

MEMOIRE

N° d'ordre :
N° de série :

Présenté en vu de l'obtention du diplôme
de Magistère en Electronique

THEME

**Contrôle Multiobjectif Via
la Parametrisation de
Youla
et l'Optimisation LMI**

OPTION :

Contrôle

Présenté Par :

ZIANI Salim

SOUTENU LE 28 / 11 / 2006

Devant le jury :

<i>Président</i>	<i>: M^r Belarbi Khaled</i>	<i>Professeur</i>	<i>Univ. Constantine</i>
<i>Encadreur</i>	<i>: M^r Filali Salim</i>	<i>Professeur</i>	<i>Univ. Constantine</i>
<i>Examineurs</i>	<i>: M^r Bennia Abdelhak</i>	<i>Professeur</i>	<i>Univ. Constantine</i>
	<i>M^r Benalla Hocine</i>	<i>Professeur</i>	<i>Univ. Constantine</i>

Contrôle Multiobjectif via la paramétrisation de Youla et l'optimisation LMI

SOMMAIRE :

<i>INTRODUCTION</i>	01
<i>CHAPITRE 01 : INTRODUCTION A LA SYNTHÈSE H_2 ET H_∞</i>	
I. DEFINITION DES NORMES DES SYSTEMES LINEAIRES STATIONNAIRES...	04
a. La norme H_2	04
1.1. Définition de la norme H_2 d'une matrice de transfert	04
1.2. Calcul de la norme H_2	04
b. La norme H_∞	04
2.1. Définition de la norme H_∞ d'une matrice de transfert	04
2.1. Cas monovarié	04
2.2. Cas multivarié	05
II. DESCRIPTION DES PERFORMANCES	05
1. Condition de stabilité	05
1. Les fonctions de sensibilités	06
2. Régulation	06
3. Compromis performance/robustesse	07
III. SYNTHÈSE ROBUSTE	09
1. Spécification de performance	09
2. La contrainte de stabilité robuste	09
3. La contrainte sur la commande	10
4. Le système augmenté	10
IV. SYNTHÈSE H_∞	11
a. Introduction	11
b. Spécifications H_∞	12
c. Algorithme du correcteur H_∞	13
V. SYNTHÈSE H_2	16
a. Introduction	16

b.	Algorithme du correcteur H2	17
VI.	CONCLUSION	18
<i>CHAPITRE 02 : PARAMETRISATION DE YOULA</i>		
I.	INTRODUCTION	20
II.	PRINCIPE DE LA PARAMETRISATION DE YOULA	21
III.	PROPRIETES	23
a.	Propriété 01 : la relation bijective	23
b.	Propriété 02 : la représentation standard	23
c.	Propriété 03 : interprétation dans l'espace d'état	24
d.	Propriété 04 : la convexité	25
IV.	INTERPRETATION PAR UN SYSTEME STABLE	25
	Correcteur à un degré de liberté	25
V.	SPECIFICATION EN BOUCLE FERMEE	27
1.	Motivation de la formulation des spécifications en boucle fermée .	27
2.	Contrainte et critère convexe	27
3.	Ensembles des transferts atteignable par des correcteurs stabilisant	28
4.	Contraintes temporelles	28
5.	Contraintes fréquentielles	30
6.	Problème d'optimisation avec le paramètre de Youla	30
VI.	CONCLUSION	31
<i>CHAPITRE 03 : OBSERVATEUR / RETOUR D'ETAT</i>		
I.	INTRODUCTION	33
II.	UTILISATION EN BOUCLE FERMEE	33
III.	REPRESENTATION D'ETAT DU SYSTEME EN BOUCLE FERMEE	34
IV.	CAS REGULATEUR / OBSERVATEUR	34
V.	INTRODUCTION DE LA PARAMETRISATION DE YOULA AVEC REGULATEUR /OBSERVATEUR	35
VI.	SYNTHESE Q-PARAMETRISATION ET REGULATEUR / OBSERVATEUR	36

CHAPITRE 04 : OPTIMISATION CONVEXE LMI

I.	INTRODUCTION	40
II.	OPTIMISATION LMI	40
	a. définition des Inégalité Matricielle Affine	40
	b. Problème d'optimisation sous contrainte LMI	41
III.	LES OUTILS TECHNIQUES POUR LA FORMULATION LMI	42
	1. Lemme de Schur	42
	2. Lemme d'élimination	43
	3. Lemme S-procédure	43
	4. Corollaire de la S-procédure	44
	5. Changement de variable de base	44
	6. Variables Bidons	44
	7. Modification par congruence	44
IV.	MISE SOUS FORME D'OPTIMISATION LMI	44
	a. Problème de faisabilité	45
	b. Minimisation d'une fonction de coût linéaire	46
	c. Minimisation des valeurs propres généralisées	46
V.	FORMULATION DE QUELQUES CRITERE D'OPTIMISATION	47
	a. H_∞	47
	1.1. Caractérisation matricielle	47
	1.2. Synthèse H_∞	48
	1.2.1. Synthèse H_∞ par retour d'état	48
	1.2.2. Synthèse H_∞ par retour de sortie	48
	1.2.3. Exemple de simulation	50
	b. H_2	52
	2.1. Caractérisation matricielle	52
	2.2. Synthèse H_2	53
	2.2.1. Synthèse H_2 par retour de sortie	53
	2.2.2. Synthèse H_2 par retour d'état	54
	c. α -stabilité	55
	3.1. Définition	55
	3.2. Caractérisation matricielle	56
	3.3. Synthèse α -stabilité	57

3.3.1. Synthèse α -stabilité par retour d'état	57
3.3.2. Synthèse α -stabilité par retour de sortie	58
VI. CONCLUSION	59
<i>CHAPITRE 05 : SYNTHÈSE MULTIOBJECTIVE / APPLICATION</i>	
I. INTRODUCTION	61
II. PROBLEME MULTICRITERE	61
a. CRITERE $\ T_1\ _\infty < \gamma_1$	62
b. CRITERE $\ T_2\ _2 < \gamma_2$	62
c. CRITERE α -stabilité sur LFT(P,K)	63
III. PROBLEMATIQUE DE LA SYNTHÈSE	63
IV. LINEAIRISATION DES INEGALITES MATRICIELLES	64
a. Problème H_∞	65
b. Problème H_2	66
c. Problème α -stable	66
V. APPLICATION SUR UN BRAS FLEXIBLE	67
a. Description du système	67
b. Etude du système	68
c. Synthèse	69
d. Résultat de simulation	70
VI. CONCLUSION	75
<i>CONCLUSION GENERALE</i>	76
<i>REFERENCES</i>	79
<i>LISTE DES FIGURES</i>	82

REMERCIEMENT

Ce travail présenté dans cet ouvrage n'aurait pu se faire sans l'aide et le soutien d'un grand nombre de personnes.

Je tiens tout d'abord à remercier Mr le professeur FILALI Salim pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de diriger mes recherches pour sa grande disponibilité ainsi que pour les précieux conseils et références qu'il a su me donner toute l'année.

Ma gratitude s'adresse à Mr. Le professeur BELARBI Khaled d'avoir accepté de présider le jury. Il témoigne ainsi de la confiance qu'il place dans mes travaux et m'honore par sa présence et disponibilité.

J'adresse tous mes sincères remerciements à tous les notables membres de jury Mr. le professeur BENNIA Abdelhak et Mr. le professeur BENALLA Hocine pour l'honneur de leur présence indispensable et d'accepter de juger ce modeste travail.

Tous mes remerciements qui m'ont soutenu de près ou de loin, notamment mon bien aimé GATI Miloud ; à mes amis Nabil T., Ilyes B., Sofiane B. et tous mes collègues du travail Mohamed A., Nacer N, et le grand remerciement à Zahia D. et de ne pas oublier la famille Seghairi grand et petit.

REMERCIEMENT PARTICULIERE

*J'adresse mes vifs particulières remerciements à Mr. **Hadj SAHLI Salah** qui joue le rôle d'Amis, Grand frère, Directeur, Responsable ; qui ma donné le grand pouvoir et de courage de continuer mes études, particulièrement d'ouvrir les portes de son bureau ABI a un laboratoire de recherche, sans faire oublier son aide psychologique et financière, je tiens à remercier aussi sa propre famille grand et petit pour sa sagesse et compréhension*

Je remercie plus particulièrement Hadda mon épouse pour sa patience sa compréhension, son amour, et l'équilibre qu'elle a apportée dans ma vie en acceptant de faire de moi son époux.

A ma mère Khadra que Dieu la garde pour une longue durée en pleine santé, a toute ma famille grand et petit.

*A la lumière arrivée dans ma maison
DIAEDDINE*

INTRODUCTION :

L'histoire des inégalités Matricielles Linéaires ou LMI a plus de 100 ans, elle semble avoir débuté en 1890 quand Lyapunov montre que la stabilité du système LTI $\dot{x}(t)=Ax(t)$ est équivalente à l'existence d'une matrice P symétrique définie positive telle que $A^T P + P A < 0$. Lyapunov montre aussi qu'il est possible de résoudre analytiquement ce problème.

Dans les années 1940, l'école Russe menée par Lur'e et Postnikov énonce des critères de stabilité, en particulier pour des systèmes non linéaires sous forme de LMI. Celles-ci étaient résolues analytiquement pour des systèmes de faible taille .

L'étape suivante dans l'évolution du formalisme LMI, a lieu au début des années 1960 lorsque Yakubovich, Kalman et Popov traduisent les problèmes d'analyse par des critères graphiques que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de critère du cercle par exemple. On arrive ainsi à la résolution LMI d'ordre élevé par des critères graphiques

Au début des années 1970, on montre que certaines LMI peuvent être résolues en terme d'équations de Riccati algébriques, on retiendra à ce propos les travaux de Willems.

La dernière pierre de cette évolution repose sur la formulation des problèmes classiques d'automatique en tant que problèmes d'optimisation convexe. Pyatnitskii et Skorodinski réduisent le problème de Lur'e sous la forme d'un problème d'optimisation convexe qu'ils résolvent numériquement en utilisant l'algorithme de l'ellipsoïde en 1982.

On assiste alors durant les années 1980 et 1990 au développement des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation convexe.[1, 2, 3, 4]

Les travaux actuels se contentent sur les formulations possibles des problèmes d'automatiques en tant que problèmes d'optimisation convexe sous contrainte LMI et l'amélioration des problèmes numériques. Ces derniers concernant la diminution des temps de calcul qui restent encore important, et les problèmes de convergence lorsque la taille du problème devient grande, notion de conservatisme.

En général, les inégalités Matricielles Affines ou LMI prennent une place de plus en plus importante dans les méthodes modernes de l'automatique. De nombreux résultats antérieurs trouvent une formulation LMI et ce formalisme permet aussi de résoudre de nouveaux problèmes qui n'avaient pas trouvés jusqu'alors de solution.

Le succès de LMI vient du développement des méthodes dites des point intérieur (interior point methods) qui permettent de résoudre des problèmes de manière efficace.

Dans notre mémoire pour notre problème de commande on a utilisé les inégalités matricielles linéaires (LMI). Cet outil est l'étude d'un problème d'optimisation convexe, de la formulation des inégalités ainsi que la solution du problème de commande. Notre mémoire est organisée de la façon suivante :

Au premier chapitre sont définis les objectifs de synthèses ainsi que l'introduction des notions utilisés tout le long de ce mémoire. La synthèse H_2 et H_∞ mettent en évidence les notions fondamentales pertinentes au calcul des contrôleurs H_2 et H_∞ .

Le deuxième chapitre introduit la paramétrisation de Youla. Cette paramétrisation permet de caractériser l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire invariant par l'ensemble des transferts stables. Elle est utilisée ici pour définir un outil intermédiaire pour le chapitre 05. La mise en œuvre pratique de cette paramétrisation permet aussi de structurer un correcteur dynamique sous forme d'un observateur et retour d'état.

Au troisième chapitre est donnée une étude illustrative de la représentation d'état d'un système bouclé par un correcteur de type observateur / régulateur, cette représentation permet de définir la représentation d'état du système interconnecté.

Le quatrième chapitre est consacré à l'optimisation LMI, mettre sous forme d'optimisation avec des contraintes LMI d'un problème connu. Présentation des formes de résolutions d'un problème convexe et étude approfondie des trois critères H_2 , H_∞ et α -stabilité sous optimisation LMI comme une base générale illustrative sur l'optimisation convexe sous contrainte LMI.

Le cinquième chapitre est une application de la méthode sur un système Bras flexible. On définit la synthèse multiobjective, qui montre comment un problème de synthèse d'une loi de commande est transformé en un problème d'optimisation. Le but est la recherche d'une loi de commande par la résolution LMI via la paramétrisation de Youla sous correcteur initial observateur / régulateur et Q-paramètre statique tout en respectant un cahier de charges bien déterminé, et on a terminé notre travail par une conclusion.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION A LA SYNTHÈSE H_2 ET H_∞

I. DEFINITION DES NORMES DES SYSTEMES LINEAIRES STATIONNAIRES :

1. La Norme H₂ :

1.1. Définition de la norme H₂ d'une matrice de transfert :

On appelle norme H₂ du transfert T₂ entre w₂ (représente l'entrée du système) et z₂ (représente la sortie du système) le réel positif défini par : [5, 6]

$$\|T_2\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \text{trace}(T_2(e^{2\pi i \gamma})^* T_2(e^{2\pi i \gamma})) d\gamma} \quad (1.1)$$

1.2. Calcul de la norme H₂ :

Le calcul algébrique de la norme H₂ utilise les grammians d'observabilité et de commandabilité du système, on montre que pour un système qui a pour représentation d'état les matrices(A,B,C,D) [5, 6, 7]:

$$\begin{aligned} \|D+C(zI-A)^{-1}B\|_2 &= \sqrt{\text{trace}(D^T D+B^T L_0 B)} \\ &= \sqrt{\text{trace}(DD^T +CL_c C^T)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

ou L_c et L_o sont respectivement les grammians d'observabilité de commandabilité :

$$L_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad L_o = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (1.3)$$

solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} A L_c A^T - L_c + B B^T &= 0 \\ A^T L_o A - L_o + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\|G\|_2^2 = \text{trace}(CL_c C^T) = \text{trace}(B^T L_o B) \quad (1.5)$$

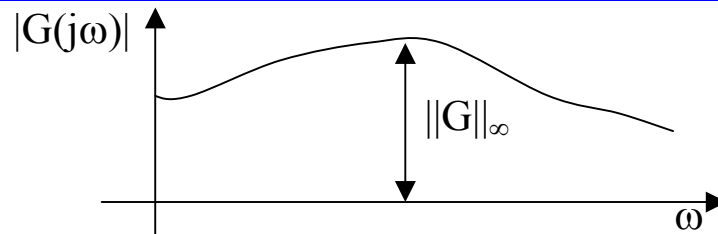
2. La Norme H_∞ :

2.1. Définition de la norme H_∞ d'une matrice de transfert :

2.1.1. Cas monovariante :

Soit G(p) une fonction de transfert

$\|G\|_\infty$ est le gain maximal tel qu'il apparaît sur le diagramme de Bode de G(p) : $\sup_\omega |G(j\omega)|$:

Fig.I.1. Norme H ∞ gain de Bode maximum

2.1.2. Cas multivariable :

Soit $G(p)$ une matrice de transfert multivariable propre, on définit la norme H ∞ de $G(p)$ de la manière suivante : $\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(p))$ ou $\bar{\sigma}$ désigne la plus grande valeur singulière.

On appelle ainsi norme H ∞ du transfert T_1 entre w_1 et z_1 le réel positif défini par : [6, 7, 8]

$$\|T_1\|_\infty = \sup_{w_1 \in L_2, w_1 \neq 0} \left(\frac{\|z_1\|_2}{\|w_1\|_2} \right) \quad (1.6)$$

II. DESCRIPTION DES PERFORMANCES

1. Condition de stabilité :

La stabilité est garantie si pour tout point du lieu de Nyquist nominal $G(e^{-j\omega}) K(e^{j\omega})$, le cercle de centre GK et de rayon $|GK - G_0K|$ ne contient pas le point (-1) . [6, 8, 9]

$$|GK|.W_1 < |1+GK|$$

$$\left| \frac{GK}{1+GK} \right| W_1 < 1 \Rightarrow |T| W_1 < 1 \Leftrightarrow \sup_{\omega} [T(j\omega).W_1(j\omega)] < 1 \quad (1.7)$$

condition de performance :

$$\|T \cdot W_1\|_\infty < 1 \quad \text{non infini}$$

$$\left\| \frac{W_1}{1+GK} \right\|_\infty < 1 \Leftrightarrow |W_1| < |1+GK| \quad (1.8)$$

c.à.d. La courbe de Nyquist ne doit pas couper le cercle de centre $(-1,0j)$ et de rayon variable $W_1(j\omega)$.

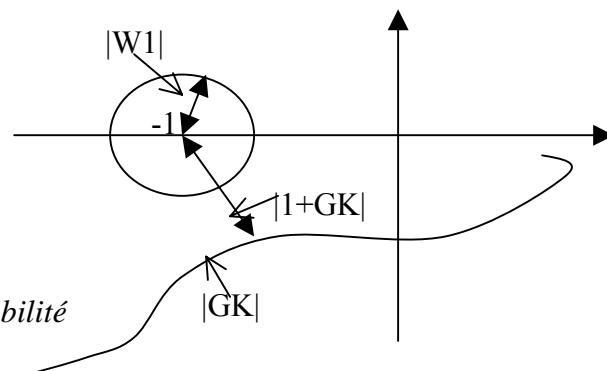


Fig.I.2. Critère de stabilité

2. Les fonctions de sensibilités :

soit le système sur schéma suivant : [6, 10]

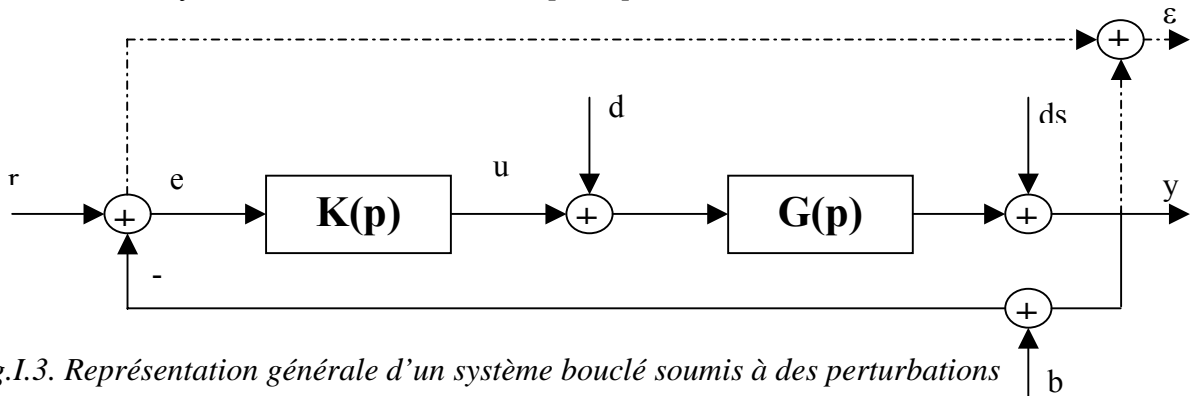


Fig.I.3. Représentation générale d'un système bouclé soumis à des perturbations

$G(p)$: Fonction de transfert du système

d : Perturbation d'entrée

$K(p)$: Fonction de transfert du correcteur

ds : Perturbation de sortie

r : Signal de consigne ou de référence

b : Bruit de mesure

u : Signal de commande

y : Signal de sortie (grandeur à réguler)

e : Erreur d'asservissement

y_m : Mesure de la sortie

ε : Erreur de suivi (non mesurable)

$$e = r - y_m = r - (y + b)$$

$$y = ds + G.d + K.G.e = ds + G.D + K.G.(r - y - b)$$

$$\Rightarrow y = S.ds + G.S.d + T.(r - b)$$

$$S(p) = \frac{1}{1 + KG(p)} \quad \text{Fonction de sensibilité} \quad (1.9)$$

$$T(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)} = 1 - S(p) \quad \text{Fonction de sensibilité complémentaire} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} e = r - y_m = r - (y + b) \\ = Sr - S.ds - S.b - G.S.d \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\Rightarrow u = -T.d + K.S.(r - ds - b)$$

$$\varepsilon = r - y = S.r - S.ds + T.b - G.S.d \quad (1.12)$$

3. Régulation : [8, 11]

Le premier objectif d'un système de régulation est la réduction des effets des signaux perturbateurs sur les grandeurs à réguler. Dans l'approche linéaire, les signaux perturbateurs sont représentés par des signaux additifs sur l'entrée (biais ou offset d'un actionneur, couple induit par

un coup de vent en aéronautique ,...), l'état ou la sortie. Pour simplifier la présentation , nous ne traiterons , que la perturbation de sortie sur un système monovarié. La structure de régulation est présentée à la figure ci-dessous, le problème est de concevoir un régulateur R tel que le signal de perturbation de sortie d affecte peu la sortie z .

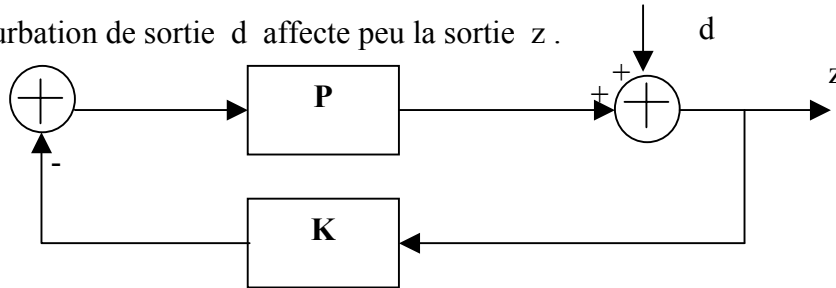


Fig.I.4. Représentation d'un système de régulation

Dans le domaine fréquentiel, on peut définir une fonction $m(\omega)$, réelle positive, dont la valeur soit une borne supérieure au transfert z/d :

$$\left| \frac{z(j\omega)}{d(j\omega)} \right| \leq m(\omega) , \forall \omega. \quad (1.13)$$

$$\text{Soit : } S(j\omega) = \left| \frac{1}{1+P(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq m(\omega) , \forall \omega. \quad (1.14)$$

Cette fonction doit vérifier les contraintes :

1. $m(\omega) \ll 1$ si ω tend vers 0
2. $m(\omega) \gg 1$ si ω tend vers ∞

pour le rejet exact de perturbation on posera : $\lim_{\omega \rightarrow 0} m(\omega) = 0$

la figure I.6. donne l'allure d'une telle fonction cible.

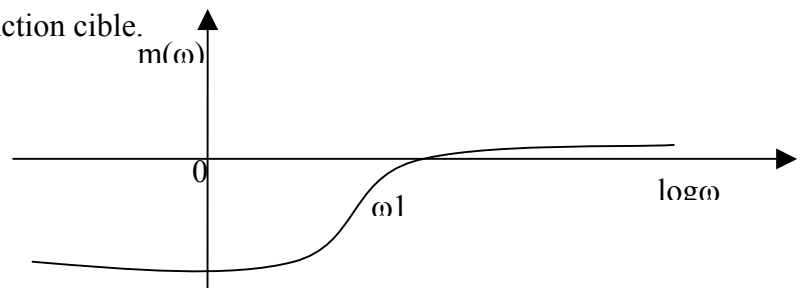


Fig.I.5. Allure de la fonction $m(\omega)$

4. Compromis performance / robustesse : [8]

Définitions :

Robuste en stabilité : Si le système demeure stable en présence d'incertitude telles que les mesures de modélisation, les bruits de mesures ou les perturbations externes.

Robuste en performance : Si les performances sont conservés en présence des perturbations (les performances pouvant se mesurer en terme : temps de réponse, temps de monté, d'amortissement des modes flexibles, découplage, perturbation/sortie,)

On distingue généralement 3 plages de fréquences distinctes :

- Les fréquences « basses » : Correspondent à la plage de fréquences où le système à régler est bien modélisé : les incertitudes sont faibles et la boucle ouverte peut donc présenter un gain important.
- Les fréquences intermédiaires : où les incertitudes croissent, imposant de diminuer le gain de boucle ouverte et de prendre en compte les marges (gain, phase) ;
- Les fréquences élevées où la contrainte de robustesse impose de diminuer le gain de boucle ouverte.

➤ Dans les fréquences basses : $\omega < \omega_b$; $\{ m(\omega) \ll 1 \}$

La relation (15) est vérifiée si :

$$K(j\omega)P(j\omega) \ll \frac{1}{m(\omega)} \text{ puisque } \{|K(j\omega).P(j\omega)| \gg 1\}$$

$$\Rightarrow \{|K(j\omega).P(j\omega)| \cong |1+K(j\omega).P(j\omega)|\} \quad (1.15)$$

➤ Dans les fréquences hautes : $\omega > \omega_a$

Sachant le régulateur $K(j\omega)$ stabilise $p(j\omega)$ ssi :

$$\forall \omega, \quad |1+G(j\omega).K(j\omega)| > |G(j\omega).K(j\omega)|. \Delta_a(\omega)$$

$$\Rightarrow |K(j\omega).P(j\omega)| \ll \frac{1}{\Delta_a(\omega)}$$

$$\text{car } |K(j\omega).P(j\omega)| \ll 1 \Rightarrow |1+K(j\omega).P(j\omega)| = 1 \quad (1.16)$$

➤ Dans les fréquences intermédiaires : $\omega_b < \omega < \omega_a$:

A partir des relations précédentes , c'est-à-dire que la fréquence au gain unité de boucle ouverte, ω_0 , doit être fixée dans cet intervalle, de façon à pouvoir respecter la marge de phase spécifiée. On peut représenter cet ensemble de contraintes sur le lieu de Bode du module de la boucle ouverte : [8]

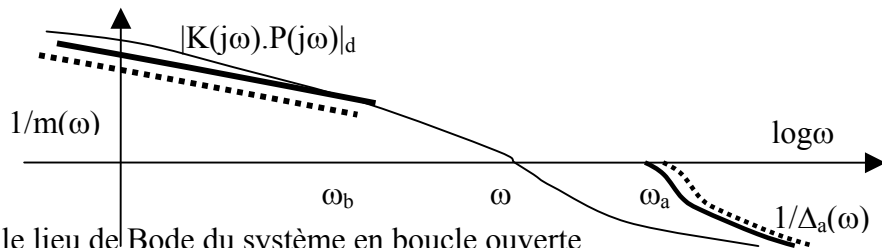


Fig.I.6. Contraintes sur le lieu de Bode du système en boucle ouverte

III. SYNTHESE ROBUSTE :

1. Spécification de performance : [6, 8]

1.1. Sensibilité en sortie :

C'est la matrice de transfert entre une perturbation de sortie et la sortie, selon la figure I.12. :

$$S_s(j\omega)=[1+P(j\omega).K(j\omega)]^{-1} \quad (1.17)$$

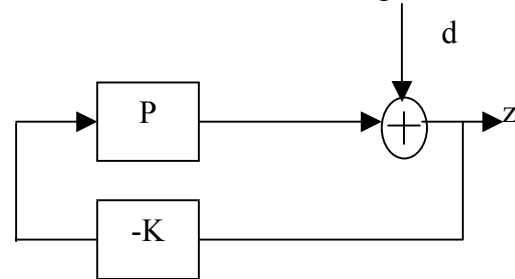


Fig. I.7. : Sensibilité en sortie

•1.2. Sensibilité en entrée :

C'est la matrice de transfert entre une perturbation d'entrée et l'erreur, selon la figure I.13. :

$$S_e(j\omega)=[1+K(j\omega).P(j\omega)]^{-1} \quad (1.18)$$

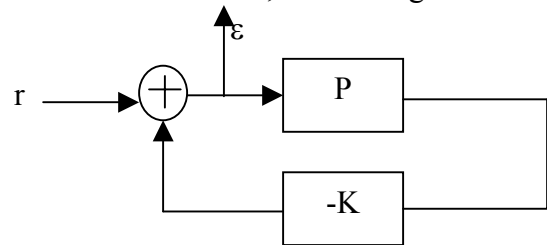


Fig. I.8.: Sensibilité en entrée

On peut alors, par exemple, fixer un objectif de performance sur la sensibilité en entrée sous la forme d'une contrainte sur son gain principal : la relation (1.14) devient :

$$\overline{\sigma}[S_e(j\omega)] \leq m(\omega) ; \quad \forall \omega. \quad (1.19)$$

Cette fonction est de la forme décrite par la figure I.5. (allure de $m(\omega)$). Pour que l'on puisse l'utiliser dans la synthèse, il faut représenter cette fonction $m(\omega)$ par le module d'une fraction rationnelle propre et stable, d'inverse propre et stable. Soit par exemple la fraction rationnelle:

$$W_3^{-1}(j\omega) = a \frac{1+j\sqrt{\frac{b\omega}{a\omega_0}}}{1+j\sqrt{\frac{a\omega}{b\omega_0}}} \text{ alors : } \lim_{\omega \rightarrow 0} |W_3^{-1}(j\omega)| = a ; (a < 1) \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_3^{-1}(j\omega)| = b ; (b > 1) \quad (1.20)$$

Pour a et b fixés, le problème est de trouver la plus grande valeur de ω_0 possible telle que :

$$\overline{\sigma}[S_e(j\omega)] \leq |W_3^{-1}(j\omega)| , \quad \forall \omega. \quad (1.21)$$

2. La contrainte de stabilité robuste [6]

Elle est donnée par le théorème de stabilité robuste et la relation du théorème du petit gain, adapté à l'incertitude de sortie. Cette contrainte doit être réécrite à l'aide d'une fraction rationnelle propre et stable, d'inverse propre et stable. Soit W_1 une telle fraction rationnelle, vérifiant:[8]

$$|W_1(j\omega)| \geq \bar{\sigma}[\Delta_s(j\omega)] \tag{1.22}$$

$$\forall \omega. \text{ Alors la contrainte de stabilité robuste s'écrit : } \bar{\sigma}[T_s(j\omega)] \leq W_1^{-1}(j\omega), \forall \omega. \tag{1.23}$$

3. La contrainte sur la commande

On peut contraindre le niveau de commande par le gain principal supérieur de la matrice de transfert R_0 défini par :[6, 8]

$$R_0(j\omega)=[I+K(j\omega).P(j\omega)]^{-1}K(j\omega)=S_e.K(j\omega) \tag{1.24}$$

Il faut alors créer une fraction rationnelle (souvent un simple gain) W_2 telle que:

$$\bar{\sigma}[R_0(j\omega)] \leq |W_2^{-1}(j\omega)|, \forall \omega. \tag{1.25}$$

4. Le système augmenté : Problème standard [6, 8, 10]

Le problème de synthèse consiste à chercher le régulateur K stabilisant P et tel que la bande passante ω_0 soit la plus grande possible, tout en respectant les contraintes (W_1, W_2, W_3).

On peut réécrire sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} |W_3(j\omega)|\bar{\sigma}[S_e(j\omega)] &\leq 1 \\ |W_2(j\omega)|\bar{\sigma}[R_0(j\omega)] &\leq 1 \\ |W_1(j\omega)|\bar{\sigma}[T_s(j\omega)] &\leq 1 \end{aligned} \right\} \tag{1.26}$$

et représenté le schéma fonctionnel :

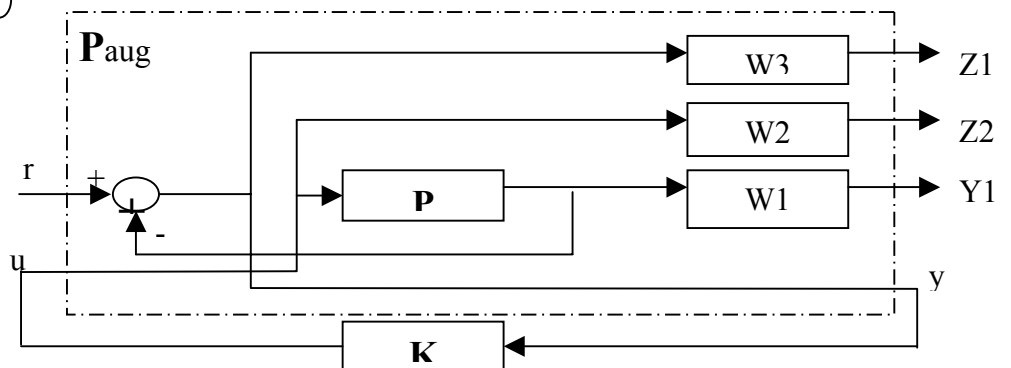


Fig.I.9. : schéma fonctionnel représentant le problème standard

On peut écrire :
$$Y = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{bmatrix} = P_{aug} \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix} = P_{aug} U \quad \text{et} \quad u = Ky.$$

D’ou le système à procéder devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 r(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} r(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} r(t) + D_{22} u(t) \end{cases} \quad \text{or} \quad P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

On peut écrire le système augmenté sous la forme de représentation d’état suivante :

$$\begin{cases} e = r - P.u \\ z_1 = W_3.e \\ z_2 = W_2.u \\ z_3 = W_1.P.u \\ y = e \end{cases} \quad P_{aug} : \begin{bmatrix} W_3 & -W_3 P \\ 0 & W_2 \\ 0 & W_1 P \\ I & -P \end{bmatrix} \quad \text{représentation du système augmenté} \quad (1.28)$$

IV. SYNTHÈSE H INFINI :

1. Introduction :

- Etant donnée $\gamma > 0$ existe-t-il une loi de commande K telle que : [6, 12]
 - le système $F_L(P,K)$ soit asymptotiquement stable (Tous les pôles du système en boucle fermée sont à partie réelle négatives). (F_L : c’est la LFT Linear Fractionnel Transformation Lower)
 - $\|F_L(P,K)\| < \gamma$

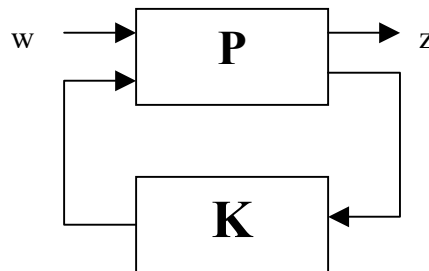


Fig. I.10. Systeme bouclé

Avec :
$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

$$T_{ZW} = P_{11} + P_{12} K(I - P_{22} K)^{-1} P_{21} = \text{LFT}(P,K) = F_L(P,K) \quad (1.30)$$

- Si oui, construire une loi de commande K assurant pour le système en boucle fermée les deux propriétés précédentes.

Ce problème admet deux résolutions possibles elles sont en général mise en oeuvre numériquement sur ordinateur :

La première approche : repose sur la résolution d'une série d'équations de Riccati (solution simple) ; cependant elle nécessite la vérification d'un certain nombre d'hypothèses qui peuvent être non vérifiées alors que le problème H ∞ admet une solution

La deuxième approche : permet de faire l'économie de ces hypothèses, au prix d'une complexité algorithmique accrue ; une telle approche est basée sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contrainte d'inégalités matricielle linéaires LMI.

2. Spécification H ∞ : [8, 12]

La propriété $\sigma(\alpha A) = |\alpha| \sigma(A)$, α est un scalaire, des valeurs singulières permet d'écrire :

$$\sigma[W_3(j\omega)] \sigma[S_e(j\omega)] = \sigma[W_3(j\omega) \cdot S_e(j\omega)]$$

$$\sigma[W_2(j\omega)] \sigma[R_0(j\omega)] = \sigma[W_2(j\omega) \cdot R_0(j\omega)]$$

$$\sigma[W_1(j\omega)] \sigma[T_s(j\omega)] = \sigma[W_1(j\omega) \cdot T_s(j\omega)] ;$$

et selon la propriété $\max\{\sigma(A), \sigma(B)\} \leq \sigma\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \leq \sqrt{2} \max\{\sigma(A), \sigma(B)\}$

permet d'écrire la condition suffisante :

$$\sigma \begin{bmatrix} W_3(j\omega) \cdot S_e(j\omega) \\ W_2(j\omega) \cdot R_0(j\omega) \\ W_1(j\omega) \cdot T_s(j\omega) \end{bmatrix} \leq 1, \forall \omega ; \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma[W_3(j\omega) S_e(j\omega)] \leq 1, \forall \omega \\ \sigma[W_2(j\omega) R_0(j\omega)] \leq 1, \forall \omega \\ \sigma[W_1(j\omega) T_s(j\omega)] \leq 1, \forall \omega \end{array} \right.$$

il suffit donc d'assurer que :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_3(j\omega) S_e(j\omega) \\ W_2(j\omega) R_0(j\omega) \\ W_1(j\omega) T_s(j\omega) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq 1 \quad (1.31)$$

La synthèse consiste à chercher la plus grande valeur de ω_0 pour laquelle on puisse trouver un

régulateur K , qui stabilise P , et pour lequel on vérifie: $\|F_l(P, K)\|_{\infty} \leq 1$

Hypothèse2. $\text{rang}(D_{12}) = m_u$ et $\text{rang}(D_{22}) = p_y$

✓ Ce sont des conditions suffisantes pour assurer que la commande K(p) est propre.

Hypothèse3. $\text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_u$

✓ Cette hypothèse garantit que le transfert $P_{z \rightarrow u}$ n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

Hypothèse4. $\text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_u$

✓ Cette hypothèse garantit que le transfert $P_{z \rightarrow w}$ n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire

Remarque :

Rq1 : Ces quatre hypothèses doivent être impérativement vérifiées. Pour obtenir des expressions plus simples, on introduit les conditions supplémentaires suivantes :

$$D_{zw}=0 ; D_{zu}^T [C \ z \ D_{zu}] = [0 \ I_{m_u}] ; D_{yu}=0 ; \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} D_{yw}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_y} \end{bmatrix}$$

Alors il existe une loi de commande K(p) solution du problème H ∞ standard si et seulement si :

$$1. \text{ La matrice Hamiltonienne } H1 = \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -\hat{C}_1^T & \hat{C}_1 \\ & -(A^T - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et il existe une matrice symétrique $X_\infty > 0$

$$\text{telle que : } X_\infty (A - B_2 D_{12}^T C_1) + (A^T - B_2 D_{12}^T C_1)^T X_\infty + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty + \hat{C}_1^T \hat{C}_1 = 0$$

X_∞ : Représente la solution de l'équation de Riccati correspondant à la matrice

$$\text{Hamiltonienne H1. Avec : } \hat{C}_1 = (I - D_{12} D_{12}^T) C_1$$

$$2. \text{ La matrice Hamiltonienne } H2 = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -\hat{B}_1^T & \hat{B}_1 \\ & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et il existe une matrice symétrique $Y_\infty > 0$

$$\text{telle que : } Y_\infty (A - B_1 D_{21}^T C_2) + (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T Y_\infty + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty + \hat{B}_1^T \hat{B}_1 = 0$$

Y_∞ : Représente la solution de l'équation de Riccati correspondant à la matrice

$$\text{Hamiltonienne } H_2. \quad \text{Avec : } \hat{B}_1 = B_1(I - D_{21}^T D_{21})$$

Le problème est résolu si :

- i. $X_\infty > 0$ et $Y_\infty > 0$
- ii. Le rayon spectral $\rho(X_\infty, Y_\infty) < \gamma^2$ ou $\rho(\cdot)$ correspond au module de la plus grande valeur propre (rayon spectral).
- iii. $\|F_L(P, K)\| < \gamma$

De plus, l'ensemble des correcteurs $K(p)$ répondant au problème est donné par $K(p) = F_L(J(p), Q(p))$, ou $Q(p)$ est n'importe quelle fonction de transfert stable, de norme H_∞ inférieure à γ { Q est un transfert stable, propre et $\|Q\|_\infty < \gamma$ } et J est donné par

$$J = \left[\begin{array}{c|cc} A + B_2 F + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + ZH(C_2 + \gamma^{-2} D_{12} B_1^T X_\infty) & -ZH & Z(B_2 + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T D_{12}) \\ \hline F & 0 & I \\ \hline -(C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty) & I & 0 \end{array} \right] \quad (1.36)$$

$$\text{ou : } A_\infty = A + B_2 F + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + ZH(C_2 + \gamma^{-2} D_{12} B_1^T X_\infty) \quad (1.37)$$

$$F = -(B_2 X_\infty + D_{12}^T C_1)$$

$$H = -(Y_\infty C_2^T + B_1 D_{21}^T)$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

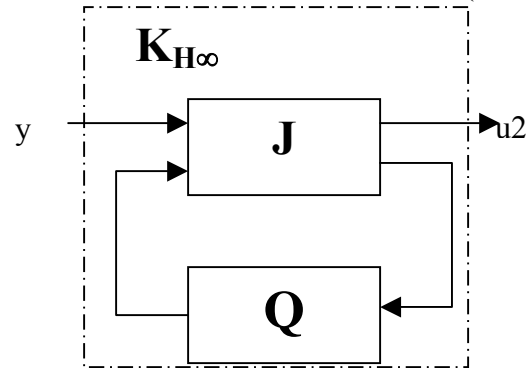


Fig. I.12. Structuration du correcteur H_∞

finalement on peut construire le correcteur par la Transformation Linéaire Fractionnelle (LFT)

$$K = F_L(J, Q) = J_{11} + J_{12} Q (I - J_{22} Q)^{-1} J_{21} \quad (1.38)$$

Un correcteur particulier est le correcteur central, obtenu en prenant $Q = 0$, ce qui donne :

$$K_0 = F_L(J, Q) = J_{11} + J_{12} Q J_{21} \quad (1.39)$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} A + B_2 F + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty & -ZH \\ F & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\infty & -ZH \\ F & 0 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

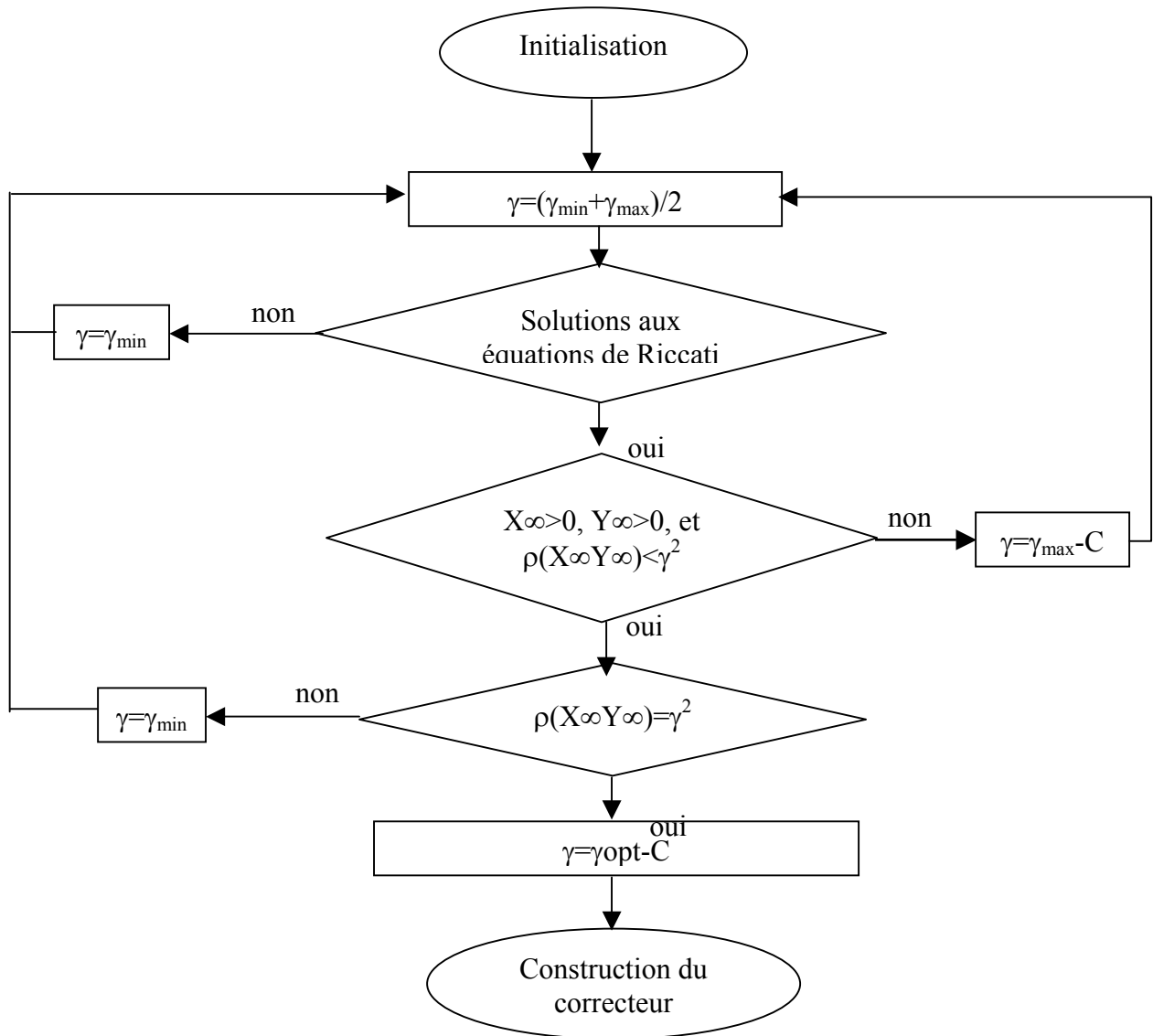


Fig.I.13. Organigramme de calcul du correcteur Hinfini

V. SYNTHÈSE H2 : [10, 14]

1. Introduction :

Soit le système décrit par

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

on pose $D_{zw} = D_{11} = D_{yu} = D_{22} = 0$

(pour des simplifications de calcul)

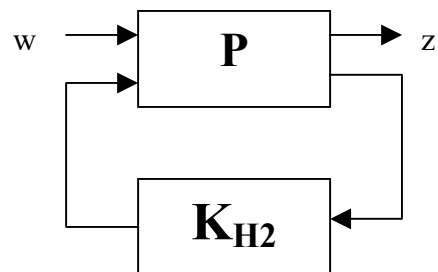


Fig.I.14. Système en boucle fermée avec correcteur H2

Question :

Déterminer un correcteur K_{H2} minimisant une norme H2 du transfert entre les sorties exogènes z et les entrées exogènes w

$$\min_{K \in E} \|T_{zw}\|_2 \quad \text{avec } T_{zw} = LFT(P, K)$$

Note : E est l'ensemble des correcteurs K stabilisant l'interconnexions de manière interne ou ensembles des correcteurs admissibles : $E = \{K \in E^{m \times r} \mid T_{zw}(p) \in RH_\infty\}$

étant donné $\gamma > 0$ et P , déterminer K tel que $\|T_{zw}\|_2 < \gamma$?

2. Algorithme :

Les hypothèses à satisfaire :

Hypthèse1. (A, B_1) et (A, B_2) soient stabilisables ; et (C_1, A) , (C_2, A) soient observables.

Hypthèse2. $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ 1]$ et $[B_1^T \ D_{21}^T]^T D_{21}^T = [0 \ 1]^T$

Hypthèse3. P, K sont rationnelles, réelles et propres.

Hypthèse4. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ sont de rang plein $\forall \omega$

Définissant les deux équations de Riccati algébriques duales :

$$A^T X_2 + X_2 A - X_2 B_2 B_2^T X_2 + C_1^T C_1 = 0$$

$$\text{et } A Y_2 + Y_2 A^T - Y_2 C_2^T C_2 Y_2 + B_1 B_1^T = 0 \quad (1.41)$$

et on pose :

$$F_2 = -B_2^T X_2, \quad L_2 = -Y_2 C_2^T, \quad A_{F2} = A + B_2 F_2, \quad A_{L2} = A + L_2 C_2, \quad C_{1F2} = C_1 + D_{12} F_2, \quad B_{1L2} = B_1 + L_2 D_{21}$$

$$P_c(p) = \begin{bmatrix} A_{F2} & 1 \\ C_{1F2} & 0 \end{bmatrix}, \quad G_f(p) = \begin{bmatrix} A_{L2} & B_{1L2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_2 = A + B_2 F_2 + L_2 C_2 \quad (1.42)$$

Théorème 1 :

L'unique compensateur H2 optimal est donné par :

$$K_{H2}^*(p) = \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & -L_2 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$$\text{et } \gamma^* = \min \|T_{zw}\|_2^2 = \|G_C B_1\|_2^2 + \|F_2 G_f\|_2^2 = \|G_C L_2\|_2^2 + \|C_1 G_f\|_2^2 \quad (1.44)$$

Théorème 2 :

Si ces hypothèses sont vérifiées, $\gamma > 0$ et P étant donnés, l'ensemble de tous les correcteurs $K(p)$ H2 sous-optimaux tels que : $\|T_{zw}\|_2 < \gamma$ sont donnés par :

$$K_{H2} = F_L(K_2, Q) \quad (1.45)$$

$$\text{ou } \|Q\|_2^2 < \gamma^2 - (\|G_C B_1\|_2^2 + \|F_2 G_f\|_2^2) \quad (1.46)$$

$$\text{avec } Q \in RH_2^{m \times p} \quad (1.47)$$

$$K_2 = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_2 & -L_2 & B_2 \\ \hline F_2 & 0 & I_{m2} \\ \hline -C_2 & I_{p2} & 0 \end{array} \right] \quad (1.48)$$

$$\begin{cases} \hat{A}_2 = A + B_2 F_2 + L_2 C_2 \\ F_2 = -B_2^T X_2 \\ L_2 = -Y_2 C_2^T \end{cases} \quad (1.49)$$

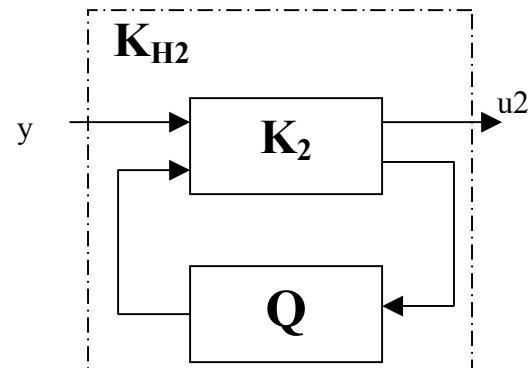


Fig.I.15. Structuration du correcteur H2

VI. CONCLUSION :

L'un des atouts majeurs de la méthode H ∞ est d'offrir la possibilité de construire de façon systématique un critère adapté au cahier des charges considéré, néanmoins, il faut avant tout essayer de rechercher par le plus simple possible, à régler la loi de commande ayant la structure la plus simple. C'est en réalité un véritable outil de conception assisté par ordinateur de correcteur par l'approche fréquentielle il s'agit d'un formidable outil d'investigation et d'étude des performances atteignables sur un système bouclé.

En bref, les étapes des méthodes modernes de synthèse de commande robuste :

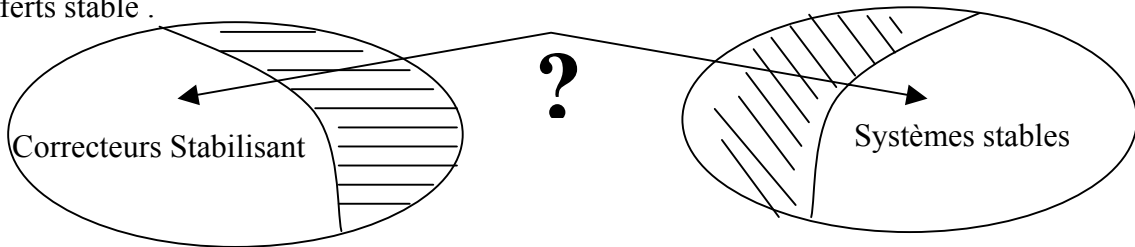
- ✓ Définition d'incertitudes (liées au processus d'identification),
- ✓ Contraintes sur la commande (saturation d'actionneurs, ...),
- ✓ Contraintes de stabilité robuste,
- ✓ Spécification des performances.

CHAPITRE 2

INTRODUCTION A LA PARAMETRISATION DE YOULA

I. INTRODUCTION :

La paramétrisation de Youla est connue pour être l'outil fondamental pour représenter l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné par l'ensemble des systèmes stables ; permet d'établir un lien entre l'ensemble des correcteurs stabilisants un système et l'ensemble de transferts stable .



Ensemble de matrices de transfert
Linéaires invariants dans le temps

Ensemble de système dynamique
linéaire en dimension fini

Cette paramétrisation définit une bijection entre l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné et l'ensemble des systèmes stables . A chaque système stable on peut donc faire correspondre un correcteur stabilisant le système et à chaque correcteur stabilisant on peut faire correspondre un système stable. Le transfert stable associé à chaque correcteur stabilisant représenté par une matrice de transfert stable dans le cas d'un correcteur à plusieurs entrées/sorties est appelé paramètre de Youla, il est normalement représenté par la lettre Q. On considère donc un système LTI , P et on cherche à définir l'ensemble des systèmes LTI qui font que l'interconnexion P*K de la figure II.1. reste bien stable au sens de la stabilité interne , cet ensemble est notée K et s'écrit de la manière suivante : $K = \{K / P * K \text{ stable}\}$

$$\text{Avec } P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad T_{wz} = P * K = \text{LFT}(P, K) = F_L(P, K) = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21}$$

(LFT = Linear Fractional Transformation) ; (F_L :: LFT inférieur)

Représenté par la figure II.1.

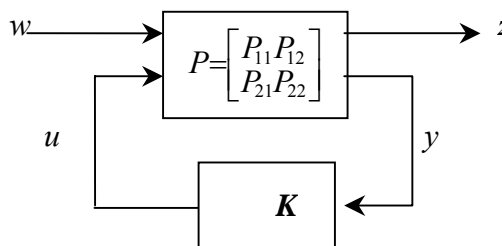


Fig. II.1: Interconnexion P * K

Bien que cet ensemble n'est pas simple à déterminer de manière analytique c'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser une paramétrisation. [7, 9, 15]

II. PRINCIPE DE LA PARAMETRISATION DE YOULA :

L'idée générale de paramétrisation de l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire est née de la constatation suivante : pour un système P stable, l'interconnexion de la figure II.2 reste stable pour tout système Q stable.

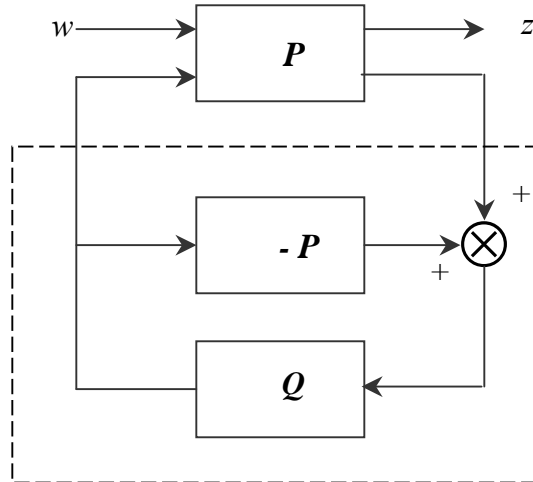


Fig. II.2 : Principe de la paramétrisation de Youla

Il s'agit de paramétrer de manière complète la famille de correcteurs stabilisants pour un système donné. Nous présenterons les concepts en utilisant le formalisme des fonctions de transferts et factorisations co-premières (facilité de présentation). On fera l'hypothèse de départ est que P est stabilisable par u et détectable par y , et que P est strictement propre. Les deux théorèmes suivantes définissent la paramétrisation de Youla ; on considère le système en boucle fermée de la figure II.3 (il convient de noter que le bouclage est positif). [7]

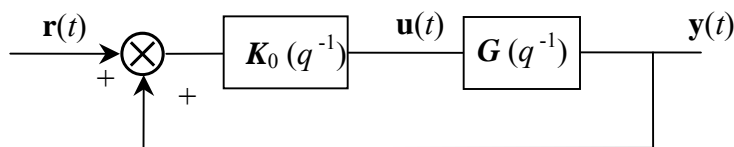


Fig. II.3. : Boucle fermée classique (avec retour positif)

Théorème 1 : [7, 9, 15]

Soit

$$P_{yu} = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (2.1)$$

Des factorisations premières à gauche et à droite de P_{yu} , où M , N , \tilde{M} et \tilde{N} sont des matrices de transfert stables.

$$K_0 = U_0 V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1} \tilde{U}_0 \quad (2.2)$$

Des factorisations premières à gauche et à droite d'un correcteur K_0 stabilisant P :

avec : $U_0, V_0, \tilde{U}_0, \tilde{V}_0$ Sont des matrices de transfert stables.

Si K_0 est un correcteur stabilisant, alors $N, M, U_0, V_0, \tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{U}_0$ et \tilde{V}_0 peuvent être choisies telles que :

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{l'équation de Bezout}) \quad (2.3)$$

Théorème 2 : [7, 9, 15]

En considérant (2.1) et (2.2) telles que (2.3) soit vérifiée, pour toute matrice de transfert stable Q de dimensions adéquates, on définit :

$$U = U_0 + MQ \quad (2.4)$$

$$V = V_0 + NQ \quad (2.5)$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + Q\tilde{M} \quad (2.6)$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0 + Q\tilde{N} \quad (2.7)$$

Alors

$$UV^{-1} = \tilde{V}^{-1} \tilde{U} \quad \text{et} \quad K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1} \tilde{U} \quad \text{est un correcteur stabilisant pour} \quad G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$$

De plus tout correcteur stabilisant il existe des factorisations premières du types (2.4 à 2.7)

Remarques : [15]

- Il important de noter que la factorisation du correcteur initial K_0 (eq. 2.2) avec la condition supplémentaire (2.3) existe toujours.

- La condition (2.3) peut être interprétée comme une condition de stabilité da la boucle fermée par le correcteur initial. En effet, en concluant que :

K_0 stabilise P

Il existe une factorisation co-première à gauche de K_0 telle que :

$$\tilde{V}_0 M - \tilde{U}_0 N = I \quad (2.8)$$

Il existe une factorisation co-première à droite de K_0 telle que :

$$\tilde{M} V_0 - \tilde{N} U_0 = I \quad (2.9)$$

$$P * K = P * J * Q = G * Q \text{ et } G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

avec $G_{22} = 0$ pour la démonstration voir [7, 9]

On déduit donc qu'il est nécessaire d'avoir la propriété $G_{22}=0$. Cette propriété fondamentale exprime que le système G formé par l'interconnexion de P et J (figure II.4) à un transfert rigoureusement « nul » vu du couple entrée/sortie (\tilde{u}, \tilde{y})

3. Propriété 3 :

Interprétation dans l'espace d'état :

Soit une répréhension d'état d'un système G défini sur la figure II.4

$$G = \begin{bmatrix} A_G & B_G & B_{\tilde{u}} \\ C_G & D_G & D_{Gu} \\ C_{\tilde{y}} & D_{\tilde{y}G} & D_{\tilde{y}\tilde{u}} \end{bmatrix} \text{ or } G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Chaque transfert entre w_i et z_i peut être représenté par la fonction de transfert suivante (LFT)

$$G_{ij} = C_j(zI - A_G)^{-1} B_j + D_{ji}$$

alors puisque $G_{22}=0$, la propriété suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} C_{\tilde{y}}(zI - A_G)^{-1} B_{\tilde{u}} = 0 \\ D_{\tilde{y}\tilde{u}} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Cette propriété exprime le fait que les sous-espaces non-commandable et non observables de T sont supplémentaires dans l'espace d'état. Ainsi, elle permet d'obtenir une représentation d'état qui soit simultanément sous forme commandable et observable. Le changement de base correspondant permet d'obtenir le partitionnement suivant avec une matrice d'état sous forme triangulaire par blocs :

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 & B_{11} & B_{21} & B_{\tilde{u}} \\ 0 & A_2 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ \hline C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} & D_{1\tilde{u}} \\ \hline C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} & D_{2\tilde{u}} \\ \hline 0 & C_{\tilde{y}} & D_{\tilde{y}1} & D_{\tilde{y}2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Remarque : [15]

Les matrices D_{ij} de T sont les même que celles du système initial P pour deux raisons :

- La structure particulière du transfert direct de J ne génère aucune transmission directe de w vers z .
- Le changement de base triangalisant n'affecte pas non plus ces transmissions directes.

Corollaire : Tout correcteur stabilisant peut être représenté par un retour d'état avec un observateur et un paramètre de Youla (l'objectif du chapitre suivant).

Cette propriété est intéressante dans le sens où plusieurs correcteurs stabilisants pour le système G avec des structures très différentes peuvent se mettre sous une même représentation grâce au paramètre de Youla.

4. Propriété 4 : Convexité

Cette propriété faite référence à la convexité obtenue avec la paramétrisation de Youla.

On a les deux propriétés suivantes :

L'ensemble des matrices de transfert stables est convexe.

- Le transfert de la boucle fermée est linéaire en Q
- $G * Q = G_{11} + G_{12} Q G_{21}$ (2.16)

Cette propriété nous permet de transformer le problème de synthèse de correcteur (ou de robustification d'un correcteur initial) en un problème de synthèse convexe. Nous verrons dans le chapitre cette « synthèses du correcteur ».

Voyons maintenant le cas particulier de la paramétrisation de Youla quand le système P est stable. Dans ce cas, on peut simplifier la paramétrisation et obtenir une représentation par modèle interne où le paramètre de Youla a un sens "physique".

IV. INTERPRÉTATION POUR UN SYSTÈME STABLE :

On considère ici le cas d'un système stable, mono-entrée/mono-sortie P .

Correcteur à un degré de liberté : [15]

Si le système P est stable, on peut choisir :

$$K_0 = 0$$

$$N = \tilde{N} = G \quad M = \tilde{M} = 1$$

$$U_0 = \tilde{U}_0 = 0 \quad V_0 = \tilde{V}_0 = 1$$

le relation (2.3) est vérifiée et on obtient :

$$U = U_0 + M Q = Q$$

$$V = V_0 + N Q = 1 + G Q$$

A partir de $K_0 = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1} \tilde{U}$,

le correcteur stabilisant s'exprime par :

$$K = Q (I + G Q)^{-1} \quad (2.17)$$

Qui peut être représenté comme indiqué figure II.6.

Dans cette figure, on a ajouté le signal extérieur d , qui représente un bruit de mesure ou une incertitude sur le modèle du système

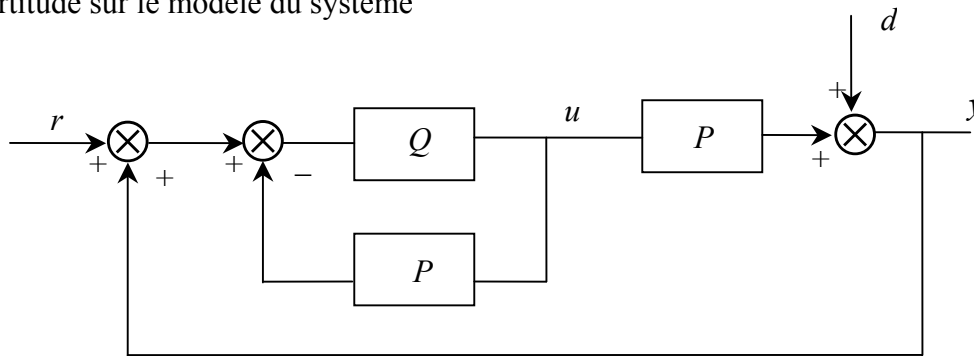


Fig. II.6 : Paramétrisation de Youla pour un système stable

Cette figure peut être modifiée pour obtenir la figure II.7., où l'on voit apparaître la structure d'un correcteur à modèle interne.

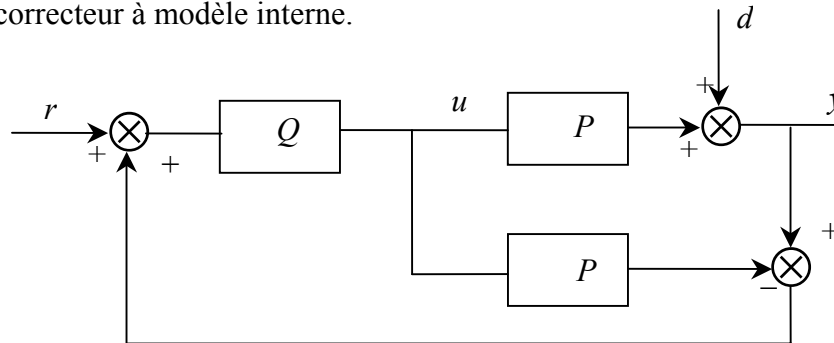


Fig. II.7. : Paramétrisation de Youla pour un système stable

Structure par modèle interne

En cas d'absence d'incertitude ($d = 0$), la sortie du système est annulée par la mise en parallèle du modèle ($-P$), et donc le retour est nul. Le tout fonctionne en boucle ouverte telle que $u = Qr$. Dans ce cas la paramètre de Youla représente le transfert du signal de référence au signal de commande. Comme Q est stable, pour un signal r stable on aura toujours un signal de commande u stable.

V. SPÉCIFICATIONS EN BOUCLE FERMÉE : [15]

1. Motivation de la formulation des spécifications en boucle fermée :

L'intérêt d'avoir une formulation en boucle fermée pour la synthèse du correcteur apparaît lorsque l'on considère des concepts tels que la convexité. En effet, alors que certaines contraintes et spécifications de la boucle fermée sont satisfaites par un ensemble convexe de matrices de transfert en boucle fermée, l'ensemble de correcteurs qui satisfont ces mêmes contraintes et spécifications est rarement un ensemble convexe. Cela veut dire que la recherche de la matrice de transfert optimale pour le problème défini est plus facile que la recherche du correcteur optimal, étant donnée la convexité obtenue dans le cas des matrices de transfert en boucle fermée.

Par exemple, considérons une contrainte qui correspond au respect d'un certain gabarit pour un transfert en boucle fermée, que l'on appellera H_{yd} , pour laquelle deux correcteurs (K_1 et K_2) valident le gabarit. La boucle fermée associée au correcteur $K_3 = \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2$ (où λ est un réel compris entre 0 et 1) peut alors dépasser ce gabarit. En revanche si H_{yd1} et H_{yd2} sont les transferts en boucle fermée correspondant aux deux correcteurs, le transfert $H_{yd3} = \lambda H_{yd1} + (1 - \lambda) H_{yd2}$ (où λ est un réel compris entre 0 et 1) va satisfaire aussi le gabarit.

Si on exprime le problème en fonction du correcteur K , on arrive normalement à un problème d'optimisation non linéaire.

2. Contraintes et critères convexe :[7,15]

Il est important de distinguer, parmi les spécifications d'un problème de commande, les deux notions de contrainte et de critère.

La première est une notion ensembliste : satisfaire une contrainte équivaut à appartenir à l'ensemble des solutions vérifiant une propriété donnée telle que « temps de réponse inférieur à une valeur fixée » ou « réponse à une entrée donnée à l'intérieur d'un gabarit imposé ». Une contrainte sera dite convexe si l'ensemble associé est convexe .

La deuxième est une notion fonctionnelle : le critère est une fonction à valeurs réelles, définie sur un ensemble de correcteurs. Par exemple, un critère d'énergie de commande peut être défini par la fonction qui à tout correcteur associe la norme H_2 de la commande en réponse à un signal donné. Un critère sur la plus grande incertitude permise peut être défini par la fonction qui à tout correcteur associe la norme H_∞ d'un certain transfert bouclé avec l'incertitude. Un critère sera dit convexe si la fonction associée, définie sur l'ensemble des correcteurs, est convexe .

Note : Il s'agit, alors, de chercher un correcteur permettant de minimiser un critère donné (lui-même étant éventuellement le résultat de la combinaison de plusieurs critères) et de satisfaire les contraintes imposées par le cahier des charges.

3. Ensemble de transfert atteignables par des correcteurs stabilisants : [7, 15]

Considérons une structure standard comme celle de la figure II.4 et étudions l'ensemble des matrices de transfert atteignables entre l'entrée w et la sortie z (w et z étant des vecteurs).

Cet ensemble des matrices de transfert atteignables est convexe. De cet ensemble de matrices de transfert, seule nous intéresse la partie pour laquelle le système satisfait la propriété de stabilité interne. Ce sous-ensemble est obtenu par la paramétrisation de Youla, et il est convexe. En effet, le transfert entre l'entrée w et la sortie z peut être écrit sous une forme linéaire en Q :

$$H_{zw} = G_{11} + G_{12}QG_{21} \quad (2.18)$$

et Q appartient à l'ensemble des matrices de transfert stables, qui est d'ailleurs convexe, pour deux transferts H_{zw1} et H_{zw2} , la matrice de transfert définie par

$H_{zw3} = \lambda H_{zw1} + (1 - \lambda)H_{zw2}$ (où $\lambda \in]0, 1[$) est :

$$\begin{aligned} H_{zw3} &= \lambda (G_{11} + G_{12}Q_1G_{21}) + (1 - \lambda)(G_{11} + G_{12}Q_2G_{21}) \\ &= \lambda G_{11} + \lambda G_{12}Q_1G_{21} + G_{11} + G_{12}Q_2G_{21} - \lambda G_{11} - \lambda G_{12}Q_2G_{21} \\ &= \lambda G_{12}Q_1G_{21} + G_{11} + G_{12}Q_2G_{21} - \lambda G_{12}Q_2G_{21} \\ &= G_{11} + G_{12}[\lambda Q_1 + (1 - \lambda)Q_2]G_{21} \\ &= G_{11} + G_{12}Q_3G_{21} \end{aligned}$$

$Q_3 = \lambda Q_1 + (1 - \lambda)Q_2$ appartient à l'ensemble des matrices de transfert stables, car cet ensemble est convexe. On en déduit que H_{zw3} est stable. L'ensemble des matrices de transfert atteignables par des correcteurs stabilisants est donc convexe.

4. Contraintes temporelles :

Il s'agit de contraindre un signal du système bouclé, en réponse à une certaine excitation extérieure, à rester à l'intérieur d'une enveloppe temporelle.

4.1. Dépassement :

$$\phi_{dep}(Q) = \sup_{t \geq 0} (S_i(t) - r(t)) \quad (2.19)$$

$$C_{dep}^\beta = \{Q / \phi_{dep}(Q) < \beta\},$$

Cet ensemble est convexe, et le problème revient à résoudre le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\min[\phi_{dep}(Q) \ / \ Q \in C_{dep}^\beta]$$

4.2. Enveloppe temporelle

Il s'agit de contraindre la réponse temporelle $S_i(t)$ correspondant pour une entrée donnée au fait de rester à l'intérieur d'un gabarit temporel imposé, nous cherchons donc les éléments appartenant à l'ensemble suivant :

$$C_{env} = \{Q \ / \ S_{min}(t) \leq S_i(t) \leq S_{max}(t)\} \tag{2.20}$$

cette contrainte est convexe et peut s'exprimer sous forme

$$C_{env}^\beta = \{Q \ / \ \phi_{env}(Q) \leq 0\}$$

en prenant comme critère convexe

$$\phi_{env}(Q) = \max \left\{ \max_{t \geq 0} (S_i(t) - S_{max}(t)), \max_{t \geq 0} (S_{min}(t) - S_i(t)) \right\}$$

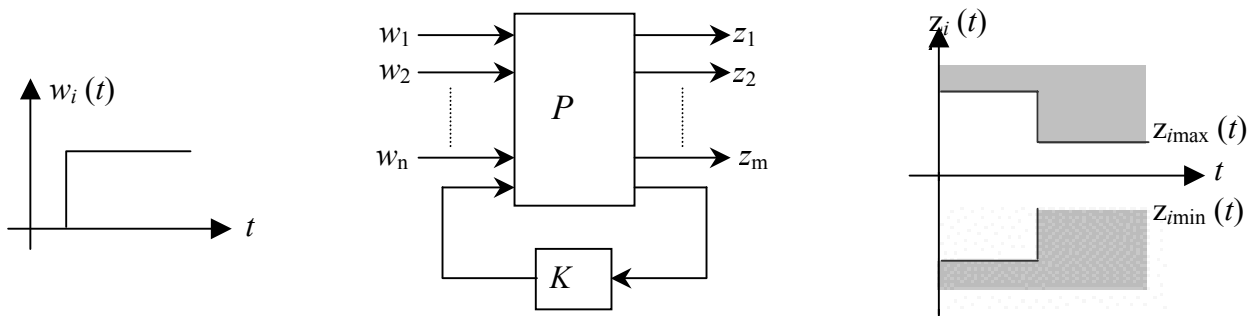


Fig. II.8 : Exemple de contrainte temporelle

4.3. Critère et contrainte définis une norme :

Toute norme est une fonction convexe de son argument, par conséquent il est simple de définir des critères convexes à partir de norme ; nous citons par exemple :

$$\begin{aligned} L_1: \quad Q &\rightarrow \int_0^\infty |S_i(t)| dt \\ L_2: \quad Q &\rightarrow \int_0^\infty [S_i(t)]^p dt \\ L_\infty: \quad Q &\rightarrow \max_{t \geq 0} |S_i(t)| \end{aligned} \tag{2.21}$$

Nous citons en particulier la norme H_∞ qui peut permettre de spécifier un gabarit sur les valeurs singulières d'un transfert. Aussi toute contrainte définie à partir d'une norme $\| \cdot \|$ par $\{Q \ / \ \|S_i(t)\| < \beta\}$ est convexe

5. Contrainte fréquentielle :

Nous traitons dans ce paragraphe une spécification qui englobe un grand nombre de contraintes souvent rencontrées telles que celles utilisées en synthèses par optimisation H^∞ , nous proposons de contraindre le gain d'un transfert entre une entrée w_i et une sortie z_i à être au dessous d'un gabarit $I(\omega)$ donnée, correspond généralement aux objectifs d'atténuation dans la bande de fréquences utiles.

L'ensemble des valeurs des paramètres de Youla correspondant aux fonctions de transfert vérifiant cette contrainte est convexe, il peut s'écrire sous la forme :

$$\{Q \mid |T_i(j\omega)| < I(\omega), \forall \omega\} \quad (2.22)$$

Cette contrainte peut s'appliquer au suivi de consigne, en effet notons $e=w-y_m$, le signal d'erreur entre la consigne w et la sortie mesurée y_m . Pour minimiser cette erreur il faut que le transfert entre w et e appelé fonction de sensibilité, soit inférieure à un certain gabarit fréquentiel, note que e (respectivement y_m) doit alors figurer dans le vecteur des sorties régulées Z (respectivement pour le vecteur des entrées) lors de la mise sous la forme standard (système augmenté).

6. Problème d'optimisation avec le paramètre de Youla: [7, 9, 15]

Le problème étudié ici consiste à trouver un correcteur qui minimise un critère donné (lui-même étant éventuellement le résultat de la combinaison de plusieurs critères) tout en satisfaisant les contraintes imposées. Le problème peut s'écrire comme suit :

$$\min_{\{H \in C_i\}_{i=1,2,\dots,m}} \phi(H) \quad (2.23)$$

ϕ est la fonction ou le critère à minimiser et C_1, C_2, \dots, C_m sont les m contraintes à satisfaire. On arrive à un problème d'optimisation convexe. Chaque contrainte est satisfaite par un sous-ensemble convexe de transferts, donc le sous-ensemble de transferts satisfaisant toutes les contraintes, s'il existe (problème de faisabilité), sera aussi convexe. Au sein de ce sous-ensemble, il faut minimiser la fonction ϕ qui est, à son tour, convexe dans ce sous-ensemble.

Ces critères et contraintes peuvent être spécifiés en fonction du paramètre de Youla sur la forme :

$$\min_{\{Q \in C_i\}_{i=1,2,\dots,m}} \phi'(Q) \quad (2.24)$$

où ϕ indique le critère fonction du paramètre de Youla et C_i les ensembles paramétrés par le paramètre de Youla qui vérifient les contraintes fixées. On est donc en présence d'un problème d'optimisation convexe où il faut trouver le paramètre de Youla (Q) qui tout en satisfaisant les contraintes spécifiées minimise le critère. Ce paramètre appartient à l'ensemble des matrices de transfert stables, ensemble de dimension infinie.

Aussi le but, est de montrer qu'une fonction sur la norme d'une matrice de transferts est convexe

Soit la fonction : $\phi(H)=\|H\|$

On suppose H_1 et H_2 deux matrices de transfert quelconques et $0 \leq \lambda \leq 1$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda H_1 + (1 - \lambda)H_2) &= \|\lambda H_1 + (1 - \lambda)H_2\| \\ &\leq \|\lambda H_1\| + \|(1 - \lambda)H_2\| \\ &= \lambda\|H_1\| + (1 - \lambda)\|H_2\| \\ &= \lambda\phi(H_1) + (1 - \lambda)\phi(H_2) \end{aligned}$$

donc la fonction ϕ est convexe.

VI. CONCLUSION

La Youla-Paramétrisation ou Q-paramétrisation revient à procéder à un changement de variable de K en Q rendant affine par rapport à l'inconnue Q . La paramétrisation de Youla, qui paramétrise tous les correcteurs stabilisants d'une structure asservie, permet d'exprimer les critères et les contraintes de type fréquentiel ou temporel par des fonctions convexes en le paramètre de Youla.

On a profité des propriétés ci-dessus pour présenter une méthodologie qui permet d'obtenir une représentation des systèmes interconnectés G , J et Q de la boucle fermée $F_L(P*K)$ tels qu'ils sont définis par la LFT $G*J*Q$ sans faire oublier qu'il n'a pas d'unicité de la paramétrisation de Youla. Chercher à minimiser la norme H_{∞} de $F_L(P,K)$ devient un problème convexe et permet d'obtenir une solution qui est la solution optimale du problème. La paramétrisation de Youla nous permet d'accéder à tous les correcteurs K qui stabilisent la boucle fermée via le paramètre Q . Ainsi il existe un correcteur satisfaisant le cahier des charges on le trouvera par optimisation convexe.

CHAPITRE 3

L'OBSERVATEUR / RETOUR D'ETAT

I. INTRODUCTION :

De nombreuses méthodes de commande des processus utilisent le principe du retour d'état (commande optimale, découplage, placement de pôles, . . .). Comme dans la plupart des cas, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrée et de sortie, il est nécessaire, à partir de ces informations, de reconstruire l'état du modèle choisi pour élaborer la commande. Un reconstruteur d'état ou estimateur est un système ayant comme entrées les entrées et les sorties du processus réel et dont la sortie est une estimation de l'état de ce processus.

II. UTILISATION EN BOUCLE FERMÉE :

En supposant que tout soit accessible, pour réaliser une commande à retour de sortie, on peut donc utiliser un observateur d'état et d'effectuer une commande à retour d'état en utilisant l'état observé (état de l'observateur) figure .III.3 : [7, 16]

$$u(t) = Gv(t) - K\hat{x}(t) ; \quad K : \text{gain de retour d'état}$$

G : gain pré bouclage qui est calculé en général en fonction du gain statique désiré

On peut écrire les équations d'état :

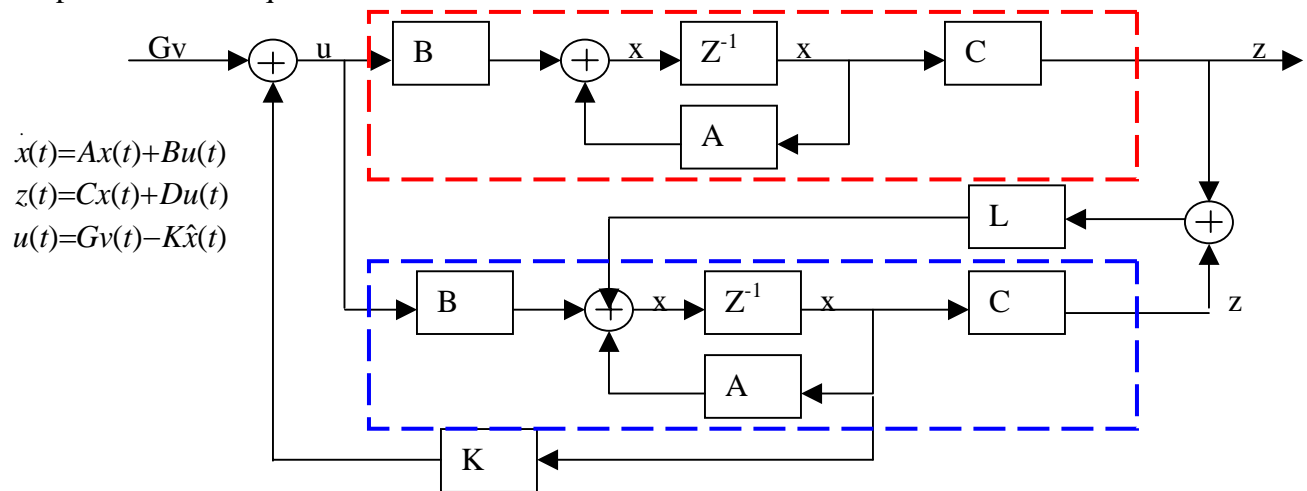


Fig.III.1. Structure de commande à retour d'état observé

on obtient en éliminant u(t) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BG \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \tag{3.1}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} C-DK & DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + DGv(t)$$

La matrice d'évolution est bloc triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs propres des blocs de la diagonale (A-BK) et (A-LC). Les dynamiques de retour d'état d'une part, et de l'observateur d'autre part sont séparés : on peut régler les valeurs propres de la commande par la matrice de retour d'état K, de façon indépendante des valeurs propres de l'observateurs que l'on règle par le choix de la matrice L ; c'est le principe de la séparation.

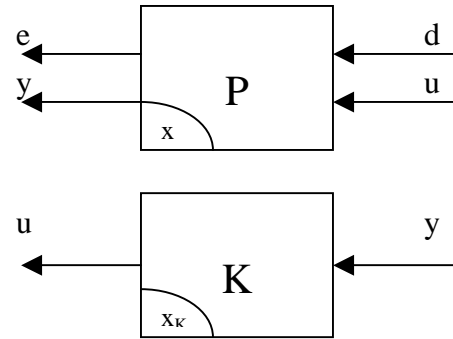
III. REPRESENTATION D'ETAT DU SYSTEME EN BOUCLE FERMEE :

soit :

$$p \begin{cases} \dot{x} = AX + B_1d + B_2u \\ e = C_1x + D_{11}d + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}d \end{cases} \quad \text{d'ordre } n$$

et K cherché dynamique est donnée par

$$K: \begin{cases} \dot{x}_K = A_Kx_K + B_Ky \\ u = C_Kx_K + D_Ky \end{cases} \quad \text{d'ordre } n_K$$



le système en boucle fermée est donnée par :

en assemblant les deux équations et en éliminant u on aura :

$$T: \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_K \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2D_KC_2 & B_2C_K & B_1 + B_2D_KD_{21} \\ B_KC_2 & A_K & B_KD_{21} \\ C_1 + D_{12}D_KC_2 & D_{12}C_K & D_{11} + D_{12}D_KD_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \\ d \end{bmatrix}$$

d'ordre $n+n_K$ (3.2)

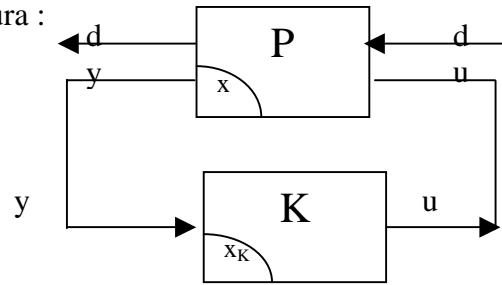


Fig.III.2. Représentations des différents système MIMO

IV. CAS REGULATEUR / OBSERVATEUR :

Considérons maintenant, ce système P présenté sur la figure suivante :

$$p \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1d + B_2u \\ e = C_1x + D_{11}d + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}d \end{cases}$$

u : commande ; d : perturbation ; e : erreur ; y : sortie mesurée

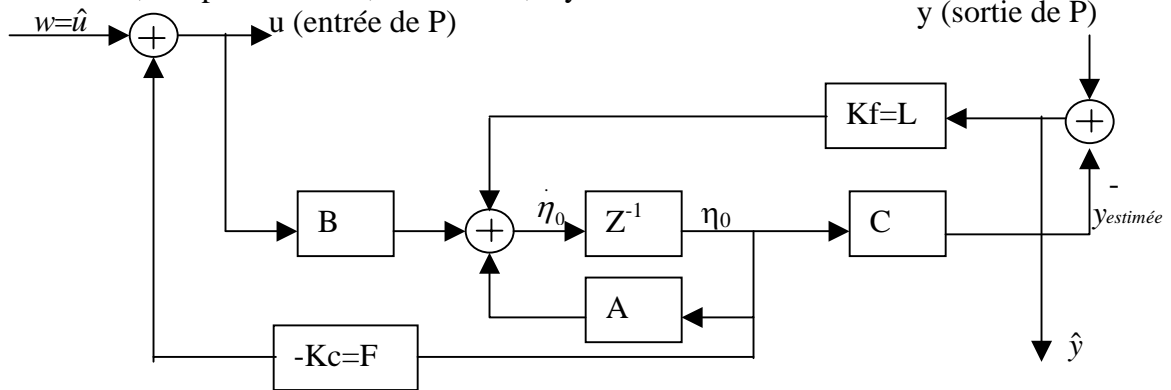
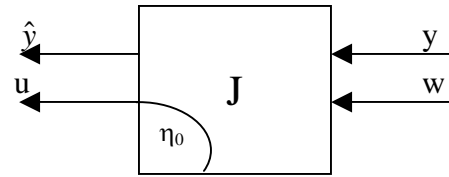


Fig.III.3. Structure d'état de l'observateur/ régulateur

$$\begin{aligned}
 u &= \hat{u} + F\eta_0 \\
 \hat{y} &= -y + C_2\eta_0 \quad ; \text{ erreur de prédiction} \\
 \dot{\eta}_0 &= A\eta_0 + Bu + L\hat{y}
 \end{aligned}$$



après substitutions en éliminant u on obtient :

$$J : \left\{ \begin{aligned} \dot{\eta}_0 &= (A + B_2F + LC_2)\eta_0 - Ly + B_2\hat{u} \\ u &= F\eta_0 + \hat{u} \\ \hat{y} &= C_2\eta_0 - y \end{aligned} \right. \quad (3.3)$$

alors J est donnée par : $J = \left[\begin{array}{cc|cc} A+B_2F+LC_2 & -L & B_2 & \\ \hline F & 0 & I & \\ \hline C_2 & -I & 0 & \end{array} \right]$ l'ordre de J n_j égal à l'ordre du système P :

n=n_j (ordre nominal)

Note : Si on pose $u = \hat{u} - (-Kc)\eta_0$ et $z = y - y_{estimée}$ (changement de signe)

le structure de J est : $J = \left[\begin{array}{cc|cc} A-B_2F-LC_2 & L & B_2 & \\ \hline -F & 0 & I & \\ \hline -C_2 & I & 0 & \end{array} \right]$ (3.4)

V. CAS INTRODUCTION DE LA PARAMETRISATION DE YOULA Q AVEC REGULATEUR /OBSERVATEUR :

Soit le système figurant sur le schéma suivant :

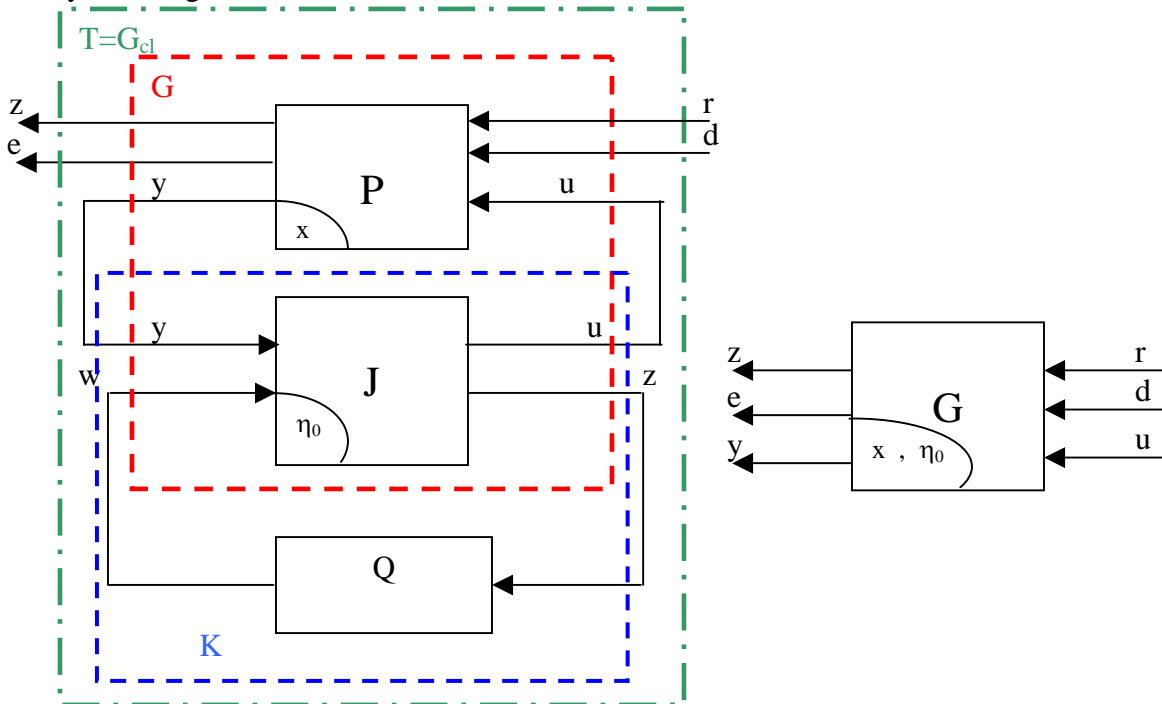


Fig.III.4. La paramétrisation de Youla et régulateur /observateur

En assemblant les deux équations correspondantes aux deux systèmes d'interconnexion P et J et éliminant u on aura :

$$G = \begin{bmatrix} A & B_2 F & B_1 & B_2 \\ -LC_2 & A+B_2 F+LC_2 & -LD_{21} & B_2 \\ \hline C_1 & D_{12} F & D_{11} & D_{12} \\ -C_2 & C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

on peut vérifier la 3^{ème} propriété de Youla ou $G_{22}(p)=0$:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow G_{22} = \begin{bmatrix} A & B_2 F & B_2 \\ -LC_2 & A+B_2 F+LC_2 & B_2 \\ -C_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+LC_2 & 0 & 0 \\ -LC_2 & A+B_2 F & B_2 \\ -C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow G_{22}(p)=0 \quad (3.6)$$

Le transfert en boucle fermée entre $T_{d \rightarrow e}$ est une fonction affine en paramètre libre Q.

Selon la propriété de Hurwitz et prend $v = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}$ Et on aura :

$$VG V^{-1} = \begin{bmatrix} A-B_2 F & B_2 F & B_1 & B_2 \\ 0 & A-LC_2 B_1 & -FD_{21} & 0 \\ \hline C_1-D_{12} F & D_{12} F & D_{11} & D_{12} \\ 0 & C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 & B_{11} & B_{\hat{u}} \\ 0 & A_2 & B_{12} & 0 \\ \hline C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ 0 & C_{\hat{y}} & D_{\hat{y}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Cette équation est identique a celle trouvée dans §.III.3. de la paramétrisation de Youla (2.15).

VI. SYNTHESE Q-PARAMETRISATION ET REGULATEUR / OBSERVATEUR :

On constaté bien que la propriété de Youla est vérifiée $G_{22}=0$, si on cherche à établir les relations entre G_{11} et G_{12} et G_{21} et la dynamique de la boucle fermée ; alors le transfert en boucle fermée est linéaire en Q : $T=G_{cl}=G_{11}+G_{12}QG_{21}$

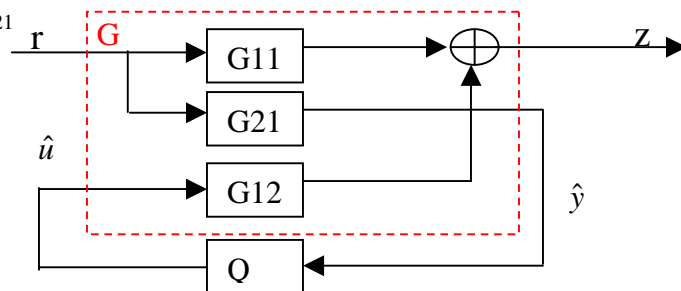


Fig.III.5. Réécriture de la paramétrisation de Youla

Si on considère le correcteur initial (J=Kini) sous la forme « retour d'état+observateur), on a montré qu'il est possible de le paramétrer à l'aide de Q. [15]

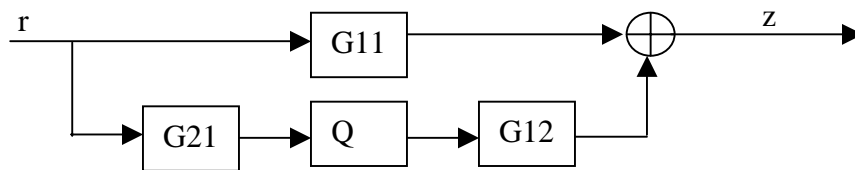


Fig. III.6. Réécriture de la paramétrisation de Youla (2)

Partitionnons P de la façon suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \text{ en supposant que P est stable, et } D_{22}=0, \text{ on écrit la représentation d'état du}$$

correcteur initial

$$k_{ini} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC_2 - B_2F)\hat{x} + Ly \\ u = -F\hat{x} \end{cases} \quad \text{d'ou} \quad k_{ini} = J = -F(zI - A + B_2F + LC_2)^{-1}L \quad (3.8)$$

il s'agit maintenant de modifier le correcteur "retour et observateur" afin de faire apparaître les signaux \hat{u} et \hat{y} , tout en assurant $T_{\hat{y} \rightarrow \hat{u}}$ nul. Une solution de prendre pour e l'erreur de prédiction $y - y_{estimée}$ et en ajoutant \hat{u} à la commande $-F\hat{x}$, cette modification du correcteur est représentée par la figure suivante :

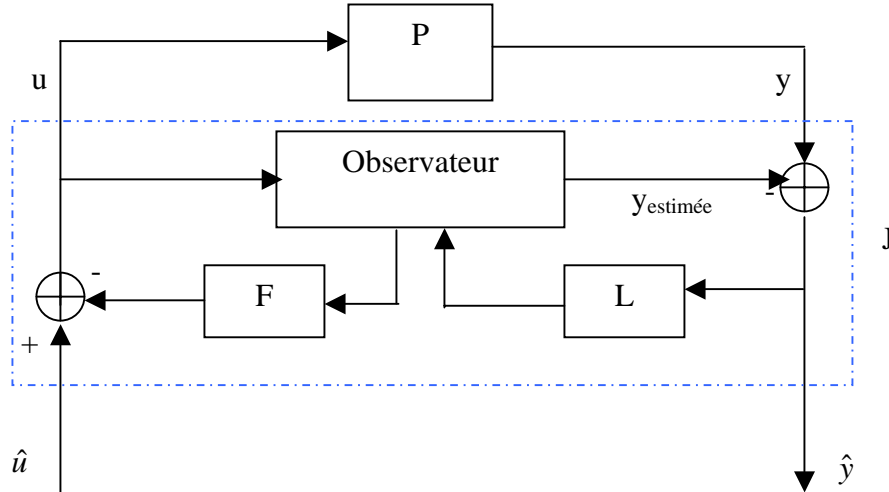


Fig. III.7. Structure dus système J d'interconnexion

Nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0 = (A - B_2F - LC_2)\hat{x}_0 - Ly + B_2\hat{u} \\ u = -F\hat{x}_0 + \hat{u} \\ \hat{y} = -C_2\hat{x}_0 + y \end{cases} \quad (3.9)$$

Il ne reste qu'à connecter le paramètre de synthèse Q permettant de paramétrer l'ensemble des boucles fermées stables.

L'approche présentée et utilisée est une méthode directe se basant sur une structure de correcteur de type retour d'état estimé. Il suffit d'écrire la représentation d'état de la boucle fermée avant de la connections de Q :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B_2F \\ LC_2 & A - LC_2 - B_2F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ LD_{21} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \hat{u} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 & -D_{12}F \\ C_2 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \hat{u} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad T = \left[\begin{array}{cc|cc} A & -B_2F & B_1 & B_2 \\ LC_2 & A - LC_2 - B_2F & LD_{21} & B_2 \\ \hline C_1 & -D_{12}F & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & -C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

on établit les transferts G_{11}, G_{21} et G_{12} , on est donc capable d'exprimer l'ensemble des transferts en boucle fermée $T_{w \rightarrow z}$ en fonction de Q puisque $T_{w \rightarrow z} = G_{11} + G_{12} Q G_{21}$.

Une fois que l'on a obtenu Q par optimisation convexe, il s'agit de revenir à K ; pour cela on cherche $K(Q)$. D'où on distingue deux cas de la Q -paramétrisation Q Statique et Q Dynamique, notre travail est basé sur le premier cas.

Q : Statique :

La structure de l'observateur / régulateur et Q -paramétrisation de Youla est donnée sur le schéma suivant :

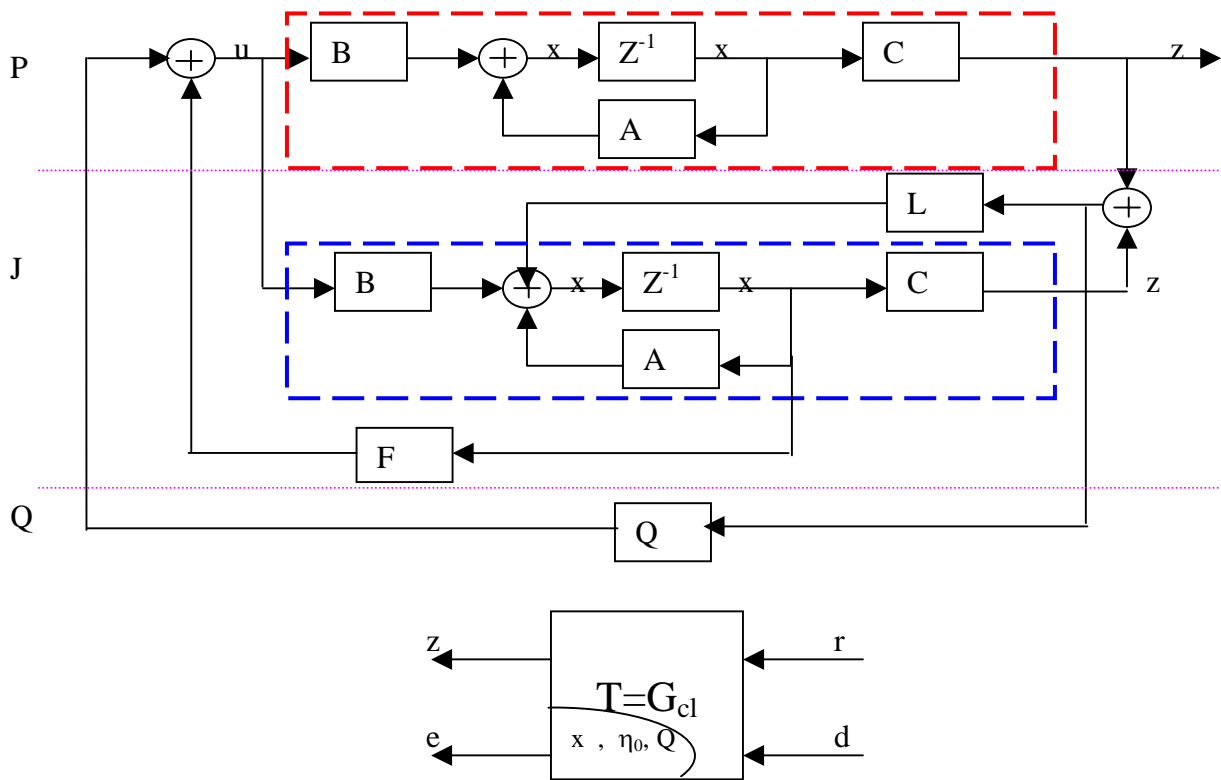


Fig. III.8. Structure régulateur /observateur avec Q -paramétrisation de Youla statique

D'où la représentation d'état en boucle fermée est donnée par :

$$T = G_{cl} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 + B_2 Q C_2 & B_{11} + B_2 Q D_{21} & B_{11} + B_{i1} Q D_{\hat{y}2} \\ 0 & A_2 & B_{12} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} + D_{12} Q C_2 & D_{11} + D_{12} Q D_{21} & D_{12} + D_{i1} Q D_{\hat{y}2} \\ C_{21} & C_{22} + D_{2i} Q C_{\hat{y}} & D_{21} + D_{2i} Q D_{\hat{y}1} & D_{22} + D_{2i} Q D_{\hat{y}2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

CHAPITRE 4

L'OPTIMISATION CONVEXE SOUS CONTRAINTES LMI

I. INTRODUCTION :

Les problèmes d'optimisation ont été évoqués comme une classe générale des problèmes mathématiques permettant l'étude des propriétés d'un modèle. Les problèmes d'optimisation convexe apparaissent comme sous classe des problèmes d'optimisation (faciles) ; l'optimisation convexe sous contrainte LMI apparaît actuellement comme une des plus larges classes d'optimisation convexe pour laquelle on dispose d'algorithmes de résolution efficace proposés dans les logiciels de calcul scientifique généraux comme Matlab et Scialb et qui a eu d'importantes applications en science de l'ingénieur. De nombreux problèmes d'ingénierie se formulent comme des problèmes d'optimisation pour lesquels on ne dispose pas d'algorithmes de résolution efficace. Cependant, un certain nombre d'entre eux peuvent être réécrits de façon équivalente comme des problèmes d'optimisation sous contrainte LMI alors on est ramené à des problèmes qu'il est possible de résoudre efficacement en utilisant les logiciels actuellement disponibles.

Dans ce chapitre on va essayer de répondre à la question comment transformer un problème d'optimisation en un problème d'optimisation équivalent sous contraintes LMI ?; de définir les outils et les techniques pour le reformuler sous forme des inégalités matricielles et donner des exemples comment linéariser (rendre les inégalités affines) ces inégalités en utilisant des outils connus et les techniques de l'ingénieur mathématicien. On va aussi présenter les solveurs de LMI de la boîte de commande LMI-Tools sous Matlab. Finalement on va donner les caractérisations matricielles pour les trois critères les plus utilisés dans le domaine d'automatique H_2 , H_∞ , et α -stabilité.

II. OPTIMISATION LMI :

1. Définition (Inégalité Matricielle Affine) :

On appelle inégalité matricielle affine (ou linéaire et en anglais Linear Matrix Inequality notée LMI) le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques F_i , $i = 1..n$, trouver les réels x_i , $i = 1..n$ tels que

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n > 0$$

$$\text{Or } F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0 \quad (4.1)$$

Avec : $x = [x^1, \dots, x^n]^T \in \mathbb{R}^n$ appelé vecteur de décision ou vecteur d'optimisation

F_i : sont n matrice symétrique données de $\mathbb{R}^{n \times n}$

2. Problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI : [3, 4, 18, 19]

soit $C \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x)$

alors un problème d'optimisation convexe s'écrit :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\xi) \\ \xi \in & C \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $C = \{ \xi \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T F(\xi) x \geq 0 \}$

or $C = \{ \xi \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^T F(\xi) x > 0 \}$

Avec :

☞ $F(\xi) = F_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i F_i$

☞ ξ : vecteur de décision ou vecteur d'optimisation ; $\xi \in \mathbb{R}^m$

☞ F_i : sont n matrice symétrique données de $\mathbb{R}^{n \times n}$

☞ $C \subset \mathbb{R}^n$: l'ensemble des contraintes

☞ f ; fonction de coût ou c'est l'objectif

Cette contrainte est appelée contrainte Inégalité Matricielle Affine ou simplement contrainte LMI

3. Notations :

1. $F(\xi) > 0$ (≥ 0) , le symbole $>$, (\geq) signifie définie positive (semi définie positive)

{rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T F(x) x > 0 \Leftrightarrow$ les valeurs propres de $F(x)$ sont strictement positives}

2. La valeur de ξ pour laquelle le minimum est atteint est appelée ξ^* noté $\xi^* = \operatorname{argmin}(f(\xi))$

$$\xi \in C$$

4. Remarque :

1. Quand $C = \mathbb{R}^m$, on parle de problème d'optimisation sans contrainte sinon de problème d'optimisation sous contraintes.

2. Un problèmes d'optimisation convexe est dit convexe si :

condition de Pb convexe n°.1 : f est une fonction convexe

condition de Pb convexe n°.2 : C est convexe

Dans ce cas-là, quelque soit le point initial x_0 , les algorithmes convergent vers le minimum global.

5. Propriétés :

↗ L'ensemble $C = \{x \in \mathbb{R}^m, / F(x) > 0\}$ est convexe ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe

↗ Un système de plusieurs LMIs est une LMI :

Soient :

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^m, / Q(x) > 0\}$$

$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^m, / P(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q(x) > 0 \\ P(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q(x) & 0 \\ 0 & P(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.3)$$

Alors l'intersection de deux domaines de contraintes est défini par : $C_{1 \cap 2} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \begin{bmatrix} Q(x) & 0 \\ 0 & P(x) \end{bmatrix} > 0 \right\}$

6. Corollaire :

Cette propriété découle du fait que les valeurs propres d'une matrice diagonale par bloc sont constituées par les valeurs propres des matrices sur la diagonale.

III. LES OUTILS TECHNIQUES POUR LA FORMULATION LMI :

Ces outils permettent d'exprimer des problèmes d'analyse ou de commande de système d'optimisation sous contraintes LMI. En effet la mise sous forme LMI d'un problème d'optimisation consiste dans un premier temps à traduire les contraintes par des inégalités matricielles que l'on tente ensuite de rendre affine en fonction des variables d'optimisations. [7, 18, 19, 20, 21, 22]

1. Lemme de Schur :

Le complément de Schur ou le Lemme de Schur est un outil fondamental dans le maniement des inégalités matricielles ; en effet, il permet dans certains cas de mettre sous forme LMI des contraintes non linéaires.

Définition :

Soient les matrices symétriques $(Q, S) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ et $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Alors les deux propositions sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & \checkmark \quad Q > 0 \text{ et } S(x) - R(x)T A(x) - 1R(x) > 0 \\ & \checkmark \quad \begin{bmatrix} Q(x) & R(x) \\ R^T(x) & S(x) \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

2. Lemme d'élimination :

Définition :

Soient trois matrices $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$ $V \in \mathbb{R}^{n \times q}$

alors les trois problèmes suivants sont équivalant :

$$\begin{aligned} & \checkmark \quad \exists K \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad G + UKV^T + VK^T U^T < 0 \\ & \checkmark \quad \begin{cases} U_{\perp}^T G U_{\perp} < 0 \\ V_{\perp}^T G V_{\perp} < 0 \end{cases} \\ & \checkmark \quad \exists \sigma \in \mathbb{R}, \quad / \quad \begin{cases} G - \sigma U U^T < 0 \\ G - \sigma V V^T < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

\checkmark U_{\perp} et V_{\perp} sont les compléments orthogonaux des matrices U et V respectivement,

{ rappel : le complément orthogonal d'une matrice U est la matrice $U_{\perp} \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$ tel que $U_{\perp}^T U = 0$ et $\text{rang}[U \quad U_{\perp}] = n$ }

3. Lemme S-procedure :

Définition :

Considérons les matrices $T_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $i=0 \dots k$ et les formes quadratiques associés :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad F_i(u) = u^T T_i u$$

alors la proposition (i) implique la proposition (ii) :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \exists \tau_i \in \mathbb{R}_+ / \quad F_0(u) - \sum \tau_i F_i(u) > 0 \\ \text{(ii)} \quad & F_0(u) > 0 \text{ pour tout } u \neq 0 \text{ tel que } \forall i \in I, \quad F_i(u) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Quand $k=1$, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes s'il existe un u_0 tel que : $F_1(u) > 0$

Il est de plus possible d'obtenir l'équivalence des deux propositions lorsque les formes quadratiques F_i sont des intégrales quadratiques.

4. Lemme corollaire de la S-procédure :

C'est la version matricielle de la S-procédure :

Soient $A=A^T$, $B, C, D, U=U^T, V, W=W^T$ des matrices réelles de taille compatibles telles que :

- ✓ C est de rang plein
- ✓ La matrice $\begin{bmatrix} U & V \\ V^T & W \end{bmatrix}$ possède une valeur propre positive.

Alors les propositions (i) et (ii) sont équivalentes :

$$(i) \begin{bmatrix} A-C^TWC & B-C^TV-C^TWD \\ B^T-V^TC-D^TWC & -U-D^TV-V^TD-D^TWD \end{bmatrix} > 0$$

$$(ii) \forall \Delta \begin{bmatrix} \Delta & \\ & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U & V \\ V^T & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{cases} \det(I-D\Delta) \neq 0 \\ A+B\Delta(I-D\Delta)^{-1}C+C^T(I-D\Delta)^{-T}\Delta^TC^T > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

5. Changement de variable sur x

6. Introduction des variables supplémentaires (ou variables bidons)

7. Modification par congruence :

Soient les deux matrices $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ and $\Pi \in \mathbb{C}^{n \times m}$ si $A > 0$ alors $\Pi^T A \Pi > 0$ (4.8)

Un exemple sur ce critère est défini dans §.II. chapitre d'application.

IV. MISE SOUS FORME DE PROBLEME D'OPTIMISATION LMI : [17]

Un LMI est une contrainte d'affinage sur les variables de conception. Des caractéristiques atténuation telles que le placement de régional de pôles , la stabilité robuste, l'exécution LQG, ou de RMS gain peuvent être exprimé comme LMIs. Par exemple une inégalité de Lyapunov est un LMI exprimant la stabilité. Combinant ces caractéristiques définit un problème multiobjectif de conception qui peut être résolu numériquement par l'intermédiaire de l'optimisation convexe .

Pour résoudre un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI, on se ramène à un des trois problèmes suivant :

1. Problème de faisabilité :

Définition :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } x \in C \subset \mathbb{R}^n \\ &\text{tel que } F(x) > 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le problème est faisable si $C \neq \emptyset$ il existe un ensemble non vide des x vérifiant l'inégalité $F(x) > 0$.

[21]

Note. Sous Matlab, la recherche d'une solution globale (à une tolérance bien déterminée) est assurée par la fonction **feasp**.

Note importante :

Il est difficile d'établir un compromis entre les demandes (le cahier charge de l'automaticien), il est souhaitable de pouvoir :

- ✓ Poser un cahier de charge faisable
- ✓ Chiffrer les limites de performance atteignable par le système
- ✓ Analyser la faisabilité d'un cahier de charge donné
- ✓ Etudier les performances entre les différentes demandes
- ✓ Optimiser les performance

On conclut cette spécification par ce organigramme

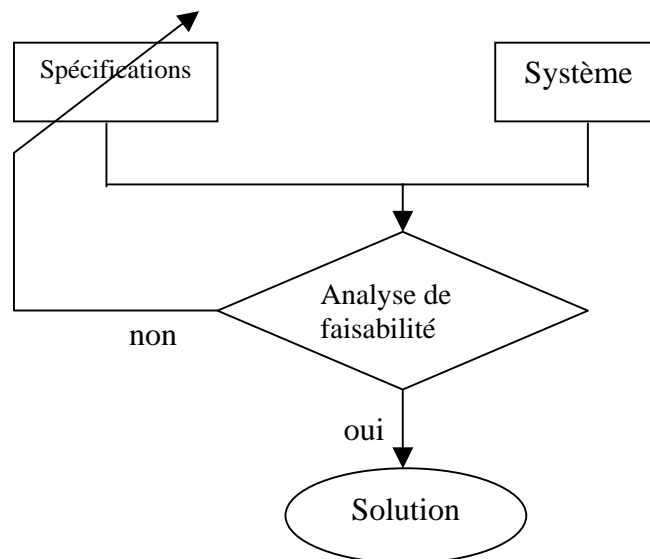


Fig.IV.1. Organigramme de teste de faisabilité

2. La minimisation d'une fonction de coût linéaire :

Définition :

On cherche à minimiser un objectif linéaire sous contraintes LMI

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x \\ & x \in \mathbb{R}^m / F(x) > 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Où C^T est un vecteur ligne donné. [17, 21]

Note. Sous Matlab, la recherche d'une solution globale (à une tolérance bien déterminée) est assurée par la fonction **mincx**

3. Minimisation de valeur propre généralisé

Définition :

On cherche à minimiser la plus grande valeur propre généralisée du système $(P(x), Q(x))$ sous la contrainte LMI $R(x) > 0$, c.à.d.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad \lambda \\ \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m \\ \text{contraint par} \quad \lambda P(x) - Q(x) > 0 \\ \quad \quad \quad P(x) > 0 \\ \quad \quad \quad Q(x) > 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Autre écriture du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad \lambda_{\max}[P(x), Q(x)] \\ \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m \\ \text{contraint par} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & P(x) > 0 \\ & Q(x) > 0 \end{aligned}$$

Propriété :

C'est un problème d'optimisation quasi convexe car on cherche le minimum d'une fonction de coût quasi convexe ($f(x) = \lambda_{\max}(P(x), Q(x))$) pour la variable de décision x appartenant à un ensemble convexe défini par les contraintes $P(x) > 0$ et $Q(x) > 0$. [7, 17, 21]

Note. Sous Matlab, la recherche d'une solution globale est assurée par la fonction **gevp**.

On peut tirer d'après les trois cas de résolution par LMI la conclusion suivantes : la solution par la minimisation d'une fonction coût donne une solution globale par contre les deux autres solutions sont des solutions locales.

V. FORMULATION DE QUELQUES CRITERE :[2, 7, 17, 18, 19, 20, 21, 22]

1. Formulation de la norme H_∞

1.1. Caractérisation matricielle :

Un système discret (A, B, C, D) est stable et admet une norme H_∞ inférieure à un niveau $\gamma > 0$ ssi $\exists P = P^T > 0$ telle que :

$$\|C(zI - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P^{-1}A & B & 0 \\ A^T & -P & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -\gamma I & D^T \\ 0 & C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.13)$$

Il y a d'autres façon de le formuler :

structure 1 :

$$\begin{aligned} P = P^T > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

structure 2 :

$$\begin{aligned} P = P^T > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & \gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

structure 3 :

$$\begin{aligned} P = P^T > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA & B & PC^T \\ B^T & -\gamma I & D^T \\ CP & D & \gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

1.2. Synthèse H_∞ :

1.2.1. Synthèse H_∞ par retour d'état :

Soit le système suivant:

{ Pour des raisons de simplification des calculs on $C_y=I$, $D_{yw}=D_{yu}=0$ }

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+B_w w(t)+B_u u(t) \\ z(t)=C_z x(t)+D_{zw} w(t)+D_{zu} u(t) \\ y(t)=x(t) \end{cases}$$

Question : on recherche une loi de commande par retour d'état ($K \in \mathbb{R}^{p \times n}$) telle que $u=Kx(t)$ et assure :

1. Le système en boucle fermé est stable
2. La norme H_∞ du système en boucle fermé $\|T_{w \rightarrow z}\|_\infty < \gamma$

Le système en BF admet pour équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A+B_u K)x(t)+B_w w(t)=A_{cl} x(t)+B_{cl} w(t) \\ z(t) &= (C_z+D_{zu} K)x(t)+D_{zw} w(t)=C_{cl} x(t)+D_{cl} w(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ce système est stable ssi $\exists P$ telle que (on utilise la structure 02):

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} + C_{cl}^T C_{cl} & P B_{cl} + C_{cl}^T D_{cl} \\ B_{cl}^T P + D_{cl}^T C_{cl} & D_{cl}^T D_{cl} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

Alors il existe un correcteur par retour d'état s'il existe une matrice K et une matrice $P=P^T > 0$ telle que :

$$\begin{bmatrix} (A+B_u K)^T P + P(A+B_u K) + (C_z+D_{zu} K)^T (C_z+D_{zu} K) & P B_w + (C_z+D_{zu} K)^T D_{zw} \\ B_w^T P + D_{zw}^T (C_z+D_{zu} K) & D_{zw}^T D_{zw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

Les variables d'optimisation sont P et K . Cette inégalité n'étant pas affine en P et en K , elle ne définit pas une LMI. Par une série de transformations, on va montrer que l'on peut obtenir une contrainte LMI équivalente après un changement de variables adéquat, on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + K^T B_u^T P + P B_u K & P B_w \\ B_w^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C_z+D_{zu} K)^T \\ D_{zw}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z+D_{zu} K & D_{zw}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

en appliquant le lemme de Schur $(C-B^T A^{-1}B)$ on obtient :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + K^T B_u^T P & PB_w & (C_z + D_{zu} K)^T \\ B_w^T P & -\gamma I & D_{zw}^T \\ (C_z + D_{zu} K) & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

dans cette inégalité il nous reste plus que $PB_u K$ et $K^T B_u^T P$ comme terme bilinéaire on

appliquant la propriété des matrices congruentes : $M < 0 \Rightarrow \Pi^T M \Pi < 0$

avec $\Pi = \begin{bmatrix} P^{-1} 0 0 \\ 0 I 0 \\ 0 0 I \end{bmatrix}$ on obtient

$$\begin{bmatrix} P^{-1} A^T + AP^{-1} + P^{-1} K^T B_u^T & B_w & P^{-1} (C_z^T + K^T D_{zu}^T)^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z P^{-1} + D_{zu} K P^{-1}) & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0$$

dernier changement on posant : $Q = P^{-1}$ et $Y = KP^{-1}$ et ce changement est bien posé car la fonction qui relie (P, K) et (Q, Y) est une bijection : on aura

$$\begin{bmatrix} QA^T + AQ + Y^T B_u^T & B_w & QC_z + Y^T D_{zu}^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z Q + D_{zu} Y) & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

Cette dernière inégalité est une LMI (affine en Q et Y)

En conclusion ma recherche d'une loi de commande $u = Kx$ assurant la stabilité de la boucle fermée et une norme H_∞ entre w et z inférieure à γ s'obtient de la façon suivante :

1. Trouver Q et Y tel que les inégalité précédente (4.21) soit satisfaite
2. $P = Q^{-1}$ et $K = YP$ (4.22)

1.2.2. Synthèse H_∞ par retour de sortie :

Soit le système P admet une représentation d'état $(A, B_w, B_u, C_z, D_{zw}, D_{zu}, C_y, D_{uw}, D_{yu})$ d'ordre n, étant donnée $\gamma > 0$, il existe un correcteur K par retour de sortie ($u = Ky$) ; d'ordre inférieur ou égal à n définit par la représentation d'état :

$$\dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y$$

$$u(t) = C_K x_K(t) + D_K y$$

telle que : 1. Le système P^*K est asymptotiquement stable

$$2. \|P^*K\|_\infty < \gamma$$

si et seulement s'il existe deux matrices P et Q telles que :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z Q & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB_w & C_z \\ B_w^T P & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z) & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} < 0 \\ & \text{et } \begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

1.2.3. Exemple de simulation :

Application : Contrôle de la vitesse de la tête lecture/écriture du disque dur

On utilisant la loi de Newton, pour un simple modèle du contrôleur de la tête lecture/écriture du disque dur ; on aura :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + C \frac{d\theta}{dt} + k\theta = k_m i$$

Avec : J est l'inertie de l'assemblée principale

C est le coefficient d'atténuation visqueux des roulements

K est la constante de ressort de retour

K_m est la constante de couple de moteur

θ est la position angulaire de la tête

i est le courant d'entrée

en prenant la transformation de Laplace, on obtient la fonction de transfert P :

$$P(s) = \frac{k_m}{Js^2 + Cs + k}$$

On pose : J=0.01kg.m²; C=0.004 Nm/(rad/sec); k=10 Nm/rad et k_m = 0.05

Après discrétisation du système avec temps d'échantillonnage T_e=0.005s on aura la fonction de transfert discrète P_{i→θ} :

$$P(z) = \frac{6.233e-5z + 6.229e-5}{z^2 - 1.973z + 0.998}$$

Par introduction des fonctions de pondérations suivante : w₁=0.5 , w₂=0.2 , w₃=350 $\frac{250z-0.07}{z-0.008}$

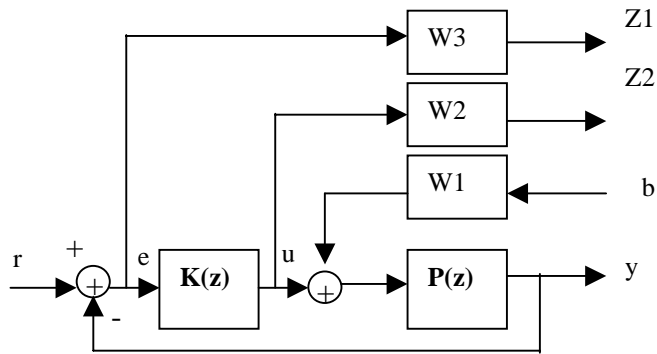


Fig.IV.2. Bloc diagramme du système augmenté

On obtient les résultats suivantes :

$$Q_{opt}=0.2599 ,$$

$$\gamma_{opt}=3.5429$$

$$Tr=0.05s ; \quad \text{Temps de réponse,}$$

$$Dép=1.7db ; \quad \text{Dépassement}$$

Et le correcteur trouvé :

$$K_{opt_lmi} = \frac{0.2599z^3 + 0.04229z^2 - 0.1064z + 0.0008484}{z^3 + 1.506z^2 + 0.5803z - 0.0001649}$$

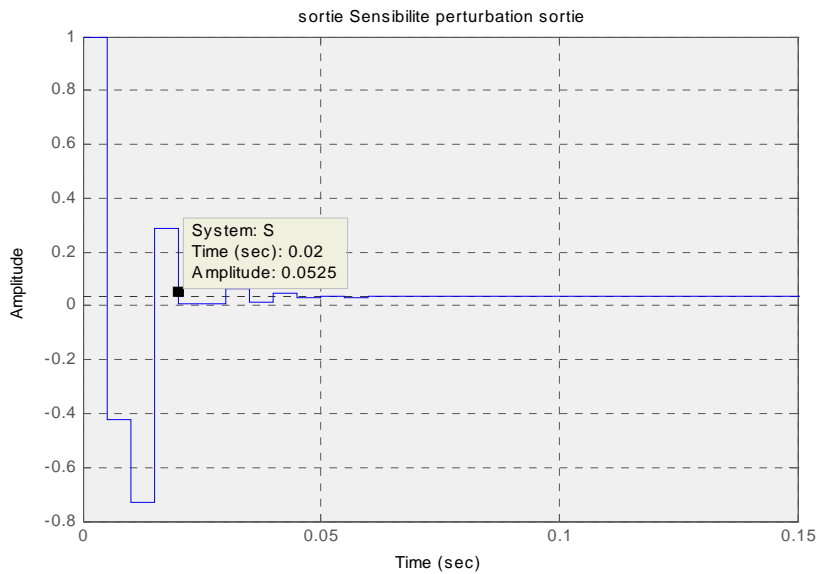


Fig.IV.3. Rejet de perturbation

On constate un bon rejet de perturbation après un temps inférieur au temps de réponse.

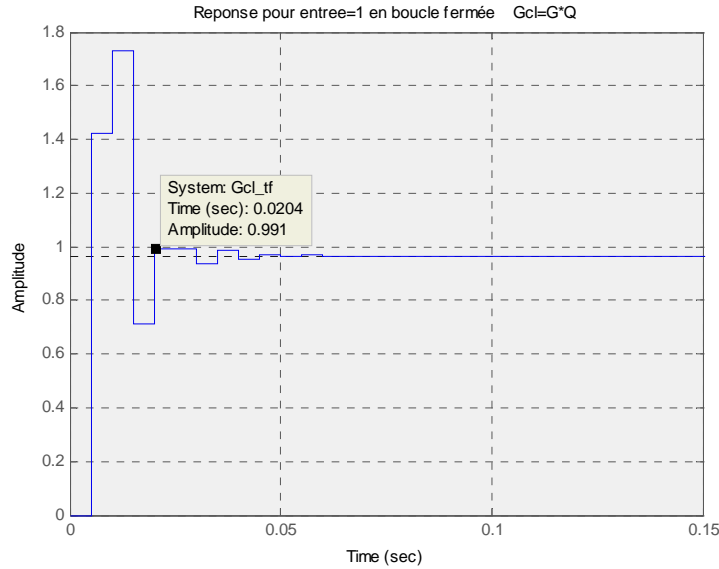


Fig.IV.4. Réponse du système

On remarque le bon déroulement de suivi de la réponse , avec une erreur très petite l'ordre de 0.009, et un premier dépassement égal 1.75db.

2. Formulation de la norme H2

2.1. Caractérisation matricielle :

Un système discret (A,B,C,D) est stable et admet une norme H2 inférieure à un niveau $\gamma_2 > 0$ ssi : $\exists P=P^T > 0$ telle que :

$$\|C(zI-A)^{-1}B+D\|_2 < \gamma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A^T X_2 A - X_2 + C^T C < 0 \\ \text{trace}(D^T D + B^T X_2 B) < \gamma_2^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} A^T X_2 A - X_2 + B B^T < 0 \\ \text{trace}(D^T D + C X_2 C^T) < \gamma_2^2 \end{cases} \quad (4.24)$$

L'utilisation conjointe du lemme de Schur et de manipulation matricielles conduit à une caractérisation sous d'inégalité matricielle , le système est stable et admet une norme H2 inférieur à un niveau γ_2 ssi il existe deux matrices symétriques définie positives $X_2=X_2^T > 0$ $Y=Y^T > 0$ telles que :

Structure 01 :

$$\begin{bmatrix} -X_2^{-1} & A & 0 \\ A^T & -X_2 & C^T \\ 0 & C & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -X_2^{-1} & B & 0 \\ B^T & -Y & D^T \\ 0 & D & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \text{trace}(Y) < \gamma_2^2 \quad (4.25)$$

il existe autres façon de formuler H2 en utilisant les outils techniques de formulation :

Structure 02 :

$$\begin{cases} \exists P=P^T > 0 \\ A^T P + P A + C^T C < 0 \\ \text{trace}(D^T D + B^T P B) < \gamma^2 \end{cases} \quad (4.26)$$

Structure 03 :

$$\begin{cases} \exists Q=Q^T > 0 \\ A Q + Q A^T + B B^T < 0 \\ \text{trace}(D^T D + C Q C^T) < \gamma^2 \end{cases} \quad (4.27)$$

Structure 04 :

$$\begin{cases} \exists X_2 = X_2^T > 0 \\ \exists Z = Z^T > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T X_2 + X A & X B \\ B^T X & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} X_2 & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0 \\ \text{trace}(Z) < \gamma^2 \end{cases} \quad (4.28)$$

Structure 05 :

$$\begin{cases} \exists Y=Y^T > 0 \\ \exists T=T^T > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T Y + Y A & Y C^T \\ C Y & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} Y & B \\ B^T & T \end{bmatrix} > 0 \\ \text{trace}(T) < \gamma^2 \end{cases} \quad (4.29)$$

2.2. Synthèse H2 :

2.2.1. Synthèse H2 par retour de sortie :

soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases}$$

Question : on recherche une loi de commande par retour d'état ($K \in \mathbb{R}^{p \times n}$) telle que $u=Ky(t)$ et assure :

1. Le système en boucle fermé est stable
2. La norme H2 du système en boucle fermé $\|T_{w \rightarrow z}\|_2 < \gamma_2$

Avec un contrôleur par retour de sortie dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y \end{aligned}$$

le système bouclé est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} w(t) \\ z(t) = \hat{C} \hat{x}(t) + \hat{D} w(t) \end{cases}$$

avec : $\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [C_z + D_{zu} D_K C_y \quad D_{zu} C_K], \quad \hat{D} = D_{zw} + D_{zw} D_K D_{yw}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \hat{A} \hat{Q} + \hat{Q} \hat{A}^T & \hat{B} \\ \hat{B}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} Z & \hat{C} \hat{Q} \\ * & \hat{Q} \end{bmatrix} < 0 \\ \text{trace}(Z) < \gamma_2^2 \end{array} \right. , \quad \text{avec : } \hat{Q} = \begin{bmatrix} Q & \bar{Q}^T \\ \bar{Q} & * \end{bmatrix}, \quad \hat{P} = \hat{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} P & \bar{P} \\ \bar{P}^T & * \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\bar{Q} \text{ et } \bar{P} \text{ sont obtenu de la relation : } P\bar{Q} + \bar{P}Q = I \quad (4.31)$$

2.2.2. Synthèse H2 par retour d'état:

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases}$$

Question : on recherche une loi de commande par retour d'état ($K \in \mathbb{R}^{p \times n}$) telle que $u(t) = Kx(t)$ et assure :

1. Le système en boucle fermé est stable
2. La norme H2 du système en boucle fermé $\|T_{w \rightarrow z}\|_2 < \gamma_2$

$$\begin{cases} \exists X_2 = X_2^T > 0 \\ \exists Z = Z^T > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T X_2 + X_2 A + B_u R + R^T B_u & B_w \\ B_w^T & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} Z & C_z X_2 + D_{zu} R \\ X_2 C_z + R^T D_{zu} & Q \end{bmatrix} > 0 \\ \text{trace}(Z) < \gamma_2^2 \end{cases} \quad (4.32)$$

H2 optimal revient à minimiser γ_2^2 ; $\exists K$ tel que $\|T_{w \rightarrow z}\|_2 < \gamma_2$ ssi :

$$\begin{cases} \text{trace}\{(C_z + D_{zu} R)Q(C_z + D_{zu} R)^T\} < \gamma_2^2 \\ (A + B_u R)^T Q + Q(A + B_u R) + B_w B_w^T < 0 \end{cases}$$

après modification en utilisant les outils techniques pour la formulation LMI on obtient ($D_{yw} = D_{22} = 0$)

$$\begin{cases} \text{trace}(Z) < \gamma_2^2 \\ \begin{bmatrix} Z & C_z X_2 + D_{zu} R \\ X_2 C_z + R^T D_{zu}^T & X_2 \end{bmatrix} > 0 \\ A X_2 + X_2 A^T + B_u R + R^T B_u + B_w B_w^T < 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

avec H2 sub-optimal par retour d'état $K = R X^{-1}$ (4.34)

H2 optimal revient à minimiser γ_2^2 $\|P_{BF}\|_2 \leq \sqrt{\gamma_2^{2*}}$ (4.35)

3. α -stabilité :

3.1. Définition :

L' α -stabilité est une propriété des systèmes qui permet de garantir la rapidité de convergence vers un point d'équilibre. Ce critère peut aussi être vu comme une contrainte de placement de pôle dans un disque de rayon α :

3.1.1. Cas discret :

Soit le système : $x(k+1)=Ax(k)$

l'état x d'un système est dit α -stable ($\alpha \in]0, 1[$) si et seulement si pour une entrée nulle et pour toute condition $x(0)$, la relation suivante est vérifiée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{-k} \|x(k)\| = 0 \quad (4.36)$$

dont on peut dire que le module des valeurs propres de la matrice d'évolution est inférieur à α .

3.1.2. Cas continu :

Soit le système : $\dot{x}(t)=Ax(t)$

on peut définir l' α -stabilité d'un système le taux de décroissance exponentiel définie comme le plus grand α tel que pour toute condition initiale $x_0(0)=0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(k)\| = 0 \quad (4.37)$$

3.2. Caractérisation matricielle :

3.2.1. Cas continu :

On peut relier le taux de décroissance aux valeurs propres de la matrice A . Dans le cas où A est diagonalisable dans \mathbb{C} , en notant $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$

les valeurs propres de la matrice A , on a la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'état qu'est défini par :

$$x(t) = \sum_i e^{\sigma_i t} (\alpha_i \cos \omega_i t + \beta_i \sin \omega_i t) \quad (4.38)$$

La limite $\dot{x}(t)=Ax(t)$ sera satisfaite si et seulement si $\sigma_i < -\alpha$; il est possible de démontrer une condition nécessaire et suffisante : le taux de décroissance est (strictement) supérieur à α s'il existe une fonction $V(x)$ telle que :

$$\text{pour } x \neq 0, V(x) > 0 \text{ et } \dot{V}(x) < -2\alpha V(x) \quad (4.39)$$

On prend $V(x) = x^T P x$ ou P est une matrice symétrique à déterminer.

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < -2\alpha V(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ A^T P + PA + 2\alpha P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\alpha)(2P) - (A^T P + PA) > 0 \\ 2P > 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

3.2.2. Cas discret :

Un système (A, B, C, D) est dit α -stable ssi :

$$\begin{cases} \exists X_3 = X_3^T > 0 \\ \begin{bmatrix} \alpha^2 X_3 & A^T \\ A & X_3^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

3.3. Synthèse α -stabilité :

3.3.1. Synthèse α -stabilité par retour d'état :

Soit un système $\{D=0\}$ (simplification de calcul) tel que :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

et $u = Kx$

Alors le système bouclé est donné par $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$

Problème : Trouver K et P telles que :

$$\begin{cases} \forall x_1 \in \mathbb{R}^n & x_1^T P x_1 > 0 \\ \forall x_2 \in \mathbb{R}^n & x_2^T [(A + BK)^T P + P(A + BK) + 2\alpha P] x_2 < 0 \end{cases}$$

on remarque que la seconde inégalité est bilinéaire en les variables P et K :

Posons : $x_1 = P^{-1} \hat{x}_1$ et $x_2 = P^{-1} \hat{x}_2$, alors

$$\begin{cases} \forall \hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_1^T P^{-1} \hat{x}_1 > 0 \\ \forall \hat{x}_2 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_2^T [A P^{-1} + P^{-1} A^T + B K P^{-1} + P^{-1} K^T B^T + 2\alpha P^{-1}] \hat{x}_2 < 0 \end{cases}$$

Les inégalités ne sont affine en les variables d'optimisation P et K

Posons : $Q = P^{-1}$ et $Y = K P^{-1}$ alors on aura :

$$\begin{cases} \forall \hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_1^T Q \hat{x}_1 > 0 \\ \forall \hat{x}_2 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_2^T [AQ + QA^T + BY + Y^T B^T + 2\alpha Q] \hat{x}_2 < 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

Ce changement de variables est bien posé les deux inégalités sont affine en les variables d'optimisation Q et Y , par suite la recherche d'une loi de commande $u(t)=Kx(t)$ assurant un taux de décroissance supérieur à α peut s'effectuer de la façon suivante :

1. Trouver Q et Y tel que les inégalités précédentes soient satisfaites (Problème de faisabilité ou de minimisation)
2. $P=Q^{-1}$ et $K=YP$ (4.43)

3.3.2. Synthèse α -stabilité par retour de sortie :

Soit un système tel que :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{et} \quad u(t) = Ky(t)$$

Le système bouclé est donné par $\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t)$

Problème : Trouver K et P telles que :

$$\begin{cases} \forall \hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_1^T P \hat{x}_1 > 0 \\ \forall \hat{x}_2 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_2^T [(A + BKC)^T P + P(A + BKC) + 2\alpha P] \hat{x}_2 < 0 \end{cases}$$

De la même façon que la synthèse par retour d'état ;

Posons : $x_1 = P^{-1} \hat{x}_1$ et $x_2 = P^{-1} \hat{x}_2$, alors

$$\begin{cases} \forall \hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_1^T P^{-1} \hat{x}_1 > 0 \\ \forall \hat{x}_2 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_2^T [AP^{-1} + P^{-1}A^T + BKCP^{-1} + P^{-1}C^T K^T B^T + 2\alpha P^{-1}] \hat{x}_2 < 0 \end{cases}$$

Les inégalités ne sont affine en les variables d'optimisation P et K

Posons : $Q = P^{-1}$ et $Y = KCP^{-1}$ alors on aura :

$$\begin{cases} \forall \hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_1^T Q \hat{x}_1 > 0 \\ \forall \hat{x}_2 \in \mathbb{R}^n & \hat{x}_2^T [AQ + QA^T + BY + Y^T B^T + 2\alpha Q] \hat{x}_2 < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Ce changement de variables est bien posé les deux inégalités sont affine en les variables d'optimisation Q et Y , par suite la recherche d'une loi de commande $u(t)=Ky(t)$ assurant un taux de décroissance supérieur à α peut s'effectuer de la façon suivante :

3. Trouver Q et Y tel que les inégalités précédentes soient satisfaites (Problème de faisabilité ou de minimisation)
4. $P=Q^{-1}$ et $K=YPC^{-1}$ (4.45)

IX. CONCLUSUON :

L'intérêt de l'optimisation ne se limite pas à la possibilité d'étudier un nombre important de propriétés. L'optimisation permet d'envisager l'étude des propriétés non pas d'un modèle mais d'une famille de modèle. Et ce mode de représentation est beaucoup adapté à ce que attend un ingénieur automaticien de l'étude de ces systèmes par la modélisation. Si l'étude d'un nombre significatif de propriétés d'un modèle peut refaire par des critères d'autres nature basés par exemple sur le calcul des valeurs propres, lorsque des familles de modèle est envisagés, l'optimisation devient l'outil incontournable.

Transformer un problème d'optimisation en un problème d'optimisation équivalent est un « art », autrement dit que la conversion ou de formuler un cahier de charge par contraintes LMI c'est la phase la plus difficile relativement pour l'automaticien, tout en conservant notre système initial.

Le formulation par LMI est un outil très efficace pour résoudre des problèmes généraux de LMI. Il mélange les outils simples pour les spécifications et la manipulation de LMIs avec les solutionneurs puissants de LMI pour trois problèmes génériques de LMI. Grâce à une représentation structure-orientée de LMIs, les diverses contraintes de LMI peut être décrite sous leur forme normale de bloc-matrice. De même, les variables d'optimisation sont indiquées directement comme des variables de matrice avec une certaine structure donnée. Une fois qu'un problème de LMI est indiqué, il peut être résolu numériquement en appelant le solutionneur appropriée de LMI. Le **feasp**, le **mincx**, et le **gevp** les trois solutionneurs constituent le moteur informatique de la boîte à outils de commande de LMI sous Matlab. La combinaison de plusieurs caractéristiques définit un problème multiobjectif dont LMI est un outil efficace pour la résolution qui englobe tous les critères pour la résolution instantanée et de faire l'économie des hypothèses, temps de calcul

CHAPITRE 5

APPLICATION

LA SYNTHÈSE MULTI-OBJECTIVE
APPLICATION SUR UN SYSTÈME
BRAS FLEXIBLE

I. INTRODUCTION

Dans la pratique, on peut dire : On considère le système P rebouclé avec le correcteur K et on cherche à minimiser les normes H2 et H ∞ de la boucle fermée évidemment en garantissant la stabilité, le problème multiprojectif sera défini comme suit : [7]

$$\min_K \{ \|P^*K\|_{\infty}, \|P^*K\|_2 \} \quad (5,1)$$

mais cette relation n'a pas de sens mathématique, il est donc nécessaire de la transformer en un problème similaire

$$\min_K \left\{ \gamma_1, \gamma_2 / \begin{cases} \|P^*K\|_{\infty} < \gamma_1 \\ \|P^*K\|_2 < \gamma_2 \end{cases} \right\} \quad (5,2)$$

La combinaison (ou le mixage) des critères tels que le critère de la stabilité (sens de Lyapunov), critère H2, ou H ∞ ou celui de l' α -stabilité (placement de pôles), l'exécution LQG, etc.... définit un problème multiprojectif de conception qui peut être résolu numériquement par l'intermédiaire de l'optimisation convexe, dans tout ce qui suit on prendra les trois critères, qui sont les plus souvent utilisées qui englobent les spécifications du cahier de charges critère H ∞ et critère H2 et α -stabilité.

II. PROBLEME MULTICRITERE :

En utilisant les notations suivantes qui se reportent à la figure II.1., les transferts $w_i \rightarrow z_i$ notées T_i ont pour représentation d'état.

$$T_i = G_{i,cl} = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{i,cl} \\ C_{i,cl} & D_{i,cl} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

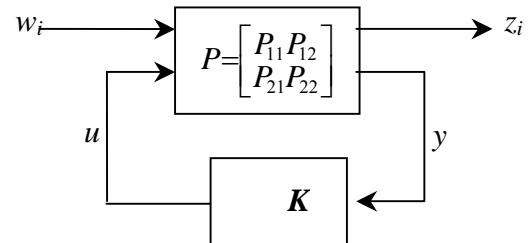


Fig.II.1. Représentation du système en boucle fermée

alors que le problème qui se pose chercher K tel que :

le système LFT(P,K) vérifie les trois propriétés suivantes

$$\begin{cases} \|T_1\|_{\infty} < \gamma_1 & (5.4) \\ \|T_2\| < \gamma_2 & (5.5) \\ \text{LFT(P,K)} \text{ est } \alpha\text{-stable} & (5.6) \end{cases}$$

Si et seulement il existe quatre matrices symétriques définies positives X_1 , X_2 , X_3 et Y telles que les inégalité suivantes soient vérifiées :

☀ $\|T_1\|_\infty < \gamma_1$ est caractérisé par équation (4.13)

En appliquant la caractérisation matricielle (4.13) sur la boucle fermé T_1 on a : [7]

$$\begin{bmatrix} -X_1^{-1} & A_{cl} & B_{1,cl} & 0 \\ A_{cl}^T & -X_1 & 0 & C_{1,cl}^T \\ B_{1,cl}^T & 0 & -\gamma I & D_{1,cl}^T \\ 0 & C_{1,cl} & D_{1,cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.7)$$

et par la modification par congruence en multipliant à gauche et à droite l'inégalité (5.7) par

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} -X_1 & X_1 A_{cl} & X_1 B_{1,cl} & 0 \\ A_{cl}^T X_1 & -X_1 & 0 & C_{1,cl}^T \\ B_{1,cl}^T X_1 & 0 & -\gamma I & D_{1,cl}^T \\ 0 & C_{1,cl} & D_{1,cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.9)$$

☀ $\|T_2\|_2 < \gamma_2$ est caractérisé par équation (4.25)

De la même façon que H_∞ , En utilisant la caractérisation matricielle (4.25) sur la boucle fermé T_2

on a : [7]

$$\begin{bmatrix} -X_2^{-1} & A_{cl} & 0 \\ A_{cl}^T & -X_2 & C_{2,cl}^T \\ 0 & C_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -X_2^{-1} & B_{2,cl} & 0 \\ B_{2,cl}^T & -Y & D_{2,cl}^T \\ 0 & D_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \text{trace}(Y) < \gamma_2^2 \quad (5.10)$$

et par la modification par congruence par : $\Pi_2 = \begin{bmatrix} X_2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ (5.11)

on obtient :

$$\begin{bmatrix} -X_2 & X_2 A_{cl} & 0 \\ A_{cl}^T X_2 & -X_2 & C_{2,cl}^T \\ 0 & C_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -X_2 & X_2 B_{2,cl} & 0 \\ B_{2,cl}^T X_2 & -Y & D_{2,cl}^T \\ 0 & D_{2,cl} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \text{trace}(Y) < \gamma_2^2 \quad (5.12)$$

☀ **α -stabilité** pour le système LFT(P,K) est caractérisé par équation (4.41)

En utilisant la caractérisation matricielle sur le système FL(P,K) on a :

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 X_3 & A_{cl}^T \\ A_{cl} & X_3^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.13)$$

et on prend : $\Pi_3 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X_3 \end{bmatrix}$ (5.14)

on obtient : $\begin{bmatrix} \alpha^2 X_3 & A_{cl}^T X_3 \\ X_3 A_{cl} & X_3 \end{bmatrix} > 0$ (5.15)

III. Problématique de la synthèse : [7]

Le problème est alors de trouver une solution a ce problème ; si on s'intéresse à l'analyse d'un système les inégalités précédentes sont linéaires en les variables inconnues, il s'agit donc simplement d'un problème de faisabilité LMI, et celui-ci ne pose pas de problème particulier. En revanche dès qu'il s'agit de la synthèse d'un correcteur les matrices de la représentation d'état dépendent du correcteur qui fait partie des variables d'optimisation du problème :

$$T = G_{i,cl} \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{i,cl} \\ C_{i,cl} & D_{i,cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B_u D_K C_y & B_u C_K & B_i+B_u D_K D_{yi} \\ B_K C_y & A_K & B_K D_{yi} \\ C_i+D_{iu} D_K C_y & D_{iu} C_K & D_{ii}+D_{iu} D_K D_{yi} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Mais les inégalités du problème multiobjectifs ne sont donc plus linéaire, il est donc nécessaire de le transformer tout en conservant ses caractéristiques; deux approches sont alors envisageables:

- On cherche à satisfaire des propriétés plus générale que celles qui sont demandées et on se ramène à énoncé que l'on sait résoudre numériquement ; on parle alors de solution conservative.
- On limite la recherche de solution à un sous ensemble, des solutions possibles on parle alors de solution sous-optimales

Dans cette approche, la démarche peut se résumer par les points suivants :

1. On maintient les fonctions de Lyapunov X_i déférentes pour l'ensemble des objectifs de synthèse, et on impose une contrainte de stabilité plus forte.
2. Un changement de variable bijectif permet de rendre les inégalités matricielles linéaires en les nouvelles variables d'optimisation(ou variables de décisions).

3. Le problème mis sous forme LMI, peut alors résolu de manière numérique
4. La reconstruction du correcteur.

Dans ce chapitre on va exploiter la propriété de la paramétrisation de Youla qui permet d'exprimer la synthèse multicritère par retour de sortie statique sous forme de problème d'optimisation convexe. On rappelle sur la figure II.4 les différents systèmes mis en jeu et les notations décrits aux chapitre 2, ainsi que la représentation définit au chapitre 03 (§.VII)

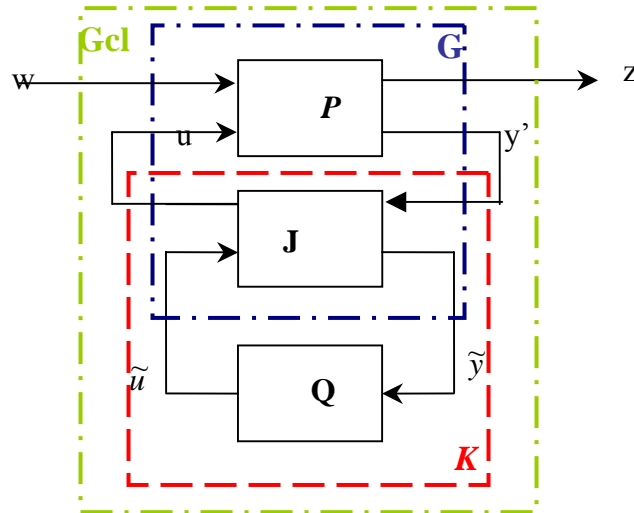


Fig. II.4. Forme générale de la paramétrisation de Youla

IV. LINEAIRISATION DES INEGALITES MATRICIELLES

(SYNTHESE Q STATIQUE)

Soit le système G de la figure II.4. asymptotiquement stable et Q un retour statique de sortie.

$$G = \begin{bmatrix} A_G & B_G \\ C_G & D_G \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$$

Nous allons montrer qu'il existe une formulation LMI au problème de commande H_2 , H_∞ et α -stable $\{(5.2.), (5.3), (5.4)\}$; ce résultat est obtenu par changement de variable et manipulations matricielles.

Considérons les caractérisations matricielles des norme H_2 , H_∞ du système bouclé :

$$G_{cl} = LFT(G, Q) = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Où Q est retour statique de sortie, compte tenu de la propriété n°03 de la paramétrisation de Youla présentée au chapitre 02 (§.III.3) et intégration de l'observateur/régulateur présenté au chapitre 03 (§.VII) ; la représentation d'état du système en boucle fermée a la forme suivante :

$$G_{cl}=LFT(G,Q)=\begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & A_3+B_{\hat{u}}QC_{\hat{y}} & B_{1,1}+B_{\hat{u}}QD_{\hat{y}1} & B_{2,1}+B_{\hat{u}}QD_{\hat{y}2} \\ 0 & A_2 & B_{1,2} & B_{2,2} \\ \hline C_{1,1} & C_{1,2}+D_{1\hat{u}}QC_{\hat{y}} & D_{11}+D_{1\hat{u}}QD_{\hat{y}1} & D_{12}+D_{1\hat{u}}QD_{\hat{y}2} \\ 0 & C_{2,2}+D_{2\hat{u}}QC_{\hat{y}} & D_{21}+D_{2\hat{u}}QD_{\hat{y}1} & D_{22}+D_{2\hat{u}}QD_{\hat{y}2} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Les caractérisation par inégalités matricielles des normes H_2 , H_∞ et le critère α -stabilité exposé précédemment et appliquées sur le système ferme G_{cl} ne sont pas linéaires en les variables d'optimisation (les fonctions de Lyapunov et le gain Q). par exemple X_1A_{cl} fait intervenir un terme ou intervient sans le même produit X_1 et Q . il est donc nécessaire de modifier le problème pour le transformer en un problème d'optimisation convexe.

Soit X_i la fonction de Lyapunov associée au critère i $\{i=1:3 \Leftrightarrow H_2; H_\infty; \alpha\text{-stabilité}\}$ on a la partitionne dans les même proportion que la matrice d'évolution de G (A_G) :

$$X_i=\begin{bmatrix} W_i & Z_i \\ Z_i^T & Y_i \end{bmatrix} \text{ selon } A_G=\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

et on définit le changement de variable bijectif suivant (Lemme S-procédure chapitre 3 §.IV.4))

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n \times n} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^{n \times n} \\ \begin{bmatrix} W_i & Z_i \\ Z_i^T & Y_i \end{bmatrix} & \xrightarrow{\quad} & \begin{bmatrix} R_i & S_i \\ S_i^T & T_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i^{-1} & -W_i^{-1}Z_i \\ -Z_i^TW_i^{-1} & Y_i-Z_i^TW_i^{-1}Z_i \end{bmatrix} \end{array} \quad (5.20)$$

$$\text{ainsi que la matrice } M_i=\begin{bmatrix} R_i & 0 \\ S_i^T & I \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

En appliquant au système G_{cl} les caractérisations matricielles des critères décrits (5.4), (5.5) et (5.6), et on utilisent les propriétés de congruence on obtient les formulations LMI suivant :

1. Problème H_∞ :

En utilisant la congruence par la matrice

$$\Pi_1=\text{diag}(M_1 \ M_1 \ I \ I) \quad (5.22)$$

On obtient à partir de (5.7) :

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} -R_1 & 0 & A_1 R_1 & A_1 S_1 - S_1 A_2 + A_3 + B_{u^\wedge} Q C_{y^\wedge} & B_{1,1} + B_{u^\wedge} + B_{u^\wedge} Q D_{y^\wedge 1} - S_1 B_{1,2} & 0 \\ 0 & -T_1 & 0 & T_1 A_2 & T_1 B_{1,2} & 0 \\ \hline * & * & -R_1 & 0 & 0 & R_1^T C_{1,1}^T \\ * & * & 0 & -T_1 & 0 & C_{1,2}^T + C_{y^\wedge}^T Q^T D_{1u^\wedge}^T + S_1^T C_{1,1}^T \\ \hline * & * & * & * & -\gamma_1 I & D_{11}^T + D_{y^\wedge 1} Q^T D_{1u^\wedge}^T \\ * & * & * & * & * & -\gamma_1 I \end{array} \right] < 0 \quad (5.23)$$

2. Problème H2 :

En utilisant la congruence par la matrice :

$$\Pi_{21} = \text{diag}(M_2 \ M_2 \ I) \quad (5.24)$$

$$\text{et } \Pi_{22} = \text{diag}(M_2 \ I \ I) \quad (5.25)$$

On obtient à partir de (5.10) :

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} -R_2 & 0 & A_1 R_2 & A_1 S_2 - S_2 A_2 + A_3 + B_{u^\wedge} Q C_{y^\wedge} & B_{1,1} + B_{u^\wedge} + B_{u^\wedge} Q D_{y^\wedge 1} - S_2 B_{1,2} & 0 \\ 0 & -T_2 & 0 & T_2 A_2 & T_2 B_{1,2} & 0 \\ \hline * & * & -R_2 & 0 & 0 & R_2^T C_{2,1}^T \\ * & * & 0 & -T_2 & 0 & C_{2,2}^T + C_{y^\wedge}^T Q^T D_{2u^\wedge}^T + S_1^T C_{2,1}^T \\ \hline * & * & * & * & * & -I \end{array} \right] < 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -R_2 & 0 & B_{2,1} + B_{u^\wedge} Q D_{y^\wedge 2} - S_2 B_{2,2} & 0 \\ 0 & -T_2 & 0 & 0 \\ \hline * & * & -Y & D_{22}^T + D_{y^\wedge 2} Q^T D_{2u^\wedge}^T \\ * & * & 0 & -I \end{array} \right] < 0, \text{ trace}(Y) < \gamma_2^2 \quad (5.26)$$

2. Problème α -stabilité:

En utilisant la congruence par la matrice :

$$\Pi_3 = \text{diag}(I \ M_3) \quad (5.27)$$

on obtient à partir de (5.13)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \alpha^2 R_3 & * & * & * \\ 0 & \alpha^2 T_3 & * & * \\ \hline A_1 R_3 & A_1 S_3 - S_3 A_2 + B_2 Q C_2 + A_3 & R_3 & * \\ 0 & T_3 A_2 & 0 & T_3 \end{array} \right] > 0 \quad (5.28)$$

Ces différentes inégalités (5.23), (5.26) , (5.28) sont effectivement linéaires en les variables de décisions R_1, S_1, T_1, Q et γ_1 pour le problème H^∞ et R_2, S_2, T_2, Q et γ_2^2 pour le problème H2 et

R_3 , S_3 , T_3 pour le problème α -stabilité. Les deux problèmes H_2 et H_∞ sont couplés par le retour statique Q et utilisent des fonctions de Lyapunov indépendantes.

V. APPLICATION SUR UN BRAS FLEXIBLE : [23, 24, 25]

1. Description du système :

Le système considéré est constitué d'une plate forme posée sur une base et surmontée d'un bras à liaison flexibles (figure V.1.). la plate forme est entraînée dans un mouvement de rotation par un moteur à courant continu. Le couplage entre le moteur et la plate forme est fait d'une manière rigide à l'aide de roue dentées. Le bras est rattaché par son extrémité au centre de la plate forme. L'attache est conçu de telle sorte que le bras puisse effectuer un mouvement de rotation librement. Ce mouvement de rotation est cependant commandé par deux ressort, dont les extrémités sont attachées à la plate forme et en bras assurant ainsi une liaison flexible entre les deux pièces.

Deux grandeurs être mesurées à l'aide de potentiomètres :

- L'angle de rotation de la plate forme par rapport à sa base $\theta(t)$
- L'angle de rotation du bras par rapport à l'axe de la plate forme $\alpha(t)$

Par la suite nous nous intéressons à l'angle de positionnement du bras par rapport à la base ($\theta+\alpha$). Cette grandeur constitue donc la sortie du système considéré ($y=\theta+\alpha$). Le système comporte une grandeur de commande u . celle-ci consiste en une tension générée par ordinateur qui, avant d'être appliquée aux bornes du moteur à courant continu, est d'abord amplifiée par un amplificateur de puissance, l'extrémité libre du bras peut recevoir une charge (varie entre 0 à 75g), et la position de cette extrémité est mesurée par un capteur à infrarouge . ce système à donc pour entrée la commande u de l'asservissement analogique de la position du moteur et pour sortie la position de l'extrémité libre du bras mesurée par le capteur

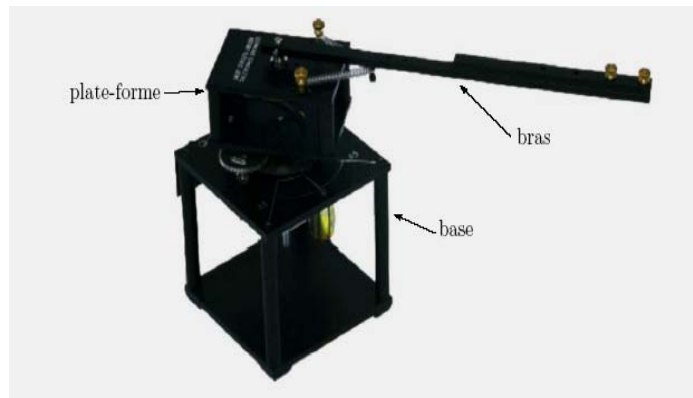


Fig.V.1. Le bras flexible

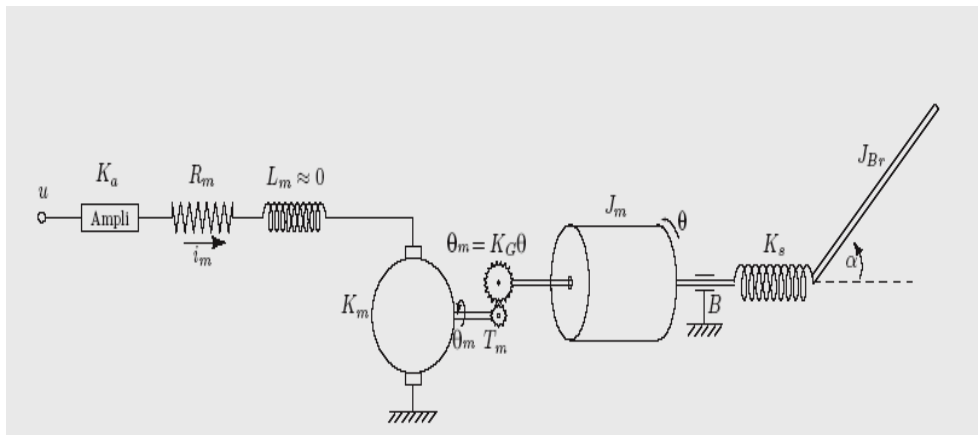


Fig.V.2. Modèle de connaissance du système

2. Etude du système

Les équations décrivant ce système (figure V.2.):

$$K_a u(t) = R_m i_m(t) + K_m \dot{\theta}_m(t) \quad T_m(t) = K_m i_m(t)$$

$$J_m \ddot{\theta}_m(t) = K_G T_m(t) - B \dot{\theta}_m(t) - K_s \alpha(t) \quad \theta_m(t) = K_G \theta(t)$$

$$J_{Br} (\ddot{\theta}(t) + \ddot{\alpha}(t)) = K_s \alpha(t)$$

J_{Br} étant l'inertie du bras. La variation du moment cinétique du bras est égale au moment transmis par la liaison flexible. Les frottements provenant du mouvement du bras sont négligés.

Quelques paramètres utiles sont fournis ci-dessous :

Gain de l'amplificateur de puissance K_a : 2.0

Résistance R_m : 2.6

Constante de couple K_m : 0.00767 [Nm/A]

Rapport de l'engrenage K_G : 70

Inertie de la plate-forme J_m : $3.8710 \cdot 10^{-7}$ [kg m²]

L'inertie du bras ainsi que les constantes de couple des ressorts peuvent être modifiées par l'utilisateur. Leurs valeurs dépendent donc de la configuration choisie.

Le modèle correspondant à une charge de $m=25g$ a été identifié par la fonction de transfert suivante : [23, 24, 25]

$$P(z) = \frac{0.03682z^{-2} + 0.00961z^{-3} - 0.10102z^{-4} + 0.28427z^{-5} - 0.12933z^{-6}}{1 - 2.12025z^{-1} + 1.50938z^{-2} - 0.41965z^{-3} + 0.67078z^{-4} - 1.28873z^{-5} + 0.73391z^{-6}}$$

Cahier des charges :

Le régulateur doit être calculé de façon à tenir le cahier des charges suivant :

1. temps de réponse du système est inférieur à $t_r=2.8s$.
2. Maximum de la fonction de sensibilité perturbation-sortie $|S| < 8db$
3. Maximum de la fonction de sensibilité perturbation-commande $|KS| < 15db$

4. face à échelon de consigne
 1. temps de montée à 90% de la valeur finale inférieur à $t_m=1.8s$
 2. temps d'établissement à 2% inférieure à $t_e=4.8s$
5. face à un échelon de perturbation appliqué à la sortie le temps de rejet de perturbation inférieure à $t_{rej/pert}2.8s$

3. Synthèse :

Le système augmenté est donné sur la figure

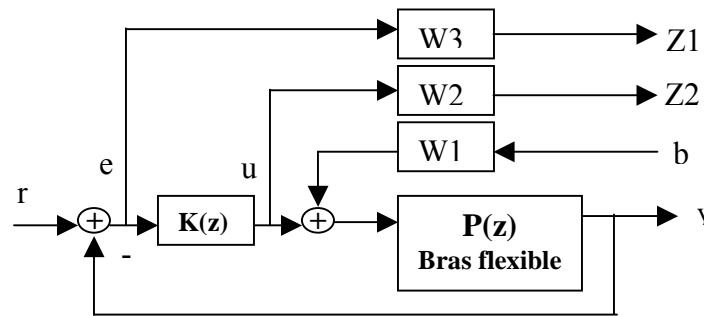


Fig.V.3. Système augmenté du système Bras flexible

en introduisant des fonctions de pondérations : w_1, w_2, w_3 telles que :

Le suivi de consigne est assuré de façon classique en synthèse H_∞ par une pondération (w_3) sur l'erreur de l'asservissement, et les pondérations w_1 et w_2 sont utilisées pour traduire les spécifications S et KS en objectif H_∞ ; le choix de ces valeurs (fonctions) est directement issu des spécifications sur S et KS. En utilisant le théorème du petit gain; La réponse fréquentiel de chaque fonction S et KS est une contrainte qui dépend du filtre choisi;

$$\|W_3 S\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad |S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_3(j\omega)|}$$

$$\|W_2 K S\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad |K(j\omega)S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|}$$

$$\frac{1}{w_1} \approx 4\text{db} \quad \text{et} \quad \frac{1}{w_2} \approx 6\text{db}$$

on choisi : $w_3 = \frac{3.076z - 2.674}{z - 0.999}$, $w_1 = 0.5$ et $w_2 = 0.2$

- En imposant une contrainte d' α -stabilité : qu'elle permet d'assurer une certaine rapidité en boucle fermée (dont la valeur est calculée en tient compte du temps de repense du système en boucle fermée) on choisi $\alpha = 0.87$

en résumé tous ces objectifs en ce problème :

$$\text{Problème LMI : } \min \{ \gamma \mid \|T\|_{\infty} < \gamma ; \|T\|_2 < \gamma_2 \text{ et } \alpha\text{-stabilité} \}$$

note pour la résolution de ce problème sous LMI on respecte que les fonctions de Lyapunov sont différentes pour les critères de spécifications H2, H ∞ et α -stabilité.

4. Résultat de simulation :

$$K_c = F = [2.4142 \quad -0.6357 \quad 0.1820 \quad -0.0341 \quad 0.1223 \quad -0.0984 \quad 0 \quad 0 \quad -0.3593]$$

; Le gain de retour d'état telle que $A - B_2 F$ est stable.

$$K_f^T = L^T = [-0.3807 \quad -1.7138 \quad -2.0706 \quad -4.4386 \quad -8.1288 \quad -5.9929 \quad 0 \quad 0 \quad 0.2237]$$

; Le gain d'observateur telle $A - L C_2$ est stable.

$$\gamma_{\text{opt}} = 2.4490 \quad ; \text{ la norme de } T(z) = G_{\text{cl}}(z)$$

$$Q_{\text{opt}} = 0.2483 \quad (Q \text{ est stable } \parallel Q_{\text{opt}} \parallel < \gamma_{\text{opt}}) \quad ; \text{ Q-Paramètre de Youla statique (est bien satisfait)}$$

Construction du correcteur K stabilisant P :

$$K_{\text{opt}} = \frac{0.2483 z^7 - 0.2345 z^6 - 0.2226 z^5 + 0.2667 z^4 + 0.05515 z^3 - 0.09562 z^2 - 0.176 z + 0.1711}{z^7 - 1.912 z^6 + 1.496 z^5 - 0.6678 z^4 + 0.7183 z^3 - 1.025 z^2 + 0.5776 z - 0.111}$$

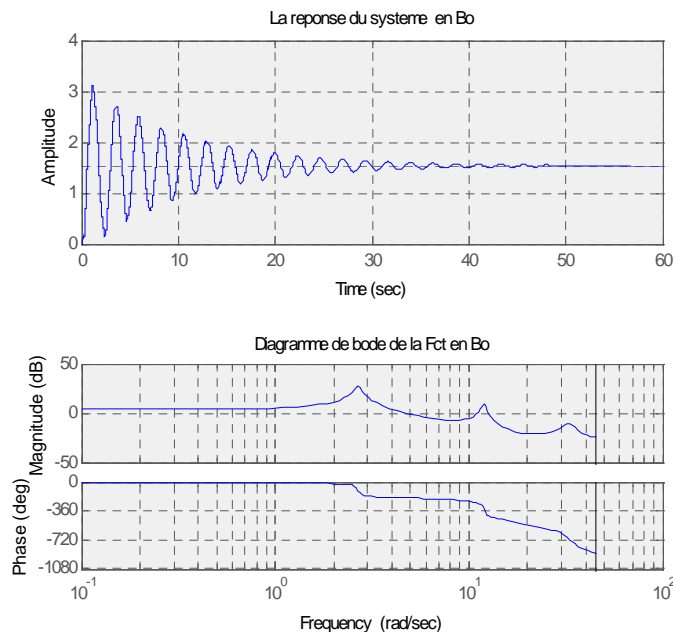


Fig.V.4. La réponse et diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte

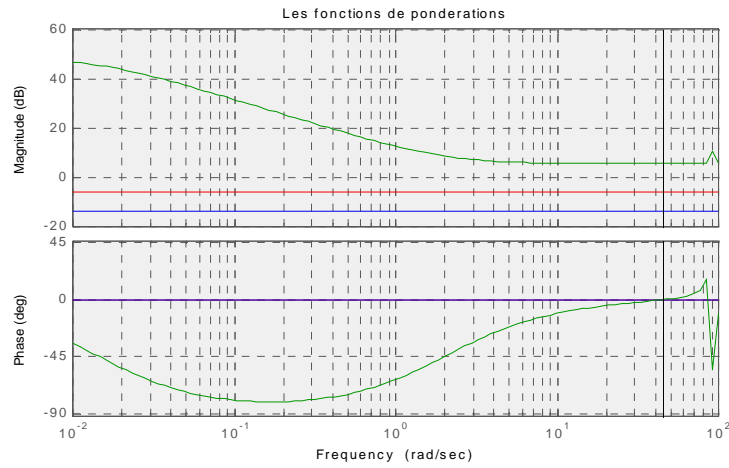


Fig.V.5. Diagramme de Bode des fonctions de pondération

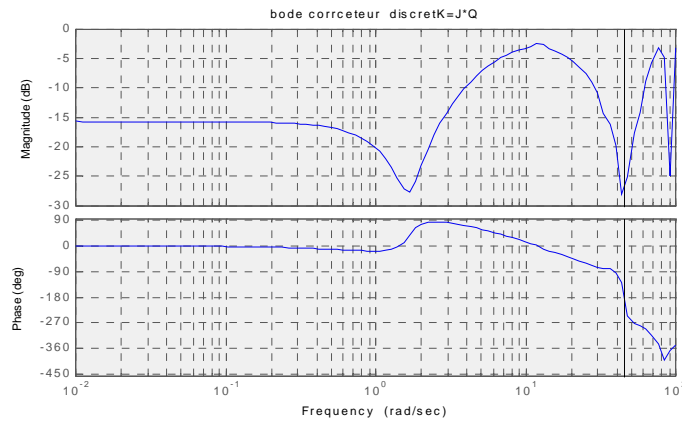


Fig.V.6. Diagramme de Bode de la fonction du correcteur

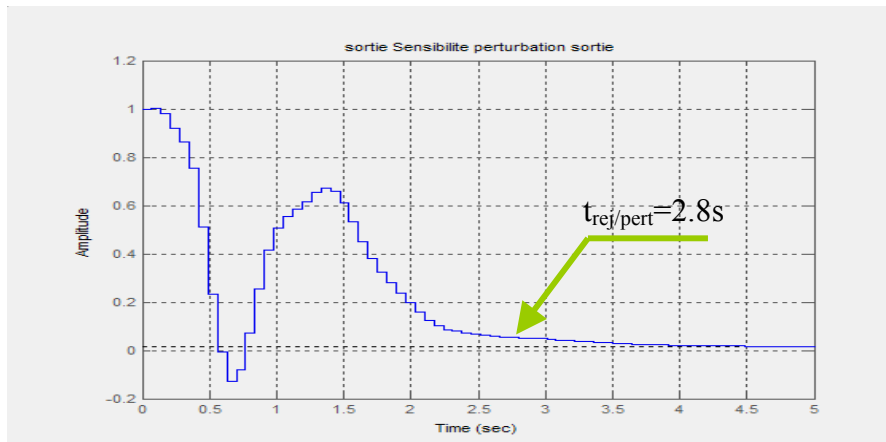


Fig.V.7. Rejet de perturbation

On remarque face à un échelon de perturbation appliquée à la sortie le temps de rejet de perturbation est inférieur à 2.8s satisfaisant le cahier des charges.

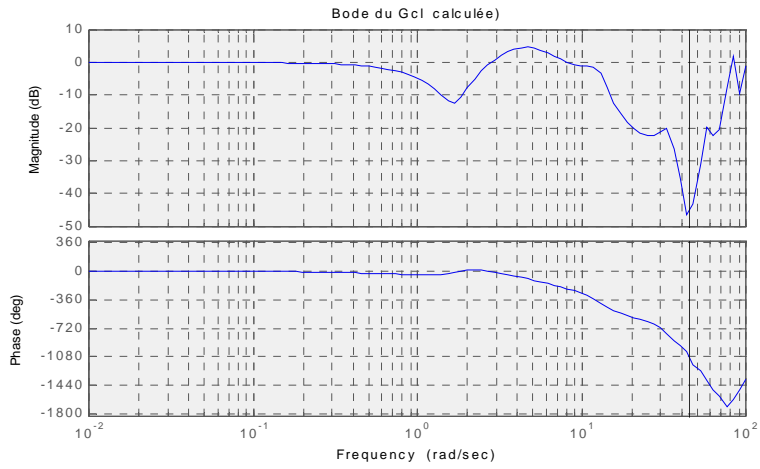


Fig.V.8. Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée

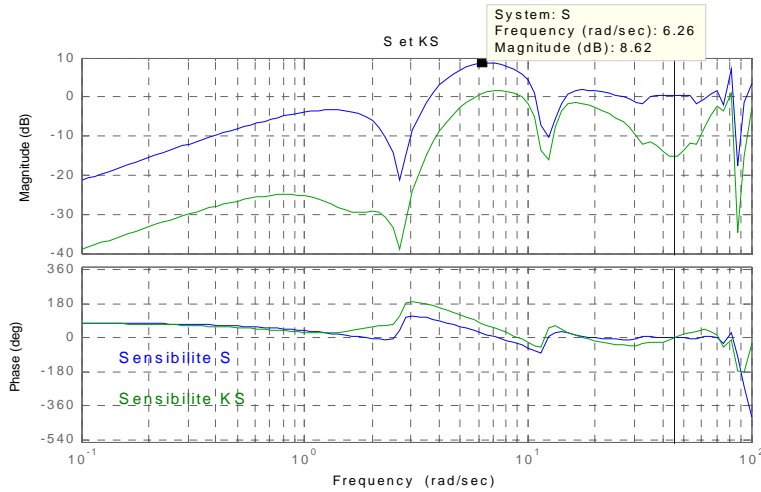


Fig.V.9. Diagramme de Bode des fonctions sensibilités

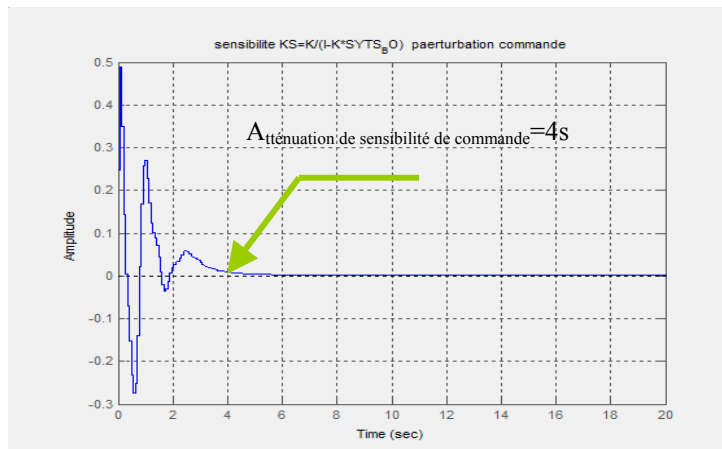


Fig.V.10. Réponses du sensibilité en commande

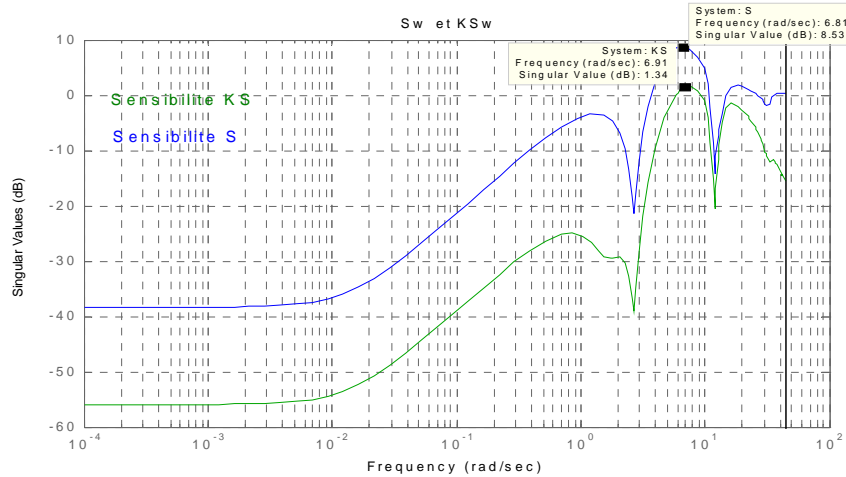


Fig.V.11. Diagramme de Bode des valeurs singulières fonctions sensibilités

On remarque sur la figure V.11. l'allure de la fonction de sensibilité perturbation-sortie $S(j\omega)$ (en bleu) que leur maximum est inférieur ou égal à 8.57db au delà de 6.5rd/sec, alors $\overline{\sigma}[S(j\omega)] = 8.57\text{db} < |w_3^{-1}| = 9.18\text{db}$, et le maximum de la fonction de sensibilité perturbation-commande $KS(j\omega)$ (en vert) est inférieur ou égal à 1.64db, au delà de 6.5rd/sec, alors $\overline{\sigma}[KS(j\omega)] = 1.64\text{db} < |w_2^{-1}| = 14\text{db}$; donc le cahier des charges est satisfaisant.

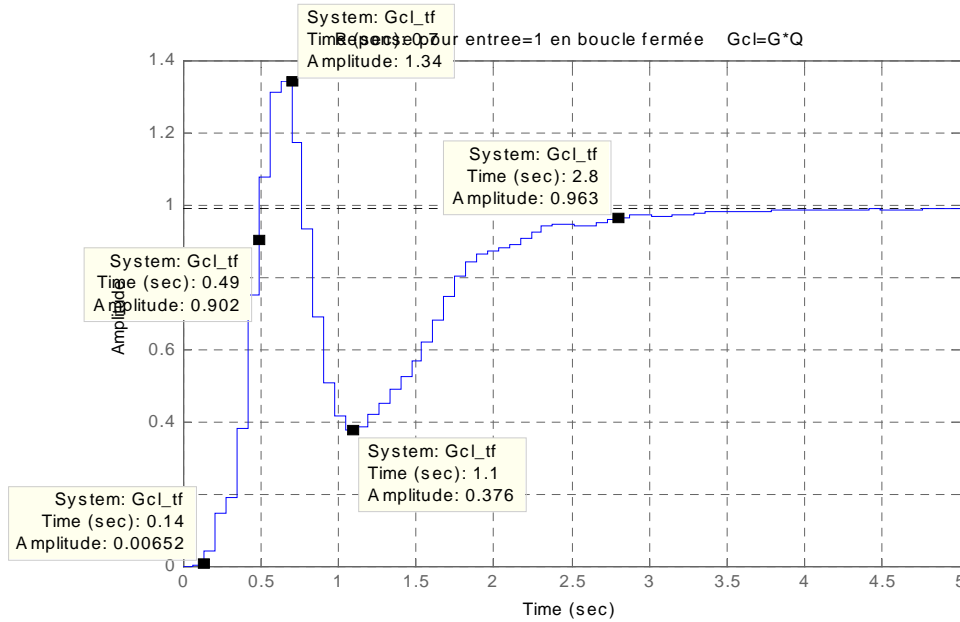


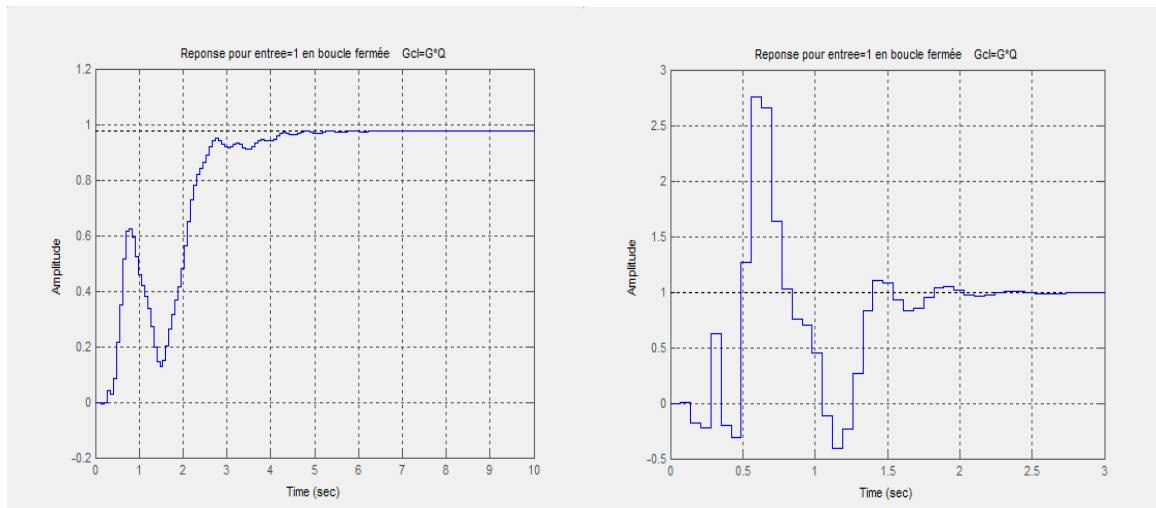
Fig.V.12. Réponse du système en boucle fermée

On constate une bonne réponse du système, un bon suivi de la réponse de référence face à un échelon à l'entrée, un bon temps de réponse est inférieur à 2.8s et un premier dépassement qui est inférieur à $Dép=1.35$ db, le cahier des charges est satisfaisant.

Important :

1. Il est important d'être conscient de la taille du problème d'optimisation devient rapidement grande et qu'il faut donc limiter le mot « multiobjectif » (diminuer « économiser » le nombre de critères à optimiser), 'optimiser' la formulation LMI à poser ; pour lever la difficulté et réduire le conservatisme
2. le choix du correcteur initial est très important joue un grand rôle pour satisfaire le cahier des charges et une meilleure réponse.
3. On a la liberté de choisir un correcteur initial (F et L les deux gain de l'observateur et de retour d'état) librement de telle sorte que (A-BF) et (A-LC) soient stables .

Si on choisi d'autre cas des gains d'observateur et de retour d'état tel que (A-BF) et (A-LC) soient stables ; autant que de prendre en considération l'absence et la présence de la forte contrainte sur le temps de réponse sur le même système on obtient les réponses suivantes :



1^{er} cas

2^{ème} cas

Fig.V.13. Les réponses du systèmes avec les deux cas du correcteurs 1^{er} cas , 2^{ème} cas .

Cette vision de la synthèse en terme d'optimisation nécessite de revisiter une approche de l'optimalité qui a été définie par Pareto qui traduit intuitivement par la figure V.13. dans les cas

ou les deux objectifs se fait au détriment de l'autre et que la solution optimale (résolution du problème convexe par LMI) est un compromis entre les deux, autrement dit lorsque l'on veut traiter un problème dont les objectifs sont contradictoires il est nécessaire de se contenter d'un compromis entre ces différents objectifs ; par exemple, un problème de base dans la commande d'un système oscillant est le compromis à faire entre la rapidité et l'amortissement. Problème de Pareto (entre le temps de réponse et le premier dépassement) figure V.14.

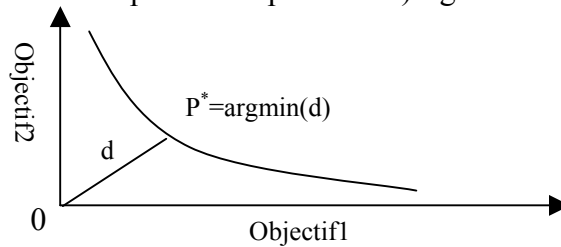


Fig.V.14. Interprétation du problème de Pareto

VI. CONCLUSION :

Dans ce chapitre nous avons illustré une approche méthodologique pour résoudre le problème de synthèse multicritère, et de rechercher un correcteur par retour de sortie statique stabilisant le système bouclé dont les critères pris en compte sont de type H_2 , H_∞ et α -stabilité ; d'une façon générale il y a d'autres critères qui peuvent être aisément être traités de la même manière pour lesquels il existe une formulation par inégalité matricielle, l'obtention des formulations LMI est un « art de manipulation matricielle », en utilisant les outils techniques pour le critère considéré pour le rendre en inégalité affine.

L'utilisation de la paramétrisation de Youla permet de transformer le problème de synthèse en un problème d'optimisation sous contraintes LMI, tandis que la formulation d'un correcteur initial sous forme observateur/retour d'état permet de limiter l'ordre du correcteur final(ordre nominal) .

Le principal avantage de LMI est pouvoir combiner différents critères de manières séparées pour s'affranchir des éventuels couplage non désirés c'est pourquoi des synthèse H_2/H_∞ ont trouvée leur immense place dans ce formalisme.

Finalement ; Différent points pourraient faire l'objet d'investigation supplémentaire à la suite de ces résultats, on peut rechercher un correcteur dynamique sur le choix de la dynamique du paramètre de Youla. La solution sous optimale ainsi trouvée avec un paramètre de Youla statique peut être considérablement améliorée en une solution optimale (rapprochée) en utilisant un paramètre de Youla dynamique.

Conclusion générale

l'optimisation LMI

CONCLUSION GENERALE :

L'objectif de ce travail est de rechercher un correcteur stabilisant un système via la résolution d'un problème convexe sous contraintes LMI, tout en respectant un cahier de charges définit les spécifications sur les sensibilités, rejet/atténuation de perturbation, le temps de réponses du système qui peuvent être représentés par des critères de type H_2 et H_∞ et α -stabilité ; et également d'assurer la stabilité en boucle fermée.

On a commencé d'illustrer la commande H_∞ et la commande H_2 , nous avons essayé de donner la démarche nécessaire pour calculer un contrôleur H_2 et un contrôleur H_∞ qui sont caractérisés par la résolution des équations de Riccati (ARE) ;

Ensuite, nous avons défini la paramétrisation de Youla qui nous permet d'accéder à l'ensemble des correcteurs stabilisants la boucle fermée via le paramètre Q , l'introduction du Q -paramètre consiste à trouver un correcteur qui minimise un critère donné, on a abouti à un problème d'optimisation convexe. Pour résoudre ce problème on a utilisé la résolution du problème convexe sous contraintes LMI.

En premier on a essayé d'englober les outils techniques pour la formulation des contraintes LMI qui consistent à traduire les contraintes par des inégalités matricielle et tenter ensuite de les rendre affine en fonctions des variables d'optimisations. Une fois que le problème LMI est identifié, il sera résolu en appelant l'un des trois solveurs appropriés de LMI qui sont : Solution de faisabilité, solution d'une minimisation d'une fonction de coût linéaire, solution par minimisation des valeurs propres généralisées. Ceux-ci constituent le moteur informatique de la boîte à outil de commande LMI. Une lumière d'éclaircissement a été donnée pour ces solutions par un exemple illustratif : Minimisation d'un disque sur un polyèdre, et de tirer la conclusion que la demande d'une solution globale nécessite l'utilisation du solveur minimisation d'une fonction coût linéaire.

Dans l'étape suivante on a défini les caractérisations matricielles pour les trois critères cités ci-dessus, qui ont une immense utilisation dans le domaine d'automatique H_∞ , H_2 et α -stabilité. Ceci a été fait pour les deux cas suivants : Retour de sortie et retour d'état. Enfin on a illustré cette synthèse par un exemple d'application : Contrôle de la vitesse lecture/écriture de la tête du disque dur.

La résolution du problème convexe sous contraintes LMI a été démontré par un exemple d'application système Bras flexible. Avec cet exemple on a fait l'étude de la synthèse

multiobjective via la paramétrisation de Youla statique sous un correcteur initial Observateur/régulateur.

☞ La démarche qui consiste à traiter un problème de commande par un problème d'optimisation :

1. Formulation du problème de synthèses sous forme d'un problème d'optimisation : définition d'un objectif et de contraintes, sans faire oublier la vérification de la convexité du problème (les critères choisis) à optimiser.
2. Modification du problème d'optimisation pour se ramener à une formulation convexe de dimension finie que l'on sera résoudre numériquement , autrement dit traduire les critères sous forme de problème d'optimisation convexe.
3. Reconstruction de la loi de commande

☞ L'optimisation sous contrainte LMI a montré son efficacité dans nombreux domaines d'ou le raisonnement en terme de conception, la particularité de résoudre numériquement un problème lorsque le problème est analytiquement non résolvable, et comme un grand atout c'est de mélanger de divers caractéristiques et objectifs (fréquentielle ou temporelle) qui dépassent les techniques de résolution classiques. La LMI permet de mise en place informatique autant d'éléments délicats.

☞ Cependant, elle souffre des défauts des ces avantages, en effet, le formalisme LMI, grâce aux algorithmes actuels performants (point intérieur, ellipsoïde,...) permet de résoudre un certain problème avec des temps de calculs raisonnables or deux problème important persistent :

1. Dès que la taille d'optimisation grandit(le nombre de variables d'optimisation, le nombre des inégalités contraintes, le nombre de variables à minimiser, la représentation des contraintes (la taille du modèle choisi), les solveurs numériques peuvent se révéler inefficaces ou de demander des temps de calculs inacceptables.
2. En transformant le problème initial en un problème d'optimisation LMI, on peut être amené à résoudre un problème plus contraint et la méthode induit donc du conservatisme.

LISTE DES FIGURES

Fig.I.1.	Norme H_∞ gain de Bode maximum	05
Fig.I.2.	Critère de stabilité.....	05
Fig.I.3.	Représentation générale d'un système bouclé soumis à des perturbations	06
Fig.I.4.	Représentation d'un système de régulation	07
Fig.I.5.	Allure de la fonction $m(\omega)$	07
Fig.I.6.	Contraintes sur le lieu de Bode du système en boucle ouverte	08
Fig.I.7.	Sensibilité en sortie	09
Fig.I.8.	Sensibilité en entrée	09
Fig.I.9.	Schéma fonctionnel représentant le problème standard	10
Fig.I.10.	Système en boucle fermée	11
Fig.I.11.	Représentation du système augmenté	13
Fig.I.12.	Structuration du correcteur H_∞	15
Fig.I.13.	Organigramme de calcul du correcteur Hinfini	16
Fig.I.14.	Système en boucle fermée avec KH2	16
Fig.I.15.	Structuration du correcteur H2	18
Fig.II.1.	Interconnexion $P * K$	20
Fig.II.2.	Principe de la paramétrisation de Youla	21
Fig.II.3.	Boucle fermée classique (avec retour positif)	21
Fig.II.4.	Forme générale de la paramétrisation de Youla	23
Fig.II.6.	Paramétrisation de Youla pour un système stable	26
Fig.II.7.	Paramétrisation de Youla pour un système stable Structure par modèle interne	26
Fig.II.8.	Exemple de contrainte temporelle	29
Fig.III.1.	Structure de commande à retour d'état observé	33
Fig.III.2.	Représentations des différents système MIMO	34
Fig.III.3.	Structure d'état de l'observateur/ régulateur	34
Fig.III.4.	La paramétrisation de Youla et régulateur /observateur	35
Fig.III.5.	Réécriture de la paramétrisation de Youla	36
Fig.III.6.	Réécriture de la paramétrisation de Youla (2)	36
Fig.III.7.	Structure dus système Jd'interconnexion	37
Fig.III.8.	Structure régulateur /observateur avec Q-paramétrisation de Youla statique	38
Fig.IV.1.	Organigramme de teste de faisabilité	45
Fig.IV.2.	Bloc diagramme du système augmenté	51
Fig.IV.3.	Rejet de perturbation	51
Fig.IV.4.	Réponse du système	52
Fig.V.1.	Le bras flexible	67
Fig.V.2.	Modèle de connaissance du système	68
Fig.V.3.	Système augmenté du bras flexible	69
Fig.V.4.	La réponse et diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte	70
Fig.V.5.	Diagramme de Bode des fonctions de pondération	71

Fig.V.6. Diagramme de Bode de la fonction du correcteur	71
Fig.V.7. Rejet de perturbations	71
Fig.V.8. Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée	72
Fig.V.9. Diagramme de Bode des fonctions sensibilités	72
Fig.V.10. Réponses de la sensibilité en commande	72
Fig.V.11. Diagramme de Bode des valeurs singulières des fonctions de sensibilités	73
Fig.V.12. Réponse du système en boucle fermée	73
Fig.V.13. Les réponses du système avec les deux cas des correcteurs	74
Fig.V.14. Interprétation du problème de Pareto	75

MEMOIRE

N° d'ordre :
N° de série :

Présenté en vu de l'obtention du diplôme
de Magistère en Electronique

THEME

**Contrôle Multiobjectif Via
la Parametrisation de
Youla
et l'Optimisation LMI**

OPTION :

Contrôle

Présenté Par :

ZIANI Salim

SOUTENU LE 28 / 11 / 2006

Devant le jury :

<i>Président</i>	<i>: M^r Belarbi Khaled</i>	<i>Professeur</i>	<i>Univ. Constantine</i>
<i>Encadreur</i>	<i>: M^r Filali Salim</i>	<i>Professeur</i>	<i>Univ. Constantine</i>
<i>Examineurs</i>	<i>: M^r Bennia Abdelhak</i>	<i>Professeur</i>	<i>Univ. Constantine</i>
	<i>M^r Benalla Hocine</i>	<i>Professeur</i>	<i>Univ. Constantine</i>

RÉFÉRENCES

- [1] S. Boyd, C. Barrat, S. Norman; Linear controller design : limits of performance via convex optimization, IEEE Transaction on Automatic Control, March (1988).
- [2] M.C. De Olivier, J.C. Geromel, J. Bernusson, An LMI optimization approach to multiobjective and robust H controller design for discrete-time systems, Rapport LAASN°99124, Mars (1999).
- [3] S. Boyd, V. Balaskrishnan, E. Feron, L. El Ghaoui, Control system and synthesis via linear Matrix Inequalities, American Control Conference, San Fransisico, (1993).
- [4] V. Balakrichnan, L. Vandenberghe, Connections between duality in control theory and convex optimization, Proceeding of the American Control Conference, (1995).
- [5] J Maciejowski, Multivariable feedback design; Addison-Wesley, Wokingham, England, (1989).
- [6] G. Duc, S. Font , Commande H^∞ et μ -analyse : Des outils pour la robustesse, Hermès, (1999).
- [7] B. Clement , G. Duc; Synthèse multicritère utilisant la paramétrisation de Youla et l'optimisation convexe, Hermès, (2001)
- [8] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis, State-space solutions to standard H_2 and H^∞ control problems, IEEE Transactions on Automatic Control;V.34, August (1989).
- [9] B. Clement, S. habaieb, G. Duc, S. Font, Paramétrisation de Youla : Application à la commande robuste par optimisation convexe, Journal Européen des Systèmes Automatisés, numéro spécial Commande robuste multivariable, février , (2001).

-
- [10] A. Oustaloup, La robustesse : analyse et synthèse de commande robuste, Hermès, (1994).
- [11] L.E. Ghaoui, « Commande robuste », Décision et commande en présence d'incertitude, ENSTA, Paris, Nov. (1997).
- [12] P. Gahinet and P. Apkarian, "State-Space H_∞ control : A Complete Solution via Convex Riccati Inequalities", Rapports de recherche. INRIA , N°1712, juin (1992).
- [13] J.C. Doyle , Lecture Notes ONR/Honeywell Workshop on advances in multivariable control, (1984).
- [14] R. D'Andrea, LMI approach to mixed H_2 and H_∞ performance objective controller design, IFAC World Congress, (1996).
- [15] P. Rodríguez, D. Dumur, " Robustification of GPC controlled system by convex optimization of the Youla parameter ", Proceedings IEEE Conference on Control Applications, Glasgow, Septembre 2002.
- [16] D.J. Fowell, R.A. Bender, Computing the estimator-controller form a compensator, Internationnal Journal of Control,V.41, (1985).
- [17] Pascal Gahinet , Arkadi Nemirovski, Alan J. Laub, Mahmoud Chilali; LMI Control Toolbox For Use with MATLAB User's Guide Version 1.
- [18] M. Chilali, P. Gahinet, H_∞ design with pole placement constraints : an LMI appraoch, IEEE Transaction on Automatic Control,V.41, (1996)..
- [19] Gahinet, P., and P. Apkarian, "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, N°4 (1994).
- [20] Henrion D.: LMI optimization for fixed-order H_∞ controller design. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, Hawaii, (2003).

- [21] G. Scorletti; Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI, Thèse Doctorat, Univ. Paris XI et Supélec, juin (1997).
- [22] B. Clément, “ Utilisation de la Paramétrisation de Youla pour la commande ”, Service Automatique de Supélec, Groupe Commande Robuste, mars (2000).
- [23] I.D. Landan, C. Cyrot, D. Rey et J. Barnier; Régulation numérique robuste d'un bras manipulateur souple. Banc d'essai comparatif de différentes méthodes. Hermès,(1996).
- [24] B. Clément, G. Duc; Multiobjective Control via youla parameterisation and LMI optimisation : application to flexible arm, IFAC Symposium on Robust Control and Design, Prague, juin (2000).
- [25] B. Clément, G. Duc, “ Flexible ARM multiobjective control via Youla parameterization and LMI Optimization ”, 3rd IFAC Rocond – Prague, June 2000.

Résumé

Dans ce mémoire on a fait la synthèse d'un correcteur stabilisant suivant les conditions d'un cahier de charges dictés par deux approches :

Dans la première : On a cherché un correcteur par la résolution d'une série d'équations de Riccati ; nous permettant le calcul d'une commande H_∞ et d'une commande H_2 .

Dans la deuxième qui est la plus intéressante de notre travail ; on a cherché un correcteur par la résolution convexe sous contraintes LMI. Cette résolution d'un problème de commande par un problème d'optimisation convexe nécessite une démarche suivante :

- ☞ formulation du problème de synthèse sous forme de problème d'optimisation, définition des contraintes par des inégalités matricielles et on a présenter les outils techniques pour la formulation
- ☞ modification du problème afin de rendre le problème convexe (problème d'affinage des inégalités matricielles) on a donné les outils et les techniques de linéarisation du problème ; une fois la LMI est indiquée on a présenté les trois solutionneurs de LMI.
- ☞ La phase finale est la reconstruction du correcteur.

Finalement on a donné une définition et solution d'un problème multiobjectif sous contraintes LMI l'approche est appliquée sur un système Bras flexible .

Abstract:

In this work we study two approaches for the design of a controller

In the first approach: We solve a series of Riccati equations to design H^∞ and H_2 controllers.

In the second approach the controller is designed the LMI formalism, this approach require the following steps:

- ☞ Formulation of the problem of design in the form of problem of optimization, definition of the constraints by matrix inequalities and definition the technical tools for the formulation
- ☞ Modification of the problem to make the problem convex (problem of linearization of the matrix inequalities), we gave the tools and the techniques for linearization of the problem; once the LMI is defined one introduced the three solvers of LMI.
- ☞ The final phase is the rebuilding of the control.

Finally we gave a definition and solution of a multiobjective problem under constraints LMI the approach is applied to a flexible system arm.
