet, cette étape cruciale dépend essentiellement du type du clutter (clutter de mer, de terre ou autre). Nous présenterons dans le paragraphe suivant les différents modèles du clutter. Nous exposerons également les quatre modèles de swerling.

### 4.3.4 Modélisation du Clutter

Nous précisons tout d'abord la signification du terme clutter. On appelle clutter le bruit provoqué par l'énergie renvoyée par des obstacles naturels (terre, mer, atmosphère) qui rend la détection de la cible utile très difficile. Le clutter est constitué soit d'échos atmosphériques soit d'échos situés à la surface de notre

planète. Il s'avère particulièrement indispensable de connaître la distribution du clutter pour établir le seuil de détection. Cette distribution dépend de la nature du clutter ainsi que la résolution du RADAR. Nous distinguons généralement deux types de clutter, le clutter de surface et le clutter de volume. Le clutter de surface est celui qui provient des échos de la mer et de la terre alors que le clutter de volume est du aux phénomènes atmosphériques.

### ***Clutter de mer***

Il est bien connu que l'amplitude du clutter de mer est distribuée selon une loi de Rayleigh. Il existe d'autres modèles qui ont été proposés pour représenter le clutter de mer tels que le modèle log-normal et le modèle Weibull [58, 59-65]. Récemment la distribution K a été retenue comme un modèle pour représenter le clutter de mer ou sol [66-91]. La densité de probabilité est exprimée comme suit

$$p_x(x) = \frac{4c}{\Gamma(v)} (cx)^v K_{v-1}(2cx). \quad (4.23)$$

ou  $K_v$  est la fonction de Bessel modifiée,  $v$  est le paramètre de forme qui dépend de l'état de la mer et  $c$  est un paramètre de puissance tel que la puissance moyenne du clutter  $P = v/c^2$ . En général, la valeur de  $v$  se situe entre 0.1 pour un clutter très pointu et l'infini pour un clutter de Rayleigh. Il existe cependant une nouvelle modélisation du clutter de mer qui a été proposée dans [92] où le clutter de mer est supposé comme étant un processus déterministe non-linéaire ayant un comportement chaotique.

### ***Clutter de terre***

Le clutter de terre est plus difficile à quantifier et à classier que le clutter de mer. La densité de probabilité Weibull a été suggérée pour modéliser ce type de clutter. Il est montré que ce modèle est plus proche des données réelles.

### ***Clutter Atmosphérique***

Les performances de certains RADARS peuvent être affectées par la présence de particules météorologiques. La plus part des clutters météorologiques suivent une distribution de Rayleigh.

Après avoir présenté les modèles du clutter, il convient maintenant d'exposer les modèles de cibles.

### 4.3.5 Modélisation des Cibles

La modélisation des cibles dépend du calcul de la surface équivalente du RADAR (SER) et de l'objet cible. L'objet doit être à une distance suffisante des deux sources afin que la mesure soit effectuée dans les conditions de champ lointain. Il est nécessaire de prendre en compte les mouvements de la cible sur sa trajectoire. Nous définissons deux sorties de mouvements: "scan-to-scan fluctuating target" et "pulse-to-pulse fluctuating target".

a/ Cible lentement fluctuante "scan-to-scan"

La cible lentement fluctuante garde la même amplitude pendant le temps d'un balayage. Donc les échantillons sont une seule réalisation d'une même variable aléatoire.

b/ Cible rapidement fluctuante "pulse-to-pulse"

La cible rapidement fluctuante change de valeur par rapport à chaque impulsion. Il en résulte que chacune des amplitudes des échantillons sont des réalisations différentes d'une même variable aléatoire.

Les modèles de la cible sont appelés également modèles de Swerling. En effet, les modèles de Swerling définissent quatre types de cibles répondant aux différentes situations ci-dessus

#### **Modèles de Swerling**

Il y a pratiquement quatre modèles de Swerling qui décrivent les fluctuations de la cible [93, 94]. En fait, les modèles de la cible découlent de la formule générale suivante

$$W_k(S, \bar{S}) = \frac{1}{(K-1)!} \cdot \frac{K}{\bar{S}} \cdot \left(\frac{KS}{\bar{S}}\right)^{K-1} \exp\left(-\frac{KS}{\bar{S}}\right), S \geq 0 \quad (4.24)$$

S: La surface équivalente du RADAR (RADAR cross-section). Elle est égale au rapport signal sur bruit. Si A la puissance du signal et  $\sigma$  la puissance du bruit, nous obtenons

$$S = \frac{A^2}{2\sigma^2} \quad (4.25)$$

$\bar{S}$ : La surface équivalente moyenne du RADAR (mean cross-section). Le paramètre K est

$$K = \bar{S}^2 / \text{VAR}(S) \quad (4.26)$$

Le modèle de Swerling détermine la nature des fluctuations de la cible, i.e. cible fluctuante ou non fluctuante (lentement fluctuante) ainsi que l'expression de la distribution, i.e. la valeur du paramètre K. De ce fait découle quatre cas possibles, à savoir

modèles	K	Types de fluctuation
Swerling I	1	Scan-to-scan (lentement fluctuante)
Swerling II	1	Pulse-to-pulse (rapidement fluctuante)
Swerling III	2	Scan-to-scan (lentement fluctuante)
Swerling IV	2	Pulse-to-pulse (rapidement fluctuante)

Tableau 4.1 modèles de cibles

## 4.4 Conclusion

Les critères de détection présentés dans les sections précédentes se ramènent à la comparaison du signal reçu à un seuil fixe calculé au préalable. Or, un seuil fixe produit soit un nombre excessif de fausses alarmes soit une faible probabilité de détection dès que les caractéristiques statistiques du bruit et du clutter changent. Cette remarque est à la base de proposer les détecteurs à taux de fausse alarme constant (CFAR). Il sera souhaitable de présenter dans le Chapitre suivant les différentes structures CFAR proposées dans la littérature. Nous exposerons également les détecteurs distribués CFAR basés sur les règles extrêmes de fusion.

# Chapitre 5

---

## La Détection à Taux de Fausse Alarme Constant CFAR

---

### 5.1 Introduction

La détection à taux de fausse alarme constant (CFAR) se révèle fondamentale dans les systèmes RADAR. Nous évoquerons au cours de la section 5.2, les motivations qui ont conduit au concept de la détection CFAR. Nous décrirons ensuite les principales approches CFAR proposées dans la littérature. Nous aborderons le cas d'un environnement homogène pour le détecteur CA-CFAR. Nous présenterons quelques illustrations des détecteurs présentés avant de conclure sur cet exposé. Nous présenterons également le cas des détecteurs distribués.

### 5.2 Motivations

Nous précisons tout d'abord les motivations qui ont conduit au concept de taux de fausse alarme constant. La tâche des premiers RADARS était limitée à la détection des objets dans le plan d'observation et l'estimation de leurs coordonnées. Cette détection aurait été facile si les échos d'objets sont localisés dans un milieu où seul le bruit thermique existe. Cependant, dans l'application réelle des RADARS, la détection d'une cible est altérée par des signaux parasites dans la localisation est aussi sujette aux variations dans le temps et la position. Le principe de la détection classique utilisant un filtre adapté et un seuil de détection fixe, représenté par la Figure 5.1, ne peut être appliqué. En effet, une légère variation de 3 dB dans la

densité de puissance du bruit parasite total (bruit thermique plus clutter) provoque l'augmentation de la probabilité de fausse alarme de consigne d'un facteur de l'ordre de  $10^4$ . Cette augmentation indésirable du nombre de fausses alarmes peut causer la saturation de l'opérateur, humaine soit-il ou ordinateur. Cette remarque est à la base des méthodes adaptatives pour analyser et perfectionner la détection RADAR. L'idée, pour contourner les limitations du seuil fixe, est de prendre un seuil de détection adapté, c'est-à-dire variant proportionnellement avec la puissance du bruit. Les dispositifs utilisant cette solution sont appelés les détecteurs CFAR, c'est-à-dire les détecteurs à taux de fausse alarme constant (Constant False Alarm Rate detectors). Afin de bien cerner l'apport des détecteurs CFAR en terme de qualité de détection, nous allons détaillé dans ce paragraphe l'algorithme à taux de fausse alarme constant CFAR et les différents détecteurs.

### 5.3 La Détection CFAR

Les algorithmes de détection basés sur la technique CFAR sont utilisés pour détecter des cibles noyées dans des signaux parasites dont les puissances sont inconnues. Le détecteur CFAR comme montré dans la Figure 5.2 est le processus par lequel une cible est déclarée présente dans la cellule test tout en maintenant un taux de fausse alarme constant et très faible. Ceci est accompli par une comparaison de la sortie de chaque cellule sous test,  $Y$ , à un seuil adaptatif dont la valeur est le produit entre la statistique,  $Z$ , qui représente l'estimation du niveau du clutter calculé à partir des échantillons  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , dans la fenêtre de référence et la constante de seuillage,  $T$ , qui est choisi d'une manière à assurer la probabilité de fausse alarme désirée. Le contenu de chaque cellule de portée ET/OU doppler est obtenu en échantillonnant le signal reçu à la sortie du détecteur quadratique et en le passant dans un registre à retard formé par un ensemble de cellules dites cellules de références. Plusieurs procédés de détection CFAR ont été proposés [95-106]. La différence entre les diverses procédures CFAR réside dans la méthode retenue pour effectuer l'estimation de la puissance du clutter selon le type d'environnement.

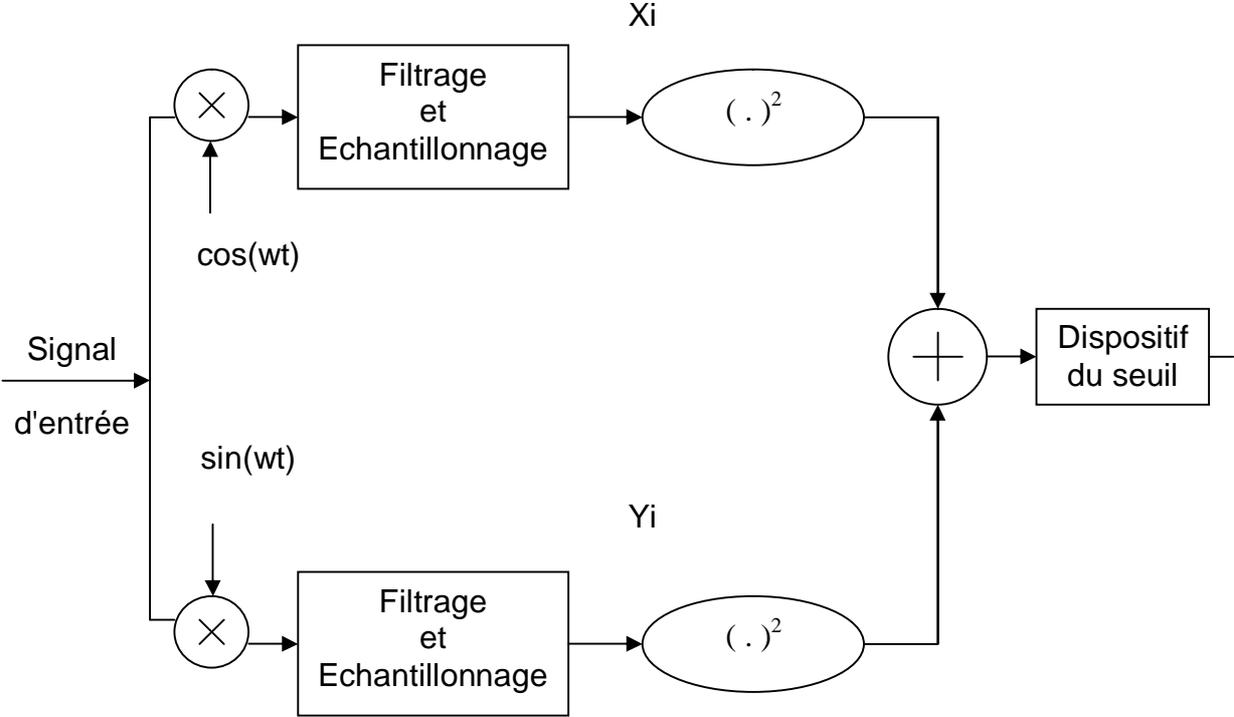


Fig. 5.1 Détecteur quadratique

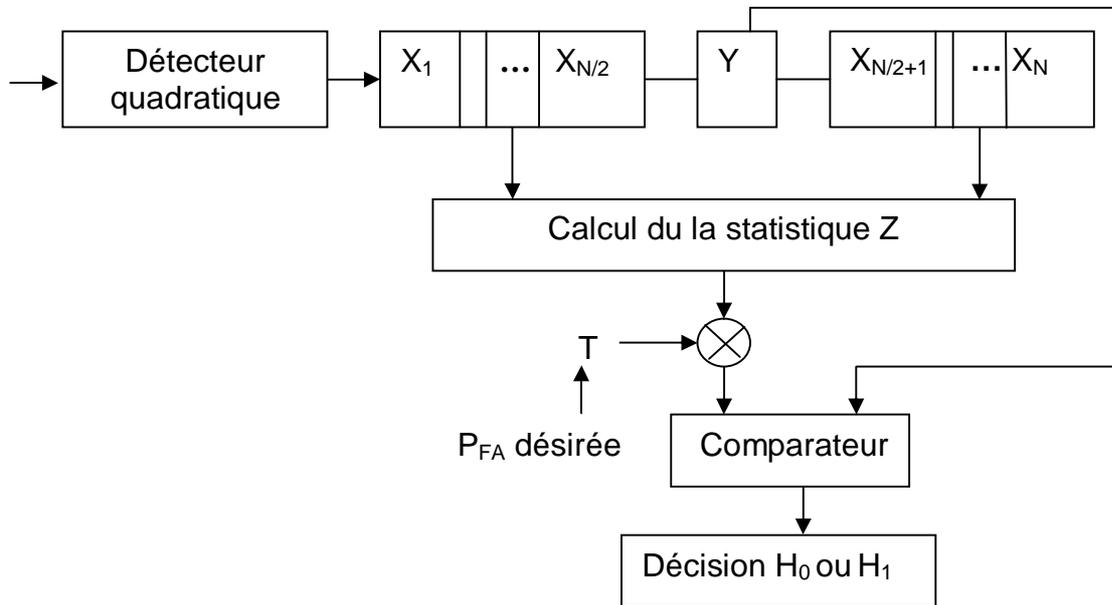


Fig. 5.2 Architecture générale du détecteur CFAR

Le premier détecteur CFAR est le détecteur CA-CFAR (Cell Averaging) proposé par Finn et Johnson [95] et illustré dans la Figure 5.3. Le niveau du clutter, dans ce type de CFAR, est estimé par la moyenne arithmétique des échantillons dans la fenêtre de référence. Dans la présence du clutter homogène, il a été montré que si la taille de la fenêtre de référence tend vers l'infini, la probabilité de détection tend vers celle du détecteur optimal de Neyman-Pearson où le niveau du clutter est connu *à priori*. L'inconvénient majeur de ce procédé, est que dans le cas où l'environnement est non homogène c'est à dire présence d'un bord du clutter ou de cibles interférentes, le seuil de détection augmente et la probabilité de détection du détecteur CA-CFAR diminue même pour un rapport signal sur bruit élevé. Pour améliorer les performances dues à ces effets, un nombre de modifications dans la procédure classique CA-CFAR ont été proposées et analysées. Hansen et Sawyers [96] ont proposé le détecteur GO-CFAR (Greatest Of) qui utilise le maximum des sommes des sorties des deux fenêtres qui se trouvent dans les deux côtés de la cellule sous test. Le but de cette amélioration est de corriger le problème de l'effet de bord du clutter. Pour corriger le problème de l'effet masque (i.e si une cible se situe dans la région du bruit thermique seulement), Trunk [97] a proposé le détecteur SO-CFAR (Smallest Of), c'est-à-dire il prend le minimum des deux fenêtres de part et d'autre de la cellule sous test au lieu du maximum. Il a aussi montré, en étudiant la résolution des cellules de référence, que des cibles ne peuvent pas être détectées par le détecteur CA-CFAR, surtout dans le cas où une cible se trouve dans une seule fenêtre et ne se présente pas dans l'autre fenêtre. Si des cibles interférentes sont présentes dans les deux fenêtres, ni le détecteur GO-CFAR ni le détecteur SO-CFAR ne résolvent le problème de l'effet de capture. Pour contourner cette limitation, Rohling [98] a introduit le détecteur OS-CFAR (Order Statistic), c'est-à-dire le détecteur CFAR à statistiques ordonnées comme c'est montré dans la Figure 5.4 dans lequel les échantillons de la fenêtre de référence sont classés dans un ordre croissant. Le  $k^{\text{ème}}$  échantillon ordonné est utilisé pour estimer le niveau du clutter. Le rôle majeur du détecteur OS-CFAR est de résoudre le problème de l'effet de capture en éliminant les cellules qui contiennent des cibles interférentes [98, 107]. Une autre variante du CFAR est le CMLD-CFAR (Censored Mean Level Detector) . Ce type est proposé par Rickard et Dillard [99] pour contourner l'effet de capture.

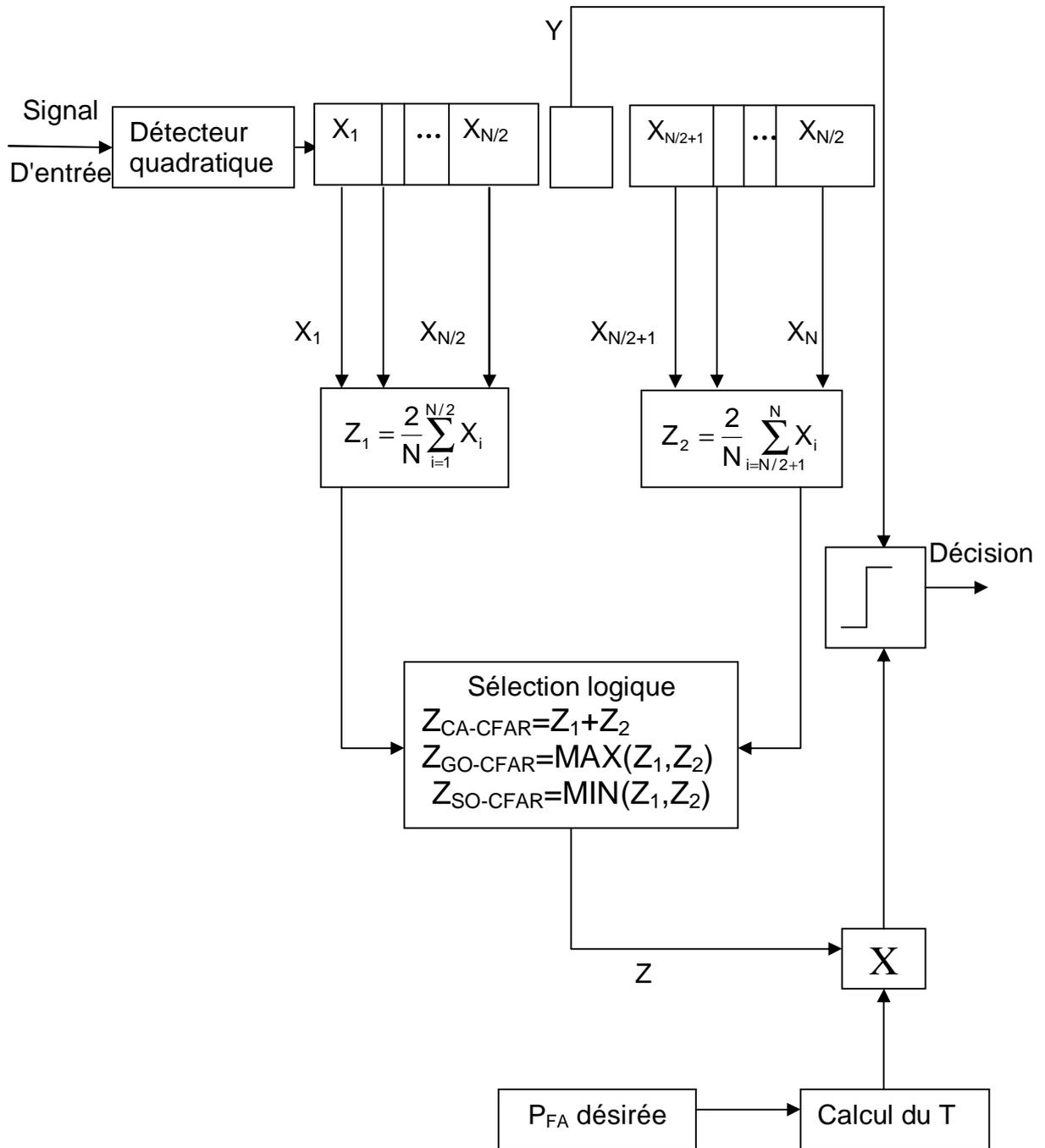
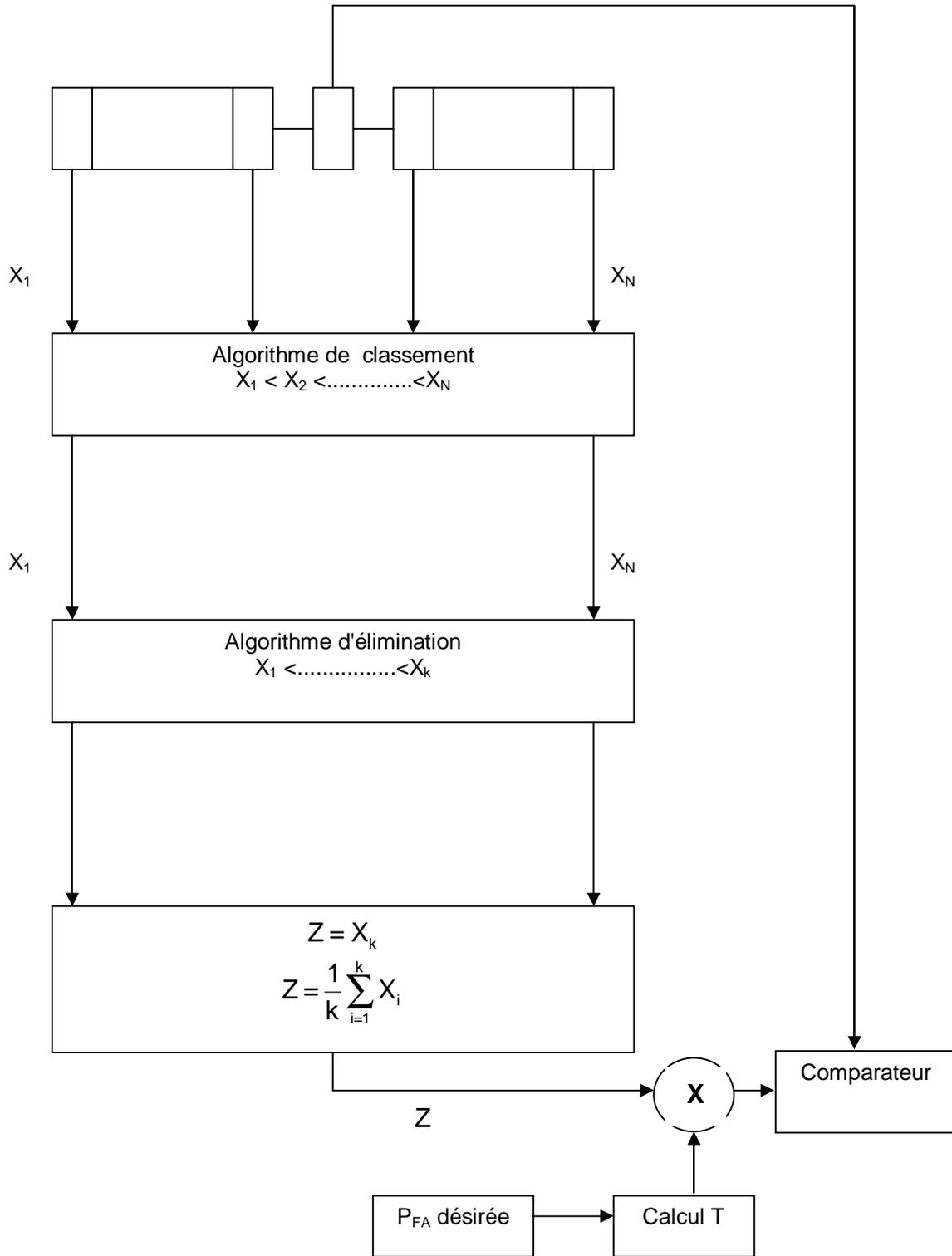


Fig. 5.3 Détecteurs GO, SO et CA-CFAR



$Z = X_k$  : OS-CFAR

$Z = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$  : CMLD

Fig. 5.4 Algorithme des détecteurs OS-CFAR et CMLD

Ils ont étudié le détecteur CMLD-CFAR dans lequel les échantillons du clutter à la sortie des cellules de référence sont classés par ordre croissant selon leurs amplitudes, et les plus grands qui correspondent aux cellules contenant des interférences, sont éliminées. Le niveau du bruit est estimé à partir d'une combinaison linéaire des échantillons restant. On peut dire que le détecteur CMLD-CFAR a une structure hybride des deux détecteurs CA-CFAR et OS-CFAR [99,, 108]. Ainsi le CMLD-CFAR tire profit des avantages des deux procédures respectives.

Après ce tour d'horizon sur les différents algorithmes CFAR, nous nous proposons de détailler dans ce qui suit, le détecteur CA-CFAR.

### ***Le Détecteur CA-CFAR***

Rappelons pour mémoire que l'idée principale du détecteur CA-CFAR est d'estimer le niveau du clutter à partir de la moyenne arithmétique des échantillons dans la fenêtre de référence [95, 100, 101]. Cela explique que ce seuil de détection s'adapte avec les variations de l'environnement. Dans notre travail, nous supposons que la cellule sous test est la cellule du milieu des cellules de références. Cette supposition est la plus courante dans toutes les références que nous avons lu [95,, 98, 99, 101]. La valeur du seuil de détection adapté est obtenue en multipliant le niveau du bruit estimé,  $Z$ , par un facteur multiplicatif,  $T$  afin de satisfaire la probabilité de fausse alarme désirée. La sortie,  $Y$ , de la cellule sous test est alors comparée avec le seuil résultant afin de prendre une décision. Le détecteur CA-CFAR permet ainsi de maintenir la probabilité de fausse alarme constante lorsque les échantillons du bruit total (bruit thermique plus clutter) sont statistiquement indépendants et identiquement distribués (environnement homogène). Dans un environnement réel, les échantillons du bruit ne sont pas tous identiquement distribués (environnement non homogène), ceci est dû à la présence d'échos parasites dont les origines sont des cibles d'interférence c'est à dire des cibles qui ne sont pas concernées par la détection [109], par exemple des cibles de brouillage volontaire. Pour l'analyse du détecteur CA-CFAR dans l'environnement homogène, on assume que le bruit total est gaussien et les  $N$  échantillons du bruit sont statistiquement indépendants et identiquement distribués. On assume aussi que la cible dans la cellule sous test

appelée cible primaire est modélisée selon le modèle Swerling type I. Rappelons, que le modèle de Swerling type I suppose que la cible fluctue lentement selon la distribution d'amplitude de Rayleigh (ce modèle est le plus utilisé dans ce domaine). Le rapport signal sur bruit, SNR, de la cible primaire est dénoté par  $S$ . Puisque le bruit et les cibles Rayleigh ont des composantes Gaussiennes en quadrature, la sortie du détecteur quadratique a une densité de probabilité exponentielle.

La probabilité de détection,  $P_D$ , est donnée par l'expression suivante [110, 111] :

$$P_D = \int_0^{\infty} \Pr(Y_1 > TZ/H_1) p_z(z) dz = \left[ \frac{1+S}{1+S+T} \right]^N \quad (5.1)$$

où  $\Pr$  est la probabilité de détection conditionnelle sous l'hypothèse que le seuil est  $TZ$  et  $p_z(z)$  dénote la fonction de densité de probabilité FDP du seuil adaptatif.

La probabilité de fausse alarme peut être aussi exprimée comme :

$$P_{FA} = \int_0^{\infty} \Pr(Y_0 > TZ/H_0) p_z(z) dz \quad (5.2)$$

$$P_{FA} = \left[ \frac{1}{1+T} \right]^N \quad (5.3)$$

## 5.4 Synthèse

Il convient, avant d'aborder la détection distribuée, de présenter quelques exemples d'illustrations pour plus de clarté. Nous nous sommes appuyés sur le RADAR toolbox V0.11 de MATLAB 5.3, développé par Glen Davidson [112] en se basant sur les travaux de Gandhi et Kassam [101]. Cet outil nous permet de construire plusieurs exemples tant pour la probabilité de détection CFAR que pour les distributions du clutter et le calcul des valeurs du seuil  $T$  pour une  $P_{FA}$  désirée. La Figure 5.5 illustre la probabilité de détection en fonction du SNR, des détecteurs CA, GO, SO et OS-CFAR comparée à celle du détecteur optimum au sens de Neyman-Pearson. L'environnement est un environnement gaussien homogène, la cible est modélisée selon le modèle Swerling I.  $P_{FA}$  étant prise égale à  $10^{-6}$ . Il est clair que les performances du détecteur CA-CFAR sont les plus proches de celles du détecteur optimum comparativement aux détecteurs GO, SO et OS-CFAR. Dans la Figure 5.6 est illustré l'évolution du seuil  $T$  pour le détecteur OS-CFAR en fonction du rang  $k$ . Nous remarquons que le facteur  $T$  est inversement proportionnel au rang  $k$ .

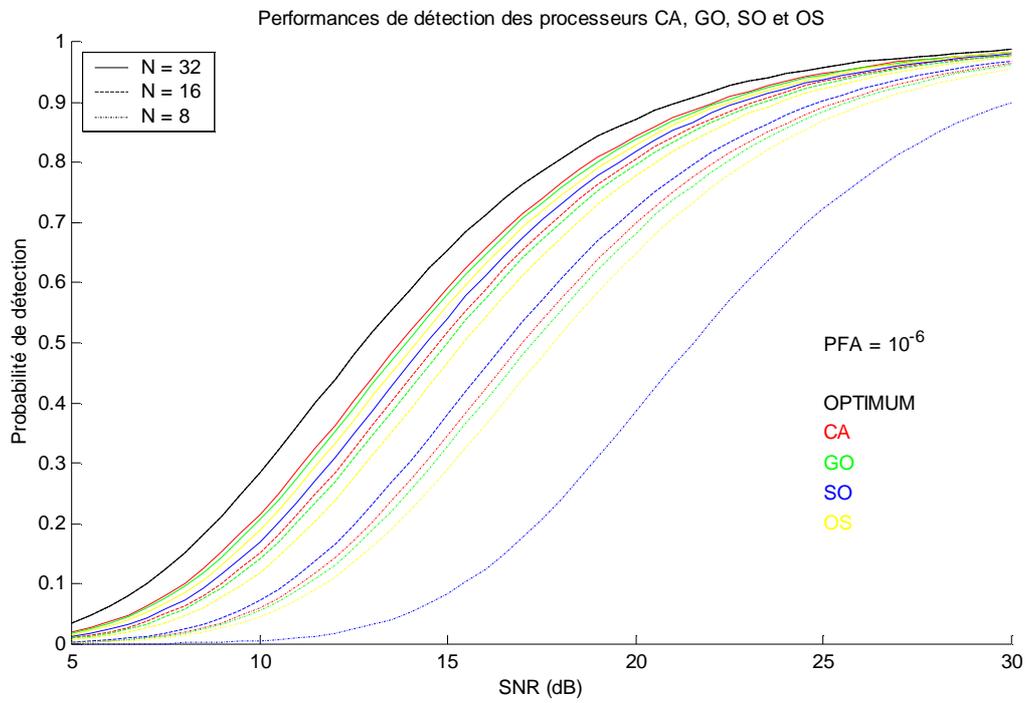


Fig. 5.5 Probabilité de détection des détecteurs CA, GO, SO et OS-CFAR dans un environnement gaussien homogène.

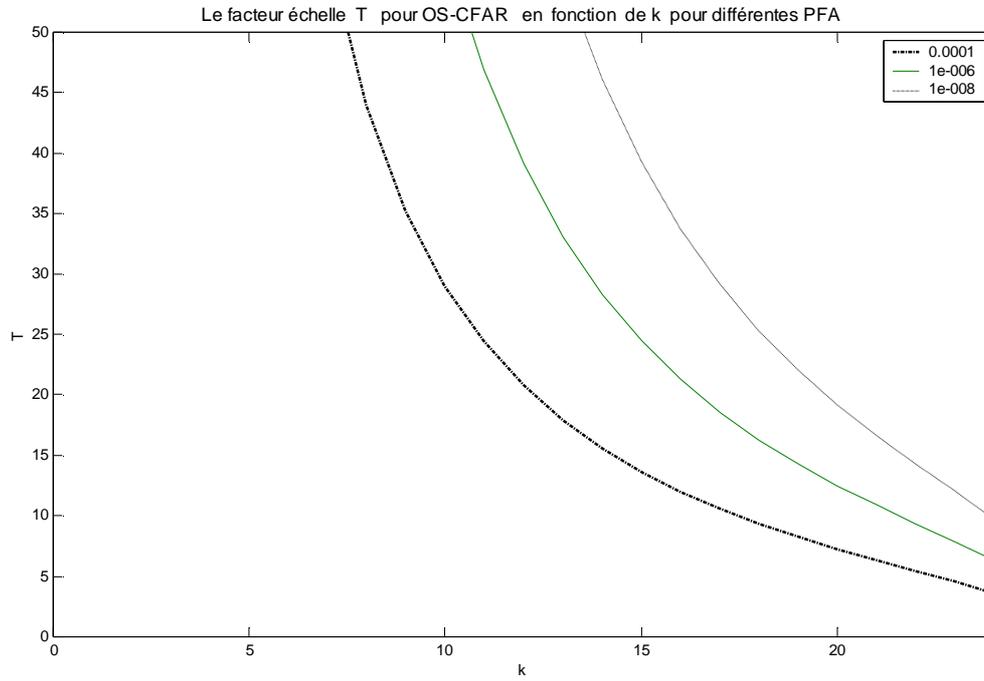


Fig. 5.6 Le facteur échelle T pour OS-CFAR en fonction du rang k et pour différentes valeurs de P<sub>FA</sub>

Les Tableaux 5.1, 5.2 et 5.3 regroupent les valeurs des seuils  $T_{CA}$ ,  $T_{GO}$  et  $T_{SO}$  respectivement pour différentes valeurs de cellules de références  $N$  et différentes valeurs de  $P_{FA}$ . L'environnement est homogène gaussien. Notons que les valeurs les plus précises des seuils correspondent à la plus petite valeur de  $P_{FA}$  ( $P_{FA}=10^{-8}$ ). Notons également que ces valeurs sont les plus grandes et ceci pour les trois détecteurs CA, GO et SO-CFAR.

Ce rappel de la détection CFAR ne serait complet sans aborder les systèmes distribués CFAR. A cette fin, nous passerons en revue, dans le paragraphe suivant les systèmes de détection distribués avec différentes topologies.

## 5.5 Les Détecteurs Distribués CFAR

Dans les systèmes de surveillance traditionnels un seul détecteur tel un RADAR assure la détection des cibles. Le traitement de données est effectué, dans ce cas, par un processeur central où aboutissent les observations transmises par le détecteur en question. Les systèmes de détection distribués basés sur des senseurs multiples et un centre de fusion ont été largement utilisés [113-134]. Ces systèmes améliorent les performances telles que la vitesse, la fiabilité, la couverture RADAR, le nombre de cibles considérées etc. ... On distingue généralement deux types de topologies des systèmes distribués :

- La topologie série
- La topologie parallèle

Dans la configuration série, le premier détecteur transmet sa décision locale au deuxième détecteur lequel effectue à son tour une décision basée sur d'une part sa propre observation et d'autre part, sur la décision locale du premier détecteur et ainsi de suite. La décision du dernier détecteur est considérée comme étant la définitive du réseau. Il existe une variante des systèmes distribués à réseaux série mais avec un centre de fusion de données. Dans ce modèle, le  $(i-1)^{ième}$  centre de fusion transmet sa décision au  $i^{ième}$  centre de fusion lequel l'utilise conjointement avec l'observation de  $i^{ième}$  senseur pour élaborer une décision. Le dernier centre de fusion fournit la décision finale. En général, les réseaux de détection distribuée série sont peut utilisés à cause de leur sensibilité aux défauts de liaisons. La deuxième topologie est

$P_{FA} \backslash T_{CA}$	$T_{CA}(N=8)$	$T_{CA}(N=16)$	$T_{CA}(N=24)$	$T_{CA}(N=32)$
$10^{-4}$	2.1623	0.77828	0.4678	0.33352
$10^{-6}$	4.6234	1.3714	0.77828	0.53993
$10^{-8}$	9	2.1623	1.1544	0.77828

Tableau 5.1 Les valeurs du seuil  $T_{CA}$  pour différentes valeurs de N et de  $P_{FA}$

$P_{FA} \backslash T_{GO}$	$T_{GO}(N=8)$	$T_{GO}(N=16)$	$T_{GO}(N=24)$	$T_{GO}(N=32)$
$10^{-4}$	3.60308	1.35887	0.83375	0.60192
$10^{-6}$	7.77728	2.41945	1.40033	0.982764
$10^{-8}$	15.2147	3.84114	2.09126	1.42564

Tableau 5.2 Les valeurs du seuil  $T_{GO}$  pour différentes valeurs de N et de  $P_{FA}$

$P_{FA} \backslash T_{SO}$	$T_{SO}(N=8)$	$T_{SO}(N=16)$	$T_{SO}(N=24)$	$T_{SO}(N=32)$
$10^{-4}$	10.88896	2.444585	1.277832	0.819074
$10^{-6}$	36.6089	5.132084	2.349703	1.475406
$10^{-8}$	117.9207	9.905065	3.917545	2.302169

Tableau 5.3 Les valeurs du seuil  $T_{SO}$  pour différentes valeurs de N et de  $P_{FA}$

très en vogue dans beaucoup d'applications pour les avantages qu'elle nous offrent tels, entre autres, le coût, et la fiabilité.

Il existe deux types de structure parallèle:

- Système de senseurs distribués avec traitement centralisé
- Système de détection distribué avec centre de fusion de donnée

Dans le premier cas, les observations sont transmises directement au centre principal sans aucun traitement au niveau des détecteurs. Cette transmission nécessite des canaux à large bande passante de communication. Dans le deuxième cas, la grande partie du traitement est effectuée au niveau de chaque détecteur et leurs résultats sont acheminés vers le centre de fusion de données où le reste du traitement est effectué pour obtenir la décision finale.

Plusieurs travaux concernant la détection distribuée utilisant des détecteurs à taux de fausse alarme constant (CFAR) ont été reportés dans la littérature [113-134]. L'utilisation de la détection CA-CFAR distribuée a été apportée par Barkat et Varshney [113, 114]. Ils ont supposé que les règles utilisées au centre de fusion sont connues; en particulier, ils ont considéré les règles de fusion AND et OR. Ils ont trouvé les constantes de seuillage optimales pour chaque détecteur et trouvé une expression de la probabilité de détection au centre de fusion pour une règle de fusion spécifique. Pour les deux types de topologies considérées; la topologie parallèle et la topologie série, ils ont optimisé le système global en maximisant la probabilité de détection tout en maintenant la probabilité de fausse alarme constante. Elias Fusté et *al.* [115] ont généralisé les résultats obtenus pour des récepteurs homogènes à des récepteurs hétérogènes (inhomogeneous receivers). Witte et Gandhi [116] considèrent le système de détection distribué mais avec des senseurs locaux dont le nombre de cellules de référence est identique. De même, ils traitent le système distribué OS-CFAR. Blum et Kassam [117] ont étudié la détection CA-CFAR distribuée pour des signaux faibles et en présence d'un bord de clutter. Le cas de deux senseurs où les observations sont dépendantes d'un senseur à un autre a été considéré. Uner et Varshney [118] ont étudié les performances d'un système distribué utilisant comme senseurs locaux les détecteurs OS-CFAR pour des cibles interférentes. Blum et Qiaq [119] ont étendu l'étude précédente à l'optimisation des seuils pour des observations du signal dépendantes d'un senseur à l'autre.

### **Analyse des Systèmes Distribués**

Dans la topologie parallèle, où la structure de base est composée d'un ensemble de détecteurs périphériques identiques et d'un centre de fusion de données, chaque senseur effectue une décision locale, basée sur ces propres observations et la transmet au centre de fusion de données où une décision globale est obtenue généralement selon deux règles de fusion « **AND** » et « **OR** ». Nous admettons que la cible suit le modèle de Rayleigh et la probabilité de détection et la probabilité de fausse alarme de chaque détecteur sont notées par:  $P_{D_i}$  et  $P_{FA_i}$ , ( $i=1,2,\dots,n$ )

En considérant la règle de fusion « **AND** », les probabilités globales de détection et de fausse alarme sont :

$$P_D = \prod_{i=1}^n P_{D_i} \quad (5.4)$$

et

$$P_{FA} = \prod_{i=1}^n P_{FA_i} \quad (5.5)$$

En considérant la règle « **OR** », les probabilités globales de détection et de fausse alarme sont exprimées par

$$P_D = \sum_{i=1}^n P_{D_i} - \prod_{i=1}^n P_{D_i} \quad (5.6)$$

$$P_{FA} = \sum_{i=1}^n P_{FA_i} - \prod_{i=1}^n P_{FA_i} \quad (5.7)$$

## **5.6 Conclusion**

Les détecteurs CFAR peuvent être utilisés avec profit dans de nombreuses situations. Leurs résultats permettent de détecter des cibles noyées dans des signaux parasites dont les puissances sont inconnues tout en maintenant un taux de fausse alarme constant contrairement à la détection classique à seuil fixe. L'originalité du processus CFAR réside dans l'estimation du niveau du bruit; cette estimation qui permet d'adapter le seuil de détection à la variation du bruit. De ce fait, ont découlé plusieurs détecteurs CFAR, l'idée principale restant cependant la même. Dans le détecteur CA-CFAR, par exemple, le niveau du clutter est estimé par la moyenne arithmétique des échantillons. Les deux variantes du CA-CFAR, qui sont le

GO-CFAR et le SO-CFAR ont été proposées pour améliorer la détection dans un environnement non homogène. Les détecteurs OS-CFAR et CMLD-CFAR sont proposés pour contourner l'effet de capture. Dans des cas plus complexes, l'environnement, non homogène, et présence de cibles multiples, ces détecteurs font cependant preuve de limitation, d'autres méthodes doivent ainsi être envisagées. Nous nous proposons dans ce travail de thèse d'introduire des méthodes de prétraitement en amont de la structure CFAR pour réduire l'effet du clutter et pour améliorer la robustesse des détecteurs contre les cibles interférentes.

# Chapitre 6

---

## Performances des Processeurs CFAR Distribués dans un Clutter de Distribution alpha-stable (Pearson)

---

### 6.1 Introduction

Cette section traite de la détection Radar à taux de fausse alarme constant (Constant False Alarm Rate: CFAR) des cibles noyées dans un clutter de distribution alpha-stable (Pearson ou Lévy). En particulier, nous étendons les résultats obtenus pour les détecteurs CA, OS et CMLD-CFAR dans un environnement homogène obtenus dans [7], pour un cas général. Notamment, la présence de cibles interférentes et les systèmes distribués seront considérés. Les performances des processeurs greatest of (GO) et smallest of (SO) CFAR sont aussi déterminés. Les performances des systèmes distribués seront présentées et comparées avec le cas d'un seul détecteur. Nous démontrerons, à travers les résultats de simulation, que les systèmes distribués, pour un clutter modélisé selon la loi alpha-stable, offrent une robustesse contre les cibles interférentes, surtout en utilisant la règle de fusion "OR".

Rappelons pour mémoire que la famille des distributions alpha-stable est particulièrement adaptée à la modélisation des phénomènes impulsifs [6]. Récemment, des données réelles telle que les données du sonar actif [3], les mesures du clutter de mer [4] et le clutter monostatique de la base des forces aériennes US [5], ont été modélisées par les distributions alpha-stable avec un grand succès. Comme nous l'avons déjà mentionné au Chapitre 2, la densité de probabilité

des processus alpha-stable n'a pas de forme explicite sauf pour trois cas :  $\alpha=1$  (la distribution Cauchy),  $\alpha=1/2$  (la distribution Pearson ou Lévy) et  $\alpha=2$  (la distribution Gaussienne). Pour cette raison, nous avons choisi la distribution Pearson pour modéliser le clutter

Ce chapitre est organisé comme suit: Dans la section 2, nous calculerons les probabilités de fausse alarme et les probabilités de détection des processeurs CA, GO et SO-CFAR, opérant dans un clutter de distribution Pearson. Dans la section 3, nous détaillerons les systèmes distribués CFAR. Enfin, nous présenterons les résultats et les conclusions dans les sections 4 et 5 respectivement.

Dans un souci de clarification, nous rappellerons les résultats essentiels obtenus pour un seul détecteur CA-CFAR en présence d'un clutter de distribution Pearson [7]. Nous essayerons par la suite, d'étendre ces résultats aux détecteurs GO et SO, opérant dans le même environnement.

## 6.2 L'analyse des Détecteurs CFAR

Nous détaillons dans cette section le calcul des probabilités de fausse alarme et les probabilités de détection pour les processeurs CA, GO et SO-CFAR respectivement en présence d'un clutter de distribution Pearson.

### 6.2.1 Le Détecteur CA-CFAR

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_N$  des échantillons indépendants et identiquement distribués (i.i.d) selon la distribution Pearson. La densité de probabilité Pearson est définie dans les chapitres précédents (Chapitre 2, equ.2.10 avec  $a=0$ ) et comme suit

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^{3/2}} e^{-\gamma^2/2x}, & x \geq 0 \\ 0 & , \text{autrement} \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $\gamma$  est le paramètre de dispersion

La probabilité de fausse alarme est donnée par:

$$P_{Fa} = \Pr\{Y_0 \geq TZ\} \quad (6.2)$$

La méthode CA-CFAR estime le niveau du clutter comme étant la moyenne des valeurs de cellules de références, i.e.

$$Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \tag{6.3}$$

À partir des propriétés des familles  $\alpha$ -stables dans le Chapitre 2, Z est aussi de distribution Pearson et de dispersion  $\gamma_Z = \sqrt{N}\gamma_{X_i}$ . Bien que les propriétés algébriques des distributions  $\alpha$ -stables aient été exposées lors du Chapitre 2, il convient de les rappeler pour plus de clarté dans les explications.

Si  $X_1, X_2, ..X_n$  sont des v.a.r de distribution alpha-stable, alors

➡ si  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  alors  $\gamma_Y = \gamma_{X_1} + \gamma_{X_2} + \dots + \gamma_{X_N}$   
 et  $\gamma_Y = N\gamma_{X_i}$

➡ si  $Z = hY / h = \frac{1}{N}$  on aura  $\gamma_Z = |h|^\alpha \gamma_Y$

Pour la distribution Pearson,  $\alpha=1/2$

$$\gamma_Z = \left| \frac{1}{N} \right|^{1/2} \gamma_Y = \left| \frac{1}{N} \right|^{1/2} N\gamma_{X_i} = \sqrt{N}\gamma_{X_i}$$

$P_{FA}$  est exprimée par

$$\begin{aligned} P_{FA}^{CA} &= \Pr\{Y_0 \geq TZ\} \\ &= \int_0^\infty \Pr\{Y_0 \geq Tz\} p_Z(z) dz \end{aligned} \tag{6.4}$$

La fonction de répartition des v.a.r  $X_i$  est définie par

$$\begin{aligned} P_{Z_i}(z) &= \Pr\{Z_i \leq z\} \\ &= \int_{-\infty}^z \frac{Y}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z^{3/2}} e^{-\frac{Y^2}{2z}} dz \end{aligned} \tag{6.5}$$

Posons  $u^2 = \frac{Y^2}{z}$  donc  $du = -\frac{1}{2} \frac{Y}{z^{3/2}} dz$

on aura  $P_{Z_i}(z) = 2 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{Y}{\sqrt{z}} \right) \right]$  (6.6)

tel que  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf}(x/\sqrt{2})$  (6.7)

et  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  (6.8)

$$\Pr\{Y_0 \geq TZ\} = \begin{cases} 2\Phi\left(\frac{Y}{\sqrt{Tz}}\right) - 1 & , z \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{6.9}$$

La probabilité de fausse alarme est donc

$$P_{FA}^{CA} = \int_0^{\infty} \left[ 2\Phi\left(\frac{Y}{\sqrt{Tz}}\right) - 1 \right] \frac{\sqrt{Ny}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z^{3/2}} e^{-Ny^2/2z} dz \quad (6.10)$$

Posons  $y = \frac{Y}{\sqrt{z}}$ , nous aurons

$$\begin{aligned} P_{FA}^{CA} &= \int_0^{\infty} \left[ 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{T}}\right) - 1 \right] \frac{\sqrt{Ny}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z^{3/2}} dz \\ &= \frac{2\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \left[ 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{T}}\right) - 1 \right] e^{-Ny^2/2} dy \\ &= \sqrt{\frac{2N}{\pi}} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2T}}\right) e^{-Ny^2/2} dy \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nous constatons que  $P_{FA}$  est contrôlée par le facteur échelle  $T$  et ne dépend pas du paramètre de dispersion  $\gamma$  de la distribution Pearson. Par voie de conséquence, la méthode CA est aussi une méthode CFAR pour un environnement Pearson.

### ***Probabilité de détection***

Nous considérons le cas Swerling I, *i.e.* une cible de type Rayleigh dans un environnement Pearson. Le processeur CFAR est un processeur quadratique. Pour une cible Rayleigh avec un paramètre  $\sigma_s^2$ , la sortie du détecteur a une densité de probabilité exponentielle. En négligeant la puissance du bruit par rapport à celle du signal utile, la mesure de la cellule sous-test est alors exponentielle. Nous aurons donc

$$p_{Y_1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_s^2} e^{-y/2\sigma_s^2} & , y \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.12)$$

La fonction de répartition correspondante est

$$\begin{aligned} P_{Y_1}(y) &= \Pr\{Y_1 \leq y\} = \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\sigma_s^2} e^{-\frac{y}{2\sigma_s^2}} dy = \int_0^y \frac{1}{2\sigma_s^2} e^{-\frac{y}{2\sigma_s^2}} dy \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-y/2\sigma_s^2} & , y \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.13)$$

La probabilité de détection dans ce cas est exprimée comme suit

$$\begin{aligned}
 P_D^{CA} &= \Pr\{Y_1 \geq TZ\} \\
 &= \int_0^{\infty} \Pr\{Y_1 \geq Tz\} p_z(z) dz
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\text{Nous avons } \Pr\{Y_1 \geq Tz\} = \begin{cases} e^{-\frac{Tz}{2\sigma_s^2}} & , \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{6.15}$$

La probabilité de détection sera alors

$$P_D^{CA} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Tz}{2\sigma_s^2}} \frac{\sqrt{Ny}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z^{3/2}} e^{-\frac{Ny^2}{2z}} dz \tag{6.16}$$

Posons  $y = \frac{Y}{\sqrt{z}}$ ; par substitution dans (6.16) nous aurons

$$P_D^{CA} = \sqrt{\frac{2N}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{y^2}{\sigma_s^2}\right) \left(\frac{T}{2y^2}\right)} e^{-Ny^2/2} dy \tag{6.17}$$

Il est clair que  $P_D^{CA}$  est fonction du rapport  $\frac{Y^2}{\sigma_s^2}$ .

Si le bruit est considérable dans la cellule sous-test; la mesure de la cellule sous-test  $Y_1$  sera la somme d'une v.a.r Pearson est d'une v.a.r exponentielle. La difficulté majeure à ce stade, réside dans la détermination des distributions des composantes en phase et en quadrature du bruit et du signal utile. Cependant, seules les distributions des amplitudes du bruit et du signal utile qui sont connues. La mesure dans la cellule sous-test est calculée dans ce cas selon la relation suivante

$$Y_1 = s + c + \sqrt{s \cdot c} \cos(\theta) \tag{6.18}$$

Tel que  $s$  et  $c$  sont le signal cible et le bruit respectivement.

$\theta$  est l'angle entre  $s$  et  $c$  et est uniformément distribué sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

Nous avons calculé la probabilité de détection dans les deux cas. Le premier cas,  $P_D^{CA}$  est déterminée par calcul numérique d'intégrale (equ. 6.17). Le deuxième cas,  $P_D^{CA}$  est déterminer par simulation en se basant sur la méthode de Monté Carlo. Notant que le seuil  $T$  est calculé pour une  $P_{FA}$  désirée  $=10^{-4}$ .

### 6.2.2 Le Détecteur GO-CFAR

Ce type de détecteurs CFAR consiste à diviser la fenêtre des cellules de référence en deux fenêtres; la première (leading cells) contient les cellules avant la

cellule sous-test et la deuxième (lagging cells) contient les cellules après la cellule sous-test. L'estimation du niveau du clutter est le maximum des sommes des sorites des deux fenêtres. La statistique Z est alors

$$Z = Z_{GO} = \max(Z_1, Z_2)$$

où  $Z_1$  est la moyenne de la première fenêtre;  $Z_1 = \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{i=1}^{N/2} X_i$  et  $Z_2$  représente la moyenne de la deuxième fenêtre;  $Z_2 = \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N X_i$

Par analogie au CA-CFAR,  $Z_1$  et  $Z_2$  sont aussi de distribution alpha-stable du moment que ce sont des sommes de v.a alpha-stable.

A partir des propriétés des distributions  $\alpha$ -stables, les dispersions de  $Z_1$  et  $Z_2$  sont

$$Y_{Z_1} = Y_{Z_2} = \sqrt{\frac{N}{2}} Y_{X_i} \quad (6.19)$$

Alors la densité de probabilité de  $Z_1$  ( $Z_2$ ) est

$$p_{Z_i}(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{N/2} Y}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z^{3/2}} e^{-N Y^2 / 4z}, & z \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.20)$$

La densité de probabilité de  $Z_{GO}$  est définie dans [110] comme suit:

$$\begin{aligned} p_{Z_{GO}}(z) &= p_{Z_1}(z)P_{Z_2}(z) + p_{Z_2}(z)P_{Z_1}(z) = 2p_{Z_1}(z)P_{Z_1}(z) \\ &= \begin{cases} 2 \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}} \frac{Y}{z^{3/2}} e^{-N Y^2 / 4z} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{N} Y}{\sqrt{2z}}\right) \right], & z \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.21)$$

### **Probabilité de Fausse Alarme**

La probabilité correspondante est calculée comme suit

$$\begin{aligned} P_{FA}^{GO} &= \Pr\{Y_0 \geq TZ\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Y_0 \geq TZ\} p_{Z_{GO}}(z) dz \\ &= 2 \sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[ 2\Phi\left(\frac{Y}{\sqrt{Tz}}\right) - 1 \right] \frac{Y}{z^{3/2}} e^{-N Y^2 / 4z} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{N} Y}{\sqrt{2z}}\right) \right] dz \\ &= 2 \sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{2Tz}}\right) \frac{Y}{z^{3/2}} e^{-N Y^2 / 4z} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{N} Y}{\sqrt{2z}}\right) \right] dz \end{aligned} \quad (6.22)$$

Posons  $y = \frac{Y}{\sqrt{z}}$ , alors

$$\begin{aligned}
 P_{FA}^{GO} &= 4\sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2T}}\right) \left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{N}{2}}y\right)\right] e^{-\frac{Ny^2}{4}} dy \\
 &= 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2T}}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Ny}}{2}\right)\right] e^{-\frac{Ny^2}{4}} dy
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

D'après (6.23),  $P_{FA}^{GO}$  est contrôlée par le facteur scalaire (le seuil)  $T$  et ne dépend pas du paramètre de dispersion  $\gamma$ . Nous pouvons dire dès lors et déjà que la méthode GO est aussi une méthode CFAR lorsque le clutter est de distribution Pearson.

### Probabilité de Détection

En négligeant le bruit dans la cellule sous-test, la probabilité de détection  $P_D^{GO}$  est exprimée comme suit

$$\begin{aligned}
 P_D^{GO} &= \Pr\{Y_1 \geq TZ\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Y_1 \geq Tz\} p_{Z_{GO}}(z) dz \\
 &= 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-Tz/2\sigma_s^2} \frac{Y}{z^{3/2}} e^{-\frac{Ny^2}{4z}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{Ny}}{\sqrt{2z}}\right)\right] dz
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Posons  $y = \frac{Y}{\sqrt{z}}$ , nous aurons

$$P_D^{GO} = 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma_s^2}\right)\left(\frac{T}{y^2}\right)} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Ny}}{2}\right)\right] e^{-\frac{Ny^2}{4}} dy \tag{6.25}$$

Nous constatons que la probabilité de détection est fonction du rapport  $\frac{Y^2}{\sigma_s^2}$ .

Dans le cas où le bruit n'est pas négligeable, nous utilisons la relation (6.18) et la méthode de simulation pour calculer  $P_D^{GO}$ .

### 6.2.3 Le Détecteur SO-CFAR

Dans cette structure, l'estimation du niveau du clutter est le minimum des sommes des sorties de deux fenêtres. La statistique  $Z$  est donc

$$Z_{SO} = \min(Z_1, Z_2)$$

La densité de probabilité de  $Z_{SO}$  est calculée par [110]

$$\begin{aligned}
 p_{z_{SO}} &= 2p_{z_1}(z)(1-P_{z_1}(z)) \\
 &= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}} \frac{y}{z^{3/2}} e^{-\frac{Ny^2}{4z}} \left[ 2\phi\left(\frac{\sqrt{Ny}}{\sqrt{2z}}\right) - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

**Probabilité de Fausse Alarme**

En utilisant l'équation (6.2), la probabilité de fausse alarme correspondante est

$$\begin{aligned}
 P_{FA}^{SO} &= \Pr\{Y_0 \geq TZ\} = \int_0^\infty \Pr\{Y_0 \geq Tz\} p_{z_{SO}}(z) dz \\
 &= \sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^\infty \left[ 2\phi\left(\frac{y}{\sqrt{Tz}}\right) - 1 \right] \frac{y}{z^{3/2}} e^{-\frac{Ny^2}{4z}} \left[ 2\phi\left(\frac{\sqrt{Ny}}{\sqrt{2z}}\right) - 1 \right] dz
 \end{aligned} \tag{6.27 a}$$

Posons  $y = \frac{Y}{\sqrt{z}}$ ; nous aurons

$$P_{FA}^{SO} = 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^\infty \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2T}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Ny}}{2}\right) e^{-\frac{Ny^2}{4}} dy \tag{6.27 b}$$

Il est clair d'après (6.27 b), que la procédure SO est aussi une procédure CFAR dans un clutter Pearson

**Probabilité de Détection**

La probabilité de détection correspondante est

$$\begin{aligned}
 P_D^{SO} &= \Pr\{Y_1 \geq TZ\} = \int_0^\infty \Pr\{Y_1 \geq Tz\} p_{z_{SO}}(z) dz \\
 &= \sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^\infty e^{-Tz/2\sigma_s^2} \frac{y}{z^{3/2}} e^{-\frac{Ny^2}{4z}} \left[ 2\phi\left(\frac{\sqrt{Ny}}{\sqrt{2z}}\right) - 1 \right] dz \\
 &= 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{T}{y^2}\right)\left(\frac{y^2}{2\sigma_s^2}\right)} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Ny}}{2}\right) e^{-\frac{Ny^2}{4}} dy
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Nous constatons que  $P_D^{SO}$  est aussi contrôlée par le rapport  $\frac{Y^2}{\sigma_s^2}$ .

Dans ce qui suit, nous étudierons les détecteurs distribués CFAR en utilisant les deux règles de fusion "AND" et "OR".

### 6.3 La Détection Distribuée CFAR dans un Environnement ( $\alpha$ -Stable) Pearson

La Figure 6.1 illustre un système distribué constitué de  $M$  senseurs et un centre de fusion.  $Y_i$  est l'enveloppe quadratique de la cellule sous-test. La règle de fusion "AND" consiste à déclarer qu'une cible est présente si tous les détecteurs locaux décident en faveur de la présence d'une cible. Tandis que la règle de fusion "OR", une cible est déclarée présente si au moins un des  $M$  détecteurs décide qu'une cible est présente.

Pour la règle "AND", la probabilité totale de fausse alarme et la probabilité totale de détection sont calculées par

$$\begin{aligned} P_{FA} &= \prod_{i=1}^M P_{FA_i} \\ P_D &= \prod_{i=1}^M P_{D_i} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Pour la règle de fusion "OR"

$$\begin{aligned} P_{FA} &= \sum_{i=1}^M P_{FA_i} - \prod_{i=1}^M P_{FA_i} \\ P_D &= \sum_{i=1}^M P_{D_i} - \prod_{i=1}^M P_{D_i} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Nous considérons que le rapport signal-sur-bruit généralisé (GSNR) est le même pour chaque détecteur. Nous supposons que le système distribué est composé de deux détecteurs dans un environnement Pearson. Les deux détecteurs CA-CFAR sont supposés identiques (mêmes caractéristiques), i.e.  $P_{FA_1} = P_{FA_2}$  et donc  $T_1 = T_2 = T$  et ont le même nombre de cellules de références. Rappelons les expressions de la probabilité de détection et de fausse alarme

$$P_{FA}^{CAi} = \sqrt{\frac{2N_i}{\pi}} \int_0^{\infty} \text{erf}(y_i / \sqrt{2T_i}) e^{-Ny_i^2/2} dy_i \quad (6.31)$$

et

$$P_D^{CAi} = \sqrt{\frac{2N_i}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{Y^2}{\sigma_s^2}\right) \cdot \left(\frac{T_i}{2y_i^2}\right)\right] e^{-Ny_i^2/2} dy_i \quad (6.32)$$

où  $N_1$ ,  $N_2$  sont le nombre de cellules de références des deux détecteurs CA-CFAR respectivement.

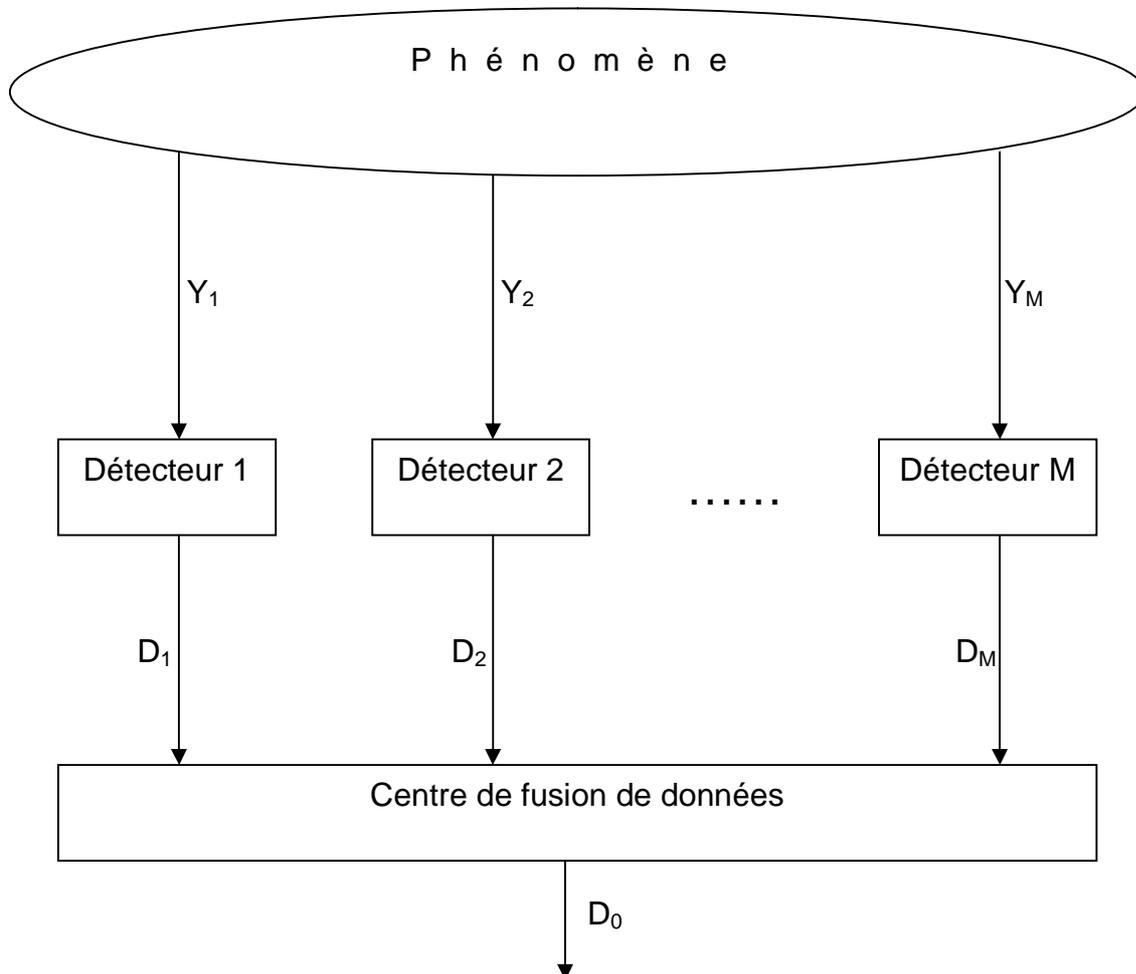


Fig. 6.1 Système de détection distribuée avec centre de fusion de données.

En remplaçant les équations (6.31) et (6.32) dans (6.29) et (6.30), nous trouvons la probabilité totale de fausse alarme et la probabilité totale de détection.

Pour la règle "AND", nous trouvons

$$P_{FA}^{AND} = P_{FA}^{CA1} \cdot P_{FA}^{CA2} \quad (6.33)$$

et

$$P_D^{AND} = P_D^{CA1} \cdot P_D^{CA2} \quad (6.34)$$

En employant la règle de fusion "OR", nous trouvons

$$P_{FA}^{OR} = P_{FA}^{CA1} + P_{FA}^{CA2} - P_{FA}^{CA1} \cdot P_{FA}^{CA2} \quad (6.35)$$

et

$$P_D^{OR} = P_D^{CA1} + P_D^{CA2} - P_D^{CA1} P_D^{CA2} \quad (6.36)$$

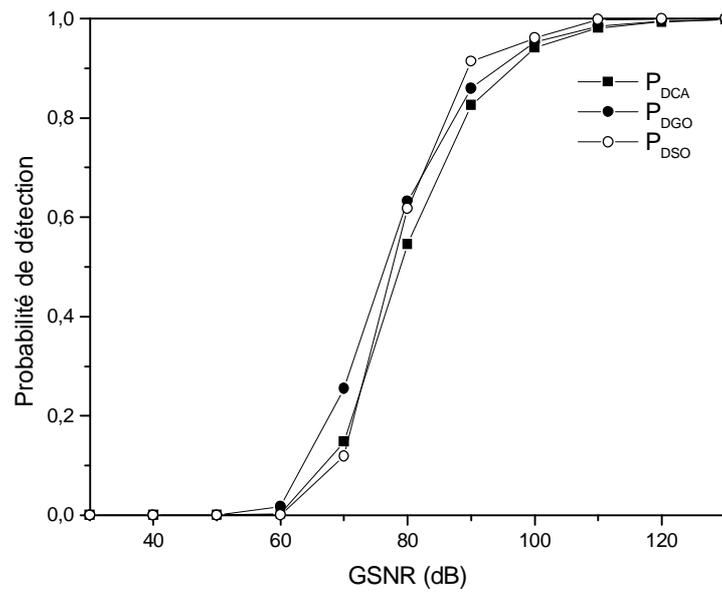
De la même façon nous calculons la probabilité de détection totale et la probabilité de fausse alarme totale si les détecteurs du système distribué ne sont pas identiques; exemple: le premier détecteur est un détecteur CA-CFAR et le deuxième détecteur est l'OS-CFAR. Notons que le but d'utiliser des détecteurs différents est de tirer profit de leurs avantages respectifs.

## 6.4 Résultats et Discussions

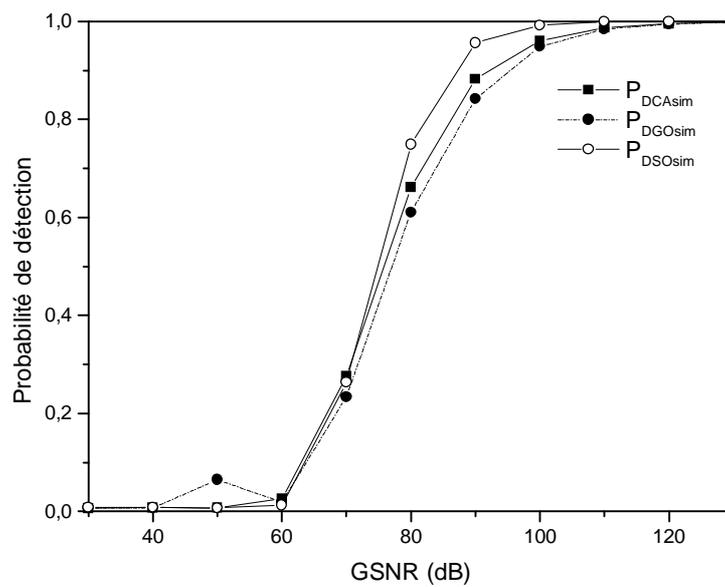
Pour illustrer l'efficacité des résultats analytiques, des études de simulation ont été faites pour différentes situations. Les probabilités de détection sont calculées par des méthodes de simulation en MATLAB 5.3 basées sur la procédure de Monté Carlo et par calcul numérique d'intégral en FORTRAN 77 (equs 6.17, 6.25 et 6.28). Nous considérons que le clutter est homogène, modélisé selon la distribution alpha-stable (Pearson) et la cible est de distribution Rayleigh (Swerling I). La Figure 6.2 représente les variations de probabilités de détection  $P_D^{CA}$ ,  $P_D^{GO}$  et  $P_D^{SO}$  en fonction du rapport signal sur bruit généralisé (generalised signal to noise ratio GSNR). Les probabilités de fausse alarme sont égales à  $P_{FA}^{CA} = P_{FA}^{GO} = P_{FA}^{SO} = 10^{-4}$ . Le GSNR est défini dans [7] comme suit

$$GSNR = 20 \log \frac{\sigma_s}{\gamma} \quad (6.37)$$

où  $\sigma_s$  est le paramètre de la cible Rayleigh. Bien que le moment du second ordre  $E[X^2]$  d'un processus est largement utilisé comme une mesure standard de l'intensité d'un signal et interprète le concept physique de la puissance ou de l'énergie, il ne peut pas être utilisé avec les distributions alpha-stable parce qu'il est infini. De ce fait, l'expression du GSNR dans (6.37) ne doit pas s'interpréter comme étant le rapport signal-sur-bruit (SNR). Il est clair, d'après la Figure 6.2 que les résultats obtenus par la méthode de Monté Carlo et par calcul numérique d'intégral sont proches. Dans un souci de comparaison, nous admettons que les trois détecteurs ont les mêmes caractéristiques, i.e. même nombres de cellules de références ( $N_{CA}=N_{GO}=N_{SO}=32$ ).  $P_D^{SO}$  est supérieure à  $P_D^{GO}$  et  $P_D^{CA}$  pour  $GSNR \geq 70\text{dB}$ . La courbe de  $P_D^{CA}$  obtenue par calcul numérique d'intégral est proche de la courbe  $P_D^{CA}$  obtenue par méthode de simulation. Lorsque  $GSNR \geq 100\text{dB}$ , les trois détecteurs donnent les mêmes résultats. L'effet de la présence de cibles interférentes dans une seule fenêtre (leading cells) sur les performances de la détection du CA, GO et SO-CFAR est illustré sur la Figure 6.3. Nous présentons dans cet exemple, les variations de la probabilité de détection en fonction du GSNR et en présence de trois cibles interférentes. Nous supposons que les échos provenant des interférences ont des puissances beaucoup plus grandes que celles du clutter. Nous admettons également que les rapport interférence sur bruit généralisé sont  $GINR_1=GINR_2=GINR_3=50\text{dB}$ . L'exemple présenté montre une dégradation sévère de la probabilité de détection  $P_D^{CA}$  et  $P_D^{GO}$ . Ceci est dû à une sur estimation de la puissance moyenne du clutter dans les cellules de références. Il en résulte une augmentation considérable du seuil  $T$ , d'où l'effet de capture. Le détecteur SO-CFAR donne les meilleures performances de détection par rapport aux détecteurs CA et GO-CFAR. Rappelons pour mémoire que le détecteur SO-CFAR a été proposé pour diminuer l'effet de capture. Il est à noter aussi que le SO-CFAR permet de résoudre le problème de cibles interférentes, dans le cas où toutes les interférentes sont présentes dans un seul côté des cellules de référence. Dans un souci de comparaison, nous avons également calculé la probabilité de détection du détecteur OS-CFAR en utilisant l'expression développée dans [7, equ. 21].



(a)



(b)

Fig. 6.2 Probabilités de détection  $P_D^{GO}$ ,  $P_D^{SO}$  et  $P_D^{CA}$  en fonction du  $GSNR=20\log(\sigma_s/\gamma)$  dans un environnement Pearson homogène.  $P_{FA}=10^{-4}$ ,  $N_{CA}=N_{GO}=N_{SO}=32$ . (a):  $P_D$  obtenue par calcul numérique d'intégral, (b):  $P_D$  obtenue par simulation

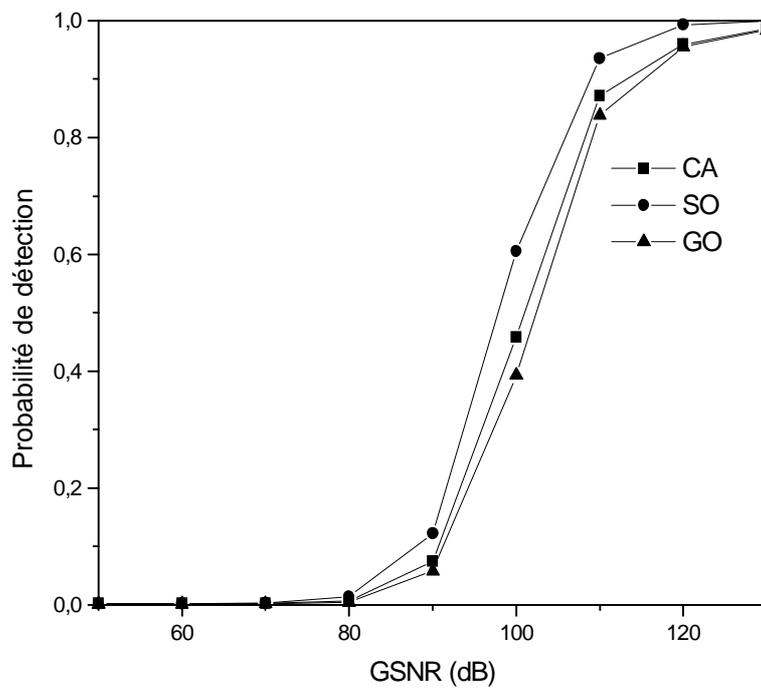


Fig. 6.3 Probabilités de détection  $P_D^{GO}$ ,  $P_D^{SO}$  et  $P_D^{CA}$  en fonction du  $GSNR=20\log(\sigma_s/\gamma)$  en présence de trois cibles interférentes ( $GINR_1=GINR_2=GINR_3=50\text{dB}$ ).  $P_{FA}=10^{-4}$ ,  $N_{CA}=N_{GO}=N_{SO}=32$ .

Le résultat est illustré dans la Figure 6.4. Il est clair que la probabilité de détection  $P_D^{OS}$  est supérieure pour des petites valeurs du rang  $k$ . Les performances de détection des systèmes distribués (CA-CA-CFAR) et (OS-OS-CFAR) dans un environnement Pearson homogène sont illustrés sur les Figures 6.5 et 6.6 respectivement. Le  $G_{SNR_i}$  est le même pour chaque détecteur. Nous utilisons les deux règles extrêmes de fusion, à savoir, "AND" et "OR". Les résultats obtenus en utilisant la règle "OR" sont bien meilleurs pour les deux systèmes proposés. La Figure 6.7 illustre les performances du système distribué CA-CA CFAR en présence de deux cibles interférentes dans un seul détecteur. L'amélioration de la probabilité de détection par rapport à un seul détecteur, traduit la robustesse des systèmes distribués contre les interférences. Pour illustrer l'influence du nombre de cellules de références sur les performances de la détection, nous présentons l'exemple de la Figure 6.8. Nous avons utilisé deux détecteurs différents (le CA-CFAR et le OS-CFAR). Nous considérons que  $N_{OS}$  (le nombre de cellules de références du détecteur OS)=16 avec un rang  $k=16$  et  $N_{CA}=32$ . Rappelons que le but d'utiliser des détecteurs différents dans un système distribué, est de tirer profit de leurs avantages respectifs. La combinaison de deux détecteurs différents offre une amélioration considérable dans les performances de la détection et la robustesse contre les interférences. Il est à noter qu'il n'y a pas un grand avantage en augmentant le nombre de cellules de références. Aussi, en utilisant la règle de fusion "AND", l'amélioration des performances de détection est faible. Cependant, la probabilité de détection totale est augmentée considérablement en utilisant la règle de fusion "OR".

### 6.5 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons étudié les performances des détecteurs CA, GO et SO-CFAR dans un environnement alpha-stable (Pearson) et en présence de cibles interférentes. Nous avons également étudié les performances des systèmes distribués avec deux règles de fusion "AND" et "OR". Les principales remarques formulées au cours de ce chapitre méritent d'être rappelés. En effet, en modélisant le clutter par la distribution Pearson, les détecteurs CA, GO, SO et OS nous permettent une détection à taux de fausse alarme constant (CFAR) du moment que

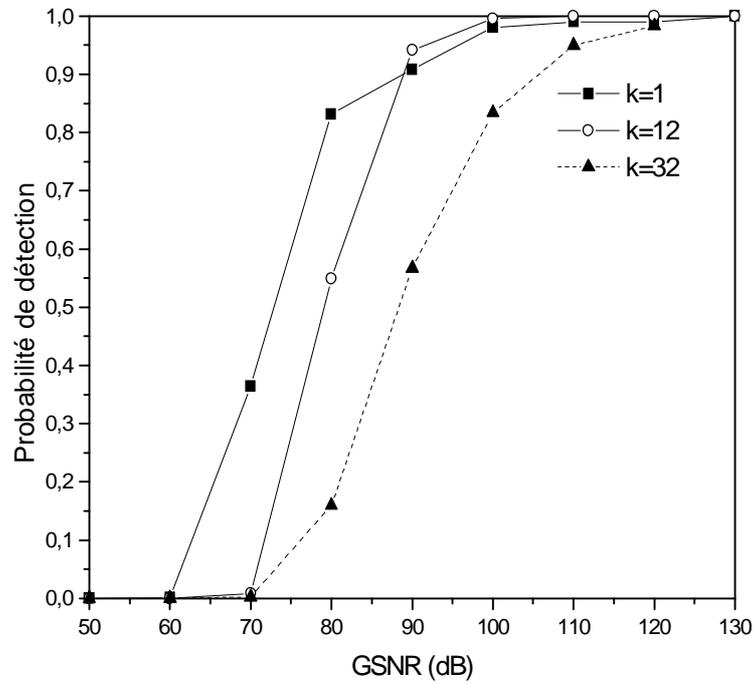


Fig. 6.4 Probabilités de détection  $P_D^{OS}$  en fonction du  $GSNR=20\log(\sigma_s/\gamma)$  dans un environnement Pearson homogène.  $P_{FA}=10^{-4}$ ,  $N_{OS}=32$ .

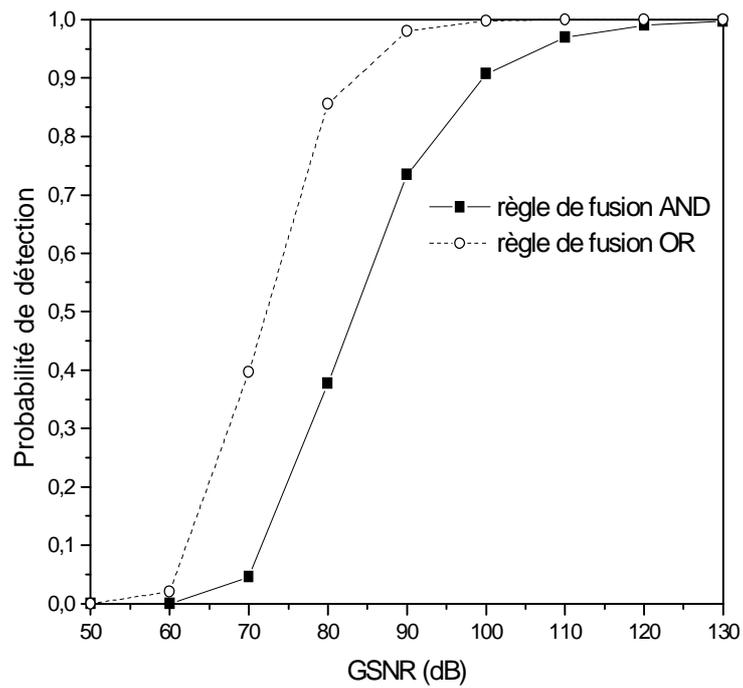


Fig. 6.5 Probabilité de détection en fonction du GSNR d'un système distribué CA-CA CFAR dans un environnement Pearson homogène.  $P_{FA}=10^{-4}$ ,  $N_1=N_2=32$  et les règles de fusion "AND et "OR".

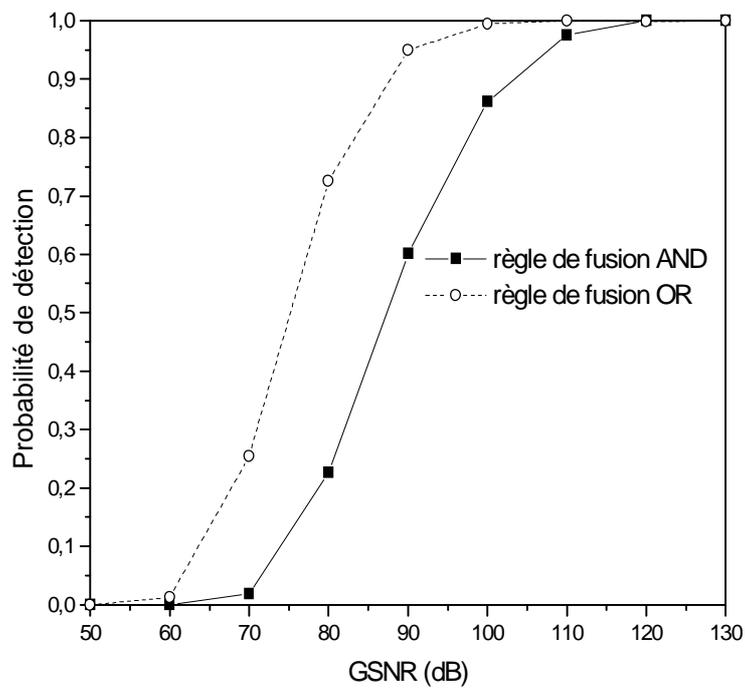


Fig. 6.6 Probabilité de détection en fonction du GSNR d'un système distribué OS-OS CFAR dans un environnement Pearson homogène.  $P_{FA}=10^{-4}$ ,  $N_1=N_2=32$ ,  $k_1=k_2=32$  et les règles de fusion "AND et "OR".

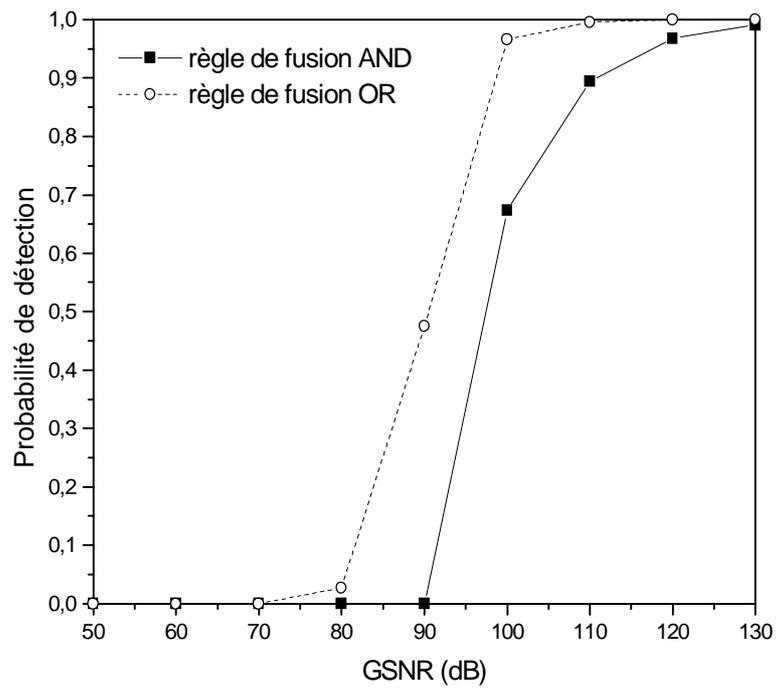


Fig. 6.7 Probabilité de détection en fonction du GSNR d'un système distribué CA-CA CFAR en présence de deux cibles interférentes dans le premier détecteur.  $GINR_1=GINR_2=30\text{dB}$ .  $P_{FA}=10^{-4}$ ,  $N_1=N_2=32$  et les règles de fusion "AND et "OR".

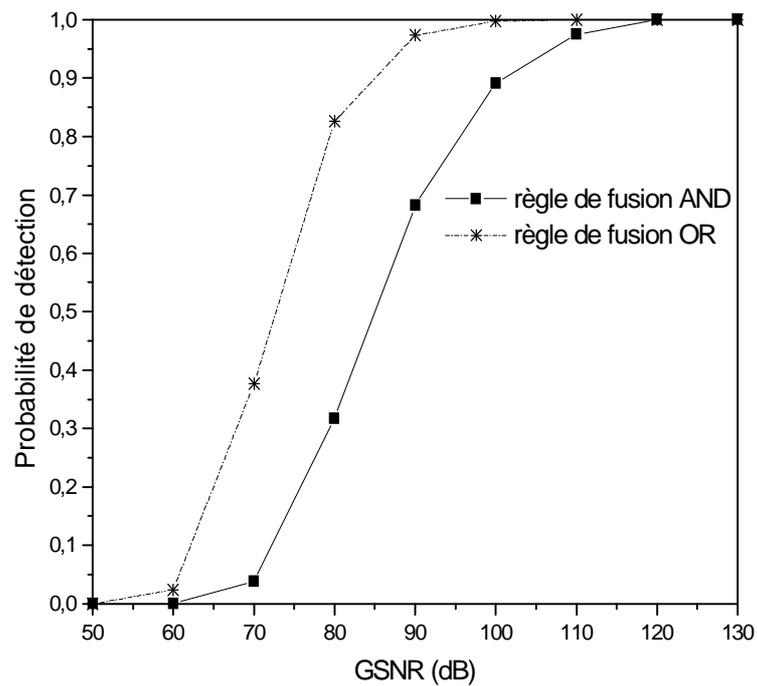


Fig. 6.8 Probabilité de détection en fonction du GSNR d'un système distribué OS-CA CFAR dans un environnement Pearson homogène.  $P_{FA}=10^{-4}$ ,  $N_{OS}=k=16$ ,  $N_{CA}=32$  et les règles de fusion "AND et "OR".

la probabilité de fausse alarme est indépendante du paramètre de dispersion ( $\gamma$ ) du clutter. Les résultats de simulation (basée sur la procédure de Monté Carlo) ont montré que le SO-CFAR donne les meilleures performances par rapport au détecteurs CA et GO-CFAR en présence de trois cibles interférentes dans un seul coté des cellules de références. La dégradation des performances de détection est très visible pour les détecteurs CA et GO-CFAR. Les résultats ont montré aussi l'intérêt du recours aux systèmes distribués avec la règle de fusion "OR". La combinaison de deux détecteurs différents nous a permis d'améliorer les performances de détection, mais aussi de donner une robustesse au système contre les cibles interférentes en tirant profit de leurs avantages respectifs.

# Chapitre 7

---

## **Performances des Processeurs CFAR Distribués dans un Clutter Gaussien et Non Gaussien, Basés sur La Transformée en Ondelettes**

---

### **7.1 Introduction**

Les ondelettes ont été largement utilisées en traitement du signal numérique, traitement de la parole et des applications d'automatique, etc. ... [135]. Rappelons que les caractéristiques pertinentes des ondelettes sont la localisation temps fréquence et l'approximation multirésolution (MRA). Les ondelettes peuvent donc donner l'information des deux domaines temporels et fréquentiels simultanément. Il apparaît des lors naturel de s'appuyer sur cette propriété dans l'analyse des échos Radar [136, 137, 138], la détection et l'identification de cibles [139, 140], mais également dans le traitement des images Radar [141, 142].

Nous nous attacherons dans ce chapitre, à montrer l'intérêt des ondelettes dans la réduction du bruit et l'amélioration des performances de la détection CFAR. A cette fin, nous détaillerons au cours de la section 7.2 les détecteurs CA, GO et SO-CFAR basés sur la transformée en ondelettes pour la réduction du bruit. Nous décrirons alors cette méthode de prétraitement en détection classique CFAR. Nous montrerons que la technique proposée s'attache à réduire l'effet du bruit et à améliorer les performances de détection, sans pour autant réduire la résolution du

signal original. Nous mètrons l'accent sur ce point. L'influence du choix de la base d'ondelettes, le niveau de résolution et la procédure de seuillage seront également décrits dans cette partie. Après un exposé sur l'algorithme de prétraitement employé, nous proposerons trois configurations de fusions pour les systèmes distribués basés sur la transformée en ondelettes. Nous montrerons que l'association de la méthode proposée de prétraitement avec les détecteurs distribués opérant dans un clutter gaussien ou non gaussien (alpha-stable), nous permet d'améliorer la probabilité de détection et nous offre une robustesse contre les cibles interférentes et ceci pour les trois configurations de fusions.

## 7.2 Les Détecteurs CA, GO et SO-CFAR Basés Sur La Méthode de Seuillage d'Ondelettes (WT-CFAR)

Afin de bien cerner l'apport de la méthode de prétraitement basée sur le seuillage par ondelettes, il nous apparaît utile de décrire la structure du détecteur WT-CFAR. Cette dernière est illustrée sur la Figure 7.1.  $Z$  représente l'estimation du niveau du clutter après prétraitement,  $T$  est le seuil calculé pour une  $P_{FA}$  désirée. Dans cet algorithme, les trois blocs: transformée en ondelettes, débruitage et transformée inverse en ondelettes sont insérés en amont de la chaîne des cellules de référence du détecteur WT-CFAR. Nous calculons, dans un premier lieu, la transformée en ondelettes du signal bruité. Nous obtiendrons alors les coefficients bruités d'ondelettes au niveau  $j$  de résolution,  $d_{j,k}$  ( $j=1,2,\dots,J$ ,  $k=0,1,\dots,2^j-1$ ). Nous constatons que le bruit se présente à différents niveaux de résolution et que le signal est distribué aux échelles grossières. Nous appliquons le seuillage (soft) par ondelettes sur ces coefficients, qui a l'effet de réduire le bruit sans pour autant affecter le signal. Nous calculons par la suite, la transformée inverse d'ondelettes des coefficients débruités et nous utilisons la procédure CFAR pour se prononcer sur la présence ou l'absence d'une cible.

A ce stade, il semble important d'évoquer la délicatesse du choix judicieux des paramètres suivants

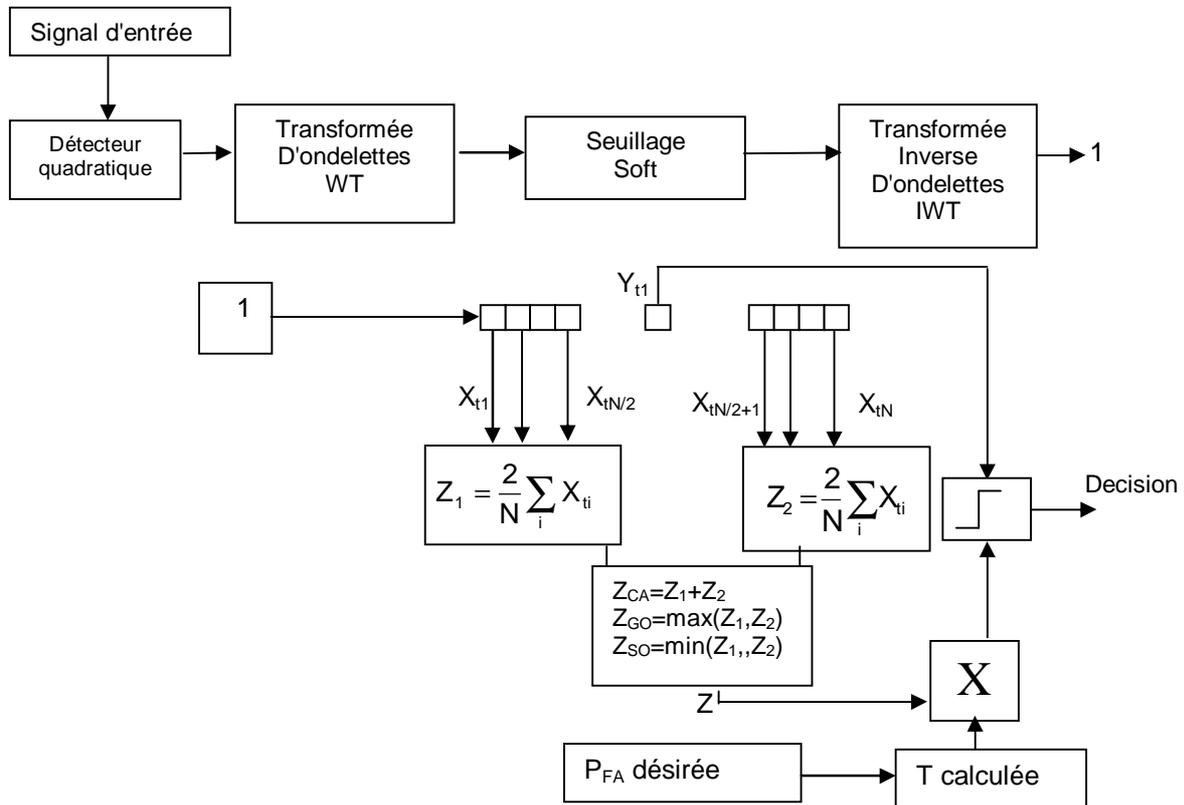


Fig. 7.1: La structure du détecteur CFAR basé sur le seuillage par ondelettes (WT-CFAR)

### **Choix de L'ondelette**

Sous le nom d'analyse par ondelettes, il y a un éventail de choix tel que les ondelettes de Daubechies [46], les coeuflets, l'ondelette "Sym N", (N=1,.....45), la base de Haar [47], etc. ... . Les ondelettes larges avec une haute régularité, permettent une légère amélioration en terme de réduction de bruit. Cependant, si le filtre d'ondelettes est vraiment large, les détails du signal peuvent être perdus. A ce stade une parenthèse s'impose dans le but est de justifier notre choix pour l'ondelette « Sym8 ». En fait, il y a plusieurs types et familles d'ondelettes dont les propriétés différent selon les principaux critères suivants :

- ü Le support des fonctions  $\psi, \psi'$  et aussi  $\phi, \phi'$  ( $\psi', \phi'$  sont les transformées de Fourier des fonctions  $\psi$  et  $\phi$  respectivement) ou les vitesses de convergence vers 0 des fonctions  $\psi(t)$  et  $\psi'(\omega)$  pour le temps  $t$  ou la fréquence de l'ondelette ;
- ü La symétrie, qui est utile pour éviter le déphasage ;
- ü Le nombre de moments nuls de  $\psi$  ou de  $\phi$ , qui est utile pour la compression ;
- ü La régularité, qui est utile pour obtenir des signaux ou des images, reconstruits lisses et réguliers.

Les familles d'ondelettes peuvent être regroupées suivant quatre propriétés principales : existence de filtres associés, orthogonalité, support compact ou non, ondelettes réelles ou complexes.

Vis-à-vis de ces propriétés, la symlet «symN»: N=1,...8, proposée par I. Daubechies, fait partie des ondelettes orthogonales à filtres, à support compact. Les ondelettes à filtres sont associées à des analyses multirésolution orthogonales : la transformée discrète et les calculs rapides en utilisant l'algorithme de Mallat sont alors possibles. D'une autre part, la symlet est concernée par les propriétés suivantes :

- Régularité arbitraire
- Orthogonale à support compact
- Presque symétrique
- Existence de  $\phi$
- Analyse orthogonale
- Reconstruction exacte

- Transformation continue
- Transformation discrète
- Algorithme rapide
- Sans expression explicite

Pour conclure sur cette parenthèse, « symN » se révèle très performante pour l'algorithme de débruitage.

### ***Le Niveau de Résolution de La Transformé en Ondelettes***

Dans un souci de séparer le signal utile du bruit local, nous avons choisi cinq niveaux de multirésolution de la transformée en ondelettes "Sym 8".

### ***La Méthode de Seuillage***

Les règles classiques de seuillage des coefficients d'ondelettes sont:

- ➔ Garder-ou-supprimer traduction littérale de "keep-or-kill", c'est le seuillage dur (hard)

$$\hat{d} = \begin{cases} d_{j,k} & \text{pour } |d_{j,k}| > t_n \\ 0 & \text{pour } |d_{j,k}| \leq t_n \end{cases}$$

- ➔ Rétrécir -ou- supprimer "shrink-or-kill", c'est le seuillage doux (soft)

$$\hat{d} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |d_{j,k}| \leq t_n \\ \text{sgn}(d_{j,k}) (|d_{j,k}| - t_n) & \text{pour } |d_{j,k}| > t_n \end{cases}$$

En s'appuyant sur les résultats théoriques déjà existant, nous nous sommes restreints au cours de cette thèse à la méthode soft.

### ***Le Choix du Seuil***

Un choix approprié du seuil  $t_n$  est fondamental pour assurer un débruitage très efficace. Si on choisi un seuil large, des parties du signal peuvent être éliminées. Tandis qu'un seuil de petite valeur, conserve le bruit en reconstruction. La majorité de méthodes de débruitage basées sur les ondelettes, utilisent un seuil qui dépend de la variance du bruit et le nombre d'échantillons de données. Nous nous proposons de retenir la règle suivante  $t_n = \sqrt{2\log N} \sigma / \sqrt{N}$  tel que  $\sigma$  et  $N$  sont la variance et le nombre d'échantillons respectivement dans le cas d'un clutter Gaussien [48]. Dans le cas d'un clutter de distribution alpha-stable, la variance  $\sigma$  est remplacée par le paramètre de dispersion  $\gamma$ .

Bien que la transformée en ondelette et l'algorithme de débruitage aient été exposé lors du Chapitre 3, il convient de les rappeler en détail pour plus de clarté dans les explications.

En suivant l'analyse multirésolution, nous décomposons le signal issu du détecteur quadratique sur deux bases orthonormales, à savoir

$$\{\phi_{j,k}\} = \{2^{j/2} \phi(2^j n - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ base de l'espace d'approximation}$$

$$\{\psi_{j,k}\} = \{2^{j/2} \psi(2^j n - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ base de l'espace des détails.}$$

Nous résumons l'algorithme proposé en quatre étapes essentielles

L'algorithme de débruitage associé à la détection CFAR

1. Calcul des coefficients d'ondelettes des données issues du détecteur quadratique

$$d_{j,k} = \langle X, \psi_{j,k} \rangle \quad (7.1)$$

2. Appliquer la méthode de seuillage par rétrécissement pour ne garder que les coefficients significatifs

$$\hat{d} = \begin{cases} 0, & |d_{j,k}| \leq t_n \\ \text{sgn}(d_{j,k}) (|d_{j,k}| - t_n), & |d_{j,k}| > t_n \end{cases} \quad (7.2)$$

où  $t_n$  est le seuil et  $\hat{d}$  est le coefficient d'ondelettes après seuillage

3. Reconstruction des données  $X_t$  par synthèse des coefficients débruités

$$X_t = \sum_{L,k} c_{L,k} \phi_{L,k}(n) + \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \geq L} d_{j,k} \psi_{j,k}(n) \quad (7.3)$$

$X_t$  sont les données débruitées.

4. Utiliser la procédure CFAR pour prendre une décision à propos de la présence d'une cible.

Les probabilité de fausse alarme et de détection sont alors calculés à partir des données débruitées.

Pour la procédure CA-CFAR, la statistique Z qui est l'estimation du niveau de clutter sera alors

$$Z_{CA} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ti} \quad (7.4)$$

la probabilité de fausse alarme est exprimée par

$$P_{FA}^{WT-CACFAR} = \Pr\{Y_{t0} \geq TZ_{CA}\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Y_{t0} \geq Tz\} p_Z(z) dz \quad (7.5)$$

et la probabilité de détection est

$$P_D^{WT-CACFAR} = \Pr\{Y_{t1} \geq TZ_{CA}\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Y_{t1} \geq Tz\} p_Z(z) dz \quad (7.6)$$

De la même manière, nous calculons  $Z_{GO}$  et  $Z_{SO}$  des détecteurs GO et SO-CFAR respectivement

$$Z_1 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} X_{ti} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{2}{N} \sum_{i=N/2+1}^{N/2} X_{ti}, \quad Z_{GO} = \max(Z_1, Z_2) \quad \text{et} \quad Z_{SO} = \min(Z_1, Z_2) \quad (7.7)$$

Les probabilités de fausse alarme et de détection des deux détecteurs WT-GOCFAR et WT-SOCFAR sont exprimés comme suit

$$P_{FA}^{WT-GOCFAR} = \Pr\{Y_{t0} \geq TZ_{GO}\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Y_{t0} \geq Tz\} p_Z(z) dz \quad (7.8)$$

$$P_D^{WT-GOCFAR} = \Pr\{Y_{t1} \geq TZ_{GO}\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Y_{t1} \geq Tz\} p_Z(z) dz \quad (7.9)$$

et

$$P_{FA}^{WT-SOCFAR} = \Pr\{Y_{t0} \geq TZ_{SO}\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Y_{t0} \geq Tz\} p_Z(z) dz \quad (7.10)$$

$$P_D^{WT-SOCFAR} = \Pr\{Y_{t1} \geq TZ_{SO}\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Y_{t1} \geq Tz\} p_Z(z) dz \quad (7.11)$$

En dépit des succès obtenus, deux critiques fondamentales peuvent être formulées.

- L'encombrement de la structure du détecteur CFAR
- Malgré l'amélioration considérable des performances de détection, la dégradation des performances des détecteurs CFAR basés sur le seuillage par ondelettes, est importante en présence de plus de quatre cibles de part et

d'autre de la cellule sous-test. Cette remarque est à la base du recours aux détecteurs distribués WT-CFAR.

Dans ce qui suit, nous détaillerons trois configurations de fusion des détecteurs WT-CFAR opérant dans un clutter Gaussien et non Gaussien (alpha-stable).

## 7.3 Les Systèmes Distribués CFAR Basés Sur La Méthode de Seuillage par Ondelettes

Nous nous proposons dans cette section d'étudier trois systèmes distribués CFAR, basés sur la méthode de débruitage par ondelettes. L'intérêt de l'association de la détection distribuée et de la méthode de débruitage est de tirer profit de leurs avantages respectifs.

### 7.3.1 Première Configuration de Fusion

La Figure 7.2 illustre la structure de la première configuration de fusion. Nous considérons un système distribué de  $n$  détecteurs CFAR basés sur la méthode de débruitage par ondelettes opérant dans un clutter Gaussien ou non Gaussien. Chaque détecteur  $i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , basé sur le vecteur d'observations prétraitées, prend une décision  $u_i$ . Chaque décision  $u_i$  peut prendre les valeurs 0 ou 1, selon si le détecteur  $i$  décide en faveur de  $H_0$  ou  $H_1$ . La décision globale  $u_0$ , est prise en se basant sur le vecteur de décisions reçu, contenant les décisions individuelles, i.e.,  $A=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Nous appliquons la règle de fusion "OR". Nous considérons la formulation Neymen Pearson (N-P).

### 7.3.2 Seconde Configuration de Fusion

La Figure 7.3 illustre la structure de la seconde configuration. Nous calculons la moyenne des coefficients d'ondelettes de tous les détecteurs quadratiques. Ceci est effectué pour chaque coefficient d'ondelettes individuellement. Nous appliquons ensuite le seuillage soft. Le signal débruité est alors obtenu par la transformée d'ondelettes inverse. La dernière étape, pour prendre la décision globale, est la procédure CFAR basée sur la formulation N-P.

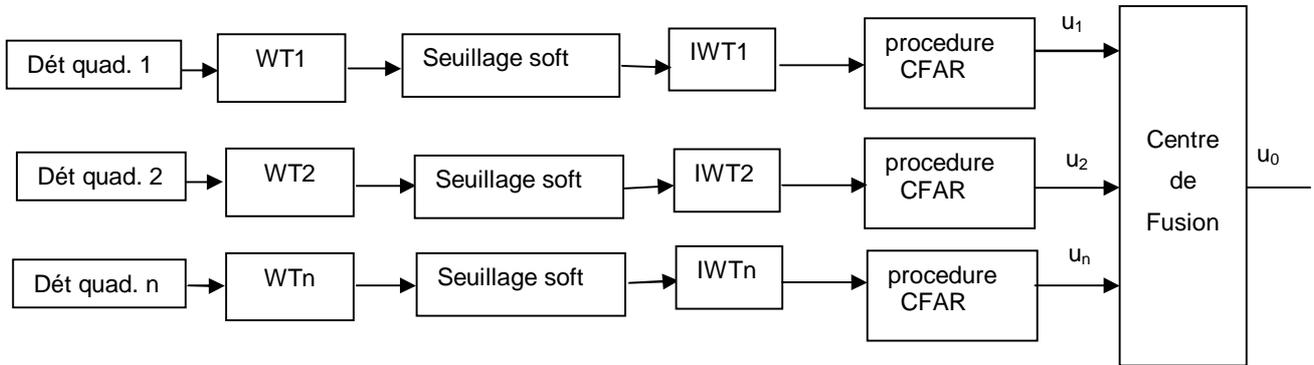


Fig. 7.2 Première Configuration de Fusion

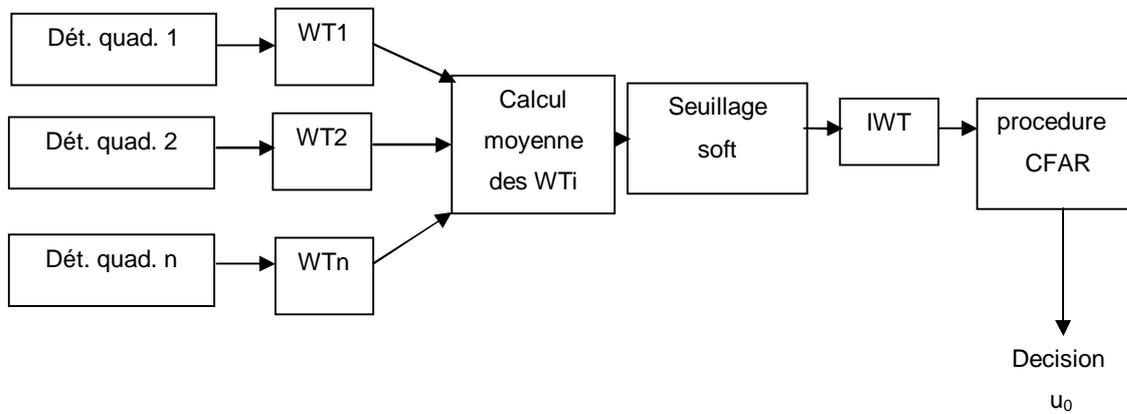


Fig. 7.3 Deuxième Configuration de Fusion

Notons que dans la 2<sup>ème</sup> configuration, nous nous sommes appuyé sur la moyenne des coefficients d'ondelettes bruités, pour mettre la décision finale. Il est cependant possible de s'appuyer sur des coefficients débruités. Ceci a conduit à proposer une troisième configuration qui est en fait une amélioration de cette seconde configuration.

### 7.3.3 Troisième Configuration de Fusion

La Figure 7.4 illustre la structure de la troisième configuration. Nous avons préféré calculer d'abord les coefficients d'ondelettes, faire le seuillage et calculer la transformée inverse. Ceci est effectué pour chaque détecteur quadratique. Nous calculons ensuite, la moyenne des observations débruitées. En s'appuyant sur la moyenne des observations et en appliquant la procédure CFAR basée sur la formulation N-P, la décision globale est prise. Il est clair que cette troisième configuration offre des performances de détection supérieures à la deuxième configuration, mais aussi elle améliore la robustesse du système contre les cibles interférentes.

## 7.4 Résultats et Discussions

Nous illustrons dans cette section l'intérêt de la technique développée pour la réduction du bruit dans la détection CFAR. Nous présentons ainsi les résultats obtenus par simulation. Nous considérons que la cible est de distribution Rayleigh (Swerling I). Nous illustrons les performances de détection dans le cas d'un bruit Gaussien et le cas d'un bruit non Gaussien (Pearson). Le cas de présence de cibles interférentes est également étudié. Nous supposons que tous les échos provenant des interférences ont des puissances beaucoup plus grandes que celles du clutter. Nous nous sommes appuyé sur la simulation de l'algorithme de Mallat en considérant cinq niveaux de résolution, l'ondelette étant la "Sym8", associé à l'algorithme de seuillage des coefficients d'ondelettes. Les résultats obtenus sont illustrés dans les Figures 7.5 - 7.13. La Figure 7.5 compare la probabilité de détection  $P_D$  du détecteur conventionnel CA-CFAR avec celle du détecteur WT-CACFAR opérant dans un clutter Gaussien. Dans un souci de comparaison, les deux détecteurs ont les mêmes caractéristiques, i.e. même nombre de cellules et même  $P_{FA}$ .

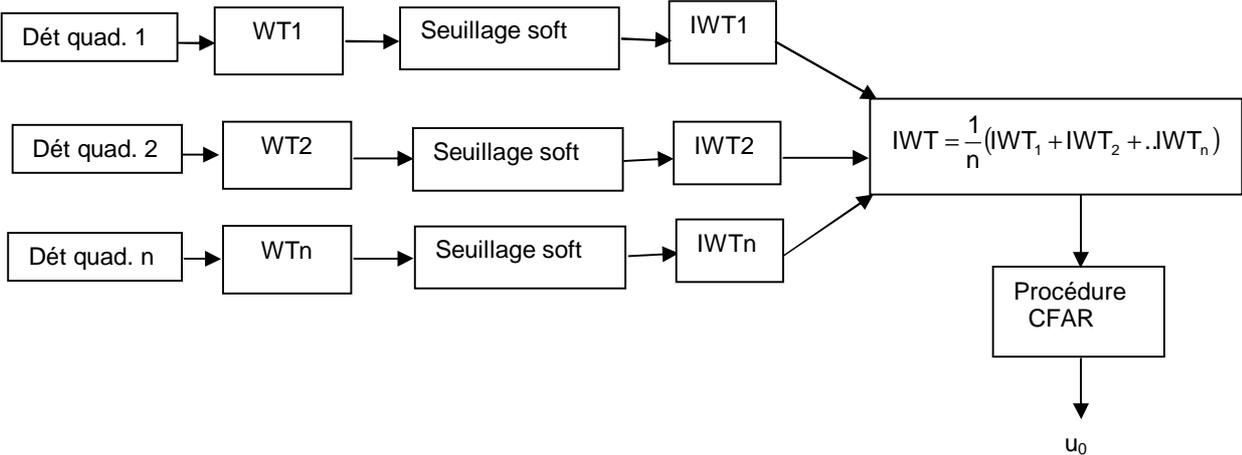


Fig. 7.4 Troisième Configuration de Fusion

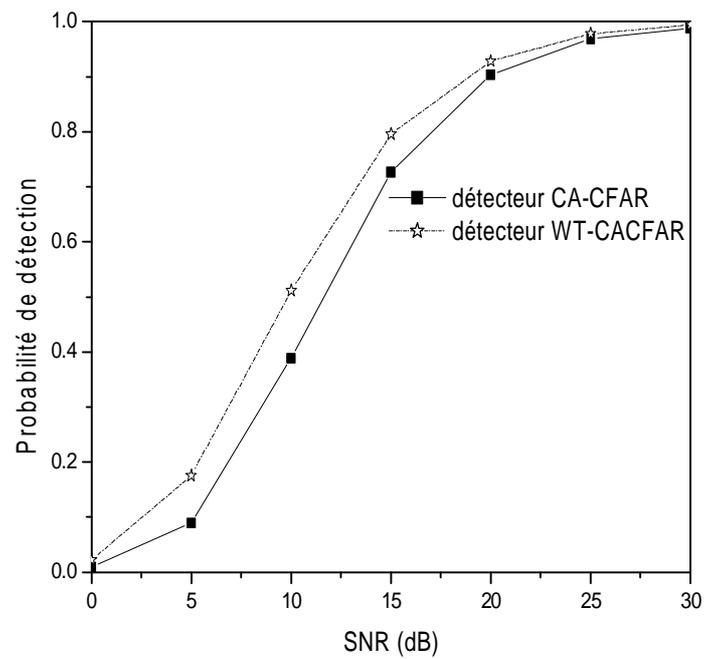


Fig. 7.5  $P_D$  des détecteurs CA-CFAR et WT-CACFAR en fonction du SNR.

$$P_{FA}^{CA} = P_{FA}^{WT-CACFAR} = 10^{-4}, N_1=N_2=32, \text{ dans un clutter Gaussien}$$

Il est clair que le détecteur WT-CACFAR nous offre une amélioration considérable des performances de détection par rapport au détecteur CA-CFAR.

Les détecteurs WT-GOCFAR et WT-SOCFAR donnent également des performances supérieures à celles des détecteurs conventionnels GO-CFAR et SO-CFAR comme le montrent les Figures 7.6 et 7.7 respectivement. La dégradation des performances de détection reste cependant importante en présence d'interférences ayant un rapport interférence-sur-bruit (INR) élevé et ceci pour les trois détecteurs proposés comme c'est illustré sur les Figures 7.8, 7.9 et 7.10 respectivement. L'intérêt du recours aux systèmes distribués apparaît alors clairement. La Figure 7.11 illustre les performances des trois systèmes distribués basés sur la technique de débruitage proposée. Nous considérons les trois configurations de fusion, les systèmes étant constitués de deux détecteurs WT-CACFAR identiques, i.e. même nombre de cellules de références  $N_1=N_2=32$  et même  $P_{FA}$ ,  $P_{FA1}=P_{FA2}=10^{-4}$ . Cette Figure a mis en lumière l'avantage de l'association des systèmes distribués et la technique proposée pour la réduction du bruit. Il est clair, d'après la Figure 7.11, que la première et la troisième configuration de fusion ont permis des performances supérieures à celles obtenue par la deuxième configuration. La Figure 7.12 illustre les performances des trois systèmes distribués basés sur la technique de débruitage proposée, en présence de deux cibles interférentes:  $INR_1=INR_2=10\text{dB}$  dans les configurations 1 et 2 et  $INR_1=INR_2=30\text{dB}$  dans la configuration 3. Malgré la perte considérable en détection, les performances de tels systèmes restent satisfaisantes pour un INR élevé. Ce qui traduit la robustesse de ces systèmes contre les interférences. La Figures 7.13 illustre les performances du détecteur WT-CACFAR et celles des systèmes distribués dans un clutter non Gaussien respectivement. Nous constatons que la technique de débruitage proposée s'avère particulièrement intéressante dans le cas du clutter impulsif et améliore la robustesse et les performances de détection d'une façon considérable.

Notons que pour le clutter non Gaussien,  $P_D$  est tracée en fonction du rapport signal-sur-bruit généralisé (GSNR), tel que

$$GSNR = 20 \log \frac{\sigma_s}{\gamma} \quad (7.12)$$

où  $\sigma_s$  est le paramètre de la distribution Rayleigh de la cible,  $\gamma$  est le paramètre de dispersion de la distribution Pearson du clutter.

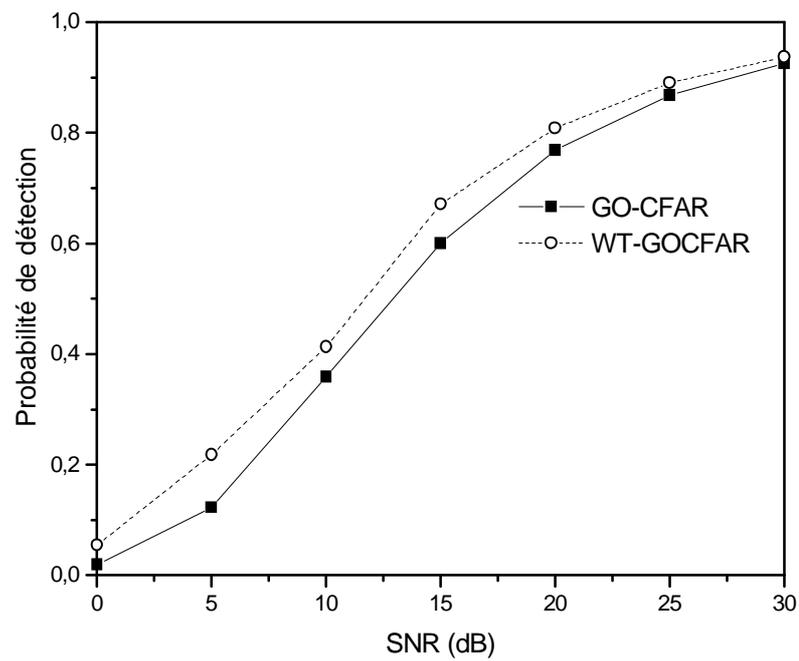


Fig. 7.6  $P_D$  des détecteurs GO-CFAR et WT-GOCFAR en fonction du SNR.

$$P_{FA}^{GO} = P_{FA}^{WT-GOCFAR} = 10^{-4}, N_1=N_2=32, \text{ dans un clutter Gaussien.}$$

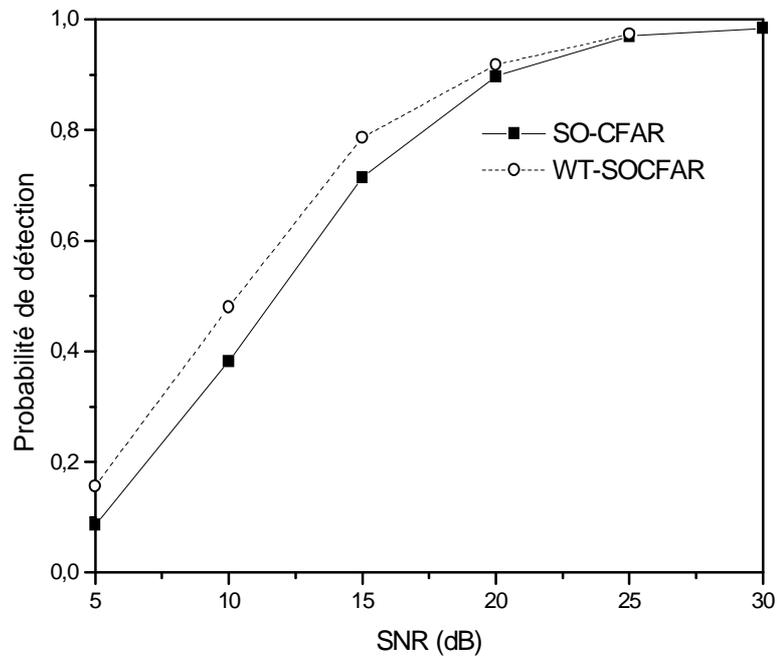


Fig. 7.7  $P_D$  des détecteurs SO-CFAR et WT-SOCFAR en fonction du SNR.

$$P_{FA}^{SO} = P_{FA}^{WT-SOCFAR} = 10^{-4}, N_1=N_2=32, \text{ dans un clutter Gaussien}$$

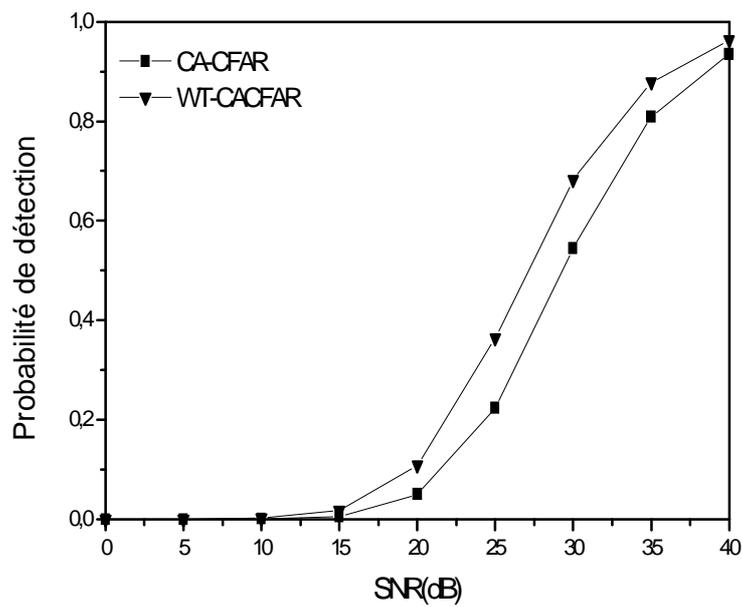


Fig.7.8  $P_D$  des détecteurs CA-CFAR et WT-CACFAR en fonction du SNR, en présence de deux cibles interférentes.  $INR_1=INR_2=30\text{dB}$ .

$$P_{FA}^{CA} = P_{FA}^{WT-CACFAR} = 10^{-4}. N_1=N_2=32, \text{ dans un clutter Gaussien}$$

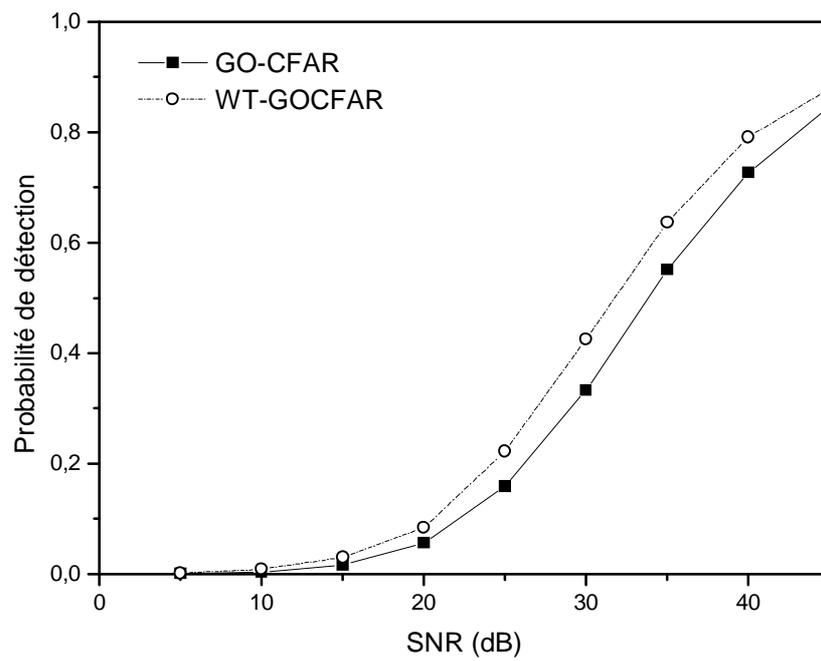


Fig.7.9  $P_D$  des détecteurs GO-CFAR et WT-GOCFAR en fonction du SNR., et en présence de quatre cibles interférentes,  $INR=30dB$ .

$$P_{FA}^{GO} = P_{FA}^{WT-GOCFAR} = 10^{-4}. N_1=N_2=32, \text{ dans un clutter Gaussien}$$

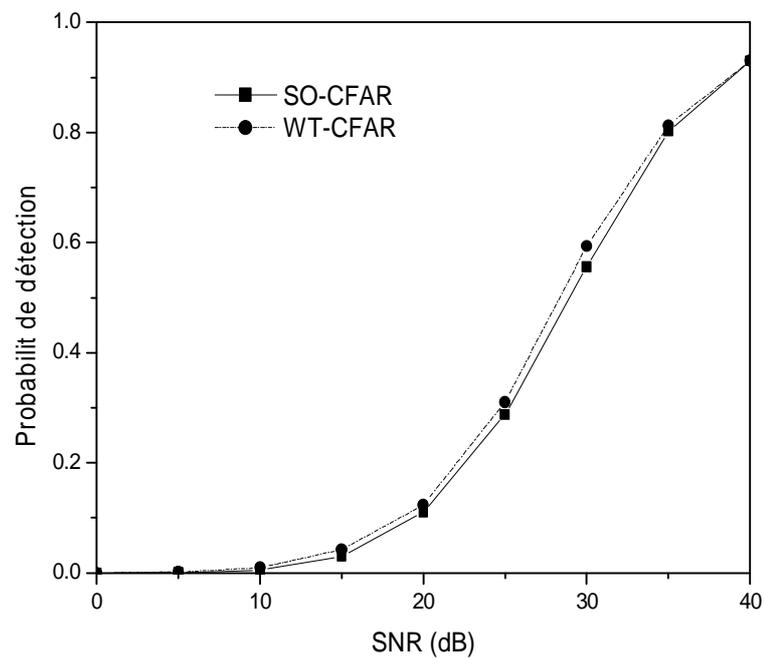


Fig. 7.10  $P_D$  des détecteurs SO-CFAR et WT-SOCFAR en fonction du SNR, en présence de deux cibles interférentes.  $INR_1=INR_2=30\text{dB}$ .

$$P_{FA}^{SO} = P_{FA}^{WT-SOCFAR} = 10^{-4}. N_1=N_2=32, \text{ dans un clutter Gaussien}$$

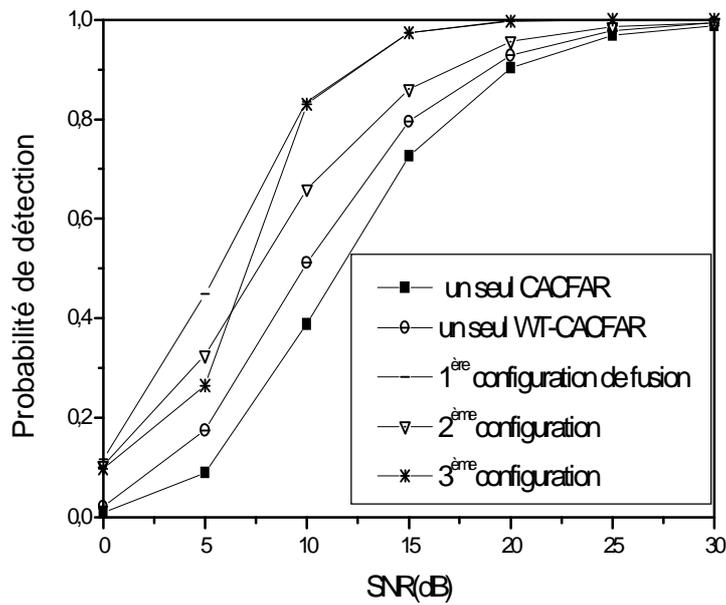


Fig. 7.11  $P_D$  des détecteurs CA-CFAR, WT-CACFAR et les trois configurations en fonction du SNR.  $P_{FA}^{CA} = P_{FA}^{WT-CACFAR} = 10^{-4}$ .  $N_{WTCA} = N_{CA} = 32$ , dans un clutter Gaussien

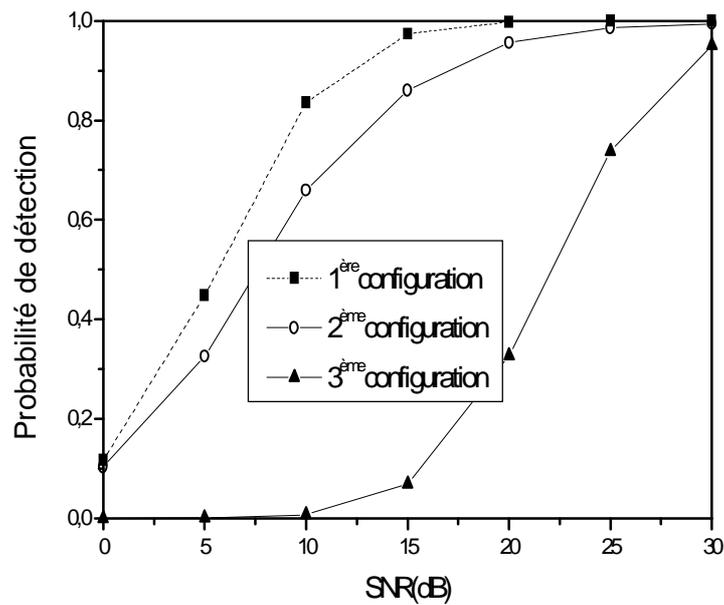


Fig. 7.12  $P_D$  des systèmes distribués avec les trois configurations en fonction du SNR et en présence de deux interférences.  $INR_1=INR_2=10\text{dB}$  pour la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> configuration.  $INR_1=INR_2=30\text{dB}$  pour la 3<sup>ème</sup> configuration.  $P_{FA} = 10^{-4}$ .  $N=32$ , dans un clutter Gaussien

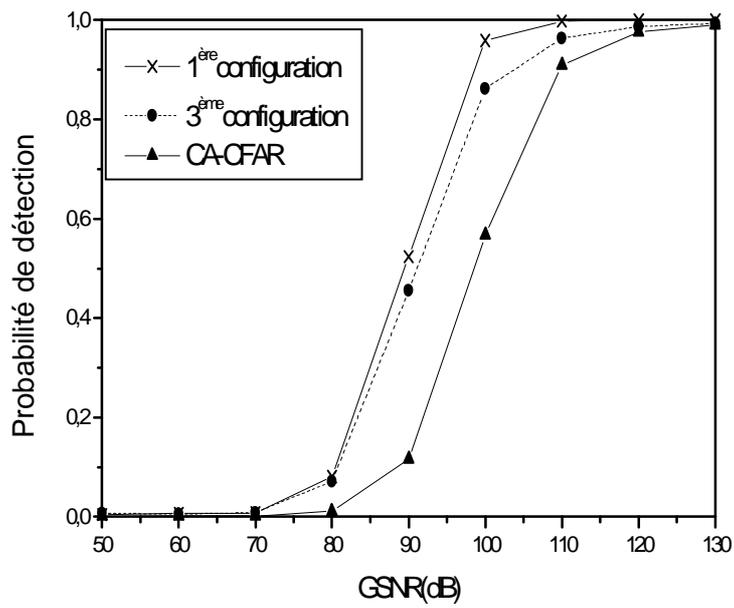


Fig 7.13  $P_D$  du CA-CFAR et des systèmes distribués avec la 1<sup>ère</sup> et la 3<sup>ème</sup> configuration en fonction du GSNR et en présence de deux interférences.  $GINR_1=GINR_2=50\text{dB}$ .  $P_{FA} = 10^{-4}$ .  $N = 32$ , dans un clutter non Gaussien (Pearson).

## 7.5 Conclusion

Nous avons développé dans ce Chapitre, une technique de débruitage dans la détection CFAR, basée sur la transformée en ondelettes associée à l'analyse multirésolution. Les résultats obtenus ont mis en évidence l'efficacité de la méthode dans la réduction du bruit sans toutefois détériorer la résolution du signal. Ceci est possible en effectuant un choix judicieux de la base d'ondelette, le niveau de résolution et la règle de seuillage des coefficients d'ondelettes. L'association de la méthode proposée et les systèmes distribués selon trois configurations de fusion, conduit à une détection robuste contre les cibles interférentes. Notons que la première configuration est légèrement meilleure par rapport aux deux autres. Pour un clutter gaussien, la troisième configuration donne des performances supérieures par rapport à la deuxième méthode et ceci pour un SNR > 5 dB.

Pour conclure sur ces remarques, nous pouvons noter que les trois configurations décrites offrent une robustesse aux systèmes de détection contre les cibles interférentes. Cependant, le choix de l'une de ces trois configurations, doit être effectué en tenant compte de ses avantages et inconvénients, au regard des objectifs souhaités. L'intérêt de l'approche de débruitage apparaît clairement dans le cas d'un clutter impulsif. Cette approche nous a permis de combiner les avantages d'une détection robuste avec une modélisation précise du clutter. Cette dernière est atteinte par les distributions alpha-stable.

Il sera également possible de réduire l'effet du bruit dans la détection CFAR, par une méthode de compression. Cette approche sera approfondie au cours du Chapitre suivant. Nous proposerons alors d'insérer un filtre de compression non linéaire dans la structure du détecteur CFAR conventionnel. Nous montrerons également, l'influence du paramètre de compression, avant d'évoquer l'intérêt de cette approche.

# Chapitre 8

---

## **Performances des Processeurs CA, GO et SO-CFAR Distribués dans un Clutter Non Gaussien, Basés sur une Méthode de Prétraitement Nonlinéaire**

---

### **8.1 Introduction**

Nous avons évoqué dans le Chapitre 7, l'intérêt d'utiliser les ondelettes en détection CFAR. En effet, la transformée en ondelettes basée sur le seuillage des coefficients est employée comme étape de prétraitement en amont de la chaîne de cellules de références pour réduire l'effet du clutter.

Nous présenterons dans ce Chapitre une autre méthode de prétraitement pour réduire l'effet du clutter impulsif. La méthode proposée se base sur une loi de compression non linéaire [143, 144]. L'idée est inspirée des méthodes de quantifications non linéaires [145]. Nous décrirons dans un premier temps le bloc de prétraitement proposé. Nous reviendrons alors sur la structure du détecteur CFAR proposé. Nous calculerons l'expression de la probabilité de fausse alarme. Nous nous attacherons dans ce chapitre à exposer l'effet du paramètre de compression sur les performances de détection. Nous suggérerons également dans la section 8.3 deux configurations de fusion des détecteurs distribués CA-CFAR en se basant sur la méthode de prétraitement proposée. Ce chapitre sera en revanche entièrement

dédié à la présentation des résultats obtenus pour différentes valeurs du paramètre de compression. Nous pourrions alors dégager quelques conclusions sur la validité de notre approche et mettre en évidence de nouveaux axes de recherche.

## 8.2 Structure des Détecteurs CA, GO et SO-CFAR Basés Sur Une Méthode de Compression Non Linéaire (PC-CFAR)

Précisons tout d'abord le cadre de la détection. Nous supposons que le clutter est de distribution alpha-stable (Pearson). Nous proposons de faire passer le signal bruité à travers un filtre de compression non linéaire. Le rôle de ce bloc est de compresser les larges amplitudes, ce qui revient à réduire la dynamique du signal bruité avant toute autre analyse. La Figure 8.1 illustre la structure du détecteur PC-CFAR.  $X$  et  $\tilde{X}$  sont la sortie du détecteur quadratique et le signal après compression respectivement. La sortie du bloc non linéaire est calculée selon la loi suivante

$$\tilde{X} = g[X] = |X|^\beta \cdot \text{sign}[X] \quad (8.1)$$

où  $0 < \beta \leq 1$  est un paramètre réel qui contrôle la quantité de compression appliquée sur le signal d'entrée du bloc non linéaire. En fait, cette technique est similaire à celle utilisée dans la quantification non uniforme [145]. L'allure de la loi de compression est présentée dans la Figure 8.2. Nous constatons que la loi est linéaire autour de l'origine, i.e. pour des valeurs très petites de l'entrée. La linéarité et l'intervalle correspondant dépendent du paramètre de compression  $\beta$ . Plus  $\beta$  est petit, plus la non linéarité est accentuée. Ceci explique que pour un signal faible (i.e. l'amplitude du signal bruité est suffisamment petite par rapport aux pics du bruit impulsif) et par un choix approprié du paramètre  $\beta$ , la sortie du compresseur peut être considérée comme une version échelonnée du signal bruité d'entrée, noyé dans un nouveau bruit additif ayant une variance très petite par rapport à celle du bruit d'entrée. La Figure 8.3 représente le résultat de compression d'un signal aléatoire de ddp exponentielle noyé dans un bruit alpha-stable. Il convient maintenant de trouver l'expression de la densité de probabilité (pdf) de la statistique de sortie du compresseur, avant de donner les expressions des probabilités de fausse alarme et de détection.

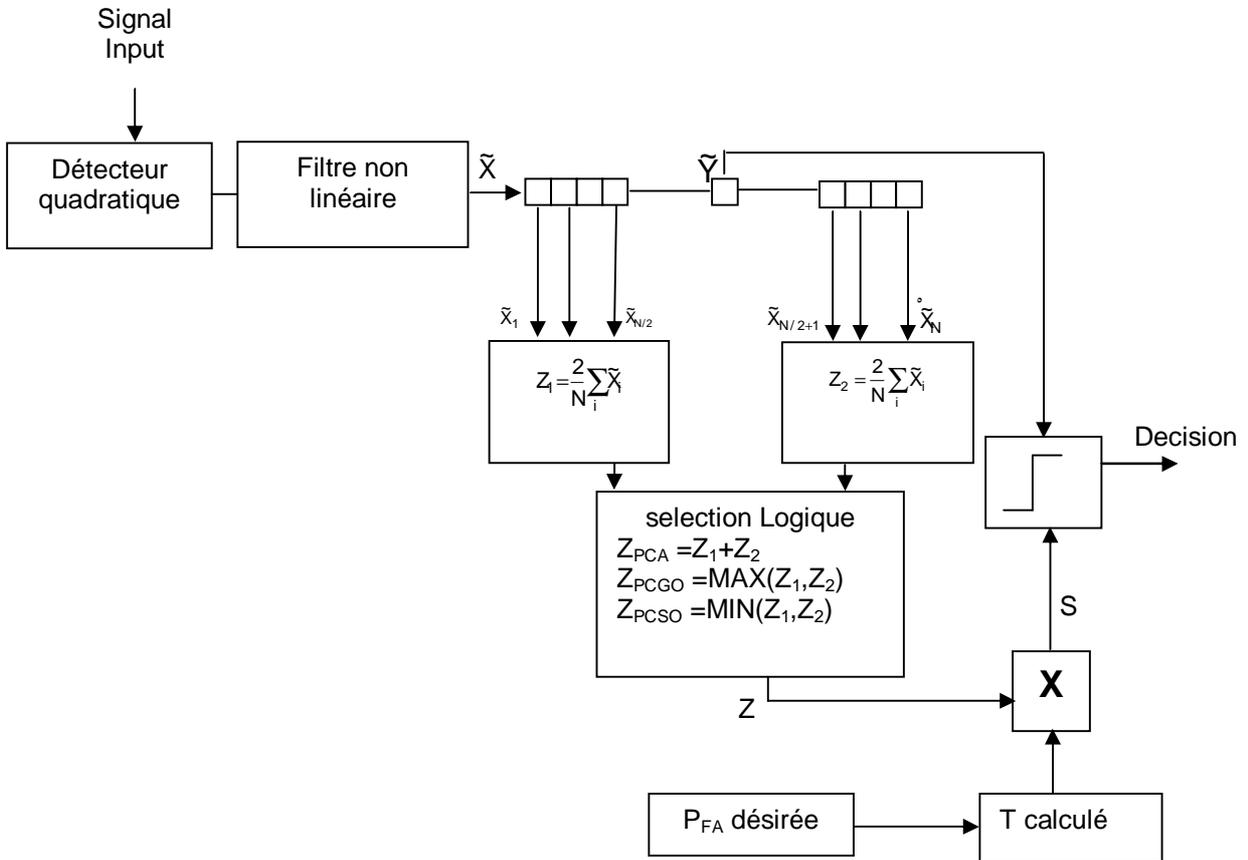


Fig. 8.1 Structure du détecteur PC-CFAR

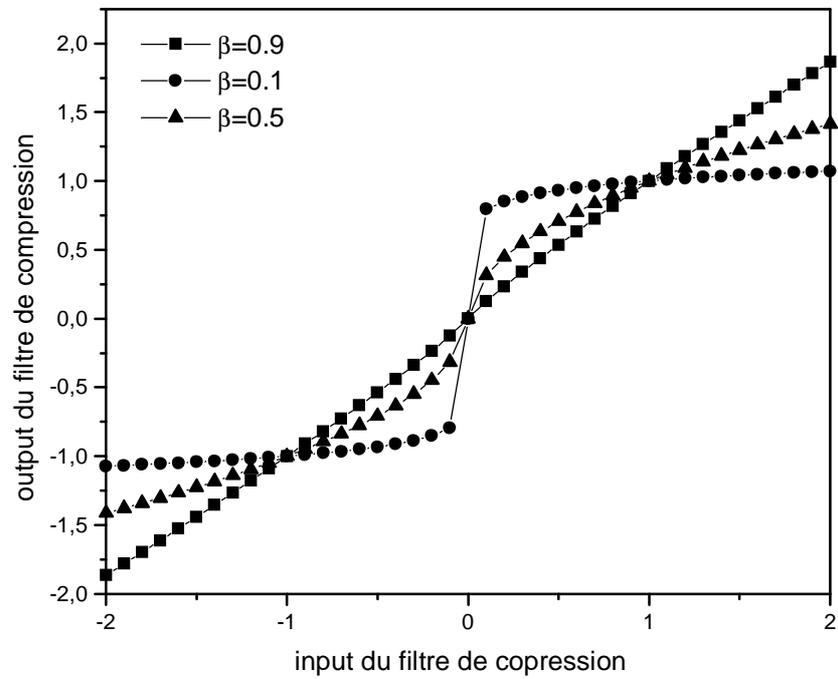


Fig. 8.2 L'allure de la loi de compression pour différentes valeurs de  $\beta$ .

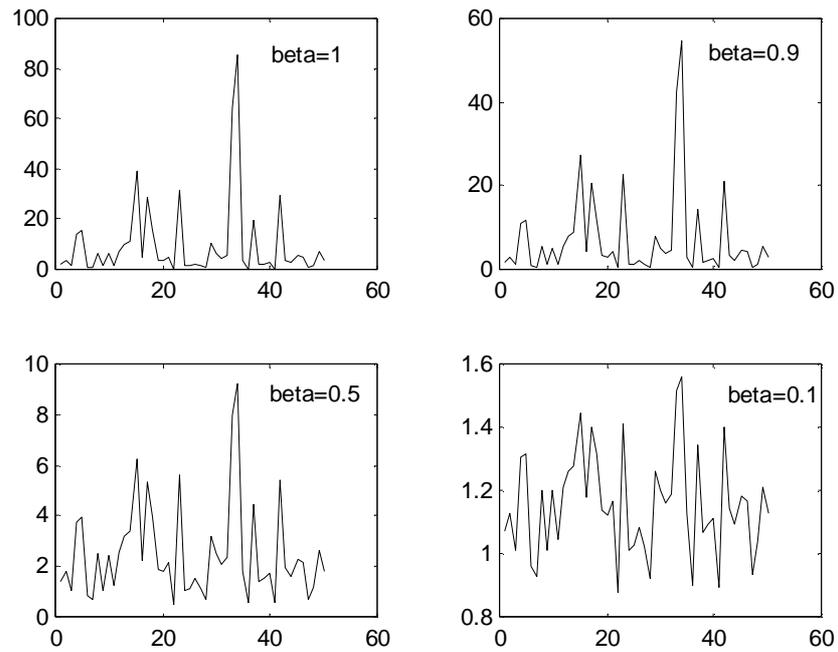


Fig. 8. 3 Compression d'un signal aléatoire de ddp exponentielle noyé dans un bruit alpha-stable pour différentes valeurs de  $\beta$

La statistique  $y = \tilde{x}$  est la sortie du compresseur, i.e.

$$y = \tilde{x} = g(x) = |x|^\beta \cdot \text{sign}(x) \quad (8.2)$$

où  $x$  est l'entrée du compresseur de distribution Pearson. Rappelons pour mémoire que la distribution Pearson (qui est un cas particulier de la distribution alpha-stable) est exprimée comme suit

$$p_{x_i}(x) = \begin{cases} \frac{Y_{x_i}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^{3/2}} e^{-Y_{x_i}^2/2x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwie} \end{cases} \quad (8.3)$$

En appliquant les lois d'une fonction d'une variable aléatoire [110], nous aurons

$$p_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} \quad (8.4)$$

Par substitution de  $x$  par  $(y^{1/\beta})$ , (8.4) devient

$$p_Y(y) = \frac{Y}{\sqrt{2\pi\beta}} \frac{1}{y^{\frac{2\beta+1}{2\beta}}} e^{-\frac{Y^2}{2y^{1/\beta}}} \quad (8.5)$$

et la fonction de répartition (cumulative density function (cdf)) est

$$P_{Y_i}(y) = \Pr\{Y_i \leq y\} \quad (8.6)$$

$$= \begin{cases} 2 \left( 1 - \Phi \left( \frac{Y}{y^{1/2\beta}} \right) \right), & y \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (8.7)$$

où  $\beta$  est le paramètre de compression,  $\Phi(y)$  dénote la fonction de répartition de la distribution gaussienne  $N(0,1)$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \quad (8.8)$$

### 8.2.1 Le Détecteur CA-CFAR Basé Sur La Méthode de Prétraitement Non Linéaire (PC-CACFAR)

La probabilité de fausse alarme  $P_{FA}^{PCA}$  peut être exprimée par

$$P_{FA}^{PCA} = \Pr\{\tilde{Y}_0 \geq TZ_{PCA}\}$$

$$= \int_0^{\infty} \Pr\{\tilde{Y}_0 \geq Tz\} p_{Z_{PCA}}(z) dz \quad (8.9)$$

où  $\tilde{Y}_0$  représente la variable du bruit compressé, interprété comme écho provenant d'une cible lors de la décision par seuillage.

La statistique  $Z_{PCA}$  est l'estimation de la moyenne du niveau du clutter après l'étape de prétraitement.  $Z_{PCA}$  sera alors

$$Z_{PCA} = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i \quad (8.10)$$

T est le facteur échelle pour une  $P_{FA}$  désirée.

**Remarque**

Les variables aléatoires  $\tilde{X}_i$  ne sont plus des v.a alpha-stable. La somme des v.a  $\tilde{X}_i$  n'étant pas alpha-stable; nous ne pouvons pas appliquer les propriétés des lois alpha-stable. La densité de probabilité de la statistique  $Z_{PCA}$  est dans ce cas la convolution des densités de probabilités de v.a  $\tilde{X}_i$

$$p_{Z_{PCA}}(z) = p_{\tilde{X}_1}(x) * p_{\tilde{X}_2}(x) * \dots * p_{\tilde{X}_n}(x) \quad (8.11)$$

Nous nous sommes appuyés sur une méthode de simulation basée sur la procédure de Monté Carlo pour calculer le facteur échelle T ( $P_{FA}^{PCA}$  étant fixée à  $10^{-4}$ ).

Nous constatons que  $P_{FA}^{PCA}$  est contrôlée d'une part par le facteur échelle T et d'autre part par le paramètre de compression  $\beta$ . Mais elle ne dépend pas du paramètre de dispersion  $\gamma$ . Nous pouvons conclure dès lors et déjà que la structure PC-CA est aussi une technique (CFAR) pour un clutter Pearson. Pour  $\beta=1$  (i.e. pas de compression)  $P_{FA}^{PCA}$  est égale à celle du détecteur conventionnel CA-CFAR, c.à.d

$$P_{FA}^{CA} = P_{FA}^{PCA} = \sqrt{\frac{2N}{\pi}} \int_0^{\infty} \text{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2T}}\right) e^{-Ny^2/2} dy \quad (8.12)$$

La probabilité de détection correspondante  $P_D^{PCA}$  pour une cible Rayleigh de paramètre  $\sigma_s^2$ , dans un clutter Pearson est exprimée par

$$P_D^{PCA} = \Pr\{\tilde{Y}_1 \geq TZ_{PCA}\} = \int_0^{\infty} \Pr\{\tilde{Y}_1 \geq Tz\} p_{Z_{PCA}}(z) dz \quad (8.13)$$

où

$$\tilde{Y}_1 = |Y_1|^\beta \text{sign}(Y_1) \quad (8.14)$$

A ce stade, une difficulté de calcul se présente. En effet une évaluation analytique exacte de l'expression (8.13) n'est pas possible. Pour spécifier  $Y_1$  sous l'hypothèse  $H_1$ , il faut déterminer les distributions des composantes en phase et en quadrature pour le signal et le clutter. Cependant, seules les densités de probabilité des amplitudes qui sont disponibles. Pour contourner ce problème, nous calculons la mesure dans la cellule sous-test comme suit

$$Y_1 = s + c + \sqrt{s.c} \cdot \cos(\theta) \quad (8.15)$$

tel que  $s, c$  sont le signal et le clutter respectivement.

$\theta$  est l'angle entre  $s$  et  $c$ , il est uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Notons que  $P_D^{PCA}$  est fonction de la dispersion  $\gamma$  du clutter, du paramètre  $\sigma_s^2$  de la cible Rayleigh mais également du paramètre de compression  $\beta$ .

### 8.2.2 Le Détecteur GO-CFAR Basé Sur La Méthode de Prétraitement Non Linéaire (PC-GOCFAR)

L'estimation du niveau du clutter est le maximum des sommes des sorties des deux fenêtres. La statistique  $Z$  est alors

$$Z_{PCGO} = \max(Z_1, Z_2)$$

avec

$$Z_1 = \left( \frac{2}{N} \right) \sum_{i=1}^{N/2} \tilde{X}_i \quad (8.16)$$

et

$$Z_2 = \left( \frac{2}{N} \right) \sum_{i=N/2+1}^{N/2} \tilde{X}_i \quad (8.17)$$

La densité de probabilité de  $Z_{GO}$  est définie dans [110] comme suit:

$$p_{Z_{PCGO}}(z) = p_{Z_1}(z)P_{Z_2}(z) + p_{Z_2}(z)P_{Z_1}(z) = 2p_{Z_1}(z)P_{Z_1}(z) \quad (8.18)$$

La probabilité de fausse alarme  $P_{FA}^{PCGO}$  est exprimée par

$$P_{FA}^{PCGO} = \Pr\{\tilde{Y}_0 \geq TZ_{PCGO}\} \quad (8.19)$$

$$= \int_0^{\infty} \Pr\{\tilde{Y}_0 \geq Tz\} p_{Z_{PCGO}}(z) dz \quad (8.20)$$

Pour  $\beta=1$  (i.e. pas de compression)  $P_{FA}^{PCGO}$  est égale à celle du détecteur conventionnel GO-CFAR, c.à.d

$$P_{FA}^{PCGO} = P_{FA}^{GO} = 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2T}}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{N}y}{2}\right)\right] e^{-\frac{Ny^2}{4}} dy \quad (8.21)$$

La probabilité de détection  $P_D^{PCGO}$  est exprimée par

$$P_D^{PCGO} = \Pr\{\tilde{Y}_1 \geq TZ_{PCGO}\} = \int_0^{\infty} \Pr\{\tilde{Y}_1 \geq Tz\} p_{Z_{PCGO}}(z) dz \quad (8.22)$$

### 8.2.3 Le Détecteur SO-CFAR Basé Sur La Méthode de Prétraitement Non Linéaire (PC-SOCFAR)

L'estimation du niveau du clutter est le minimum des sommes des sorties des deux fenêtres. La statistique  $Z$  est alors

$$Z_{PCSO} = \min(Z_1, Z_2)$$

La densité de probabilité de  $Z_{SO}$  est calculée par [110]

$$p_{Z_{PCSO}} = 2p_{Z_1}(z)(1 - P_{Z_1}(z))$$

la probabilité de fausse alarme  $P_{FA}^{PCSO}$  est exprimée par

$$\begin{aligned} P_{FA}^{PCSO} &= \Pr\{\tilde{Y}_0 \geq TZ_{PCSO}\} \\ &= \int_0^{\infty} \Pr\{\tilde{Y}_0 \geq Tz\} p_{Z_{PCSO}}(z) dz \end{aligned} \quad (8.23)$$

Pour  $\beta=1$  (i.e. pas de compression)  $P_{FA}^{PCSO}$  est égale à celle du détecteur conventionnel SO-CFAR, c.à.d

$$P_{FA}^{PCSO} = P_{FA}^{SO} = 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2T}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{N}}{2}y\right) e^{-\frac{Ny^2}{4}} dy \quad (8.24)$$

La probabilité de détection et exprimée par

$$P_D^{PCSO} = \Pr\{\tilde{Y}_1 \geq TZ_{PCSO}\} = \int_0^{\infty} \Pr\{\tilde{Y}_1 \geq Tz\} p_{Z_{PCSO}}(z) dz \quad (8.25)$$

Bien que les performances de détection basée sur la méthode de compression sont améliorées, la dégradation reste toutefois considérable en présence d'un grand nombre de cibles interférentes. Ceci est du à l'intervalle limité du paramètre  $\beta$  qui contrôle la quantité de compression. Le recours aux systèmes distribués est impératif.

Nous nous proposons dans la section suivante, d'étudier les performances de détection des systèmes distribués. Nous détaillerons deux configurations de fusion.

## 8.3 Détecteurs Distribués PC-CACFAR dans Un Clutter Non Gaussien

Nous présentons dans cette section deux approches pour combiner les données des détecteurs distribués PC-CACFAR.

### 8.3.1 Première Configuration de Fusion

La Figure 8.4 illustre la première configuration de fusion. Nous considérons un système distribué de  $n$  détecteurs CA-CFAR basés sur la méthode de compression pour la réduction du clutter impulsif. Chaque détecteur  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  basé sur le vecteur d'observations  $\tilde{\mathbf{X}}_i$  compressé, prend une décision  $cu_i$ . Chaque décision  $cu_i$  peut prendre les valeurs 0 ou 1, selon si le détecteur  $i$  décide en faveur de  $H_0$  ou  $H_1$ . La décision globale  $cu_0$  est prise en se basant sur le vecteur de décisions reçu, contenant les décisions individuelles, i.e.  $\mathbf{CA}=(cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$ . Nous appliquons la règle de fusion "OR" et nous suivons la formulation N-P. Nous avons pris comme exemple un système constitué de deux détecteurs PC-CACFAR identiques, i.e même  $P_{FA}$  et même nombre de cellules de références. Les probabilités de fausse alarme et de détection globales seront alors

$$P_{FA}^{PCA} = P_{FA}^{PCA1} + P_{FA}^{PCA2} - P_{FA}^{PCA1} P_{FA}^{PCA2} \quad (8.26)$$

$$P_D^{PCA} = P_D^{PCA1} + P_D^{PCA2} - P_D^{PCA1} P_D^{PCA2} \quad (8.27)$$

### 8.3.2 Seconde Configuration de Fusion

La Figure 8.5 illustre la deuxième configuration de fusion. Nous calculons le vecteur moyenne des vecteurs d'observations prétraitées (compressées). La décision globale  $cu_0$  est ensuite prise en se basant sur le vecteur résultant et en utilisant la procédure CA-CFAR. Notons que les détecteurs distribués PC-CACFAR sont identiques, i.e. même  $P_{FA}^{PCAi}$  et même nombre de cellules de références.

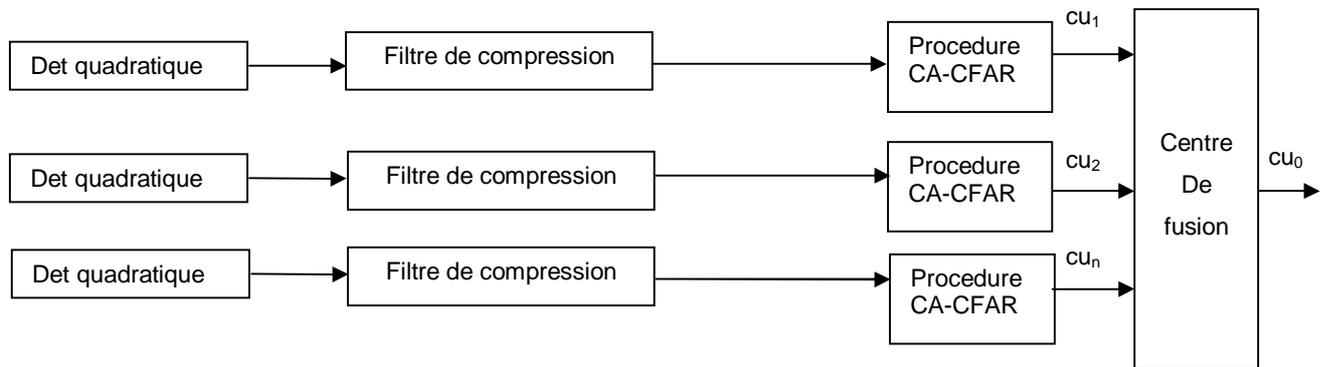


Fig.8.4 Première configuration de fusion basée sur la compression

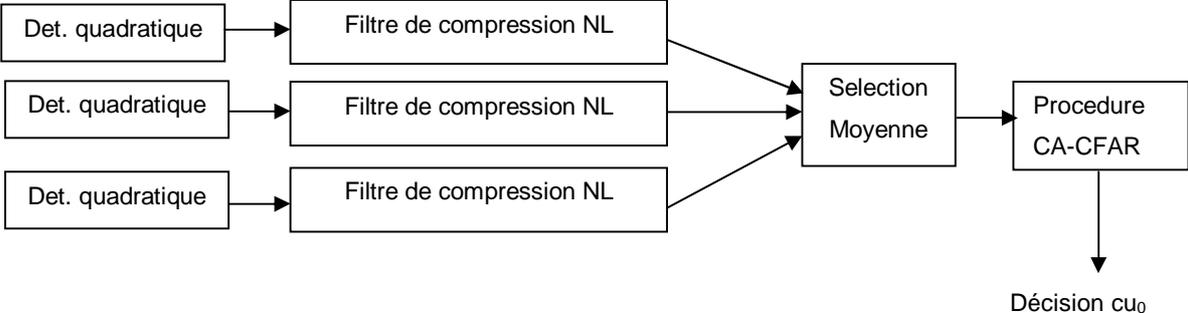


Fig. 8 5      Seconde configuration de fusion basée sur la compression

Il est à noter qu'il n'y a pas un grand avantage en augmentant le nombre de cellules de références. Notons également que l'augmentation du nombre de détecteurs PC-CACFAR est plus efficace qu'élargir le nombre de cellules de références. Les résultats obtenus nous permettront de bien comprendre l'effet de compression.

## 8.4 Résultats et Discussions

Nous illustrons dans ce paragraphe les avantages de la technique proposée. Nous considérons que la cible est de distribution Rayleigh noyée dans un clutter alpha-stable (Pearson). Les détecteurs employés sont le CA, GO et SO-CFAR basés sur la méthode de compression non linéaire. Nous obtiendrons à travers la procédure de calcul de Monté Carlo, la probabilité de détection en fonction du GSNR. Les résultats obtenus sont montrés dans les Figures 8.6 - 8.14. Les Figures 8.6, 8.7 et 8.8 illustrent l'effet du paramètre de compression  $\beta$  sur la probabilité de détection. Il apparaît clairement que les détecteurs PC-CFAR donnent des performances bien meilleures que celles des détecteurs conventionnels CA, GO et SO-CFAR, particulièrement pour un GSNR faible et pour des valeurs petites de  $\beta$ . Pour  $\beta=1$ , (pas de compression), les courbes de  $P_D^{PCA}$ ,  $P_D^{PCGO}$  et  $P_D^{PCSO}$  représentent les courbes de  $P_D^{CA}$ ,  $P_D^{GO}$  et  $P_D^{SO}$  respectivement (les  $P_D$  des détecteurs conventionnels). Comme nous l'avons déjà mentionné, les facteurs échelle (seuils)  $T_{PCA}$ ,  $T_{PGO}$  et  $T_{PSO}$  sont calculés par simulation pour différentes valeurs de  $\beta$ . Les résultats obtenus sont résumés dans le Tableau 8.1. Nous constatons que les valeurs des seuils sont très petites pour une compression importante (petite valeur de  $\beta$ ). Pour mieux illustrer l'effet du paramètre de compression, nous traçons dans la Figure 8.9,  $P_D^{PCA}$  en fonction du paramètre  $\beta$  pour une valeur du GSNR = 80dB. D'après cette Figure,  $P_D^{PCA}$  est considérablement améliorée pour des petites valeurs de  $\beta$ . Dans les Figures 8.10 et 8.11, nous présentons les performances des deux détecteurs distribués PC-CACFAR identiques ( $P_{FA}=10^{-4}$ ,  $N=32$ ) combinés selon les deux configurations de fusion. Il est clair que les deux systèmes distribués améliorent considérablement les performances de détection. Les Figures 8.12, 8.13 et 8.14 illustrent les performances de détection du détecteur PC-CACFAR et des deux systèmes distribués en présence de deux cibles interférentes ( $GINR_1=GINR_2=50dB$ ) respectivement.

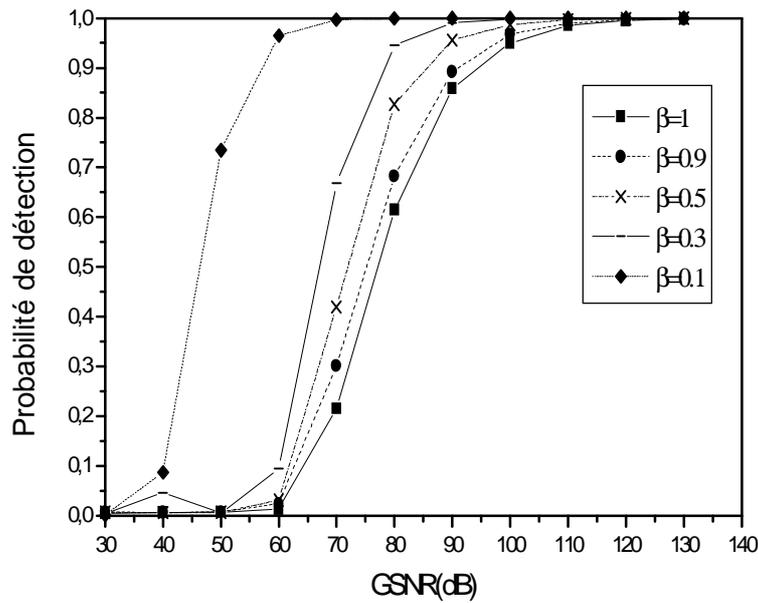


Fig. 8.6 Probabilité de détection PC-CACFAR dans un environnement Pearson homogène, en fonction du  $GSNR=20\log(\sigma_s/\gamma)$  et pour différentes valeurs de  $\beta$ .  $N_{PCA}=32$ ,  $P_{FA}^{PCA} = 10^{-4}$ .

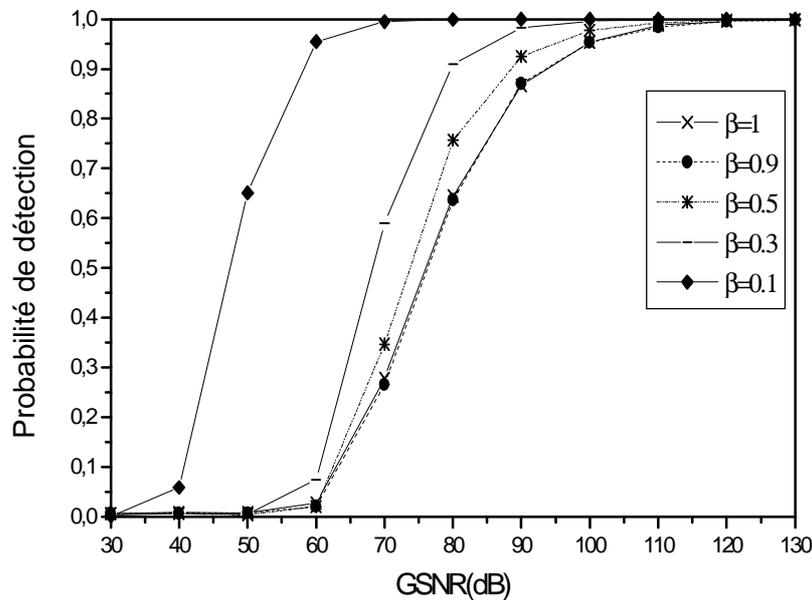


Fig. 8.7 Probabilité de détection PC-GOCFAR dans un environnement Pearson homogène, en fonction du  $GSNR=20\log(\sigma_s/\gamma)$  pour différentes valeurs de  $\beta$ .  $N_{PCGO}=32$ ,  $P_{FA}^{PCGO} = 10^{-4}$ .

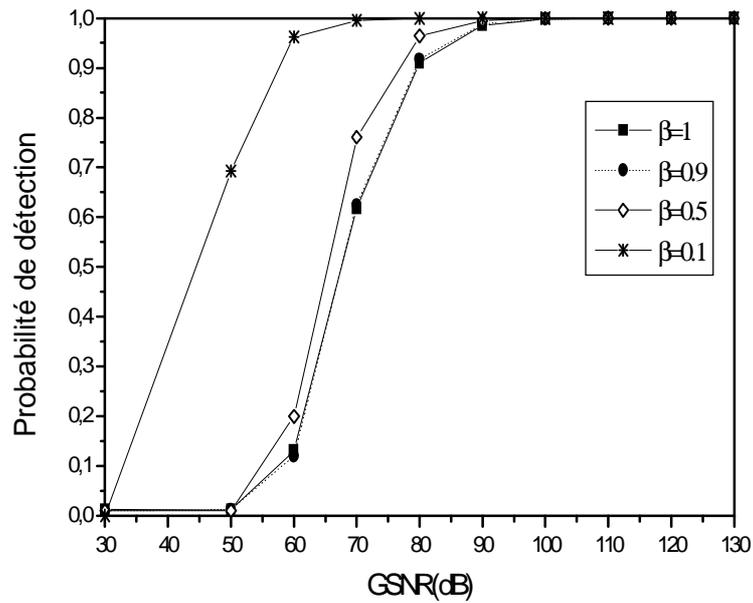


Fig. 8.8 Probabilité de détection du PC-SOCFAR dans un environnement Pearson homogène, en fonction du  $GSNR=20\log(\sigma_s/\gamma)$  et pour différentes valeurs de  $\beta$ .  $N_{PCSO}=32$   $P_{FA}^{PCSO} = 10^{-4}$ .

$\beta \backslash T$	$T_{PCA}$	$T_{PCGO}$	$T_{PCSO}$
1	$1.56 \times 10^6$	$7.250 \times 10^5$	$9.885 \times 10^5$
0.9	$3.11 \times 10^5$	$2.580 \times 10^5$	$2.887 \times 10^5$
0.5	$1.996 \times 10^3$	$1.880 \times 10^3$	$1.5587 \times 10^3$
0.3	118.05	112.5	128.88
0.1	5.25	5.200	5.99

Tableau 8.1 Les valeurs des facteurs échelle  $T_{PCA}$ ,  $T_{PCGO}$  et  $T_{PCSO}$  en fonction du paramètre de compression  $\beta$ .

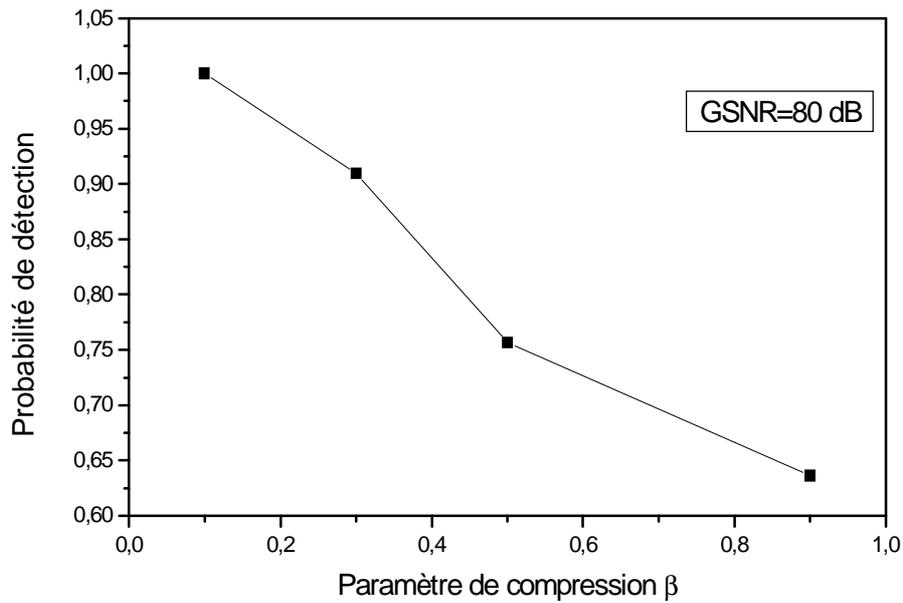


Fig. 8.9  $P_D^{PCA}$  en fonction du paramètre  $\beta$ . GSNR=80dB,  $N_{PCA}=32$ ,  $P_{FA}^{PCA} = 10^{-4}$ .

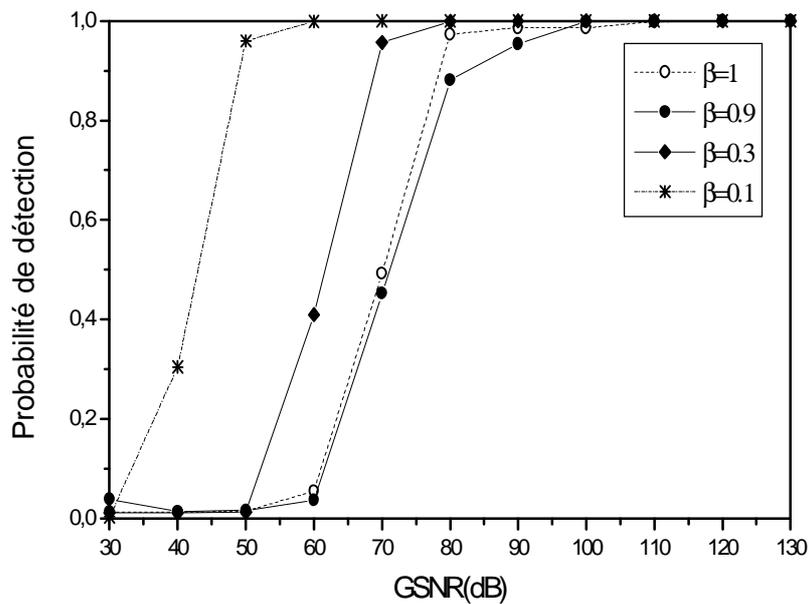


Fig. 8.10  $P_D$  des détecteurs distribués PC-CACFAR en adoptant la 1<sup>ère</sup> configuration de fusion, dans un environnement Pearson homogène et pour différentes valeurs de  $\beta$ .  $N_{PCA1}=N_{PCA2}=32$   $P_{FA}^{PCA1} = P_{FA}^{PCA2} = 10^{-4}$ .

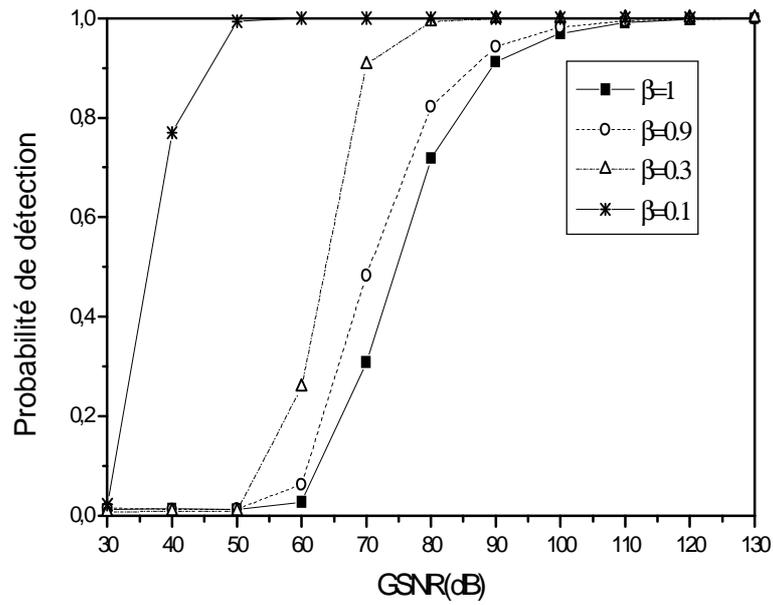


Fig. 8.11  $P_D$  des détecteurs distribués PC-CACFAR en adoptant la 2<sup>ème</sup> configuration de fusion, dans un environnement Pearson homogène et pour différentes valeurs de  $\beta$ .  $N_{PCA1}=N_{PCA2}=32$ ,  $P_{FA}^{PCA1} = P_{FA}^{PCA2} = 10^{-4}$ .

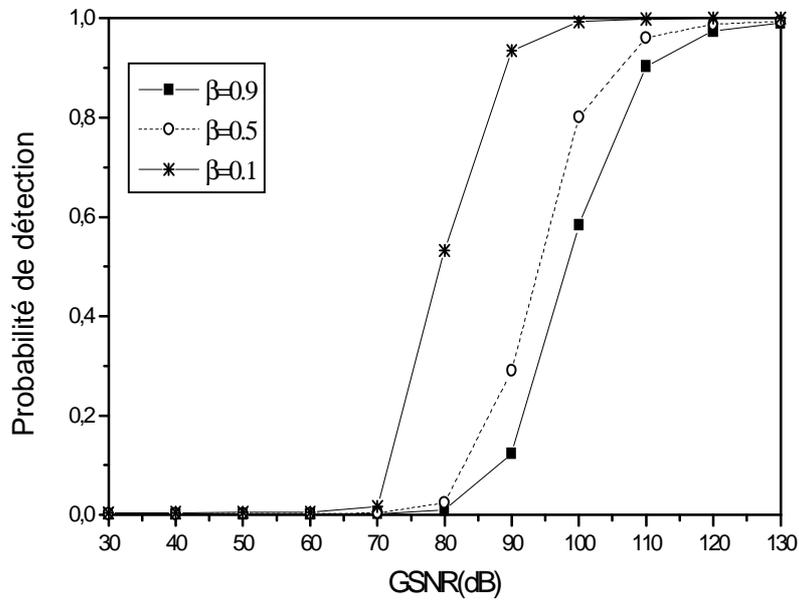


Fig. 8.12 Probabilité de détection du PC-CACFAR dans un environnement Pearson, en présence de deux interférences ( $GINR_1=GINR_2=50\text{dB}$ ), en fonction du  $GSNR=20\log(\sigma_s/\gamma)$  et pour différentes valeurs de  $\beta$ .  $N_{PCA}=32$ ,  $P_{FA}^{PCA} = 10^{-4}$ .

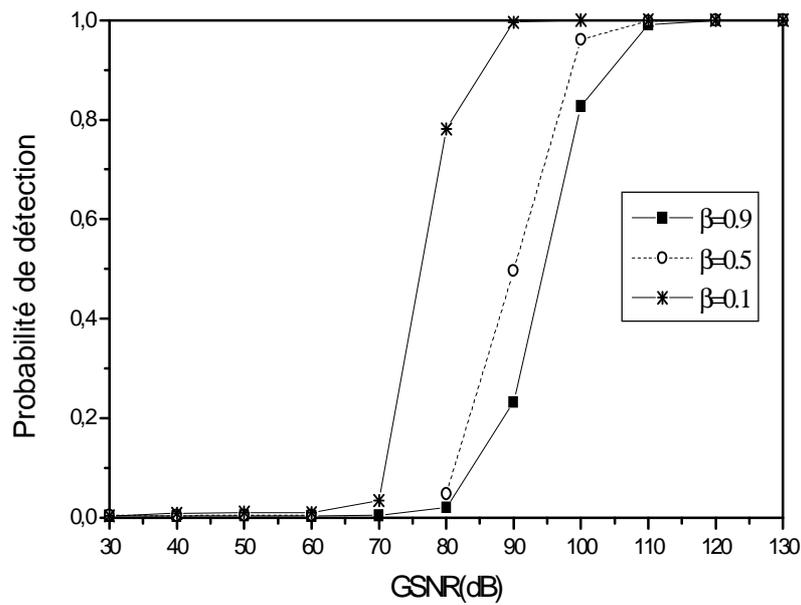


Fig. 8.13  $P_D$  des détecteurs distribués PC-CACFAR en adoptant la 1<sup>ère</sup> configuration de fusion, dans un environnement Pearson, en présence de deux interférences ( $GINR_1=GINR_2=50$ dB) et pour différentes valeurs de  $\beta$ .  $N_{PCA1}=N_{PCA2}=32$ ,  $P_{FA}^{PCA1} = P_{FA}^{PCA2} = 10^{-4}$ .

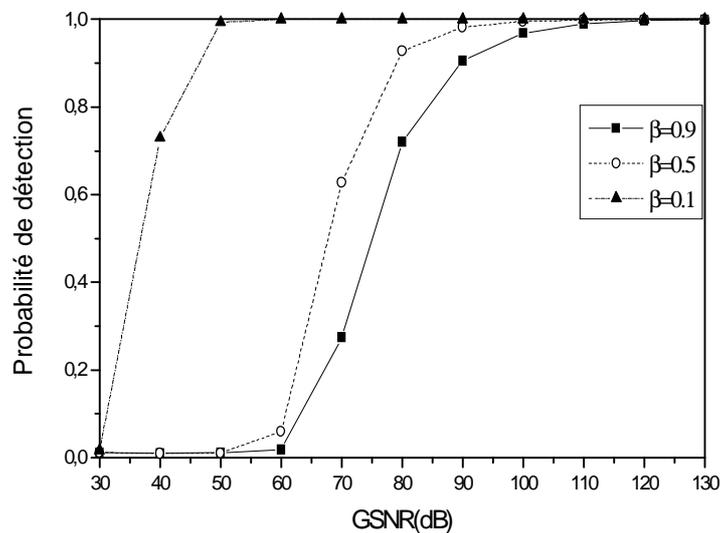


Fig. 8.14  $P_D$  des détecteurs distribués PC-CACFAR en adoptant la 2<sup>ème</sup> configuration de fusion, dans un environnement Pearson, en présence de deux interférences ( $GINR_1=GINR_2=50$ dB) et pour différentes valeurs de  $\beta$ .  $N_{PCA1}=N_{PCA2}=32$ ,  $P_{FA}^{PCA1} = P_{FA}^{PCA2} = 10^{-4}$ .

Nous constatons que l'association des détecteurs distribués et la méthode de prétraitement basée sur la compression, améliore la robustesse de détection contre les cibles interférentes. La deuxième configuration de fusion donne des performances bien meilleures que celles obtenues par la première configuration.

## 8.5 Conclusion

Dans ce Chapitre nous avons proposé une deuxième technique de réduction du clutter impulsif dans la détection CFAR. Nous avons inséré un bloc de prétraitement basé sur une méthode de compression non linéaire, en amont de la chaîne de détection. Nous avons déterminé en premier lieu, la densité de probabilité de v.a compressées. Nous avons ensuite calculé, par simulation, les probabilités de fausse alarme et de détection des trois détecteurs proposés, PC-CACFAR, PC-GOCFAR et PC-SOCFAR. Nous avons également traité le cas de détecteurs distribués PC-CACFAR en adoptant deux configurations de fusion et en présence d'interférences. Il apparaît clairement, d'après les résultats obtenus, que l'association de la méthode de compression (utilisée comme étape de prétraitement) et les systèmes distribués selon les configurations de fusion proposées, permet une amélioration considérable des performances de détection et offre une robustesse des systèmes contre les cibles interférentes.

Les résultats obtenus pourraient cependant être amélioré en proposant d'autres structures, en se basant toujours sur la méthode de compression. Il serait possible de:

- Placer le bloc de compression avant le détecteur quadratique.
- Combiner deux structures CFAR en un seul détecteur, en se basant sur la méthode proposée (exemple: le CA+OSCFAR). Cette dernière proposition est inspirée du travail de Srinivasen [105].

# Chapitre 9

---

## Conclusion et Perspectives

---

*De la modélisation du clutter à la détection à taux de fausse alarme constant, au débruitage et au traitement des signaux, nous avons souhaité explorer des domaines moins connus des praticiens mais qui peuvent encore révéler des spécificités théoriques intéressantes et trouver des applications nouvelles.*

### 9.1 Conclusion Générale

En guise de conclusion générale, nous allons tenter d'établir une synthèse globale sur le travail qui a été réalisé dans cette thèse.

Nous avons, grâce à l'utilisation d'outils mathématiques probabilistes et statistiques, tenté d'apporter de nouvelles pierres à deux édifices parmi les plus importants en détection Radar: la modélisation du bruit non gaussien, et la réduction de l'effet de ce bruit sur les performances de détection. Nous avons donc répondu aux interrogations que l'on avait souhaité en débutant ce travail de thèse, même si ce n'est que partiellement, puisque beaucoup de pistes prometteuses n'ont été que soulevées.

Cette recherche de robustesse en détection Radar nous a amené à nous pencher, en détail, sur les problèmes de la détection à taux de fausse alarme constant, spécialement lorsque le clutter est de nature impulsif.

---

Les méthodes développées dans cette thèse, et plus particulièrement l'emploi des ondelettes et la loi non linéaire de compression, semblent fournir une piste intéressante et prometteuse.

### **[A] La Détection à Taux de Fausse Alarme Constant dans Un Clutter Impulsif**

Nous avons essayé de faire une étude complète de la classe des détecteurs basés sur l'estimation de la moyenne en présence d'un clutter  $\alpha$ -stable, particulièrement un clutter de distribution Pearson ou Lévy. Nous avons montré que les détecteurs CA, GO et SO nous permettent une détection à taux de fausse alarme constant en présence du clutter  $\alpha$ -stable

Afin d'évaluer les performances des détecteurs, nous avons utilisé les méthodes de simulation basées sur la procédure de Monté Carlo. Nous avons également calculé les intégrales des probabilités de détection par les méthodes numériques déjà existantes en Fortran 77.

### **[B] Débruitage du Signal Radar en se Basant sur Les Ondelettes**

Toujours attaché à l'amélioration des performances de la détection CFAR, nous avons proposé une structure CFAR basée sur l'algorithme de débruitage par ondelettes. Nous avons inséré trois blocs en amont de la chaîne des détecteurs CA, GO et SO-CFAR. En suivant l'algorithme de débruitage de Donoho, le premier bloc est le calcul des coefficients de la transformée en ondelettes, le deuxième bloc celui du seuillage de coefficients pour ne garder que les coefficients significatifs et le troisième bloc celui du calcul de la version débruitée du signal. Cette méthode de débruitage nous a permis une amélioration considérable des performances de détection. Il faut cependant faire un choix judicieux des trois paramètres essentiels:

- L'ondelette analysante
- Le niveau de résolution
- Le seuil

Nous avons également proposé trois configurations pour combiner les observations des détecteurs distribués basés sur la même méthode. L'association des ondelettes avec la détection distribuée nous a offert une robustesse contre les cibles

---

interférentes. Néanmoins, la structure des détecteurs proposés est un peu encombrante.

### **[C] Débruitage du Signal Radar en se Basant sur La Loi Non Linéaire de Compression**

En s'inspirant des méthodes de quantification non uniforme, nous avons tenté de réduire l'effet du clutter impulsif en introduisant un bloc de compression non linéaire en amont de la chaîne de détection. Cette méthode dépend du choix du paramètre de compression. Nous avons également proposé deux configurations pour combiner les observations des détecteurs distribués basés sur cette méthode de compression. Les avantages de cette méthode sont appréciables dans le sens où elle améliore la probabilité de détection et ce dans l'optique d'avoir une robustesse contre les interférences. Les résultats de comparaison ont montré une certaine supériorité en faveur des détecteurs conventionnels.

## **9.2 Perspectives**

De nombreuses questions restent ouvertes

### **[A] Débruitage par Ondelettes**

Comment étendre l'étude réalisée ici dans le cas de la présence d'un bord du clutter (edge clutter).

Comment peut-on combiner les trois configurations de fusions?

Nous nous intéressons à la détection CFAR dans le domaine temps-fréquence

### **[B] Débruitage par La Loi Non Linéaire**

Combiner l'analyse par ondelettes et la méthode de débruitage par compression car cela pourrait éliminer absolument le clutter.

## Résumé

Cette thèse traite de la détection à taux de fausse alarme constant (CFAR) dans un environnement  $\alpha$ -stable. Après avoir exposé les limitations des processeurs classiques : CA, GO et SO-CFAR, nous suggérons d'améliorer les performances de la détection grâce à deux méthodes de prétraitement à savoir : le débruitage basé sur la transformée en ondelettes en association avec l'analyse en multirésolution, et une méthode de compression non linéaire inspirée des méthodes de quantification non uniforme. Nous proposons deux configurations de fusion rendant la détection CFAR distribuée plus robuste. L'association de ces méthodes de prétraitement et des systèmes distribués permet d'une part de réduire les effets indésirables du clutter et d'autre part de combattre les cibles interférentes. Les résultats obtenus montrent la validité de nos approches, et mettent en évidence l'apport d'une collaboration entre méthodes de prétraitement, en particulier pour supprimer le clutter.

Mots clés/ Détection Distribuée CFAR, Le Débruitage à Base d'Ondelettes, La Compression Non Linéaire.

## Abstract

This work deals with the distributed Constant False Alarm Rate (CFAR) radar detection of targets embedded in heavy tailed Pearson distributed clutter. In particular, we extend the results obtained for the cell averaging (CA), order statistics (OS) and censored mean level CMLD CFAR processors operating in alpha-stable random variables to more general situations, specifically to the presence of interfering targets and distributed CFAR detectors. The receiver operating characteristics of the greatest of (GO) and the smallest of (SO) CFAR processors are also determined. The performance characteristics of distributed systems are presented and compared in both homogeneous and in presence of interfering targets. We propose two pre-processing methods to combat undesirable effects of clutter. The first pre-processing method, based on a wavelet shrinkage is applied in

multisensor CA, GO and SO-CFAR systems employing parallel decision fusion in both homogeneous and non homogeneous background. This combination is computationally efficient and can significantly enhance detection performance. We propose three approaches to combine the data from the different CFAR detection to achieve even better performance. The second pre-processing method is based on a non linear compression procedure. This technique is similar to that used in non uniform quantization where a different law is used. Two approaches to combine data from the pre-processed CFAR detectors are proposed. The performance characteristics of the proposed CFAR distributed systems are presented for different values of the compression parameter.

We demonstrate, via simulation results, that the distributed systems based on the two pre-processing methods when the clutter is modeled as alpha-stable distribution, offer robustness properties against multiple target situations.