

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MENTOURI DE CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT ES SCIENCES

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : CONTRÔLE

Par :

Samir LADACI

THEME

CONTRIBUTION A LA COMMANDE ADAPTATIVE
D'ORDRE FRACTIONNAIRE

DEVANT LE JURY :

Président	A. BENNIA	<i>Professeur, Université de Constantine</i>
Rapporteur	A. CHAREF	<i>Professeur, Université de Constantine</i>
Examineurs	N. MANSOURI	<i>Professeur, Université de Constantine</i>
	B. CHERKI	<i>Maître de Conférence, Université de Tlemcen</i>
	Z. AHMIDA	<i>Maître de Conférence, Université de Skikda</i>
Membre Invité	J.J. LOISEAU	<i>Directeur de Recherches, IRCCYN, Ecole Centrale de Nantes, France</i>

ANNÉE : 2007

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

" إقرأ بِإِسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ * خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ * إقرأ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ * عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ * "

{ صدق الله العظيم }

A mes parents,

A ma femme,

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Monsieur Abdelhak Bennia d'avoir accepté la présidence de mon jury de thèse, ainsi que Madame Noura Mansouri, Monsieur Brahim Cherki, Monsieur Zahir Ahmida et Monsieur Jean Jacques Loiseau de m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Abdelfatah Charef de m'avoir encadré durant ces années de doctorat en étant toujours disponible et encourageant, pour son aide et conseils et pour ses grandes valeurs humaines.

J'adresse mes remerciement à toute l'équipe commande et au personnel du laboratoire IRCCYN - Nantes pour m'avoir accueilli pendant plusieurs mois, et notamment Jean Jacques Loiseau pour ces encouragements et les discussions scientifiques dont il m'a fait l'honneur. Mes remerciements vont aussi à Michel Malabre qui m'a constamment aidé à améliorer mes travaux, malgré le peu de temps que lui laissaient ses responsabilités au niveau du laboratoire, pour les discussions et l'assistance qu'il m'a apporté et particulièrement pour sa lecture de ce manuscrit.

J'adresse un grand merci à mon ami et collègue Smaine Mazouzi, pour son inestimable aide à la mise en forme de ce manuscrit. Merci à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études. Je ne peux conclure sans un mot de remerciement à tous mes enseignants tout le long de ma formation : à mes professeurs du lycée Tarek Ibn Ziad à Constantine, à mes enseignants de l'Ecole Polytechnique d'Alger et spécialement Monsieur Rachid Illoul, mes enseignants et mes amis de l'université de Annaba ainsi que tous ceux que j'ai eu le plaisir et l'honneur de connaître à l'université Mentouri de Constantine, leur amitié, leurs conseils et leurs expériences m'ont été très utiles.

Je n'oublierai pas de remercier ma femme Dalel pour sa patience et son soutien et son aide dans les moments difficiles. Enfin, un grand merci à mes parents et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien.

Table des matières

Remerciements	vii
1 Introduction Générale	1
2 Systèmes d'ordre fractionnaire	7
2.1 Introduction	7
2.1.1 Historique	9
2.1.2 Applications du calcul d'ordre fractionnaire	10
2.1.3 Systèmes de commande d'ordre fractionnaire	11
2.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire	12
2.2.1 Définitions fondamentales	12
2.2.1.1 Définition de Riemann-Liouville	12
2.2.1.2 Définition de Caputo	13
2.2.1.3 Définition de Gröndwald-Leitnikov	14
2.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	14
2.2.3 Evaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire	15
2.2.3.1 Approximation des formules de Riemann-Liouville	15
2.2.3.2 Approximation des formules de Gröndwald-Leitnikov	16
2.2.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	17
2.2.4.1 Éléments de base de la Transformée de Laplace	17
2.2.4.2 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	18
2.2.4.3 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	19
2.3 Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire	20
2.3.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation	22

2.3.1.1	Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrodifférentiels d'ordre fractionnaire	23
2.3.1.2	Méthode de Carlson	23
2.3.1.3	Méthode de Matsuda	23
2.3.2	Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification	24
2.3.2.1	Méthode d'Oustaloup	24
2.3.3	Méthode de Charef : Fonction de singularité	25
2.4	Réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire	29
2.4.1	Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles	29
2.4.1.1	Intégration d'ordre fractionnaire	29
2.4.1.2	Dérivée d'ordre fractionnaire	31
2.4.2	Implémentation par des circuits électriques analogiques	33
2.4.2.1	Intégration d'ordre fractionnaire	33
2.4.2.2	Dérivée d'ordre fractionnaire	34
2.5	Systèmes de commande d'ordre fractionnaire	35
2.5.1	Processus d'ordre fractionnaire	35
2.5.2	Fonction de transfert idéale de Bode	36
2.5.3	Fonctions et matrices de transfert d'ordre fractionnaire	37
2.5.4	Représentation d'état d'ordre fractionnaire	39
2.5.5	Observabilité, commandabilité et stabilité des processus fractionnaires	41
2.5.6	Réponses temporelles par les fonctions de type Mittag-Leffler	42
2.5.7	Performances des systèmes d'ordre fractionnaire	44
2.6	Conclusion	45
3	Eléments de Commande Adaptative	47
3.1	Introduction	47
3.2	Régulateurs Adaptatifs Déterministes	49
3.2.1	Modèle du processus	49
3.2.2	Poursuite de modèle	51
3.2.3	Conditions de causalité	52
3.3	Commande Auto-Ajustable	54

3.3.1	Commande Auto-Ajustable Indirecte	54
3.3.1.1	Estimation	54
3.3.2	Commande Auto-Ajustable Directe	56
3.3.2.1	Système à phase minimale	57
3.4	Commande Adaptative à Modèle de Référence	59
3.4.1	Loi de M.I.T.	60
3.4.2	Réalisation du Régulateur SAMR	62
3.4.2.1	Structure du Régulateur	63
3.4.2.2	L'erreur de modèle	63
3.5	CAMR robuste avec feedforward	65
3.5.1	Introduction	65
3.5.2	Notion de Robustesse	65
3.5.3	Définitions de base	67
3.5.4	Principe de la CAMR robuste avec feedforward	68
3.5.5	Conclusion	69
3.6	Commande Adaptative à Grand Gain	70
3.6.1	Introduction	70
3.6.2	Problème de stabilité	70
3.6.3	Quelques définitions utiles	71
3.6.4	Stabilité de la commande à grand gain	72
3.6.5	Conclusion	72
3.7	Régulateur PI adaptatif	72
3.7.1	Introduction	72
3.7.2	Stratégie de commande	74
3.7.3	Analyse de la stabilité	75
3.8	Conclusion	80
4	Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire	81
4.1	Introduction	81
4.2	Commande adaptative à modèle de référence fractionnaire	84
4.2.1	Commande Auto-ajustable directe à modèle fractionnaire	84
4.2.1.1	Algorithme auto-ajustable direct d'ordre fractionnaire	84
4.2.1.2	Application à l'asservissement d'un bras flexible	88

4.2.1.3	Commentaires	91
4.2.1.4	Conclusion	93
4.2.2	CAMR avec modèle fractionnaire	94
4.2.2.1	Introduction	94
4.2.2.2	Stratégie de commande	94
4.2.2.3	Exemple de simulation : Commande en vitesse d'un mo- teur à CC	96
4.2.2.4	Commentaires	98
4.2.2.5	Conclusion	98
4.3	CAMR avec intégration d'ordre fractionnaire	100
4.3.1	Introduction	100
4.3.2	Stratégie de commande	100
4.3.3	Simulations et commentaires	101
4.3.3.1	Simulations	101
4.3.3.2	Commentaires	102
4.3.4	Conclusion	104
4.4	CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire en feedback	105
4.4.1	Introduction	105
4.4.2	Stratégie de commande	105
4.4.3	Simulations et commentaires	107
4.4.3.1	Résultats pour un système SISO de premier ordre	107
4.4.3.2	Résultats pour un système SISO de second ordre	107
4.4.3.3	Etude de la robustesse par rapport aux bruits	111
4.4.4	Conclusion	114
4.5	CAMR robuste avec feedforward d'ordre fractionnaire	115
4.5.1	Introduction	115
4.5.2	Stratégie de Commande	115
4.5.3	Simulations et commentaires	115
4.5.3.1	Cas du feedforward d'ordre entier	116
4.5.3.2	Cas du feedforward d'ordre fractionnaire	116
4.5.3.3	Commentaires	116
4.5.4	Conclusion	119

4.6	Conclusion	120
5	Commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire	123
5.1	Introduction	123
5.2	Stabilité de la Commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire	125
5.2.1	Introduction	125
5.2.2	Aspects mathématiques	125
5.2.3	Problème de stabilité	126
5.2.4	Résultat principal	127
5.2.5	Preuve du résultat principal	128
5.2.6	Exemple de simulation	132
5.2.7	Conclusion	133
5.3	Commande Adaptative $PI^\lambda D^\mu$	134
5.3.1	Introduction	134
5.3.2	Régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ	134
5.3.2.1	Stratégie de commande	134
5.3.2.2	Exemple d'application du régulateur PI^λ	135
5.3.3	Régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$	139
5.3.3.1	Stratégie de commande	139
5.3.3.2	Exemple d'application du régulateur $PI^\lambda D^\mu$	140
5.3.4	Conclusion	144
5.4	Conclusion	145
6	Conclusion Générale	147
	Annexes	151
A	Propriétés de la fonction Gamma	153
B	Fonctions de type Mittag-Leffler	155
	Bibliographie	157

Table des figures

2.1	Diagramme de Bode de $1/(1 + s/p_T)^\beta$	26
2.2	Comment choisir les singularités pour l'approximation en maintenant un écart constant entre la ligne à -20β dB/dec et les lignes droites en zig-zag.	27
2.3	Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire	34
2.4	Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire	35
2.5	Régulateurs PID et $PI^\lambda D^\mu$	35
2.6	Boucle idéale de Bode	37
2.7	Tracé de Bode de la fonction de transfert idéale	38
2.8	Réponses indicielles comparatives (Fractionnaire/Entier)	45
3.1	Procédure de choix du régulateur à utiliser	48
3.2	Un régulateur linéaire général à deux degrés de liberté	50
3.3	Schéma-bloc d'un Système Adaptatif à Modèle de Référence (SAMR)	60
3.4	Algorithme classique d'Adaptation.	61
3.5	Feedforward simple dans le schéma de CAMR.	69
3.6	Le régulateur adaptatif PI d'un système perturbé	73
3.7	Système de commande PI adaptative	74
3.8	Système en boucle fermée équivalent où $v = \dot{u}$ et $z = \dot{y} + \alpha y$	76
4.1	Schéma-bloc de la régulation auto-ajustable	85
4.2	Dispositif expérimental du bras flexible	88
4.3	Diagramme de Bode du transfert du bras flexible pour les différentes charges	90
4.4	Estimation des paramètres du régulateur auto-ajustable dans le cas du bras sans charge	91
4.5	Réponse du bras pour différentes valeurs de la charge	92
4.6	CAMR directe à modèle d'ordre fractionnaire	95

4.7	Réponse de la CAMR avec modèle de référence d'ordre entier	99
4.8	Réponse de la CAMR avec modèle de référence d'ordre fractionnaire	99
4.9	Algorithme d'adaptation avec Intégration d'ordre fractionnaire.	101
4.10	Evolution du gain d'adaptation γ en fonction de l'ordre d'intégration λ	102
4.11	CAMR avec intégration d'ordre fractionnaire	103
4.12	Algorithme d'adaptation utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire de la sortie	106
4.13	CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 1er ordre.	108
4.14	CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus de 2nd ordre.	110
4.15	Algorithme d'adaptation équivalent.	111
4.16	Sortie du processus non perturbé.	113
4.17	Sortie du processus en présence de bruits aléatoires à la sortie	113
4.18	Sortie du processus en présence de bruits aléatoires à l'entrée	113
4.19	Sortie du processus avec feedforward d'ordre entier	117
4.20	Sortie du processus avec feedforward d'ordre fractionnaire	118
5.1	Sortie de l'algorithme de commande adaptative à grand gain pour différentes valeurs de α	133
5.2	Régulateur Adaptatif PI^λ ou $PI^\lambda D^\mu$ de systèmes perturbés	134
5.3	Système de commande adaptative d'ordre fractionnaire PI^λ	135
5.4	Réponse du système de commande PI^λ pour différentes valeurs de λ	136
5.5	Critère de l'erreur quadratique en fonction de λ	138
5.6	Réponse de la sortie pour $\lambda = 1.6$	139
5.7	Système de commande adaptative d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$	141
5.8	Réponses de la sortie pour différentes valeurs du couple (λ, μ)	143
5.9	Réponse de la sortie pour le couple $(\lambda, \mu) = (1.5, 1.2)$	144

Liste des tableaux

4.1	Coefficients des fonctions de transfert du bras flexible	89
4.2	Comparaison des deux algorithmes adaptatifs par un critère de l'erreur quadratique	114

Chapitre 1

Introduction Générale

Depuis quelques décennies, le monde industriel a connu un énorme développement technologique, sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants en qualité et en performances. Les industriels ont été amenés à s'intéresser et à s'impliquer dans la recherche automatique et à suivre les dernières nouveautés des techniques de la commande et de régulation qui participent d'une manière essentielle à améliorer l'efficacité des processus de production, la qualité des produits et la rentabilité.

Cet essor technologique et industriel est dû pour beaucoup au grand saut qualitatif qu'a connu l'outil informatique logiciel et matériel, notamment depuis l'apparition des microprocesseurs et leur banalisation, ce qui a permis de rendre possible l'application des méthodes et des techniques considérées jusque là comme purement théoriques. Cela est dû aussi au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que l'analyse numérique, et la théorie des systèmes ce qui a permis de mettre en oeuvre des méthodes et des approches très complexes pour la commande des systèmes.

Le sujet de cette thèse se place dans ce contexte car il traite d'un domaine dont les origines théoriques sont très anciennes alors que son développement et ses applications sont très récents. Intitulé "*Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire*", il a pour but d'améliorer les performances des systèmes de commande adaptative classique par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans les algorithmes de contrôle.

Calcul fractionnaire ...

L'une des théories qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénierie, le *Calcul Fractionnaire* dont les premières prémices datent de plus de trois siècles (voir historique à la section 2.1.1). Au début c'était presque un jeu de l'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire, permettant le calcul de la dérivée d'une fonction différentiable $f(t)$,

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \quad (1.1)$$

où α serait un réel non nécessairement entier, voire un nombre complexe.

Il est clair que jusqu'à une période très récente, une telle notion mathématique n'avait aucune explication réelle ou pratique. Ce n'est qu'au début des années 1950 que Van Der Ziel [162] dans ses recherches sur les spectres de bruit des semiconducteurs, puis Davidson et Cole [36] dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides, ont pu mettre à jour des phénomènes naturels dont les modèles faisaient appel à la dérivée d'ordre fractionnaire.

Depuis ces découvertes, beaucoup de travaux de recherche scientifique ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt en mathématique, en traitement du signal et en automatique [41, 43, 87, 123, 133, 101, 149]. Les applications concernent des domaines très variés des sciences physiques, tels que la mécanique, l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, la modélisation, l'identification aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel et notamment la commande des processus, la mécatronique et la robotique [55, 140, 156].

Commande d'ordre fractionnaire

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup [125]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, en imposant un gabarit fractionnaire au système de commande en boucle fermée. La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variantes de cette commande ont vu le jour (1ère, 2ème

et 3ème générations) et des applications aussi bien en laboratoire qu'en industrie ont été développées.

La commande d'ordre fractionnaire venait de naître, et elle captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. Podlubny en 1999 proposa son régulateur $PI^\lambda D^\mu$ comprenant une intégration fractionnaire d'ordre λ et une dérivation fractionnaire d'ordre μ , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande.

Commande adaptative ...

L'une des techniques de commande qui a connu une grande notoriété, est la commande adaptative, qui comme son nom l'indique, consiste à adapter le régulateur en ligne aux variations du procédé régulé pour assurer une qualité constante de performances. Les processus commandés sont totalement inconnus (systèmes boîtes noires) ou partiellement inconnus, ou des systèmes dont les paramètres varient dans le temps.

Un travail de recherche considérable sur la *commande adaptative* a été effectué depuis le début des années 1950. La première motivation fut la commande des avions de hautes performances qui opéraient sur une large plage de vitesses et d'altitudes. Cependant, seules des méthodes basées sur le domaine fréquentiel étaient disponibles alors, et ils ne suffisaient pas à résoudre tous les problèmes de commande adaptative. Durant les vingt années suivantes, d'importantes contributions théoriques ont vu le jour (approche d'espace d'état, théorie de la stabilité, théorie de Liapounov, programmation dynamique de Bellman) [10, 113].

Cependant il n'y a pas de classification commune des concepts adaptatifs existant dans la littérature, à cause du fait que beaucoup de régulateurs adaptatifs sont basés sur des mixtures de différentes approches.

Nous pouvons établir une liste (incomplète) des concepts dominants comme suit :

- *La programmation de gain* était l'un des premiers concepts adaptatifs. Elle consiste en un ensemble de régulateurs non-adaptatifs $C(\mu_i)$, où μ_i est l'indice d'une condition d'opération. Le régulateur adaptatif commute entre ces $C(\mu_i)$ selon le point de fonctionnement où se trouve le processus. Le problème est la transition entre les différents points.
- Dans *la commande adaptative à modèle de référence*, un modèle de référence décrivant les propriétés d'entrée/sortie est donné. Le système global consiste en une

boucle interne (processus et régulateur) et une boucle externe (boucle d'adaptation). Cette dernière permet d'ajuster les paramètres du régulateur pour que la sortie du processus suive asymptotiquement celle du modèle de référence.

- Dans la commande adaptative auto-ajustable, les paramètres du processus sont estimés par un algorithme récursif d'identification, et sur la base de ces estimations un régulateur "classique" est choisi. Ce dernier s'appelle aussi "principe d'équivalence certaine".
- La commande adaptative à grand gain est un schéma adaptatif non linéaire, où le régulateur dépend de la norme de la sortie du processus.

Parmi ces approches adaptatives de la régulation nous nous sommes essentiellement intéressés à la *commande adaptative à modèle de référence (CAMR)*, qui trouve un engouement certain dans le milieu industriel vu sa simplicité d'implémentation et son efficacité en pratique, ainsi que la *commande adaptative à grand gain* d'une classe de systèmes linéaires, dont la structure permet un auto-ajustement des paramètres du régulateurs.

Objectif de ce travail

Notre intérêt pour l'introduction de ces systèmes dans les schémas de commande adaptative a été motivé par les très bonnes performances des systèmes d'ordre fractionnaire relativement à celles des systèmes d'ordre entier [140, 154]. Dans la suite nous considérons l'introduction des opérateurs d'ordre non entier dans divers algorithmes de commande adaptative. Deux de ces schémas de commande adaptative à modèle de référence ont été développés précédemment ou en parallèle par d'autres auteurs : l'utilisation d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire a été proposé par Hadjili et al. en 1994 [54], et l'introduction d'un intégrateur d'ordre fractionnaire par Vinagre et al. en 2002 [167].

Nous proposons en outre de nouveaux algorithmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire comprenant l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans l'algorithme de commande adaptative à modèle de référence, de commande adaptative robuste et de commande adaptative à grand gain. L'idée du régulateur $PI^\lambda D^\mu$ adaptatif d'ordre fractionnaire est aussi le fruit de ce travail.

L'objectif de ces nouveaux algorithmes de commande adaptative est d'améliorer les performances des systèmes de commande de processus sur lesquelles peu d'informations sont disponibles.

Il est à noter que les processus considérés dans ce travail sont le plus souvent des systèmes SISO, mais les résultats obtenus peuvent être facilement généralisés aux cas MIMO.

Présentation de la thèse

Ce document est constitué de deux parties :

- La première partie, présente les définitions et les bases théoriques de ce travail de recherche. Elle comporte deux chapitres :
 - Le premier chapitre est une introduction au calcul fractionnaire et aux systèmes de commande d'ordre fractionnaire en général. Des concepts de base y sont répertoriés pour une bonne compréhension de la partie "résultats",
 - Le deuxième chapitre est dédié à la commande adaptative. Il introduit les définitions des schémas de commande adaptative concernés par ce travail de recherche.
- La deuxième partie, est la partie "Contribution" ou résultats, nous l'avons scindée en deux chapitres (Chapitres 3 et 4) selon le type de commande adaptative étudié :
 - Le chapitre 3 présente les résultats obtenus par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans la commande adaptative à modèle de référence. Plusieurs schémas de commande y sont proposés avec des exemples de simulation.
 - Le chapitre 4 traite de la commande adaptative à grand gain d'une classe de systèmes linéaires. La stabilité de ce schéma de commande (proposé dans cette thèse) est établie. Nous proposons par ailleurs de nouveaux régulateurs adaptatifs PI^λ et $PI^\lambda D^\mu$ basés sur la structure de régulation à grand gain, avec exemples et commentaires.

Enfin, une conclusion générale, présente une genèse des principaux résultats de cette thèse et les perspectives de ce travail de recherche.

Chapitre 2

Systemes d'ordre fractionnaire

2.1 Introduction

Bien que le calcul d'ordre fractionnaire soit un sujet ancien qui est apparu il y a trois siècles, la théorie mathématique de la dérivation d'ordre non entier a été développée principalement au 19ème siècle. Cependant l'intérêt des chercheurs en ingénierie au calcul d'ordre fractionnaire ne s'est manifesté qu'au milieu du vingtième siècle.

Davidson et Cole [36] ont découvert le phénomène de relaxation diélectrique dans certains liquides en 1951, et l'on exprimé sous la forme d'une équation dont le pôle est à puissance fractionnaire (PPF) :

$$X(s) = \frac{1}{(s + p_T)^\alpha} \quad (2.1)$$

La pente du Diagramme de Bode a été trouvée entre 0.550 et 0.666.

Van Der Ziel [162] avait trouvé le même phénomène dans ses recherches sur les spectres de bruit des semiconducteurs. Depuis, beaucoup de contributions sont venues développer la théorie et les application des systèmes d'ordre fractionnaire. Des livres récents [103, 118, 141, 147] sont de bonnes références dans ce domaine. Dans ce contexte il faut noter l'émergence de l'approche *diffusive* qui offre un outil mathématique puissant pour la modélisation des systèmes d'ordre non entier (voir les travaux de Montseny [106]).

L'un des problèmes qui ont un tant soit peu freiné le développement du calcul fractionnaire dans le passé est l'absence d'interprétation physique, en effet s'il n'y a aucun doute sur le sens géométrique des dérivées et intégrales d'ordre entier, tel n'est pas le cas pour les opérateurs d'ordre fractionnaire. Dernièrement, Machado [93] et Stanislavsky [151] ont

proposé une interprétation probabiliste, alors que Nigmatullin et Le Méhauté [115] proposaient un sens géométrique et physique pour les ordres complexes.

Cependant, l'application de cette théorie à la commande des systèmes dynamiques est beaucoup plus récente [91, 129, 130, 140, 144].

Pour les travaux pionniers concernant les systèmes de commande d'ordre fractionnaire, on peut citer en autres ceux de Manabe dès 1960 [96, 97], d'Oustaloup en 1981 [122], et d'Axtell et Bise en 1990 [11]. Dans la plupart des cas, l'objectif est d'appliquer une commande d'ordre fractionnaire pour améliorer les performances du système. Par exemple, comme dans la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) [126, 129, 130], le but est la robustesse fractale. La détermination de la plage de fréquences d'intérêt mène à une fonction de transfert d'ordre fractionnaire [128, 132] sur laquelle est basée la synthèse du régulateur CRONE. Dans ce régulateur, l'ingrédient principal est la dérivée d'ordre fractionnaire " s^α ", où " α " est un nombre réel et " s " est le symbole de la transformée de Laplace de la différentiation.

Un autre exemple est le régulateur $PI^\lambda D^\mu$ [134, 140], une extension du régulateur PID. Dans sa forme générale, la fonction de transfert du $PI^\lambda D^\mu$ est donnée par $K_p + T_i s^{-\lambda} + T_d s^\mu$, où λ et μ sont des nombres réels positifs; K_p est le gain proportionnel, T_i la constante d'intégration et T_d la constante de différentiation.

Il est évident qu'en prenant $\lambda = 1$ et $\mu = 1$ on obtient le régulateur PID classique. Si $T_i = 0$ on obtient le régulateur PD^μ , etc.

Tous ces types de régulateurs sont des cas particuliers du régulateur $PI^\lambda D^\mu$. Logiquement, ce régulateur peut améliorer le niveau de performances du système de commande, vu qu'il présente plus de paramètres de réglage.

Par définition le $PI^\lambda D^\mu$ est un filtre linéaire de dimension infinie à cause de l'ordre fractionnaire de l'intégration et de la dérivation. Il faut noter qu'en pratique l'implémentation de la commande d'ordre fractionnaire dans une bande-limite de fréquences est importante, i.e., l'approximation de dimension finie de la COF (Commande d'Ordre Fractionnaire) doit être faite dans une plage convenable de fréquences d'intérêt pratique [127, 128]. De plus l'ordre fractionnaire peut être un nombre complexe comme discuté dans [127]. Dans notre travail on s'intéressera seulement au cas où l'ordre fractionnaire est un nombre réel.

2.1.1 Historique

Le Calcul Fractionnaire est le domaine des mathématiques analytiques qui traite de l'étude et de l'application des intégrales et dérivées d'ordre arbitraire.

Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un concept aussi ancien que nouveau. C'est un ancien concept puisque, partant déjà de quelques spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), il a été développé jusqu'à nos jours. De nombreux mathématiciens ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé, dont nous pouvons citer une liste non exhaustive [51] comprenant : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822) N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grünwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Love (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Cependant, on peut aussi bien le considérer comme un nouvel axe de recherche, puisque ce n'est que depuis un peu plus d'une vingtaine d'années qu'il fait l'objet d'éditions et de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite revient à B. Ross qui a organisé la "First conference on Fractional Calculus and its Applications" à l'université de New Haven en juin 1974, voir [145]. Pour le premier livre le mérite revient à K.B. Oldham et J. Spanier, voir [118], qui après un travail de collaboration entamé en 1968, ont publié un livre dédié au calcul fractionnaire en 1974.

Sur le plan mathématique il faut citer l'ouvrage russe de Samko et al. [147] paru en 1987, qui regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes.

De nos jours les conférences et les éditions consacrées entièrement ou partiellement aux systèmes d'ordre fractionnaire et leurs applications se comptent par dizaines chaque année.

2.1.2 Applications du calcul d'ordre fractionnaire

Ces dernières années, plusieurs travaux ont été effectués sur des systèmes mécaniques décrits par des équations d'état d'ordre fractionnaire [12, 14, 94] i.e. des équations contenant des intégrales et des dérivées d'ordre fractionnaire.

Il y a eu aussi plusieurs applications en électricité :

Le Méhauté et Crepy [84] ont proposé en 1983 un concept appelé "la fractance", un nouvel élément de circuit électrique, qui possède des propriétés intermédiaires entre la résistance et la capacité. Un tel élément a été étudié par d'autres auteurs dont Nakagawa et Sorimachi [111] et Oldham et Zoski [119]. Une nouvelle théorie sur les capaciteurs a été développée par Westerlund [171], basée sur la dérivée d'ordre non entier.

Les applications du calcul fractionnaire concernant la diffusion ou la dispersion sont de loin les plus nombreuses. Par exemple, Loiseau et Mounier en 1998 ont traité de la stabilité de l'équation de la chaleur commandée en flux [87], Wang et al. en 1999 ont étudié la diffusion de chaleur dans le sol [170] et Fellah et al. en 2004 [46] dans le domaine de la propagation des ondes acoustiques ; des applications sur le transport de matières par l'eau dans le sol ont été présentées par Lu et al. en 2002 [89] et Benson et al. en 2004 [20] ; Del-Castillo-Negrete et al. en 2004 [37] ont fait une application sur la diffusion dans le plasma.

Il existe aussi plusieurs applications dans le domaine économique et financier, citons comme exemple le travail de Gorenflo et al. en 2000 [52].

Le traitement d'image en utilisant des dérivées d'ordre fractionnaire a fait l'objet d'un travail de Matieu et al. en 2003 [101], et de Cooper et al. en 2003 [33] dans le domaine de géophysique, ainsi que García-Fiñana et al. en 2000 [112] dans le domaine de la biomédecine. Ce dernier domaine a connu plusieurs applications notamment celle de Ferdi et al. sur l'ECG [48, 49, 53].

Tajahuerce et al. [157] ont présenté en 2000 une application dans le domaine de l'optique.

La viscoélasticité est un autre domaine où il y a eu beaucoup d'applications, les premiers à l'avoir étudié sont Bagley et al. en 1983 [13].

Les dérivées d'ordre fractionnaire sont utilisées dans l'algorithme de poursuite de trajectoire d'un robot mobile dans Suárez et al. [152], et dans la planification de trajectoires dans Oustaloup et al. [131]. Des applications de commande d'une transmission flexible [129], d'une suspension active [82] et d'un actionneur hydraulique [143] peuvent être citées comme exemples de la commande d'ordre fractionnaire.

Ces applications sont données à titre d'exemples et leur liste est loin d'être exhaustive.

2.1.3 Systèmes de commande d'ordre fractionnaire

Les modèles basés sur les dérivées d'ordre fractionnaire sont souvent plus adéquats que les modèles d'ordre entier utilisés précédemment. Ceci a été démontré notamment par Caputo [23], Nonnenmacher et Glöckle [116], Friedrich [50] et Westerlund [171]. D'importants arguments de la théorie physique en faveur de l'utilisation des modèles basés sur la dérivée d'ordre non entier ont été présentés par Caputo et Mainardi [24] entre autres. Les dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire offrent en plus un puissant instrument pour la description des effets héréditaires et mnémoniques de diverses substances, ainsi que pour la modélisation des processus dynamiques en géométrie fractale [98].

Ceci est l'avantage le plus significatif des modèles d'ordre fractionnaire en comparaison avec les modèles d'ordre entier, dans lesquels de tels effets ou géométries sont négligés.

Cependant, vu l'absence de méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application des systèmes de commande. Les travaux de Bagley et Calico [12], Makroglou et al. [94], Axtell et Bise [11], Kaloyanov et Dimitrova [64] et Oustaloup [124] doivent être mentionnés, mais l'étude dans le domaine temporel a globalement été évitée. L'idée d'utiliser des régulateurs d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes dynamiques revient à Oustaloup, qui a développé le fameux régulateur CRONE "Commande Robuste d'Ordre Non Entier", décrit dans son ouvrage [126] avec des exemples et des applications dans divers domaines. Oustaloup avait notamment démontré l'avantage du régulateur CRONE par rapport au PID classique.

Podlubny [140] a proposé plus tard un régulateur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ (voir figure

FIG.2.5), utilisant des actions dérivées et intégrales d'ordre non entier. Il a montré que les performances étaient considérablement améliorées par rapport à celles obtenues par un PID d'ordre entier.

2.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre "fractionnaire" arbitraire) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19ème siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Dans le domaine de la commande, des travaux intéressants ont été réalisés dans l'union soviétique [21], et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens théoriciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire [43, 88, 118, 139, 150].

L'opérateur intégro-différentiel ${}_a D_t^\alpha$ où a et t sont les limites de l'opération est défini ainsi :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0, \\ 1 & \Re(\alpha) = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0, \end{cases}$$

où α est l'ordre de l'opération, généralement $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Dans la suite, des définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire sont données avec des outils mathématiques d'approximation numérique nécessaires pour les implémentations des algorithmes obtenus.

2.2.1 Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions (en particulier pour les fonctions et les calculs considérés dans ce travail) [139].

2.2.1.1 Définition de Riemann-Liouville

L'intégrale dite de Riemann-Liouville est définie ainsi :

Définition 1 Soient C et \mathfrak{R} les anneaux des nombres complexes et réels respectivement, $\Re(\cdot)$ symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient $\lambda \in C$ avec $\Re(\lambda) > 0$, $t_0 \in \mathfrak{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$.

L'intégrale d'ordre λ de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}_{RL}I_{t_0}^\lambda f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{\lambda-1} f(\xi) d(\xi) \quad (2.2)$$

avec $t \geq t_0$ et Γ la fonction gamma d'Euler.

Définition 2 Soient $\mu \in C$ avec $\Re(\mu) > 0$, n un entier positif, $t_0 \in \mathfrak{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$. La dérivée d'ordre μ de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}_{RL}D_{t_0}^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \mu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\mu-1} f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Où le nombre entier n est tel que $(n - 1) < \mu < n$.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (2.2) comme suit :

$${}_{RL}D_{t_0}^\mu f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I_{t_0}^{(n-\mu)} f(t) \right\} \quad (2.4)$$

Remarque : Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I^λ pour I_0^λ , et D^μ pour D_0^μ .

2.2.1.2 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie ainsi :

$${}_C D^\mu f(t) \stackrel{\Delta}{=} I^{n-\mu} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \mu)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\mu-n+1}} d\tau \quad (2.5)$$

avec n un entier positif vérifiant l'inégalité $n - 1 < \mu < n$.

Cette définition peut être formulée également en fonction de la définition de Riemann-Liouville comme suit :

$${}_{RL}D^\mu f(t) =_C D^\mu f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\mu}}{\Gamma(k - \mu + 1)} f^{(k)}(0^+) \quad (2.6)$$

Ce qui peut être décrit autrement par :

$${}_C D^\mu f(t) = {}_{RL} D^\mu \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) \quad (2.7)$$

2.2.1.3 Définition de Gründwald-Leitnikov

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\mu > 0$ de G-L est donnée par :

$${}_{GL} D^\mu f(t) = \frac{d^\mu}{dt^\mu} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\mu} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\mu}{j} f(kh - jh) \quad (2.8)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$\omega_j^{(\mu)} = \binom{\mu}{j} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(\mu - j + 1)}$$

avec $\omega_0^{(\mu)} = \binom{\mu}{0} = 1$, sont les coefficients du binome suivant :

$$(1 - z)^\mu = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\mu}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{(\mu)} z^j \quad (2.9)$$

La définition de Gründwald-Leitnikov de l'intégrale d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$${}_{GL} I^\lambda f(t) = {}_{GL} D^{-\lambda} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\lambda \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-\lambda}{j} f(kh - jh) \quad (2.10)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients $\omega_j^{(-\lambda)}$ avec $\omega_0^{(-\lambda)} = \binom{-\lambda}{0} = 1$, sont les coefficients du binome suivant :

$$(1 - z)^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{(-\lambda)} z^j \quad (2.11)$$

2.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes :

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α .

2. Pour $\alpha = n$, où n est un entier, l'opération $D^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
3. Pour $\alpha = 0$ l'opération $D^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité : $D^0 f(z) = f(z)$.
4. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires :

$$D^\alpha af(z) + D^\alpha bg(z) = aD^\alpha f(z) + bD^\alpha g(z)$$

5. La loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z)$$

est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$ (voir [139] pour d'autres propriétés).

2.2.3 Evaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les processus de commande industrielle sont en général échantillonnés ou discrétisés, donc nous aurons besoin d'approximations numériques pour les formules analytiques des opérateurs d'ordre fractionnaire. Il y a eu beaucoup de travaux sur les solutions numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire ainsi que sur la discrétisation des systèmes et opérateurs d'ordre fractionnaire [31, 38, 42, 121, 142, 104] ; Diethelm a proposé récemment une méthode efficace pour la résolution numérique des équation différentielles d'ordre fractionnaire [39], basée sur un correcteur-prédicteur de type Adams. Vinagre et al. [164] ont développé une nouvelle méthode pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire en utilisant l'approche de Tustin. Ferdi [47] a récemment présenté une méthode de calcul de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire par le développement en séries de puissances et la modélisation du signal.

Cependant, ces méthodes sont souvent trop compliquées ou d'ordre trop élevé pour être introduites dans un schéma de commande adaptative simple afin de commander des processus aux paramètres inconnus ou variants dans le temps. Cela peut destabiliser la boucle de commande, par une variation conséquente de l'amplitude du signal de référence, ou simplement pendant la phase transitoire.

2.2.3.1 Approximation des formules de Riemann-Liouville

Nous aurons recours parfois à une très simple approximation numérique de l'intégrale de Riemann, basée sur la méthode rectangulaire. Cette approximation est plus pratique

dans des algorithmes sensibles au nombre de calculs à effectuer.

En mettant,

$$t = k\Delta$$

Où t est le temps actuel, k un entier et Δ la période d'échantillonnage.

On obtient :

$$\begin{aligned} I_0^\alpha f(k\Delta) &= \frac{\Delta}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\tau=0}^{k-1} (k\Delta - \tau\Delta)^{\alpha-1} f(\tau\Delta) \\ &= \frac{\Delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\tau=0}^{k-1} (k - \tau)^{\alpha-1} f(\tau\Delta) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Cette méthode présente l'avantage de sa simplicité et l'inconvénient d'être trop consommatrice de mémoire, à mesure que la fenêtre temporelle de calcul s'élargit. Toutefois nous pouvons remédier à cette contrainte en limitant la "mémoire" de la dérivée d'ordre fractionnaire, ainsi la valeur initiale sera prise à l'instant $t - T_m$ où T_m est la longueur prédéfinie de cette mémoire.

Ainsi, si K_m est le nombre de périodes correspondant au temps T_m ($K_m = \frac{T_m}{\Delta}$), l'approximation numérique de l'intégrale d'ordre fractionnaire peut s'écrire :

$$I_{T_m}^\alpha f(k\Delta) = \frac{\Delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\tau=k-K_m}^{k-1} (k - \tau)^{\alpha-1} f(\tau\Delta) \quad (2.13)$$

2.2.3.2 Approximation des formules de Gründwald-Leitnikov

Pour le calcul numérique des intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire on peut utiliser les définitions de G-L des équations (2.10) et (2.8) respectivement.

Pour une fonction causale $f(t)$, et pour $t = kh$, L'intégrale d'ordre fractionnaire est donnée par [140] :

$$\begin{aligned} I^\lambda f(kh) &= D^{-\lambda} f(kh) \\ &\cong h^\lambda \sum_{j=0}^k \omega_j^{(-\lambda)} f(kh - jh) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où les coefficients $\omega_j^{(-\lambda)}$ sont les coefficients du binôme de l'équation (2.11) qui peuvent être calculés par la formule récurrente suivante, pour $j = 1, 2, \dots, k$:

$$\omega_0^{(-\lambda)} = 1$$

et

$$\omega_j^{(-\lambda)} = \left(1 - \frac{1-\lambda}{j}\right) \omega_{j-1}^{(-\lambda)} \quad (2.15)$$

De même pour une fonction causale $f(t)$, et pour $t = kh$, la dérivée d'ordre fractionnaire est donnée par [139] :

$$\begin{aligned} D^\mu f(kh) &= \frac{d^\mu}{dt^\mu} f(t) \\ &\cong h^{-\mu} \sum_{j=0}^k \omega_j^{(\mu)} f(kh - jh) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Où les coefficients $\omega_j^{(\mu)}$ sont les coefficients du binôme de l'équation (2.9) qui peuvent être calculés par la formule récurrente suivante, pour $j = 1, 2, \dots, k$:

$$\omega_0^{(\mu)} = 1$$

et

$$\omega_j^{(\mu)} = \left(1 - \frac{1+\mu}{j}\right) \omega_{j-1}^{(\mu)} \quad (2.17)$$

Cependant, Hwang et al. [59] ont montré que la méthode d'approximation de Gründwald-Leitnikov ne donne une réponse transitoire assez précise que si l'intervalle de temps choisi est très petit.

2.2.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

2.2.4.1 Eléments de base de la Transformée de Laplace

La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2.18)$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, qui s'appellera l'originale. Pour l'existence de l'intégrale (2.18) la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que :

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \quad \text{pour tous } t > T.$$

La fonction originale $f(t)$ peut être retrouvée à partir de la transformée de Laplace $F(s)$ avec la transformée inverse de Laplace :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \Re(s) > c_0, \quad (2.19)$$

où c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (2.18).

L'évaluation directe de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (2.19) est souvent compliquée; mais elle peut fournir des informations utiles sur le comportement de l'originale inconnue $f(t)$ qu'on veut trouver.

La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.20)$$

des deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont nulles pour $t < 0$, est égale au produit de la transformée de Laplace des deux fonctions :

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s) \quad (2.21)$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent. On utilisera la propriété (2.21) pour l'évaluation de la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville. Une autre propriété très utile dont nous aurons besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'un ordre entier n de la fonction $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \quad (2.22)$$

Dans la partie suivante nous considérons la limite inférieure $a = 0$.

2.2.4.2 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\lambda > 0$ définie par (2.2), qu'on peut écrire comme une convolution des fonctions $g(t) = t^{\lambda-1}$ et $f(t)$:

$$I^\lambda f(t) = D^{-\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau = t^{\lambda-1} * f(t) \quad (2.23)$$

La transformée de Laplace de la fonction $t^{\lambda-1}$ est :

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\lambda-1}; s\} = \Gamma(\lambda)s^{-\lambda} \quad (2.24)$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution (2.21) on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville et celle de Gröndwald-Leitnikov :

$$\mathcal{L}\{I^\lambda f(t)\} = s^{-\lambda} F(s) \quad (2.25)$$

2.2.4.3 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée.

- Dérivée de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\mu-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (2.26)$$

avec $n - 1 < \mu < n$. Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue (voir [118, 103]). Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$.

- Dérivée de Caputo

$$\mathcal{L}\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-k-1} f^k(0) \quad (2.27)$$

avec $n - 1 \leq \mu < n$.

Il faut mentionner ici que d'un point de vue mathématique pur, il y a différentes manières d'interpoler entre les intégrales et dérivées multiples d'ordre entier. La plus connue et la plus étudiée est la définition de Riemann-Liouville des dérivées d'ordre fractionnaire (voir [118, 147, 103]). L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, etc. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à $t = 0$. La seule exception est quand on prend $t = -\infty$ comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de placer le point de départ à $-\infty$; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres.

- Dérivée de Gröndwald-Leitnikov

$$\mathcal{L}\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) \quad (2.28)$$

Remarque :

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace se fait de la même manière qu'avec les équations différentielles d'ordre entier.

2.3 Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire

L'étape clé dans l'implémentation numérique d'une COF est l'évaluation numérique ou la discrétisation des dérivations d'ordre fractionnaire " s^α ". En général, il y a deux types de méthodes de discrétisation : la discrétisation Directe et la discrétisation Indirecte.

Dans les méthodes de discrétisation Directes [28, 127], deux étapes sont nécessaires, i.e. l'ajustement du domaine de fréquences en continu puis la discrétisation de la fonction de transfert en s obtenue. D'autres méthodes d'ajustement dans le domaine fréquentiel peuvent être utilisées, sans garantir une discrétisation stable et à phase minimale.

Les méthodes de discrétisation Directes existantes, incluent l'application du développement direct en série de puissances de l'opérateur d'Euler [92, 165, 169, 168], le développement fractionnaire continu de l'opérateur de Tustin [90, 165, 169, 168, 164], et les méthodes basées sur l'intégration numérique [11, 30, 92].

Cependant, comme il est noté dans [3, 5, 6], le schéma de discrétisation basé sur l'opérateur de Tustin, présente de trop grandes erreurs en hautes fréquences. Un nouveau schéma mixte utilisant simultanément les opérateurs d'Euler et de Tustin est proposé dans [30] qui utilise l'opérateur dit d'Al-Alaoui [3]. Ces méthodes de discrétisation de " s^α " sont sous forme de réponse impulsionnelle infinie (RII). D'autres méthodes ont été développées ces dernières années pour obtenir directement la différentiation numérique d'ordre fractionnaire sous forme de réponse impulsionnelle finie (RIF) [159, 160, 32].

Un système de commande d'ordre fractionnaire peut être décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [139] :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (2.29)$$

ou par une fonction de transfert continue de la forme :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.30)$$

Pour obtenir des modèles discrets des systèmes d'ordre fractionnaire, il est nécessaire d'utiliser des approximations discretisées des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. En faisant cela dans l'expression (2.30) de $G(s)$ une expression générale pour la fonction de transfert discrète du système d'ordre fractionnaire, $G(z)$, peut être obtenue sous la forme :

$$G(z) = \frac{b_m(\omega(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1}(\omega(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0(\omega(z^{-1}))^{\beta_0}}{a_n(\omega(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1}(\omega(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0(\omega(z^{-1}))^{\alpha_0}} \quad (2.31)$$

où $(\omega(z^{-1}))$ représente l'équivalent discret de l'opérateur de Laplace s , exprimé comme une fonction de la variable complexe z ou l'opérateur de décalage z^{-1} .

Comme on peut le voir dans les expressions précédentes, un système d'ordre fractionnaire possède une fonction de transfert continue irrationnelle dans le domaine de Laplace et une fonction de transfert discrète de dimension infinie dans le domaine de Z . En d'autres termes, un système d'ordre fractionnaire a une mémoire illimitée, au contraire des systèmes d'ordre entier où la mémoire est limitée. Il est évident que seulement dans le cas des systèmes d'ordre entier on peut réaliser exactement une fonction de transfert en utilisant les éléments électriques conventionnels (résistances, inductances, et capacités dans le cas des réalisations analogiques), ou en utilisant les procédures conventionnelles (équations aux différences d'ordre fini ou filtres numériques dans le cas des réalisations discrètes). C'est pourquoi nous nous sommes intéressés aux approximations d'ordre entier discrètes des opérateurs et fonctions d'ordre fractionnaire et aussi parce que la dernière étape dans l'implémentation d'un système de commande d'ordre fractionnaire exige une forme réalisable de celui-ci.

En effet, une difficulté majeure avec les modèles d'ordre fractionnaire est la simulation dans le domaine temporel. Souvent, l'expression analytique de la sortie d'un modèle n'est pas simple à implémenter. Durant les 20 dernières années, des algorithmes numériques ont été développés en utilisant des modèles rationnels, soit continus ou discrets qui approximent les systèmes d'ordre fractionnaire [4, 30, 123, 136, 168].

Le problème d'obtention d'un modèle réalisable continu pour un régulateur d'ordre fractionnaire peut être regardé comme un problème d'obtention d'une approximation rationnelle de la fonction de transfert irrationnelle, modélisant le régulateur d'ordre fractionnaire. Parmi plusieurs méthodes mathématiques, deux d'entre elles [168] sont particulièrement intéressantes dans cet objectif au regard de la théorie de commande :

- Méthodes d'identification fréquentielle ou méthodes d'ajustement de courbes pour

l'obtention d'approximations rationnelles aux réponses fréquentielles irrationnelles caractérisant les systèmes d'ordre fractionnaire.

- Méthode d'expansion de fractions continues (utilisée pour l'évaluation des fonctions) et méthode d'approximation rationnelle (utilisée dans l'interpolation des fonction).

Dans la suite nous allons présenter certaines des plus importantes méthodes des deux catégories, avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière qui sera entièrement détaillée, car elle a été fréquemment utilisée pour l'implémentation des algorithmes de commande d'ordre fractionnaire proposés dans ce travail.

2.3.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation

L'expansion des fractions continues (EFC) est une méthode d'évaluation des fonctions qui converge souvent beaucoup plus rapidement que le développement en série de puissances, et converge dans un domaine plus large du plan complexe. Le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle $G(s)$, peut être exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned} G(s) &\cong a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \\ &= a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) +} \frac{b_2(s)}{a_2(s) +} \frac{b_3(s)}{a_3(s) +} \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

où $a_i(s)$ et $b_i(s)$ sont des fonctions rationnelles de la variable s , ou des constantes. L'application de cette méthode résulte en une fonction rationnelle $\hat{G}(s)$, qui est une approximation de la fonction irrationnelle $G(s)$.

D'autre part, pour l'interpolation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes, car elle permettent de modéliser les fonctions par des pôles.

Ces techniques sont basées sur l'approximation d'une fonction irrationnelle $G(s)$ par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes de la variable s :

$$\begin{aligned} G(s) &\cong R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(s)}{Q_\nu(s)} \\ &= \frac{p_0 + p_1 s + \dots p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1 s + \dots q_\nu s^\nu} \end{aligned} \quad (2.33)$$

qui passe par les points $(s_i, G(s_i)), \dots, (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$.

Dans la suite nous présenterons quelques unes des méthodes les plus connues de ce type.

2.3.1.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre fractionnaire

En général, une approximation rationnelle de la fonction $G(s) = s^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en réalisant l'EFC des fonctions :

$$\begin{aligned} G_h(s) &= \frac{1}{(1 + sT)^\alpha} \\ G_l(s) &= \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\alpha \end{aligned} \quad (2.34)$$

où $G_h(s)$ est l'approximation pour les hautes fréquences ($\omega T \gg 1$), et $G_l(s)$ l'approximation pour les basses fréquences ($\omega T \ll 1$).

2.3.1.2 Méthode de Carlson

La méthode proposée par Carlson dans [25], dérivée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative de la racine d'ordre α , peut être considérée comme appartenant à ce groupe. La méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\alpha} - G(s) = 0; \quad H(s) = (G(s))^\alpha \quad (2.35)$$

En définissant $\alpha = \frac{1}{q}$, $m = \frac{q}{2}$, à chaque itération, partant de la valeur initiale $H_0(s) = 1$, une fonction rationnelle approximée est obtenue sous la forme :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (2.36)$$

2.3.1.3 Méthode de Matsuda

La méthode proposée dans [102] est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle obtenue par l'EFC et l'ajustement de la fonction originale dans un ensemble de points logarithmiquement espacés. En supposant que les points choisis sont s_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, l'approximation prend la forme :

$$H(s) = a_0(s) + \frac{s-s_0}{a_1+s} \frac{s-s_0}{a_2+s} \frac{s-s_3}{a_3+s} \dots \quad (2.37)$$

où

$$a_i = v_i(s_i), \quad v_0(s) = H(s), \quad v_{i+1} = \frac{s - s_i}{v_i(s) - a_i} \quad (2.38)$$

2.3.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification

En général toutes les méthodes d'identification dans le domaine fréquentiel peuvent être appliquées pour obtenir une fonction rationnelle, dont la réponse fréquentielle se rapproche de celle de la fonction irrationnelle originale. Par exemple cela peut être la minimisation de la fonction coût suivante,

$$J = \int W(s) \left| G(\omega) - \hat{G}(\omega) \right|^2 d\omega \quad (2.39)$$

où $W(s)$ est une fonction de pondération, $G(\omega)$ la réponse fréquentielle originale, et $\hat{G}(\omega)$ est la réponse fréquentielle de la fonction rationnelle approximée.

Sun et al. avaient déjà proposé en 1984 des méthodes d'approximation de transferts d'ordre fractionnaire basées sur la méthode de Padé et celle de Wang et Hsia [153]. Actuellement, les deux approches les plus connues sont celles proposées par Oustaloup et Charef. Cette dernière est plus élaborée et plus pratique pour les approximations des transferts d'ordre fractionnaire, c'est pourquoi nous l'avons utilisée pour l'implémentation de nos schémas de commande, et nous la présenterons en détail dans la suite.

2.3.2.1 Méthode d'Oustaloup

La méthode [123, 125, 127] est basée sur l'approximation d'une fonction de la forme :

$$H(s) = s^\mu, \quad \mu \in R^+ \quad (2.40)$$

par une fonction rationnelle :

$$\hat{H}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_k}}{1 + \frac{s}{\omega'_k}} \quad (2.41)$$

en utilisant l'ensemble des formules de synthèse suivantes :

$$\omega'_0 = \alpha^{-0.5} \omega_u; \quad \omega_0 = \alpha^{0.5} \omega_u; \quad \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha \eta > 1; \quad (2.42)$$

$$\frac{\omega'_{k+1}}{\omega_k} = \eta > 0; \quad \frac{\omega_k}{\omega'_k} = \alpha > 0; \quad N = \frac{\log(\omega_N/\omega_0)}{\log(\alpha \eta)}; \quad \mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \eta)}$$

ω_u étant le gain fréquentiel unité et la fréquence centrale d'une bande de fréquences distribuées géométriquement autour. Soit, $\omega_u = \sqrt{\omega_h \omega_b}$, où ω_h et ω_b sont la haute et basse fréquence respectivement.

2.3.3 Méthode de Charef : Fonction de singularité

Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "Méthode de la fonction de singularité" développée par Charef et al. [28, 155], qui est présentée dans cette section. La méthode d'approximation sera différente selon que le transfert d'ordre fractionnaire à approximer soit du premier ou du second ordre

Systeme du premier ordre fractionnaire

Pour un système d'ordre fractionnaire du premier ordre (single fractal system) la modélisation se fait sous la forme (2.84) :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\beta} \quad (2.43)$$

on peut réécrire la fonction (2.43) comme suit (voir aussi [26]) :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.44)$$

où $(N + 1)$ est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système.

L'équation (2.44) peut être tronquée à un nombre fini N , et l'approximation devient :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\beta} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.45)$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_i = (ab)^i p_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.46)$$

$$z_i = (ab)^i a p_0 \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (2.47)$$

avec,

$$p_0 = p_T 10^{\frac{\epsilon_p}{20\beta}} \quad (2.48a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\beta)}} \quad (2.48b)$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\beta}} \quad (2.48c)$$

$$\beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (2.48d)$$

ϵ_p est l'erreur tolérée en dB .

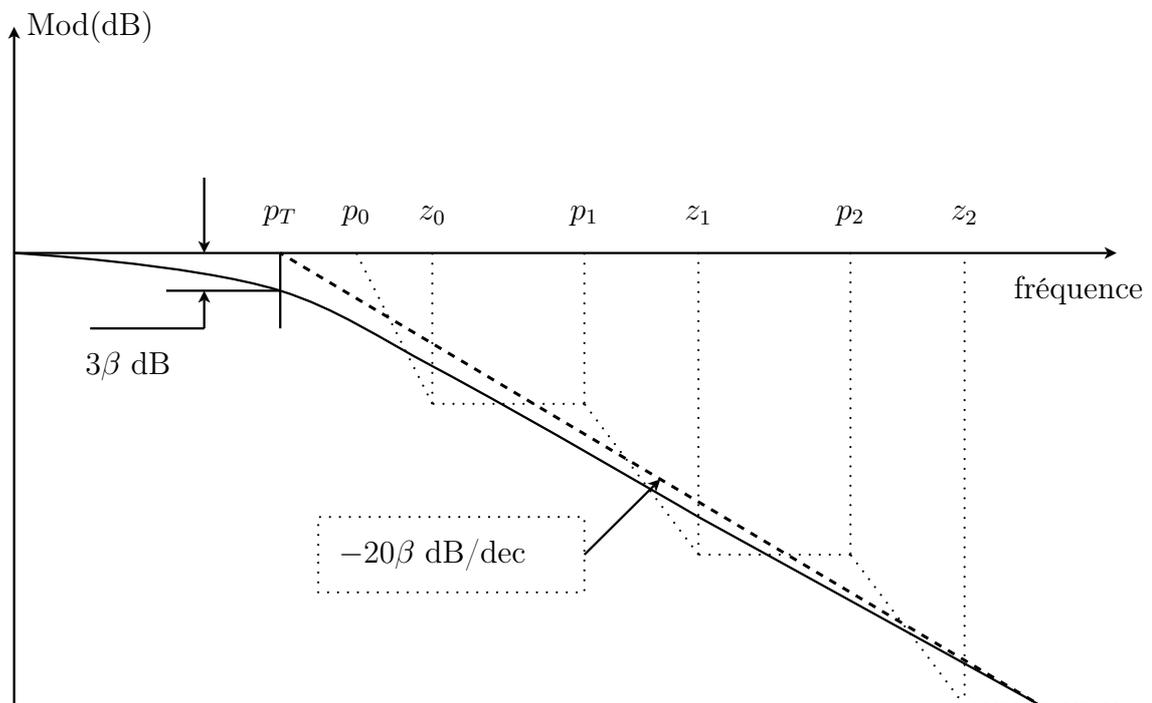


FIG. 2.1: Diagramme de Bode de $1/(1 + s/p_T)^\beta$

avec une pente de -20β dB/dec et son approximation par des lignes droites en zig-zag avec des pentes individuelles de -20 dB/dec et 0 dB/dec.

Système du second ordre fractionnaire

Pour un système de second ordre décrit par l'équation (2.109) :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\beta}$$

avec β un nombre réel positif tel que $0 < \beta < 1$, on peut distinguer deux cas :

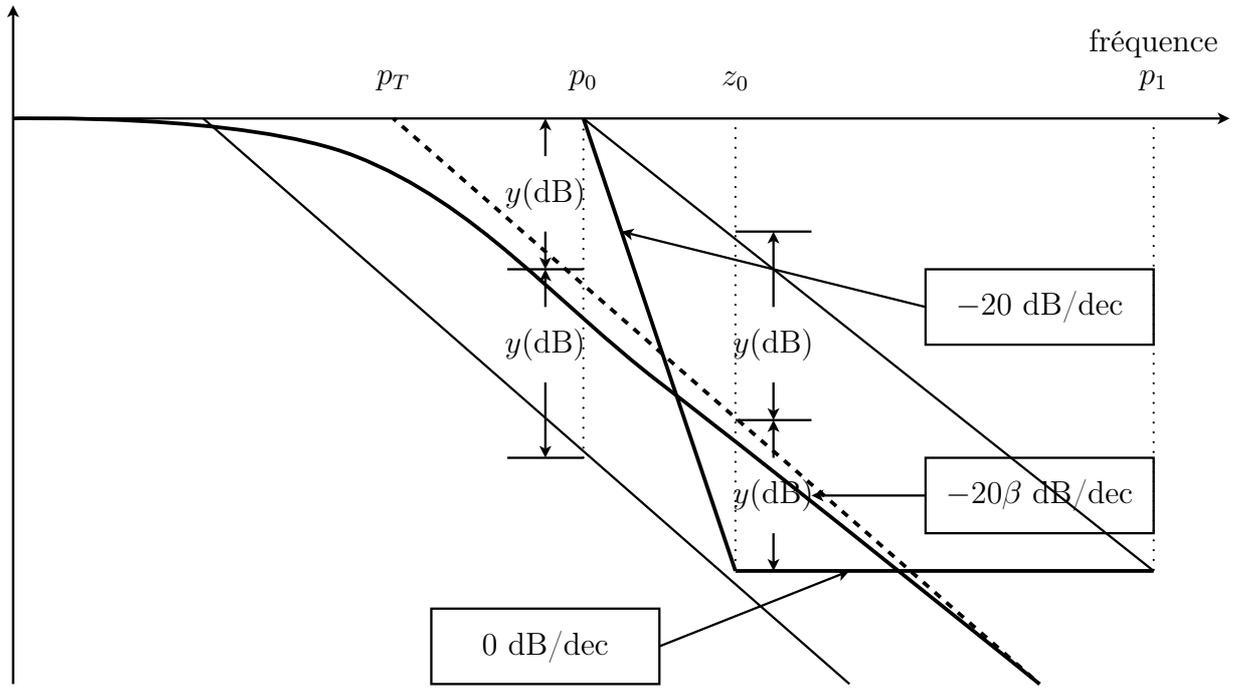


FIG. 2.2: Comment choisir les singularités pour l'approximation en maintenant un écart constant entre la ligne à -20β dB/dec et les lignes droites en zig-zag.

- Cas où $0 < \beta < 0.5$:

On peut exprimer la fonction (2.109) comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_{n+1}}\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha\frac{s}{\omega_n} + 1\right)} \quad (2.49)$$

avec $\alpha = \xi^\beta$ et $\eta = 1 - 2\beta$, ce qui peut aussi être approximé par la fonction,

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right) \prod_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha\frac{s}{\omega_n} + 1\right) \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.50)$$

Les singularités (pôles p_i et zéros z_i) sont données par les formules suivantes :

$$p_i = (ab)^{i-1} a z_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.51)$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_1 \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (2.52)$$

avec,

$$z_1 = \omega_n \sqrt{b} \quad (2.53a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\eta)}} \quad (2.53b)$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\eta}} \quad (2.53c)$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (2.53d)$$

ϵ_p est l'erreur tolérée en dB .

L'ordre d'approximation N est calculé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par ω_{max} telle que : $p_{N-1} < \omega_{max} < p_N$, ce qui mène à la valeur suivante :

$$N = \text{Partie entière de } \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_1}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (2.54)$$

$G_e(s)$ peut alors être écrite sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre $N + 2$:

$$G_e(s) = \frac{b_{m_0}s^N + b_{m_1}s^{N-1} + \dots + b_{m_N}}{s^{N+2} + a_{m_1}s^{N+1} + \dots + a_{m_{N+2}}} \quad (2.55)$$

Les coefficients a_{m_i} et b_{m_i} sont calculés à partir des singularités p_i , z_i ainsi que α et ω_n .

- Pour $0.5 < \beta < 1$:

La fonction d'approximation est donnée comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha\frac{s}{\omega_n} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega_{n+1}}\right)^\eta} \quad (2.56)$$

Où $\alpha = \xi^\beta$ et $\eta = 2\beta - 1$, qui développée comme précédemment avec les valeurs singulières suivantes :

$$p_i = (ab)^{i-1}p_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.57)$$

$$z_i = (ab)^{i-1}ap_1 \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (2.58)$$

$$p_1 = \omega_n \sqrt{b} \quad (2.59a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\eta)}} \quad (2.59b)$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\eta}} \quad (2.59c)$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (2.59d)$$

ϵ_p est l'erreur tolérée en dB .

$G_e(s)$ peut alors être écrite sous la forme de la fonction paramétrique (2.55).

2.4 Réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire

2.4.1 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles

Ces approximations se basent essentiellement sur les travaux de Charef et al. [28, 26], ainsi que la méthode de la fonction de singularité présentée à la section 2.3.3.

2.4.1.1 Intégration d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégral d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\beta} \quad (2.60)$$

où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et β un nombre réel positif tel que $0 < \beta < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\beta} \quad (2.61)$$

En supposant que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\beta} = \frac{K_I \omega_c^\beta}{s^\beta} = \frac{1}{s^\beta} \quad (2.62)$$

Avec $K_I = \frac{1}{\omega_c^\beta}$ et ω_c est la fréquence de coupure de PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_b : $\omega_c = \sqrt{10^{\frac{\epsilon}{10\beta}} - 1}$ où ϵ est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (2.60) et le PPF de l'équation (2.61) dans la bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$.

Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (2.61), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de $20\beta dB/dec$ sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente $20dB/dec$ et $0dB/dec$ correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan s tel que $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$; d'où l'approximation suivante :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\beta} = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.63)$$

où les p_i et les z_i sont les pôles et les zéros de l'approximation.

En utilisant la méthode de la fonction de singularité, les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par le choix d'une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation ω_{max} .

Pour déterminer le nombre N , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " ω_{max} " cette bande, telle que ω_{max} soit égal à 100 fois ω_h , son expression est donnée par (2.54) :

$$N = \text{Partie entière de} \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (2.64)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} p_i &= (ab)^i p_0, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \\ z_i &= (ab)^i a p_0, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et β sont données par :

$$a = 10^{\frac{y}{10(1-\beta)}}, \quad b = 10^{\frac{y}{10\beta}}$$

avec,

$$p_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad z_0 = a p_0$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, on doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_I(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a p_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} \quad (2.65)$$

Où les coefficients h_i sont les résidus qui sont déterminés par :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a p_0}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0}\right)} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{(i-j)}\right)} \quad (2.66)$$

2.4.1.2 Dérivée d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$F_D(s) = s^\alpha \quad (2.67)$$

où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et α un nombre réel positif tel que $0 < \alpha < 1$. Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit :

$$F_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \quad (2.68)$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$F_D(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha = \frac{K_D}{\omega_c^\alpha} s^\alpha = s^\alpha \quad (2.69)$$

Avec $K_D = \omega_c^\alpha$ et ω_c est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_b : $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{(\frac{\epsilon}{10\alpha})-1}}$ où ϵ est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (2.67) et le ZPF de l'équation (2.68) dans la bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$.

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (2.68), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de $20\alpha dB/dec$ sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente $20dB/dec$ et $0dB/dec$ correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan s tel que $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$; d'où l'approximation suivante :

$$F_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (2.70)$$

En utilisant la méthode de la fonction de singularité, les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commence par le choix de l'erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquences d'approximation ω_{max} .

Pour déterminer le nombre N , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " ω_{max} " cette bande, tel que ω_{max} soit pris égal à 100 fois ω_h son expression est donnée par :

$$N = \text{Partie entière de} \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} 1 \right] + 1 \quad (2.71)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} z_i &= (ab)^i z_0, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \\ p_i &= (ab)^i a z_0, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

avec : $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$ et $p_0 = az_0$.

La fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera donc la suivante :

$$F_D(s) = s^\alpha = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0}\right)} \quad (2.72)$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer $\frac{F(s)}{s}$ en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{F_D(s)}{s} = \frac{1}{s} K_D \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0}\right)} \quad (2.73)$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$F_D(s) = F_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.74)$$

avec $F_0 = K_D$ et,

$$g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(-ab)^i a z_0 \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (2.75)$$

2.4.2 Implémentation par des circuits électriques analogiques

2.4.2.1 Intégration d'ordre fractionnaire

L'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme (2.45) :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{s^\beta} = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\beta} \approx K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.76)$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire $H_I(s)$ donne :

$$H_I(s) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (2.77)$$

où les h_i sont les résidus des pôles donnés par l'équation (2.76).

Cette équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Forster de 1ère forme dont le schéma est représenté dans la figure FIG.2.3 [26].

L'impédance de ce réseau est donnée par :

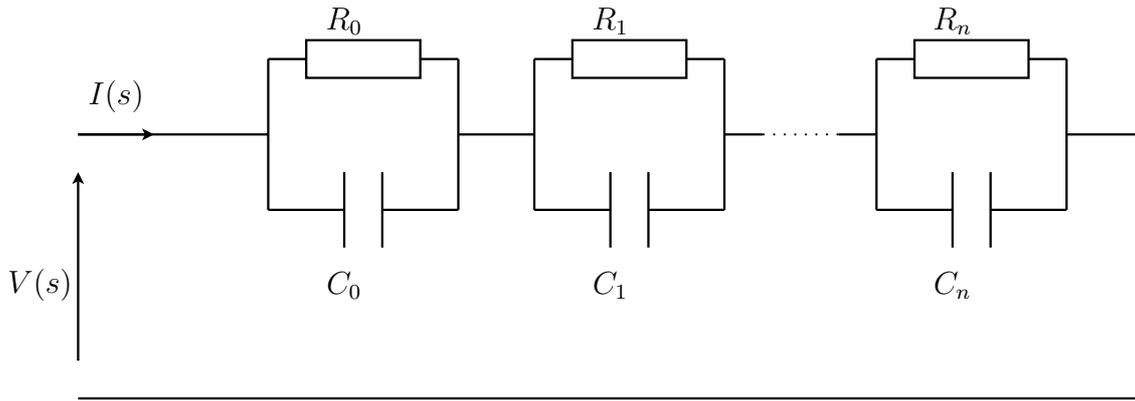


FIG. 2.3: Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{R_i}{1 + sR_iC_i} \right) \quad (2.78)$$

que l'on peut faire correspondre à (2.77) en mettant,

$$\begin{aligned} R_i &= h_i \\ C_i &= \frac{1}{p_i h_i} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.79)$$

2.4.2.2 Dérivée d'ordre fractionnaire

De la même manière, l'approximation rationnelle de la dérivée d'ordre fractionnaire peut être donnée par une fonction de la forme :

$$G_D(s) = K_D s^\alpha = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha = K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (2.80)$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle obtenue donne :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (2.81)$$

où les g_i sont les résidus donnés par (2.75).

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Forster 2ème forme, dont le schéma est représenté à la figure FIG.2.4.

L'admittance de ce réseau est de la forme :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \frac{sC_i}{1 + sR_iC_i} \quad (2.82)$$

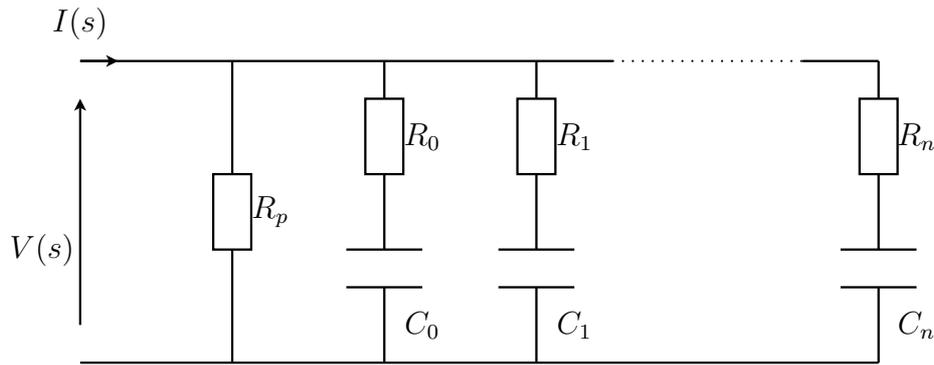
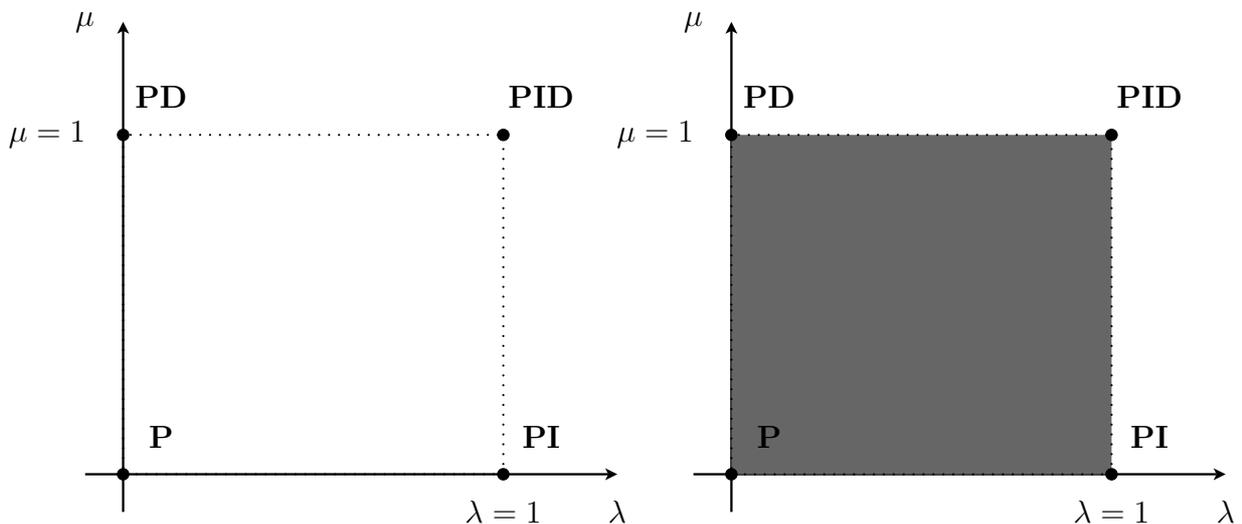


FIG. 2.4: Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

que l'on peut faire correspondre à (2.81) en mettant,

$$\begin{aligned}
 C_i &= g_i \\
 R_i &= \frac{1}{h_i C_i} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \\
 R_p &= G_0
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

2.5 Systèmes de commande d'ordre fractionnaire

FIG. 2.5: Régulateurs PID et $PI^\lambda D^\mu$

2.5.1 Processus d'ordre fractionnaire

L'analyse dans le plan de Bode de plusieurs processus naturels, comme les lignes de transmission, l'impédance de polarisation diélectrique, les interfaces, le rythme cardiaque,

la densité spectrale des ondes physiques, quelques types de bruit [21, 41, 156], a permis d'observer une pente fractionnaire. Ce type de processus est connu sous le nom de processus $1/f$ ou systèmes d'ordre fractionnaire ou encore d'ordre non entier. L'équation de description dans le domaine fréquentiel peut être approximée dans le domaine de Laplace comme suit :

$$X(s) = \frac{k}{\left(1 + \frac{s}{p}\right)^\beta} \quad (2.84)$$

Avec

- k : gain du système,
- β : exponent d'ordre fractionnaire,
- p : pôle d'ordre fractionnaire représentant la fréquence de coupure, $1/p$ est le temps de relaxation,
- s : opérateur de Laplace.

Les systèmes complexes où la puissance varie d'un nombre réel à un autre peuvent être représentés par une fonction à pôles multiples avec des puissances d'ordre fractionnaire :

$$X(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^{\beta_i}} \quad 0 \leq \beta_i \leq 1 \quad (2.85)$$

2.5.2 Fonction de transfert idéale de Bode

Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande dans son travail sur la conception de feedbacks amplificateurs en 1945 (voir figure FIG.2.6). Cette fonction de transfert a la forme :

$$L(s) = \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \quad (2.86)$$

où ω_c est la fréquence de coupure désirée et α la pente de la caractéristique idéale du gain. La marge de phase est $\Phi_m = \pi(1 + \alpha/2)$ pour toutes les valeur du gain. La marge de gain A_m est infinie. Les marges de phase constantes 60° , 45° et 30° correspondent aux pentes $\alpha = -1.33$, -1.5 et -1.66 .

Le tracé de Nyquist pour la fonction de transfert idéale de Bode se réduit à une ligne droite passant par l'origine avec $\arg(L(j\omega)) = \alpha \frac{\pi}{2}$.

La fonction de transfert de Bode (2.86) peut être utilisée comme un système de réf-

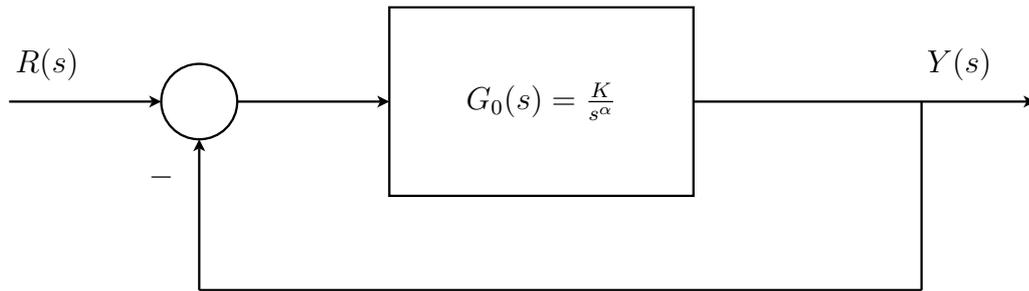


FIG. 2.6: Boucle idéale de Bode

rence sous la forme suivante :

$$G_c(s) = \frac{K}{s^\alpha + K} \quad (0 < \alpha < 2) \quad (2.87)$$

$$G_o(s) = \frac{K}{s^\alpha} \quad (0 < \alpha < 2) \quad (2.88)$$

où G_c est la fonction de transfert en boucle fermée et G_o est la fonction de transfert en boucle ouverte. Les caractéristiques générales de la fonction de transfert de Bode sont les suivantes (voir figure FIG.2.7) :

1. Boucle ouverte :

- Gain : une pente constante de $-\alpha 20dB/dec$,
- Fréquence de coupure : une fonction de K ,
- Phase : ligne horizontale de $-\alpha \frac{\pi}{2}$,
- Nyquist : ligne droite avec un argument $-\alpha \frac{\pi}{2}$.

2. Boucle fermée :

- Marge de gain : A_m infinie,
- Marge de phase : constante, $\Phi_m = \pi(1 + \frac{\alpha}{2})$
- Réponse indicielle : $y(t) = Kt^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-Kt^\alpha)$,
où $E_{a,b}(z)$ est la fonction de Mittag-Leffer de deux paramètres [139].

2.5.3 Fonctions et matrices de transfert d'ordre fractionnaire

Plusieurs systèmes dynamiques naturels ont un comportement qui peut être modélisé par des équations différentielles comprenant des dérivées d'ordre fractionnaire. En appli-

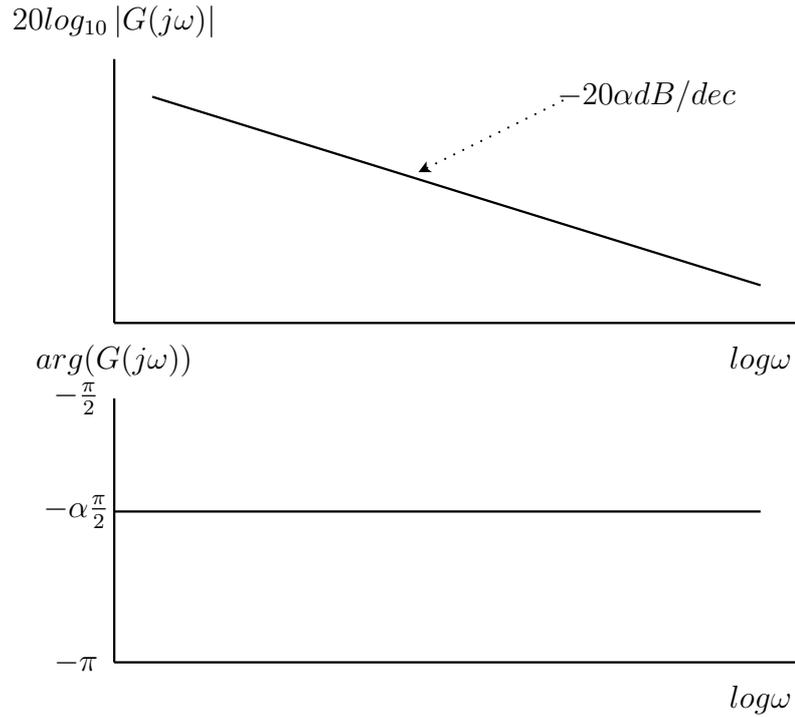


FIG. 2.7: Tracé de Bode de la fonction de transfert idéale

quant la transformée de Laplace à de telles équations, et en supposant des conditions initiales nulles, nous obtenons des fonctions de transfert avec des puissances d'ordre non entier de la variable complexe de Laplace s .

Une forme générale de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire est donnée par l'expression suivante :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=1}^M b_i s^{q_i}}{\sum_{j=1}^N a_j s^{p_j}}, \quad M, N \in \mathbb{N}^*, \quad a_j, b_i, p_j, q_i \in \mathbb{R} \quad (2.89)$$

Parfois toutes les puissances de s sont multiples d'une certaine valeur q , la fonction de transfert (2.89) devient alors,

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^{iq}}{\sum_{j=0}^N a_j s^{jq}}, \quad M, N \in \mathbb{N}^*, \quad q, a_j, b_i \in \mathbb{R} \quad (2.90)$$

Une fonction de transfert de la forme (2.90) est dite "*commensurable*". Si de plus, le nombre réel q est l'inverse d'un nombre entier Q , la fonction de transfert peut être réécrite sous la forme :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^{\frac{i}{Q}}}{\sum_{j=0}^N a_j s^{\frac{j}{Q}}}, \quad M, N \in \mathbb{N}^*, \quad Q \in \mathbb{N}, \quad a_j, b_i \in \mathbb{R} \quad (2.91)$$

En général une fonction de transfert d'ordre fractionnaire ne peut pas se mettre sous la forme (2.91), mais celles qui le peuvent sont plus faciles à étudier. Les fonctions de transfert d'ordre entier sont souvent des cas particulier de la forme (2.91), quand $Q = 1$.

Si le processus fractionnaire est MIMO (à entrées multiples et sorties multiples) ses n entrées et ses m sorties seront reliées par le biais d'une matrice de transfert $n \times m$ dont les éléments sont similaires à (2.89).

2.5.4 Représentation d'état d'ordre fractionnaire

Les systèmes d'ordre fractionnaire (dont l'ordre fractionnaire est commensurable) permettent aussi une représentation dans l'espace d'état [139] :

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{Q}}x &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.92)$$

où u est le vecteur des entrées, x celui des états et y celui des sorties du système. La représentation d'état des systèmes d'ordre entier est un cas particulier de (2.92) avec $Q = 1$.

Remarque : Comme pour les représentations d'état d'ordre entier, les représentations d'état d'ordre fractionnaire ne sont pas uniques, en d'autres termes plusieurs représentations d'états fractionnaires correspondent à la même fonction de transfert d'ordre fractionnaire.

Théorème 1 *La représentation d'état (2.92) correspond à la matrice de transfert,*

$$y = \left[C \left(s^{\frac{1}{Q}}I - A \right)^{-1} B + D \right] u \quad (2.93)$$

avec l'hypothèse que toutes les conditions initiales sont nulles.

Preuve : A partir de la dernière hypothèse on peut écrire,

$$s^{\frac{1}{Q}}x = Ax + Bu \Leftrightarrow \left(s^{\frac{1}{Q}}I - A \right) x = Bu \Rightarrow x = \left(s^{\frac{1}{Q}}I - A \right)^{-1} Bu$$

En remplaçant x dans la deuxième équation de (2.92), on obtient (2.93).

□

Remarque : Il faut souligner le fait que la fonction de transfert ne peut être obtenue à partir de la représentation d'état que dans le seul cas où les conditions initiales le permettent ; et si la définition de Riemann-Liouville de la dérivée d'ordre fractionnaire est utilisée, ces conditions initiales peuvent comprendre des dérivées d'ordre fractionnaire de fonctions. Pour cette raison les définitions de Caputo et Gröndwald-Leitnikov sont souvent utilisées pour ces calculs.

Le résultat suivant peut être démontré à partir du théorème 1, comme dans le cas d'ordre entier [117].

Théorème 2 *La fonction de transfert,*

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i s^{\frac{i}{Q}}}{s^{\frac{N}{Q}} + \sum_{j=0}^{N-1} a_j s^{\frac{j}{Q}}}, \quad N, Q \in \mathbb{N}, \quad a_j, b_i \in \mathbb{R} \quad (2.94)$$

est équivalente à la représentation d'état suivante, appelée forme canonique commandable, en supposant que les conditions d'application du théorème 1 sont vérifiées.

$$D^{\frac{1}{Q}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.95)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_{N-1} - a_{N-1}b_N & b_{N-2} - a_{N-2}b_N & \cdots & b_0 - a_0b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u$$

Théorème 3 *La fonction de transfert (2.94) est équivalente à la représentation d'état suivante, connue sous le nom de la forme canonique observable, en supposant que les*

conditions d'application du théorème 1 sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
 D^{\frac{1}{Q}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{N-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_N \\ b_1 - a_1 b_N \\ \vdots \\ b_{N-2} - a_{N-2} b_N \\ b_{N-1} - a_{N-1} b_N \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u \tag{2.96}
 \end{aligned}$$

D'autres formes particulières de la représentation d'état sont disponibles dans la littérature (voir [117]).

2.5.5 Observabilité, commandabilité et stabilité des processus fractionnaires

Les deux résultats suivants peuvent être démontrés comme leurs similaires dans le cas d'ordre entier [161, 163].

Théorème 4 *Le système d'ordre fractionnaire (2.92) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité,*

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.97}$$

(où N est le nombre des états) est une matrice de rang plein.

Théorème 5 *Le système d'ordre fractionnaire (2.92) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité,*

$$O = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{N-1}B \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

(où N est le nombre des états) est une matrice de rang plein.

Nous donnons maintenant le résultat suivant, dit théorème de Matignon sans démonstration [95] :

Théorème 6 *Le système d'ordre fractionnaire (2.91) est stable (dans le sens où des entrées bornées donnerons toujours des sorties bornées) si et seulement si toutes les racines (complexes) r de son dénominateur vérifient,*

$$|\arg(r)| > \frac{\pi}{2Q} \quad (2.99)$$

Remarque : La condition de stabilité des systèmes d'ordre entier est obtenue à partir de (2.99) si $Q = 1$.

2.5.6 Réponses temporelles par les fonctions de type Mittag-Leffler

Pour trouver les réponses impulsionnelle et indicielle unitaires des systèmes décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire de la forme :

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\beta_1} y(t) + a_0 D^{\beta_0} y(t) = u(t) \quad (2.100)$$

où a_i , ($i = 0, 1, \dots, n$) est une constante arbitraire et β_i , ($i = 0, 1, \dots, n$) est un nombre réel arbitraire tel que

$$\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_1 > \beta_0 > 0,$$

dont la fonction de transfert correspondante est,

$$G(s) = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 s^{\beta_1} y(t) + a_0 s^{\beta_0} y(t)} \quad (2.101)$$

nous devons évaluer la transformée inverse de Laplace de la fonction $G(s)$.

Les fonctions de type Mittag-Leffler permettent de faciliter ce passage dans le domaine

temporel.

En 1953, Agarwal [2] introduisait la fameuse fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres $E_{\alpha,\beta}(z)$. Sa définition fut modifiée plus tard par Erdélyi et al. [44] pour devenir,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (2.102)$$

Sa dérivée d'ordre k est donnée par

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! z^j}{j! \Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.103)$$

Podlubny a introduit une forme plus convenable pour le calcul de la dérivée [141],

$$\mathcal{E}_k(t, y; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(yt^\alpha), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.104)$$

Sa transformée de Laplace a été évalué par Podlubny [138] :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \mathcal{E}_k(t, \pm y; \alpha, \beta) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp y)^{k+1}}, \quad (\Re(s) > |y|^{1/\alpha}) \quad (2.105)$$

Un autre avantage de la fonction $\mathcal{E}_k(t, y; \alpha, \beta)$ est sa différentiation fractionnaire très simple :

$$D^\lambda \mathcal{E}_k(t, y; \alpha, \beta) = \mathcal{E}_k(t, y; \alpha, \beta - \lambda), \quad (\lambda < \beta) \quad (2.106)$$

D'autres propriétés de la fonction $\mathcal{E}_k(t, y; \alpha, \beta)$, telles que les cas particuliers, le comportement asymptotique etc., peuvent être obtenues à partir de 2.102-2.104 et les propriétés connues de la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z)$ [44].

La transformée de laplace inverse du transfert (2.101) calculée à partir de l'équation (2.105) est donnée par (voir Annexe B) :

$$g_n(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \text{ (continue)} \\ k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \mathcal{E}_m(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j) \quad (2.107)$$

Réponse impulsionnelle et réponse indicielle unitaires

La réponse impulsionnelle unitaire du système d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est (2.101) est donnée par la formule (2.107), i.e. $y_{impuls}(t) = g_n(t)$.

Pour trouver la réponse indicielle unitaire $y_{indic}(t)$, on doit intégrer (2.107) en utilisant (2.106). On obtient,

$$g_n(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \text{ (continue)} \\ k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \mathcal{E}_m(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j + 1) \quad (2.108)$$

2.5.7 Performances des systèmes d'ordre fractionnaire

Plusieurs travaux précédants ont montré que les systèmes d'ordre fractionnaire ont de très bonnes performances, en termes de temps de réponse et de stabilité de la dynamique transitoire notamment (voir [126, 154, 27]). Pour un système SISO de second ordre, représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1)^\beta} \quad (2.109)$$

Les réponses indicelles pour le cas d'ordre entier ($\beta = 1$) et le cas d'ordre fractionnaire ($\beta = 0.35$) avec $\omega_n = 1.5 \text{ rd/s}$ et $\xi = 0.8$ sont données dans la figure 2.8, et mettent en évidence le gain considérable en temps de montée et de réponse.

Il faut remarquer à ce niveau que la fonction de transfert donnée dans (2.109) est préférée à la structure de modèle de second degré suivante :

$$G'(s) = \frac{1}{(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi (\frac{s}{\omega_n})^\beta + 1)} \quad (2.110)$$

Bien que cette dernière forme soit plus familière pour les ingénieurs mécaniciens ou physiciens, elle représente toujours un modèle mathématique de processus de second ordre, et vu notre bonne connaissance des propriétés du système présenté dans l'équation (2.109) en termes de l'ordre fractionnaire β et des effets du facteur d'amortissement ξ sur le temps

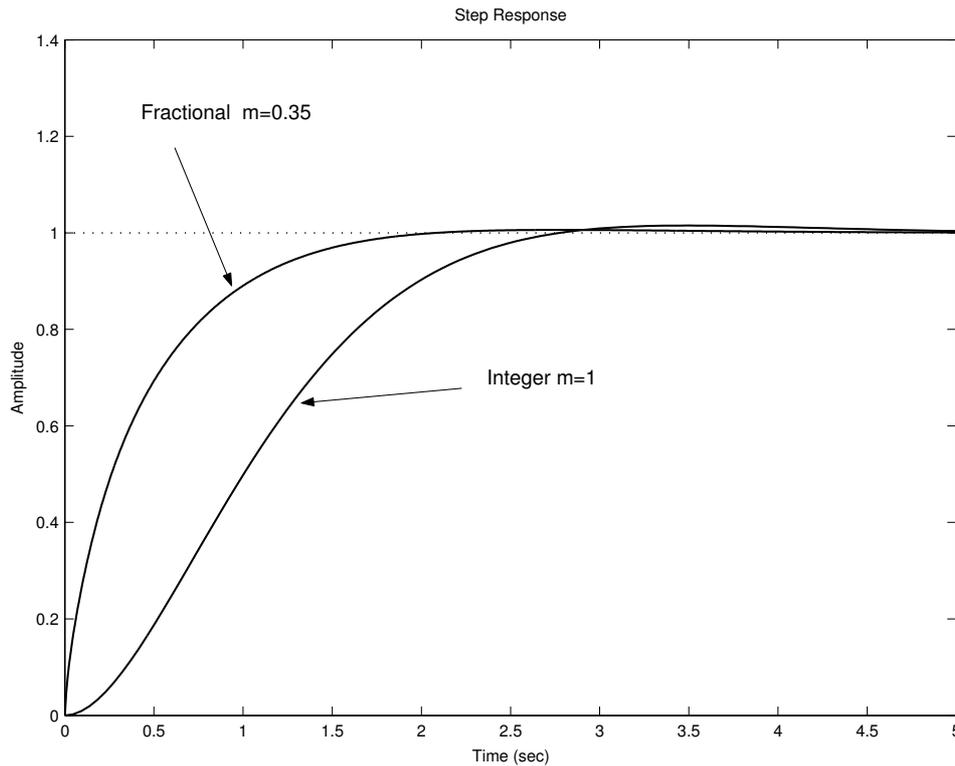


FIG. 2.8: Réponses indicielles comparatives (Fractionnaire/Entier)

de réponse [27] il est plus pratique de la prendre comme modèle de référence dans une boucle de commande adaptative. De plus, Hartley et al. ont montré [55] qu'un modèle de la forme :

$$G''(s) = \frac{1}{s^{\beta_1} + a s^{\beta_2} + 1}, \quad \beta_1 > \beta_2 > 0 \quad (2.111)$$

qui est une forme plus générale que (2.110), peut entrer en régime de résonance si certaines conditions sur la valeur de la constante réelle a sont vérifiées, et ce même si $\beta_1 = 1$.

2.6 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du Calcul Fractionnaire. Nous y répertorions quelques notions essentielles sur les systèmes de commande d'ordre fractionnaire nécessaire pour la compréhension de notre travail sur la commande adaptative d'ordre fractionnaire.

Après une introduction sur les processus d'ordre non entier, nous avons présenté les définitions des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire. Les caractéristiques et les

méthodes de représentation et d'approximation de ces systèmes sont également étudiées. Une introduction à la commande d'ordre fractionnaire est donnée avec les arguments qui ont avantagé son développement, et les domaines d'application cités dans la littérature actuelle.

Chapitre 3

Eléments de Commande Adaptative

3.1 Introduction

L'une des techniques de commande qui a connu une grande notoriété dans les applications industrielles, est la commande adaptative, qui comme son nom l'indique, consiste à adapter le régulateur en ligne aux variations du processus régulé pour assurer une qualité constante des performances. La commande adaptative est l'un des axes de recherche de la théorie de commande qui ont vu le jour dans les années 1950. Elle a gardé un intérêt certain de la communauté automatique avec des centaines d'articles et plusieurs livres publiés chaque année [19, 22, 66]. L'une des raisons de cet engouement et de cette popularité durable de la commande adaptative est que son objectif est clairement défini : commander des processus avec des paramètres inconnus ou variant lentement dans le temps. C'est pourquoi la théorie de la commande adaptative compte actuellement un grand nombre d'approches et de méthodes, et plusieurs applications industrielles ont été mis en oeuvre.

Les algorithmes de commande adaptative peuvent être classés en deux groupes :

- Régulateurs adaptatifs indirects : dans lesquels le calcul des paramètres du régulateur passe par l'estimation en temps réel des paramètres du processus à commander,
- Régulateurs adaptatifs directs : dans lesquels le processus à commander n'est pas identifié, et les paramètres du régulateur sont estimés directement selon une structure imposée par le concepteur.

Dans notre travail nous utiliserons le plus souvent des méthodes directes, où les seuls paramètres à actualiser et ajuster sont ceux du régulateur.

Cependant, pour un automaticien confronté au problème de commande de processus, la question est de savoir dans quel cas il faut opter pour un régulateur adaptatif? Dans la littérature traitant de la commande adaptative, il existe plusieurs cas de figures dans lesquels un feedback à gain constant peut donner les même performances qu'un régulateur adaptatif. Une manière de procéder pour décider sur l'opportunité de l'utilisation de la commande adaptative est schématisée dans la figure FIG.3.1.

La technique de programmation de gain (Gain Scheduling) est une méthode très puissante et facilement applicable, qui se base sur la recherche de variables convenables de programmation i.e., des variables qui caractérisent les conditions de fonctionnement du processus. Elle est notamment utilisée dans les systèmes de commande en aéronautique moderne.

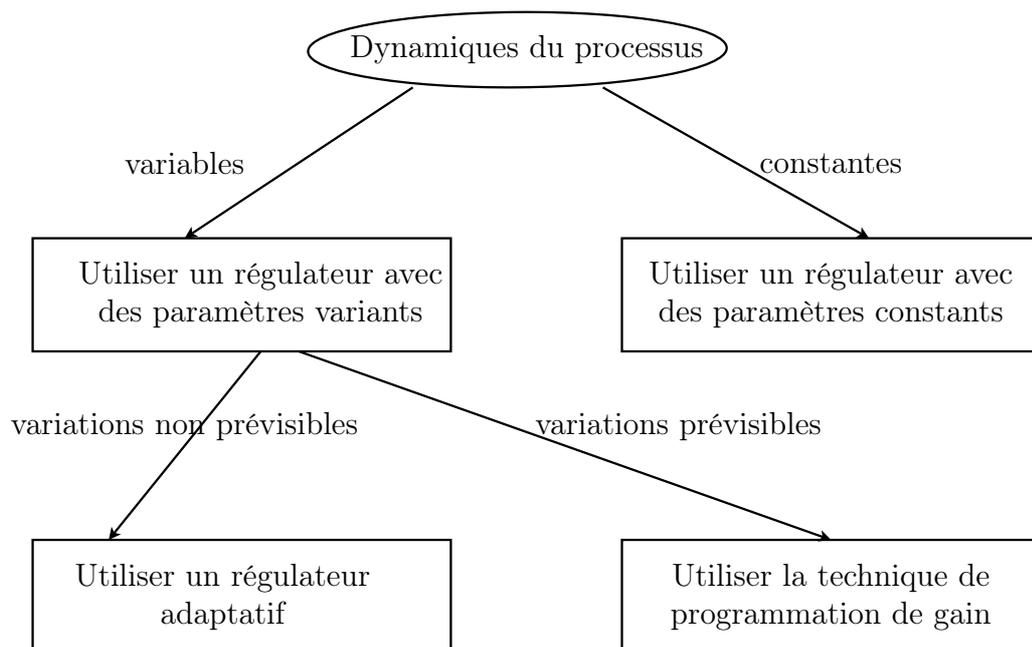


FIG. 3.1: Procédure de choix du régulateur à utiliser

Dans la suite, nous nous limiterons à l'étude et l'utilisation de certaines approches de la commande adaptative, applicables dans le cas de processus dont les dynamiques sont variables de manière imprévisible ou inconnue. Le choix de ces techniques n'est pas fortuit : ce sont des schémas de commande où l'utilisation (dans la partie contribution)

d'opérateurs d'ordre fractionnaire est plus "naturelle", permettant facilement l'implémentation, et la comparaison avec les algorithmes classiques. Cependant ce choix n'est pas exhaustif, et un important travail de recherche peut encore être entrepris.

Dans ce qui suit nous présenterons deux méthodes basées sur le choix d'un modèle de "référence" notamment la commande auto-ajustable et la commande adaptative à modèle de référence (CAMR), ainsi qu'une autre approche basée sur un feedback à grand gain avec une de ses récentes dérivées : la commande adaptative proportionnelle-intégrale (PI).

3.2 Régulateurs Adaptatifs Déterministes

Dans cette partie on présentera une méthode algébrique simple de conception de la commande adaptative [10]. L'idée est de déterminer le régulateur qui impose les pôles désirés en boucle fermée. De plus, on veut que le système suive le signal de référence d'une manière spécifiée.

Cette méthode permet en plus d'avoir une meilleure compréhension de la commande adaptative ; et met en valeur les similitudes entre les régulateurs auto-ajustables et les régulateurs adaptatifs à modèle de référence.

3.2.1 Modèle du processus

On considère un processus décrit par un système à une entrée et une sortie (siso). Même si on traitera essentiellement des systèmes discrets, on peut étudier simultanément les systèmes continus en écrivant :

$$Ay(t) = B(u(t) + v(t)) \quad (3.1)$$

où A et B représentent des polynômes fonctions, soit de l'opérateur différentiel $p = \frac{d}{dt}$, soit de l'opérateur de décalage en avance q . On suppose que A et B sont coprimés (premiers entre eux), i.e. ils n'ont aucun facteur commun. De plus A est supposé normalisé (monique), i.e. le coefficient du plus haut degré dans A est l'unité.

Un régulateur linéaire général peut être décrit par :

$$Ru(t) = Tu_r(t) - Sy(t) \quad (3.2)$$

où R , S et T sont des polynômes. Cette loi de commande représente une contre réaction (ou feedback) négative avec l'opérateur de transfert $-\frac{S}{R}$ et une action directe (ou feedforward)

avec un opérateur de transfert $\frac{T}{R}$. Il possède donc deux degrés de liberté. Un schéma-bloc du système en boucle fermée est montré dans la figure 3.2.

L'élimination de u entre les équations (3.1) et (3.2) donne les équations suivantes pour

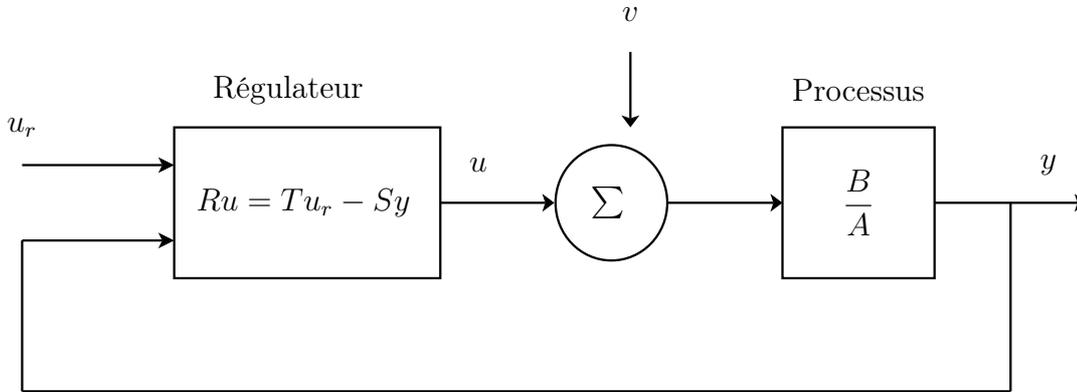


FIG. 3.2: Un régulateur linéaire général à deux degrés de liberté

le système en boucle fermée,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{BT}{AR + BS}u_r(t) + \frac{BR}{AR + BS}v(t) \\ u(t) &= \frac{AT}{AR + BS}u_r(t) + \frac{BS}{AR + BS}v(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est donc,

$$AR + BS = A_r \quad (3.4)$$

L'idée clé de la méthode de conception est de spécifier le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée, A_r .

Les polynômes R et S peuvent être déterminés à partir de l'équation (3.4). Noter que dans cette procédure de conception on considère le polynôme A_r comme paramètre de conception, qui est choisi pour donner les propriétés désirées du système en boucle fermée.

L'équation (3.4), qui joue un rôle fondamental en Algèbre, est appelée l'*équation Diophantine*. On l'appelle aussi *identité de Bezout* ou *équation de Aryabhata*.

Cette équation possède toujours une solution si les polynômes A et B n'ont aucun facteur commun. La solution peut être cependant mal conditionnée si les polynômes ont des facteurs trop proches. Elle peut être obtenue en introduisant des polynômes avec des coefficients inconnus et en résolvant les équations linéaires obtenues.

3.2.2 Poursuite de modèle

L'équation Diophantine (3.4) ne détermine que les polynômes R et S . D'autres conditions doivent être introduites pour déterminer le polynôme T dans le régulateur (3.2) également. Pour ce faire, il est requis que la réponse de la sortie au signal de référence u_r , soit décrite par les dynamiques :

$$A_m y_m(t) = B_m u_r(t) \quad (3.5)$$

Il vient alors de l'équation (3.3) que la condition suivante doit être vérifiée,

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{BT}{A_r} = \frac{B_m}{A_m} \quad (3.6)$$

Cette condition de poursuite de modèle implique que la réponse du système en boucle fermée aux signaux de référence soit spécifiée par le modèle (3.5). La réalisation de la poursuite de modèle dépend du modèle, du processus et des signaux de référence. S'il est possible d'annuler l'erreur pour tous les signaux de référence, alors la poursuite parfaite du modèle est réalisée.

Maintenant, on discute des conséquences de la condition de la poursuite de modèle. L'équation (3.6) implique qu'il existe des simplifications des facteurs communs de BT et A_r .

On factorise le polynôme B comme suit,

$$B = B^+ B^- \quad (3.7)$$

Où B^+ est un polynôme monique dont les racines sont stables et si bien amorties qu'on peut les compenser par le régulateur et B^- correspond aux facteurs instables ou faiblement amortis.

Il s'en suit que B^- doit être un facteur de B_m soit,

$$B_m = B^- B'_m \quad (3.8)$$

Puisque B^+ est compensé, il doit être un facteur de A_r . De plus, il vient de l'équation (3.6) que A_m doit aussi être un facteur de A_r . Le polynôme caractéristique de la boucle fermée prend donc la forme :

$$A_r = A_o A_m B^+ \quad (3.9)$$

Puisque B^+ est un facteur de B et A_r , il vient de l'équation (3.4) qu'il divise R aussi, soit

$$R = R' B^+ \quad (3.10)$$

et l'équation Diophantine (3.4) est réduite à :

$$AR' + B^-S = A_oA_m = A'_r \quad (3.11)$$

En introduisant les équations (3.7), (3.8) et (3.9) dans l'équation (3.6) on obtient :

$$T = A_oB'_m \quad (3.12)$$

3.2.3 Conditions de causalité

Pour obtenir un régulateur causal dans le cas discret ou propre dans le cas continu, on doit imposer les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \deg S &\leq \deg R \\ \deg T &\leq \deg R \end{aligned} \quad (3.13)$$

L'équation Diophantine (3.4) possède plusieurs solutions, car si R^0 et S^0 sont solutions, alors de même, les polynômes R et S sont solutions, tels que

$$\begin{aligned} R &= R^0 + QB \\ S &= S^0 - QA \end{aligned} \quad (3.14)$$

où Q est un polynôme arbitraire. Puisqu'ils existe plusieurs solutions, on peut choisir la solution qui donne le régulateur de plus petit degré. On l'appelle la *solution du degré minimal*.

Puisque $\deg A > \deg B$, le terme du plus haut degré sur le coté gauche de l'équation (3.4) est AR . Soit

$$\deg R = \deg A_r - \deg A$$

A cause de l'équation (3.14) il y a toujours une solution telle que $\deg S < \deg A = n$. On peut donc toujours trouver une solution dans laquelle le degré de S est au plus égal à $\deg A - 1$. Ceci est appelé la solution du degré minimal de l'équation Diophantine.

La condition $\deg S \leq \deg R$ implique alors que

$$\deg A_r = 2\deg A - 1$$

Il vient de l'équation (3.12) que la condition $\deg T \leq \deg R$ implique que

$$\deg A_m - \deg B'_m = \deg A - \deg B^+$$

En ajoutant $\deg B^-$ aux deux cotés, on trouve que c'est équivalent à $\deg A_m - \deg B_m \geq d_0$ où d_0 est le degré relatif du processus.

Cela veut dire dans le cas discret que le temps de retard du modèle doit être au moins égal au temps de retard du processus, ce qui est une condition très naturelle.

En résumé, les conditions de causalité (3.13) peuvent être réécrites ainsi

$$\begin{aligned} \deg A_r &= 2\deg A - 1 \\ \deg A_m - \deg B_m &\geq \deg A - \deg B = d_0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Il est naturel de choisir une solution dans laquelle le régulateur a le plus petit degré possible. Dans le cas discret il est aussi raisonnable d'exiger qu'il n'y ait pas de retard supplémentaire dans le régulateur. Ceci implique que les polynômes R , S et T doivent avoir le même degré.

La procédure de conception obtenue appelée aussi placement de pôles de degré minimal peut être résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme 1 Placement de pôles de degré minimal

- **Données** : Polynômes A , B
- **Spécifications** : Polynômes A_m , B_m et A_o
- **Conditions de compatibilité** :

$$\begin{aligned} \deg A_m &= \deg A \\ \deg B_m &= \deg B \\ \deg A_o &= \deg A - \deg B^+ - 1 \\ B_m &= B^- B'_m \end{aligned}$$

- **Étape 1** : Factoriser B tel que $B = B^+ B^-$, où B^+ est monique
- **Étape 2** : Trouver une solution R' et S avec $\deg S < \deg A$ à partir de

$$AR' + B^- S = A_o A_m$$

- **Étape 3** : A partir de $R = R' B^+$ et $T = A_o B'_m$, calculer le signal de commande en utilisant la loi de commande

$$Ru = Tu_r - Sy$$

□

Il existe certains cas spéciaux intéressants de cette procédure :

Tous les zéros sont compensés

La procédure de conception est simplifiée de manière significative dans le cas spécial où tous les zéros sont compensés ; alors $\deg A_o = \deg A - \deg B - 1$.

Il est naturel de choisir $B_m = A_m(1)q^{d_0}$. La factorisation dans l'**étape 1** devient très simple, et on obtient $B^- = b_0$ et $B^+ = B/b_0$. De plus, $T = A_m(1)q^{d_0}/b_0$ et le polynôme caractéristique de la boucle fermée devient $A_r = B^+ A_r'$.

L'équation Diophantine de l'**étape 2** se réduit à :

$$AR' + b_0S = A_r' = A_oA_m$$

Cette équation est facile à résoudre car R' est le quotient et b_0S est le reste quand A_oA_m est divisé par A . Cependant tous les zéros du processus doivent être stables et bien amortis pour permettre cette compensation.

Aucun zéro n'est compensé

La factorisation de l'**étape 2** : devient aussi très simple si aucun zéro n'est compensé. On a $B^+ = 1$, $B^- = B$ et $B_m = \beta B$ où $\beta = A_m(1)/B(1)$.

De plus $\deg A_o = \deg A - \deg B - 1$ et $T = \beta A_o$.

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est $A_r = A_oA_m$ et l'équation Diophantine de l'**étape 2** devient :

$$AR + BS = A_r = A_oA_m$$

3.3 Commande Auto-Ajustable

3.3.1 Commande Auto-Ajustable Indirecte

3.3.1.1 Estimation

Plusieurs méthodes récursives d'estimation peuvent être utilisées pour estimer les coefficients des polynômes A et B . Dans la suite, nous allons utiliser l'Estimateur des moindres carrés récursifs. Le modèle du processus (3.1) peut être écrit explicitement comme suit en omettant le bruit $v(t)$ pour simplifier,

$$y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - \dots - a_ny(t-n) + b_0u(t-d_0) + \dots + b_mu(t-d_0-m)$$

Noter que le degré du système est $\max(n, d_0 + m)$. Le modèle est linéaire par rapport aux paramètres et peut être écrit,

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta$$

où

$$\begin{aligned}\theta^T &= (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_0 \ \dots \ b_m) \\ \varphi^T(t-1) &= (-y(t-1) \ \dots \ -y(t-n) \ u(t-d_0) \ \dots \ u(t-d_0-m))\end{aligned}$$

L'estimateur des moindres carrés avec oubli exponentiel est donné par :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + K(t)\epsilon(t) \\ \epsilon(t) &= y(t) - \varphi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1) \\ K(t) &= P(t-1)\varphi(t-1) (\lambda + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1))^{-1} \\ P(t) &= I - K(t)\varphi(t-1)P(t-1)/\lambda\end{aligned}\tag{3.16}$$

Si le signal d'entrée du processus est suffisamment excitant et la structure du modèle estimé est compatible avec le processus, les estimations vont converger à leurs vraies valeurs. Cela prend $\max(n, m + d_0)$ périodes d'échantillonnage avant que le vecteur de régression ne soit défini. Dans le cas déterministe cela prend au moins $n + m + 1$ autres périodes pour déterminer les $n + m + 1$ paramètres du modèle, en supposant que l'entrée du processus est suffisamment et continuellement excitante. Cela donc prend au moins $n + m + 1 + \max(n, m + d_0)$ périodes d'échantillonnage pour que l'algorithme converge.

En combinant l'estimateur des moindres carrés récursifs (MCR) donné par les équations (3.17) avec la méthode de placement de pôles de degré minimal pour la conception du régulateur donnée dans l'Algorithme 1, on obtient le régulateur auto-ajustable suivant :

Algorithme 2 Un Régulateur Auto-Ajustable Indirecte

- **Données** : Spécifications sous forme des polynômes A_m , B_m et A_o
- **Étape 1** : Estimer les coefficients des polynômes A et B dans l'équation (3.1) en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs donnés par (3.17)
- **Étape 2** : Appliquer la méthode de placement de pôle à degré minimal donné par l'algorithme 1 où les polynômes A et B sont les estimations obtenues dans l'étape 1. Les polynômes R , S et T de la loi de commande sont obtenus.

– **Etape 3** : Calculer la variable de commande à partir de l'équation (3.2) soit

$$Ru(t) = Tu_r(t) - Sy(t)$$

Répéter les **étapes 1, 2 et 3** à chaque période d'échantillonnage. A noter qu'il existe certaines variantes de l'algorithme qui dépendent de la compensation des zéros du processus.

□

3.3.2 Commande Auto-Ajustable Directe

L'avantage des algorithmes Directs des régulateurs auto-ajustables par rapport aux algorithmes Indirects est que ces derniers demandent plus de calculs et sont parfois mal conditionnés par certaines valeurs des paramètres. Dans le cas des régulateurs Directs, les calculs de conception sont simplifiés ou carrément éliminés.

L'idée clé de ces régulateurs Directs est d'utiliser les équations de conception pour reparamétriser le modèle en terme des paramètres du régulateur. Cette reparamétrisation est aussi une clé pour la compréhension de la relation entre les SAMR et les régulateurs auto-ajustables.

Considérons un processus décrit par l'équation (3.1) avec $v = 0$ soit,

$$Ay(t) = Bu(t)$$

et la réponse désirée donnée par l'équation (3.5),

$$A_m y_m(t) = B_m u_r(t)$$

Le modèle du processus va être maintenant reparamétrisé en termes des paramètres du régulateur. Pour ce faire, considérons l'équation Diophantine (3.11),

$$A_o A_m = AR' + B^- S$$

En l'appliquant à $y(t)$ on obtient :

$$A_o A_m y(t) = R' Ay(t) + B^- Sy(t) = R' Bu(t) + B^- Sy(t)$$

Or, on a :

$$R' B + R' B^+ B^- = RB^-$$

Soit,

$$A_o A_m y(t) = B^- (Ru(t) + Sy(t)) \quad (3.17)$$

On remarque que cette équation peut être considérée comme un modèle de processus paramétré par les coefficients des polynômes B^- , R et S . Si les paramètres du modèles dans l'équation (3.17) sont estimés, la loi de commande est donc obtenue directement sans autres calculs.

A noter aussi que le modèle de l'équation (3.17) est non linéaire par rapport aux paramètres parce que le coté droit est multiplié par B^- . Cette difficulté peut être évitée dans le cas spécial des systèmes à phases minimales puisque $B^- = b_0$ qui est une constante.

3.3.2.1 Système à phase minimale

Si le modèle du processus est de phase minimale on a $\text{deg}A_o = \text{deg}A - \text{deg}B - 1$, B^- est tout simplement une constante et l'équation (3.17) devient :

$$A_o A_m y(t) = b_0 (Ru(t) + Sy(t)) = \tilde{R}u(t) + \tilde{S}y(t) \quad (3.18)$$

où R est monique, $\tilde{R} = b_0 R$ et $\tilde{S} = b_0 S$.

Puisque R et \tilde{R} diffèrent seulement parce que R est monique, on n'utilisera pas une notation différente dans la suite. On notera seulement à chaque fois si R est ou n'est pas monique.

Quand tous les zéros sont compensés, il est aussi naturel de choisir les spécifications telles que :

$$B_m = q^{d_0} A_m(1)$$

où $d_0 = \text{deg}A - \text{deg}B$. Cela donne une réponse avec un retard minimal et un gain statique unité.

En introduisant le vecteur des paramètres,

$$\theta = (r_0 \dots r_l \ s_0 \dots s_l) \quad (3.19)$$

et le vecteur de regression,

$$\varphi(t) = (u(t) \dots u(t-l) \ y(t) \dots y(t-l)) \quad (3.20)$$

le modèle donné par l'équation (3.18) peut être décrit par :

$$\eta(t) = A_o^* A_m^* y(t) = \varphi^T(t - d_0) \theta \quad (3.21)$$

comme la grandeur $\eta(t)$ peut être calculée à partir de $y(t)$, elle peut être considérée comme une sortie auxiliaire, et une estimation des paramètres peut être obtenue.

La méthode d'estimation fonctionne bien s'il y a un petit bruit, mais l'opération $A_o A_m y(t)$ peut amplifier le bruit significativement. La méthode suivante permet d'éviter cela : On réécrit l'équation (3.18) comme,

$$y(t) = \frac{1}{A_o A_m} (Ru(t) + Sy(t)) = R^* u_f(t - d_0) + S^* y_f(t - d_0) \quad (3.22)$$

où

$$\begin{aligned} u_f(t) &= \frac{1}{A_o^*(q^{-1})A_m^*(q^{-1})} u(t) \\ y_f(t) &= \frac{1}{A_o^*(q^{-1})A_m^*(q^{-1})} y(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

et $d_0 = \deg A - \deg B$. On a de plus supposé que $\deg R = \deg S = \deg(A_o A_m) - d_0 = l$. L'équation (3.22) peut être utilisée pour l'estimation avec les moindres carrés récurrents.

Si on introduit :

$$\theta = (r_0 \dots r_l \ s_0 \dots s_l)$$

et

$$\varphi(t) = (u_f(t) \dots u_f(t-l) \ y_f(t) \dots y_f(t-l))$$

on peut l'écrire comme :

$$y(t) = \varphi^T(t - d_0) \theta$$

Les estimations sont alors obtenues récursivement à partir des équations (3.17).

L'algorithme de commande adaptative suivant est alors obtenu,

Algorithme 3 Auto-Ajusteur Direct simple

– **Données** : Spécifications en termes des polynômes A_m , B_m et A_o et du degré relatif d_0

– **Étape 1** : Estimer les coefficients des polynômes R et S dans le modèle (3.22) soit,

$$y(t) = R^* u_f(t - d_0) + S^* y_f(t - d_0)$$

par les moindres carrés récurrents des équations (3.17).

– **Étape 2** : On calcule le signal de commande à partir de :

$$R^* u(t) = T^* u_r(t) + S^* y(t)$$

où R et S sont obtenus à partir des estimations de l'étape 1 et

$$T^* = A_o^* A_m^*(1) \quad (3.24)$$

avec $\deg A_o = d_0 - 1$.

On répète les étapes 1 et 2 à chaque période d'échantillonnage.

□

L'équation (3.24) est obtenue à partir de l'observation que l'opérateur de transfert en boucle fermée entre le signal de commande u_r et la sortie du processus y est :

$$\frac{TB}{AR + BS} = \frac{Tb_0B^+}{b_0A_oA_mB^+} = \frac{T}{A_oA_m}$$

En exigeant que cela soit égal à $q^{d_0}A_m(1)/A_m$ on obtient l'équation (3.24).

3.4 Commande Adaptative à Modèle de Référence

C'est l'une des approches de la commande adaptative les plus utilisées, dans laquelle les performances désirées sont spécifiées par le choix d'un modèle de référence (voir [10, 80, 114, 148]). Cette approche a été développée par Whitaker et ses collègues en 1958 [120]. Le système adaptatif à modèle de référence (SAMR), est une manière pratique d'imposer des spécifications au système de commande. Un schéma bloc représentant le principe de cette approche est donné dans la figure 3.3.

Le système possède une boucle de réaction (feedback) ordinaire composée du processus et du régulateur et une autre boucle de réaction (feedback) qui permet de changer les paramètres du régulateur. Les paramètres sont variés en fonction de l'erreur, qui est la différence entre la sortie du processus et celle du modèle de référence. La boucle de réaction ordinaire est appelée *boucle interne*, celle de l'ajustement des paramètres est appelée *boucle externe*.

Le mécanisme d'ajustement des paramètres peut être obtenu de deux manières : en utilisant *la méthode du gradient* ou en appliquant *la théorie de la stabilité*.

Les SAMR ont été développés à l'origine pour les systèmes continus déterministes, puis étendus aux systèmes discrets et aux systèmes avec perturbations stochastiques.

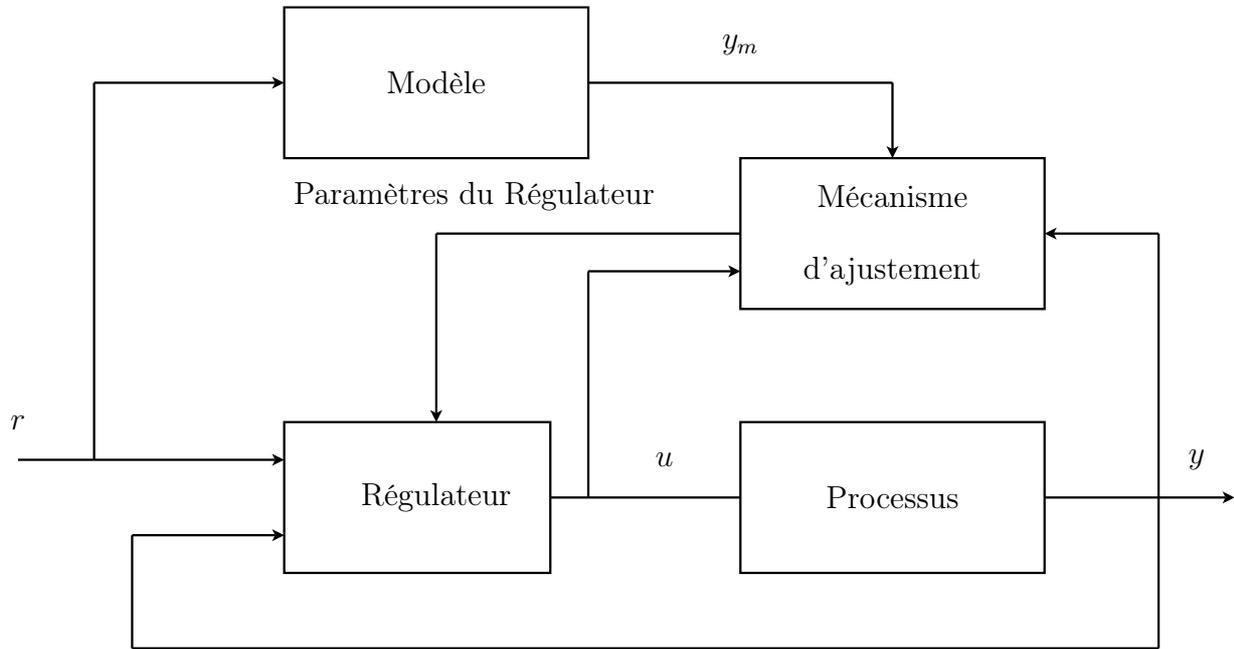


FIG. 3.3: Schéma-bloc d'un Système Adaptatif à Modèle de Référence (SAMR)

3.4.1 Loi de M.I.T.

La loi de M.I.T. est l'approche originale pour la Commande Adaptative à Modèle de Référence (CAMR). Le nom est dérivé du fait qu'elle a été développée au *laboratoire d'instrumentation* (maintenant *Laboratoire de Draper*) à l'université de M.I.T. (*Massachusetts Institute of Technology*)

Pour représenter la loi M.I.T., on considère un système en boucle fermée dans lequel le régulateur possède un vecteur θ de paramètres ajustables. La réponse désirée en boucle fermée est spécifiée par la sortie y_m du modèle de référence.

Soit e l'erreur entre la sortie y de la boucle fermée et celle du modèle de référence y_m . L'ajustement des paramètres est fait de manière à minimiser une fonction coût J définie par :

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e^2 \quad (3.25)$$

Pour minimiser J , il faut changer les paramètres dans la direction du gradient négatif de J , soit :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\delta J}{\delta \theta} = -\gamma e \frac{\delta e}{\delta \theta} \quad (3.26)$$

L'équation (3.26) est la fameuse loi de M.I.T. La dérivée partielle $\frac{\delta e}{\delta \theta}$, appelée dérivée de la sensibilité du système, exprime l'influence des paramètres ajustables sur l'erreur.

En supposant que la variation des paramètres est plus lente que celle des autres variables

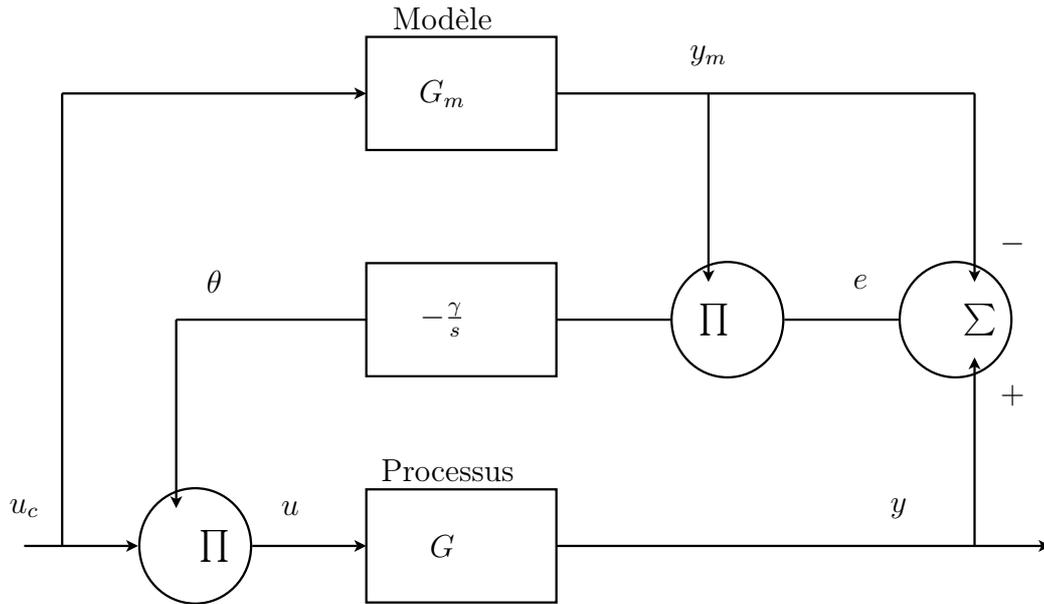


FIG. 3.4: Algorithme classique d'Adaptation.

du système, la dérivée $\frac{\delta e}{\delta \theta}$ peut être évaluée en considérant que θ est constant, voir figure FIG.3.4.

Il existe plusieurs alternatives à la fonction de coût donnée par l'équation (3.25). Si on choisit :

$$J(\theta) = |e| \quad (3.27)$$

La méthode du gradient donne,

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\delta e}{\delta \theta} \text{sign}(e) \quad (3.28)$$

Le premier SAMR qui fût implémenté était basé sur cette formule. Cependant il existe beaucoup d'autres possibilités, par exemple

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \text{sign} \left(\frac{\delta e}{\delta \theta} \right) \text{sign}(e) \quad (3.29)$$

qui est appelée l'*algorithme du sign-sign*. Une version discrete de cet algorithme est utilisée en télécommunications, dans laquelle une implémentation simple et des calculs rapides sont requis.

On peut décrire le problème de la commande à modèle de référence comme suit :

Soit $G_m(s)$ la fonction de transfert du modèle de référence spécifiant les performances désirées. Soit $G_{BF}(s, \theta)$ la fonction de transfert du processus en boucle fermée où θ est le

vecteur des paramètres ajustables. r est le signal de référence.

Le SAMR essaie de varier les paramètres du régulateur tel que l'erreur :

$$e(t) = (G_{BF}(p, \theta) - G_m(p)) r(t)$$

tende vers zéro.

La loi de M.I.T. donnée par

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e \quad (3.30)$$

où $\varphi = -\frac{\delta e}{\delta \theta}$ et γ le gain d'adaptation, peut être interprétée comme une méthode du gradient pour minimiser l'erreur.

Remarques : [10]

- Le but des SAMR est de faire converger l'erreur $e = y - y_m$ vers zéro. Cela n'implique pas nécessairement que les paramètres du régulateur convergent vers leurs valeurs correctes.

-Le choix du gain d'adaptation est crucial et dépend des niveaux des signaux. L'algorithme normalisé :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \frac{\varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad (3.31)$$

est moins sensible aux niveaux des signaux.

- Le système obtenu avec la loi de M.I.T. fonctionne comme prévu pour de petits gains d'adaptation. Des comportements plus complexes peuvent apparaître pour de grands gains d'adaptation.

3.4.2 Réalisation du Régulateur SAMR

Maintenant on va définir un Système Adaptatif à Modèle de Référence (SAMR) pour l'ajustement des paramètres du régulateur. On considère un processus SISO. On suppose que toutes les dynamiques sont linéaires.

L'idée clé est que le régulateur peut être paramétré de manière à ce que l'erreur soit linéaire par rapport aux paramètres du régulateur.

La méthode de conception du régulateur peut être résumée comme suit :

- 1. Trouver une structure du régulateur qui permet une poursuite parfaite de la sortie
- 2. Calculer l'erreur de modèle
- 3. Utiliser la loi d'ajustement des paramètre (3.30) ou la loi normalisée (3.31).

3.4.2.1 Structure du Régulateur

On suppose que le processus est décrit par le modèle continu,

$$A y(t) = b_0 B u(t) \quad (3.32)$$

où les polynômes A et B sont supposés ne pas avoir de facteurs communs et le polynôme B est monique et a tous ses zéros dans le demi-plan gauche. La variable b_0 est dite *gain instantané* ou *gain à hautes fréquences*.

Le régulateur peut être écrit sous la forme (3.2) :

$$R u(t) = T u_r(t) - S y(t)$$

où u_r est le signal de référence. Puisque le polynôme B est stable, les pôles correspondant peuvent être compensés par le régulateur. Cela correspond à $R = R_1 B$.

Le système en boucle fermée obtenu quand le régulateur est appliqué au processus (3.32) est décrit par :

$$(A R_1 + b_0 S) y = b_0 T u_r \quad (3.33)$$

Si le polynôme T est choisi tel que $T = t_0 A_0$, où A_0 est un polynôme monique stable et R_1 et S satisfont :

$$A R_1 + b_0 S = A_o A_m \quad (3.34)$$

Il est possible de réaliser une poursuite de modèle parfaite avec le modèle :

$$A_m y_m(t) = b_0 t_0 u_r(t) \quad (3.35)$$

3.4.2.2 L'erreur de modèle

A partir des équations (3.32) et (3.33) il vient que :

$$A_o A_m y = A R_1 y + b_0 S y = R_1 b_0 B u + b_0 S y \quad (3.36)$$

Introduisons l'erreur $e = y - y_m$, il vient à partir des équations (3.35) et (3.36) que :

$$A_o A_m e = A_o A_m (y - y_m) = b_0 (R u + S y - T u_r)$$

ou bien

$$e = \frac{b_0}{A_o A_m} (R u + S y - T u_r) \quad (3.37)$$

Soient k , l et m les degrés des polynômes R , S et T respectivement. Introduisons le vecteur des vrais paramètres du régulateur :

$$\theta^0 = (r_1 \dots r_k \ s_0 \dots s_l \ t_0 \dots t_m) \quad (3.38)$$

et introduisons le vecteur de régression (ou de mesures) φ :

$$\begin{aligned} \varphi^T &= - \left[\frac{\delta e}{\delta r_1} \ \frac{\delta e}{\delta r_2} \ \dots \ \frac{\delta e}{\delta r_k} \ \frac{\delta e}{\delta s_0} \ \frac{\delta e}{\delta s_1} \ \dots \ \frac{\delta e}{\delta s_l} \ \frac{\delta e}{\delta t_0} \ \frac{\delta e}{\delta t_1} \ \dots \ \frac{\delta e}{\delta t_m} \right] \\ &= \frac{b_0}{A_o A_m} [p^{k-1}u \ \dots \ u \ p^l y \ \dots \ y \ -p^m u_r \ \dots \ -u_r] \end{aligned} \quad (3.39)$$

L'erreur pourra s'écrire

$$e = \varphi^T \theta^0 \quad (3.40)$$

Les polynômes R , S et T doivent vérifier les conditions,

$$\begin{aligned} R(p) &= p^k + r_1 p^{k-1} + r_2 p^{k-2} + \dots + r_k \\ S(p) &= s_0 p^l + s_1 p^{l-1} + s_2 p^{l-2} + \dots + s_l \\ T(p) &= t_0 p^m + t_1 p^{m-1} + t_2 p^{m-2} + \dots + t_m \end{aligned} \quad (3.41)$$

avec,

$$\begin{aligned} \deg A_m - \deg B_m &\geq \deg A - \deg B \\ \deg A_o &\geq 2\deg A - \deg A_m - \deg B^+ - 1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ces deux conditions sont toujours vérifiées, même dans le cas où $A_o = 1$ (l'observateur est négligé) car on utilise un modèle tel que $\deg A_m > \deg A$

$$\begin{aligned} k &= \deg R = \deg R_1 + \deg B = \deg A_m + \deg B - \deg A \\ l &= \deg S \leq \deg R \end{aligned} \quad (3.43)$$

donc on prendra,

$$\deg S = \deg R$$

ou bien

$$\deg S = \deg R - 1$$

et

$$m = \deg T = \deg B_m$$

Généralement on prend $\deg S = \deg R - 1$ pour que le filtre S/R soit causal.

3.5 CAMR robuste avec feedforward

3.5.1 Introduction

La commande adaptative a prouvé son efficacité pour la régulation des systèmes partiellement inconnus ou à paramètres variant dans le temps. Dans ce domaine la commande adaptative à modèle de référence (CAMR) devint très populaire parce qu'elle présente un algorithme très simple avec une implémentation facile sans avoir à utiliser d'identificateurs ou observateurs dans la boucle de commande [10, 80].

Malheureusement un tel algorithme montre ses limites dans un environnement industriel réel qui présente généralement des bruits et des perturbations pouvant endommager la qualité du produit ou le bon fonctionnement des processus de production.

Plusieurs modifications de l'algorithme de commande à modèle de référence ont vu le jour dans le but de "robustifier" le système commandé [81, 85].

L'idée de l'utilisation d'un feedforward parallèle simple dans la boucle d'adaptation est apparue à partir des années 80. Depuis, beaucoup de travaux ont utilisé cette approche comme système de commande robuste [16, 109].

3.5.2 Notion de Robustesse

Le terme "robuste" a été pour la première fois introduit en statistique en 1953. Un estimateur est robuste s'il est insensible à de petits écarts sur les hypothèses pour lesquelles il a été optimisé. Il y a deux sens au terme petit : de petites variations sur toutes les données, ou des écarts importants sur un petit nombre de données ; c'est le deuxième aspect qui est le plus mal pris en compte par les estimateurs classiques.

La notion de robustesse, se définit par rapport à une certaine propriété et un ensemble de modèles. Une propriété (principalement la stabilité ou le niveau des performances) est dite robuste, si tous les modèles appartenant à l'ensemble la possèdent.

L'étude de la robustesse est fondamentalement liée à la question suivante : "est-ce que le système conçu fonctionnera correctement dans la pratique ?"

L'analyse de la stabilité robuste concerne l'étude de l'influence des incertitudes structurées et non structurées, sur la stabilité du processus à étudier. Les techniques de la commande robuste devraient concilier les exigences de stabilité et de performances.

Le but de la commande robuste est de garantir la stabilité et un niveau de performance acceptable pour les systèmes commandés malgré des incertitudes sur les paramètres et/ou les dynamiques négligées dans le modèle de processus. Parmi les théories, et les algorithmes de commande qui s'intéressent à la robustesse des systèmes commandés, la commande H^∞ , LQG,...

Problème de conception

Les objectifs de la commande des procédés sont déterminés par les conditions de fonctionnement des processus et par les spécifications imposées au préalable. Ils sont originellement formulés en termes de paramètres physiques, technologiques ou économiques. Les exigences sur la commande peuvent être typiquement répertoriées dans quatre groupes :

1. **Stabilité** : Le point de fonctionnement du système bouclé doit être asymptotiquement stable.
2. **Régulation asymptotique** : Pour une classe donnée d'entrées de commande et des perturbations extérieures la régulation asymptotique ($\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - u_r(t) = 0$) doit se réaliser.
3. **Les exigences dynamiques** : Les performances du système bouclé doivent satisfaire un ensemble de spécifications données telles que les bornes sur les réponses indicielles, exigence d'un certain degré de non interaction entre les différents signaux, etc...
4. **La robustesse** : Les propriétés du système bouclé (1-3) doivent être préservées sous une classe donnée de variations des dynamiques de la boucle ouverte.

Le groupe (2) peut être modifié dans le cas des signaux externes stochastiques, pour les quelles une régulation asymptotique est requise en moyenne.

Dans la commande de processus, les objectifs de conception de la classe (3) sont généralement formulés comme des contraintes sur les réponses de la boucle fermée $y(t)$ et $u(t)$ pour un échelon de commande ou de perturbations.

Ces spécifications du domaine temporel sont souvent transformées en des spécifications similaires dans le domaine fréquentiel ou peuvent être formulées directement comme des bornes sur les fonctions de transfert $C(jw)$, $G(jw)$ et $T(jw)$ du système en boucle ouverte et en boucle fermée.

La difficulté majeure des problèmes de conception (1–4) est que les aspects de performance et d'incertitude doivent être évalués simultanément pour obtenir un bon compromis. Comme la théorie de commande optimale s'intéresse à l'aspect performance (1–3), nous sommes principalement concernés par l'aspect incertitudes et robustesse (4).

Dans plusieurs application pratiques les spécifications de conception ne doivent pas être considérées comme définitivement fixées. Elles sont souvent contradictoires.

Le problème de commande considéré ici devra être résolu par le moyen d'un régulateur avec feedback et feedforward.

3.5.3 Définitions de base

Cette approche est basée sur le concept de la condition de "positivité réelle" [15], qui peut garantir l'implémentation stable de la configuration de la commande adaptative. Présentons quelques définitions nécessaires :

Définition 1 *Une matrice de transfert $m \times m$ strictement propre est un système strictement positif réel (SPR) si elle a n pôles et $n - m$ zéros, et si tous ses pôles et zéros sont placés dans le demi-plan gauche.*

Définition 1 *Un système est "quasi strictement positif réel" (almost strictly positive real, ASPR) s'il existe une matrice de feedback de sortie constante inconnue K_y telle que le système en boucle fermée (fictif) résultant soit strictement un réel positif.*

Remarques

1. Le procédé ASPR doit aussi avoir n pôles et $n - m$ zéros.
2. Les pôles ne sont pas nécessairement stables (le procédé sera stabilisé par le gain fictif K_y), cependant tous les $n - m$ zéros doivent être placés dans le demi-plan gauche (Phase minimale).
3. On peut facilement montrer [15] que si un système est ASPR, alors il peut être stabilisé par n'importe quel gain de sortie constant ou variable, s'il est assez grand. Mais dans cette méthode, au lieu d'utiliser une régulation avec gain élevé on va utiliser une configuration de feedforward parallèle qui peut par un raisonnement équivalent satisfaire les conditions de positivité réelle.

3.5.4 Principe de la CAMR robuste avec feedforward

L'idée de base de l'utilisation d'un feedforward parallèle avec le procédé commandé est [16, 68] :

Si le procédé décrit par la matrice de transfert $m \times m$ $G_p(s)$ d'ordre n peut être stabilisé par quelque configuration dynamique de feedback $C(s)$ d'un ordre $p \leq n$, alors le procédé augmenté $G_a(s) = G_p(s) + C^{-1}(s)$ est ASPR si le degré relatif de Mac Millan de $G_a(s)$ est $m \geq 0$.

Beaucoup de travaux précédents ont proposé des correcteurs impropres PD de la forme :

$$C(s) = K \left(1 + \frac{s}{s_0} \right) \quad (3.44)$$

qui peuvent stabiliser beaucoup de procédés réels pour des valeurs de K suffisamment élevées.

Un feedforward d'un effet similaire peut être choisi ainsi :

$$F(s) = C^{-1}(s) = \frac{F_p}{\left(1 + \frac{s}{s_0} \right)} \quad (3.45)$$

Où $F_p = K^{-1}$, tel que le procédé augmenté devienne :

$$G_a(s) = G_p(s) + F(s) \quad (3.46)$$

Puisque K doit être très grand, F_p est un assez petit coefficient pour garantir que $G_a(s)$ soit ASPR, et nous permet de prendre $G_a(s) \approx G_p(s)$ pour tout calcul pratique. Cependant, il faut que la valeur minimale de F_p utilisée ne soit pas inférieure à l'inverse du gain maximal admissible K_{max} . Comme on va le montrer dans la partie simulation même si $F(s)$ facilite l'implémentation du régulateur adaptatif robuste, il n'a pas d'effets significatifs sur la sortie du procédé original. En plus, puisque le feedforward parallèle que nous utilisons ne contient pas d'intégrations pures, alors que, plusieurs procédés en contiennent souvent, la poursuite asymptotique parfaite du procédé augmenté (Feedforward + Actionneur) implique une poursuite asymptotique parfaite du procédé original. Il est clair que le Feedforward parallèle ne peut être utilisé que si quelques connaissances a priori sur le système commandé sont données. Ces informations peuvent être utilisées pour implémenter le feedforward parallèle supplémentaire qui peut rendre le système augmenté ASPR, alors c'est le rôle du régulateur adaptatif non linéaire d'imposer au procédé le comportement d'E/S du modèle de référence.

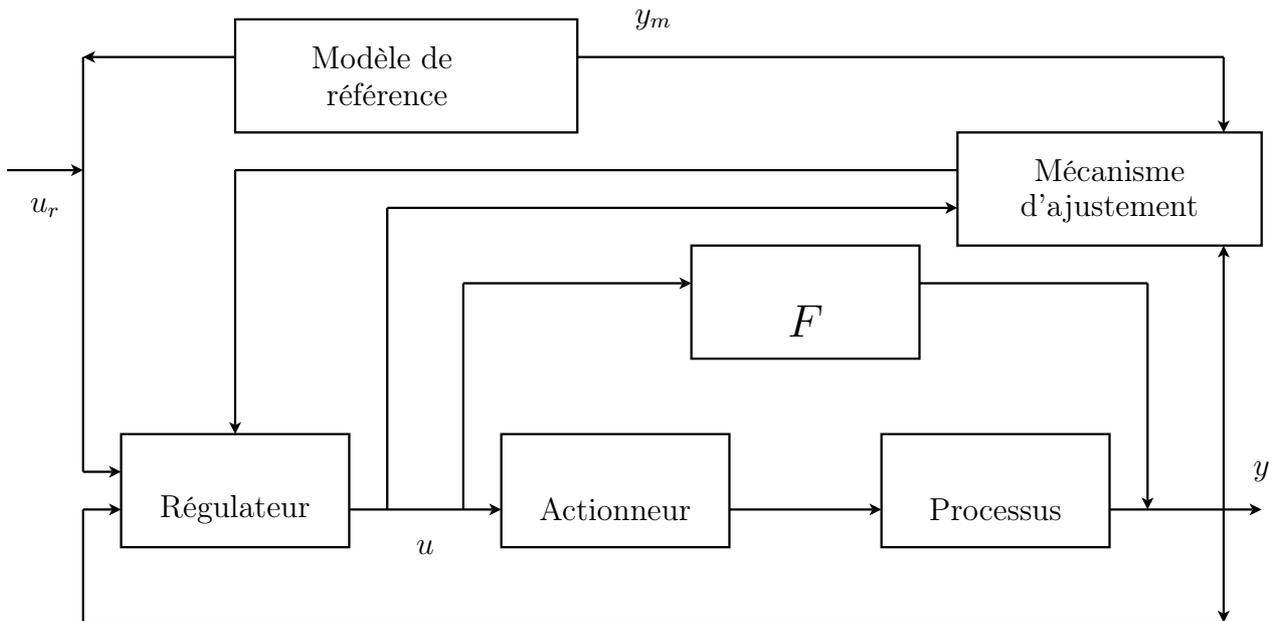


FIG. 3.5: Feedforward simple dans le schéma de CAMR.

Mais il faut remarquer qu'en présence de perturbations d'entrée ou de sortie, et plus important, dans le cas d'une bande passante limitée des actionneurs et capteurs, le système commandé n'est pas ASPR. Sans la disponibilité d'une information sur l'ordre ou d'autres paramètres du système spécifié.

En se basant sur la connaissance générale des structures de commande, nous devons supposer ici que le processus peut être stabilisé par un contrôleur avec Feedback. Cette supposition est la seule connaissance a priori nécessaire pour l'implémentation du régulateur adaptatif robuste et permet d'utiliser un Feedforward parallèle simple. Les coefficients sont sélectionnés heuristiquement, F_p très petites et s_0 assez grand.

3.5.5 Conclusion

La robustesse est une propriété très intéressante dans le domaine industriel. C'est pourquoi il est nécessaire d'étudier les possibilités de développements pratiques de cette notion. L'une des techniques de la commande robuste qui ont récemment été introduites est le Feedforward-Actionneur, afin d'éliminer les incertitudes et les perturbations du système.

3.6 Commande Adaptative à Grand Gain

3.6.1 Introduction

La commande à grand gain est un outil bien connu et populaire pour la stabilisation robuste des systèmes de commande qui satisfont certaines hypothèses sur le processus. Dans le but de trouver la valeur nécessaire du paramètre grand gain, certaines propriétés du processus à commander, comme l'ordre du système, le signe de son gain en hautes fréquences et l'amplitude de l'incertitude doivent être connues. Dans plusieurs cas, ces informations ne sont pas disponibles ou bien l'effort à mettre en oeuvre pour les obtenir n'est pas justifié.

Dans le but d'éviter ce problème, le paramètre grand gain peut être déterminé de manière adaptative. A cause du fait qu'aucun mécanisme d'identification n'est employé, cette stratégie de commande adaptative est appelée *commande adaptative non basée sur l'identification* et prend souvent la forme simple (ou des modifications simples de cette forme) :

$$\begin{aligned} u(t) &= -k(t)y(t) \\ \dot{k}(t) &= \|y(t)\|^2, \quad k(0) = k_0 \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Cette approche a été initiée par Morse en 1983 [107], Mareels [99], Willems et Byrnes [172] et Mårtensson [100] pour les systèmes linéaires invariant dans le temps. Si le système nominal est linéaire et satisfait les hypothèses nécessaires, la stabilité du système ainsi commandé peut être garantie pour une large classe d'incertitudes. De plus, ces régulateurs réalisent une désensibilisation arbitraire des systèmes de commande en boucle fermée.

3.6.2 Problème de stabilité

On considère un système SISO incertain décrit par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.48a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.48b)$$

où $t \in \mathfrak{R}$ est la variable de temps, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est l'état avec n inconnu, $u(t) \in \mathfrak{R}$ est la commande scalaire et $y(t) \in \mathfrak{R}$ est la sortie scalaire mesurée ; A , B , C , sont des matrices inconnues de dimensions appropriées.

On formule les hypothèses suivantes.

Hypothèse A 1 (A, B) est controlable et (C, A) est observable.

Supposons que (3.48a) est l'objet d'un régulateur linéaire en boucle fermée ayant un gain $-k \in \mathfrak{R}$, i.e.,

$$u = -ky \quad (3.49)$$

Alors le système commandé résultant en boucle fermée peut être décrit par

$$\dot{x} = \tilde{A}(k)x \quad (3.50)$$

où

$$\tilde{A}(k) \triangleq A - kBC \quad (3.51)$$

Le système (3.50) est asymptotiquement stable si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq -\epsilon \quad \forall \lambda \in \sigma[\tilde{A}(k)]$$

où $\sigma[\tilde{A}(k)]$ symbolise l'ensemble des valeurs propres de $\tilde{A}(k)$.

3.6.3 Quelques définitions utiles

On peut introduire les définitions suivantes :

Definition 1 Le système (3.48) est uniformément stabilisable par un grand gain du feedback de la sortie si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ et $\underline{k} \in \mathfrak{R}$ tels que pour tout $k \geq \underline{k}$

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq -\epsilon \quad \forall \lambda \in \sigma[\tilde{A}(k)]$$

Definition 2 Le système (3.48) est à phase minimale si :

$$\det \begin{pmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ a tous ses zéros dans } C^-.$$

Definition 3 Le système (3.48) a un degré relatif unité si :

$$CB \neq 0$$

CB est alors appelé le gain en hautes fréquences.

3.6.4 Stabilité de la commande à grand gain

On peut citer le théorème suivant,

Theorem 1 *Considérons quelque système SISO décrit par (3.48), si en plus il est de phase minimale avec un degré relatif unité et possède un gain positif en hautes fréquences, alors il est uniformément stabilisable par le régulateur adaptatif à grand gain (3.49).*

Preuve du Théorème 1.

Pour la démonstration voir les références [34, 60, 61, 172].

□

3.6.5 Conclusion

Dans cette section nous avons introduit quelques notions du schéma de commande adaptative à grand gain pour une classe de systèmes linéaires. L'objet de notre recherche est d'introduire des opérateurs d'ordre fractionnaire dans cet algorithme de commande, de démontrer sa stabilité et de comparer ses performances avec celle du schéma initial.

3.7 Régulateur PI adaptatif

3.7.1 Introduction

Posons le problème de la stabilisation adaptative par retour de sortie pour des systèmes linéaires mono-variables (siso) avec des perturbations continues constantes de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + d \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \tag{3.52}$$

Où $A \in R^{n \times n}$, b et c sont des vecteurs avec des dimensions appropriées. d est un vecteur de perturbations constantes de même dimension que $x(t)$. L'hypothèse suivante est imposée au système 3.52 :

H 1 Le système est de degré relatif unité avec gain positif à haute fréquence et à phase minimale tel que :

$$b.c > 0 \text{ et } \det \begin{pmatrix} sI - A & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ pour tout } s \in C^+$$

On sait que le système 3.52 satisfaisant *H1* est stabilisé par une simple stratégie de retour de la sortie [63, 60, 172] :

$$u(t) = -k(t)y(t), \dot{k}(t) = y^2(t), k(0) \geq 0 \quad (3.53)$$

Beaucoup de résultats intéressants ont été développés basés sur le concept de retour

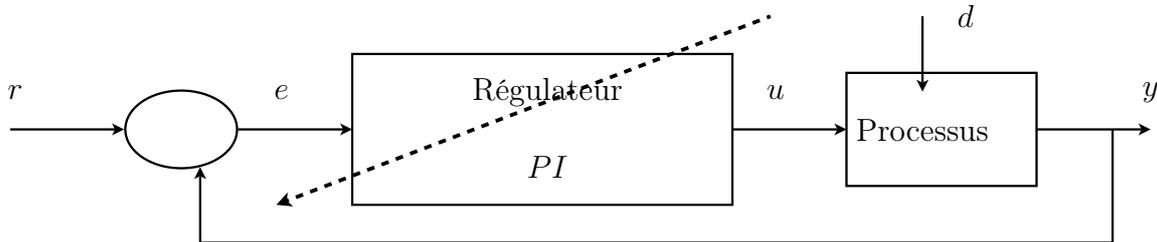


FIG. 3.6: Le régulateur adaptatif PI d'un système perturbé

(Feedback) à haut gain. Ce schéma a été considéré aussi pour les systèmes avec degré relatif supérieur à 1 et pour des systèmes de dimension infinie [35, 108, 86, 65].

Il est aussi montré qu'un système de poursuite adaptative peut être construit, comme des systèmes de contrôle de retour (Feedback) conventionnel, en présentant un modèle interne tel que la supposition tienne encore pour le système constitué du processus contrôlé et du modèle interne connectés en série [60].

Le problème devient difficile dans le cas où le système contient des perturbations. Il y a des versions améliorées pour traiter quelques classes de perturbations ; cependant, les stratégies de contrôle peuvent être relativement compliquées, et les perturbations sont supposées être mesurables ou satisfaire certaines conditions sur la norme [60, 146, 56].

Dans ce travail, nous nous intéressons aux systèmes avec perturbations constantes inconnues, qui constituent un élément essentiel et un cas important dans les systèmes de contrôle. Nous montrons que la régulation exacte peut être établie pour le système 3.52 en introduisant une action intégrale adaptative et quelques changements du gain adaptatif dans la stratégie de contrôle Figure 3.7.

Le contrôleur proposé peut résoudre automatiquement le problème de la poursuite de la sortie d'un échelon de référence en utilisant la réaction de l'erreur.

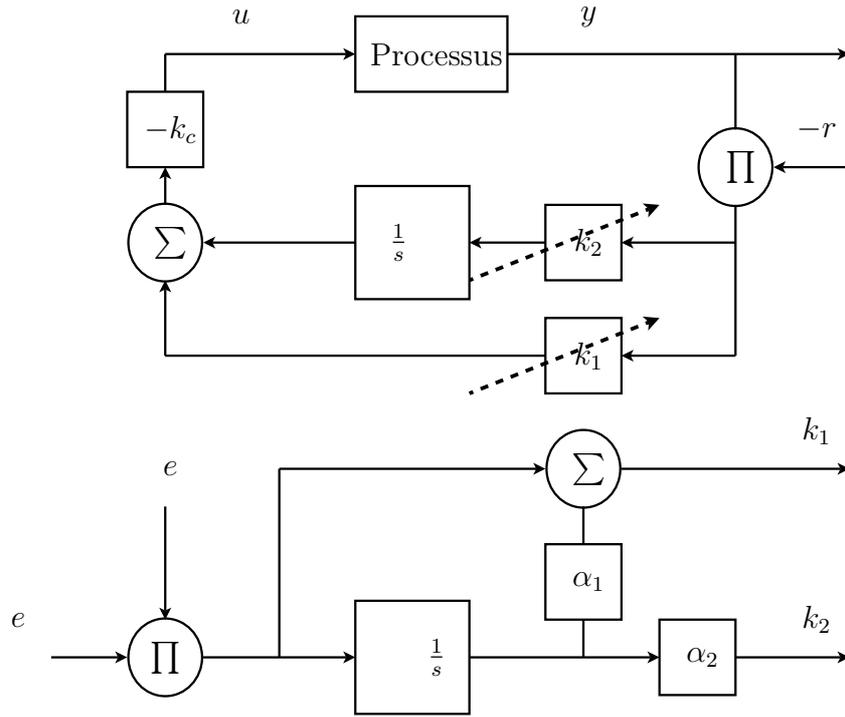


FIG. 3.7: Système de commande PI adaptative

3.7.2 Stratégie de commande

On considère toujours le système (3.52) satisfaisant la supposition *H1*. L'objectif de cette conception de commande est de trouver une loi de commande à retour adaptatif qui stabilise le système en boucle fermée et force la sortie à converger sans erreur statique. Aucune connaissance à priori des paramètres du système et son ordre ne peut être utilisée. Il est clair qu'avec la loi de commande (3.55), l'exigence ne sera pas satisfaite à cause de la présence des perturbations d . Dans le cas où cette perturbation est constante, ce problème peut être facilement surmonté en introduisant un terme intégral dans la loi de commande. Nous voulons vérifier si cette approche est aussi efficace dans le présent problème de retour adaptatif de sortie.

Maintenant, pour le système (3.52), considérons une loi de commande adaptative de la forme :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -k_c \left(k_1(t)y(t) + \int_t^0 k_2(\tau)\delta\tau \right) \\
 k_1(t) &= k_p(t) + \alpha_1 k_i(t), k_2(t) = \alpha_2 k_i(t) \\
 k_p(t) &= y^2(t), \dot{k}_i(t) = y^2(t)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

La représentation schématique ordinaire du système complet est montrée dans la Figure FIG.3.7. Nous pouvons voir la simplicité extrême du système de commande. Nous insérons

le terme intégral dans le contrôleur (3.55) pour éliminer l'effet de la perturbation constante sans détruire la stabilité du système en boucle fermée. On montrera cela dans la section suivante.

3.7.3 Analyse de la stabilité

On réécrit le système (3.52) pour le transformer en un problème de perturbation nulle. Puisque nous considérons une perturbation constante, c'est-à-dire $\dot{d} = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= A\dot{x}(t) + b\dot{u}(t) \\ y(t) &= cx(t)\end{aligned}\tag{3.55}$$

Considérons le système augmenté :

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= A_a w(t) + b_a v(t) \\ z(t) &= c_a w(t)\end{aligned}\tag{3.56}$$

où

$$w = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix}, v = \dot{u}, A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, b_a = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, c_a = [c\alpha]$$

Et α est une constante positive. Il est facile de vérifier que si le système (A, b, c) avec l'entrée u et la sortie y est à phase minimale, observable, commandable, et de degré relatif 1, alors le système augmenté (A_a, b_a, c_a) avec l'entrée v et la sortie z a les mêmes propriétés. En effet, la fonction de transfert de v à z deviendra :

$$G_a(s) = \left(1 + \frac{\alpha}{s}\right) c(sI - A)^{-1} b\tag{3.57}$$

Examinons maintenant le vecteur v . Sans aucune perte de généralité, mettons $k_c = 1$, ensuite de (3.57) nous avons :

$$\begin{aligned}-v &= -\dot{u}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(k_1(t)y(t) + \int_t^0 k_2(\tau)y(\tau)d\tau \right) \\ &= \dot{k}_1(t)y(t) + k_1(t)\dot{y}(t) + k_2(t)y(t) \\ &= 2y^2(t)\dot{y}(t) + \alpha_1 y^3(t) + k_1(t)\dot{y}(t) + k_2(t)y(t) \\ &= (3k_p(t) + \alpha_1 k_i(t)) \dot{y}(t) + (\alpha_1 k_p(t) + \alpha_2 k_i(t)) y(t)\end{aligned}\tag{3.58}$$

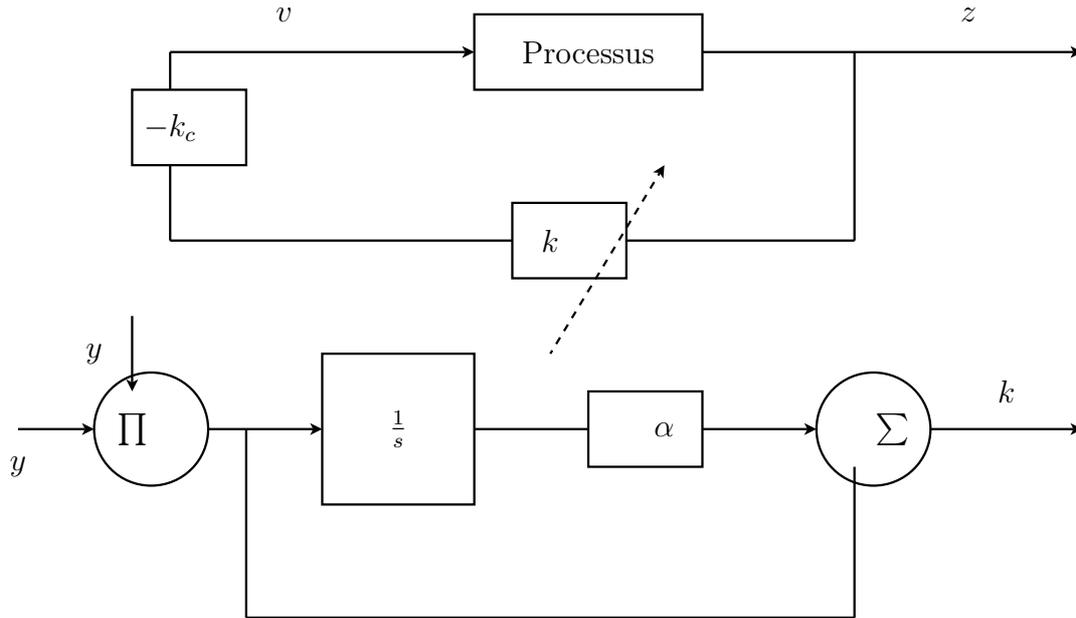


FIG. 3.8: Système en boucle fermée équivalent où $v = \dot{u}$ et $z = \dot{y} + \alpha y$.

Si nous choisissons $\alpha_1 = 3\alpha$, et $\alpha_2 = 3\alpha^2$ alors (3.59) devient :

$$\begin{aligned} v &= -3(k_p(t) + \alpha k_i(t))(\dot{y}(t) + \alpha y(t)) \\ &= -3(k_p(t) + \alpha k_i(t))z(t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Nous pouvons donc conclure que le système perturbé en boucle fermée Fig.3.6 avec le contrôleur (3.55) est équivalent à celui du système non perturbé (3.56) avec le contrôleur (3.59), et notre problème peut être exposé comme suit :

Est-ce que le contrôleur adaptatif de la réaction :

$$\begin{aligned} v(t) &= -k_c k(t) z(t), k(t) = k_p(t) + \alpha k_i(t); \\ k_p(t) &= y^2(t), \dot{k}_i(t) = y^2(t) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$z(t) = \dot{y}(t) + \alpha y(t), \alpha > 0 \quad (3.61)$$

Est un stabilisateur global pour le système représenté dans la figure Fig.3.7?

Le théorème suivant sera la réponse à cette question.

Théorème 1 [45] *Le contrôleur (3.61) stabilise globalement le système Fig.3.7, et le système en boucle fermée satisfait la condition $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.*

□

Preuve :

La preuve est constituée de deux parties. En premier lieu, nous montrons la bornitude de $k(t)$, c.-à-d., $k \in L^\infty$, avec un raisonnement par contre argument. Alors nous prouvons que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ en montrant que, $y \in L^2 \cap \dot{y} \in L^\infty$.

Puisque le système Fig.3.7 satisfait la supposition H1, il peut être réécrit sous forme de représentation d'état différentielle [108, 172] :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= gv(t) + \Phi(z) \\ \Phi(z) &= c_1 x_1(t) + az(t) \\ \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + b_1 z(t) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Où A_1 est une matrice stable, a est une constante, et $g > 0$. En utilisant $v(t) = -k_c k(t)z(t)$ et $k_c = 1$ pour simplifier, on obtient :

$$\dot{z}(t) = -gk(t)z(t) + \Phi(z) \quad (3.63)$$

Dans la suite, nous négligeons la dépendance de chaque variable du temps pour simplifier.

(A)

On choisit la fonction de Lyapounov $V = \frac{z^2}{2}$, sa dérivée selon la solution de (3.63) est :

$$\dot{V} = -gkz^2 + \Phi z \quad (3.64)$$

à partir de (3.61) on a :

$$\begin{aligned} z^2 &= \dot{y}^2 + 2\alpha y \dot{y} + \alpha^2 y^2 \\ \dot{k} &= \dot{k}_p + \alpha \dot{k}_i = 2y \dot{y} + \alpha y^2 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Et nous avons

$$z^2 = \alpha \dot{k} + \dot{y}^2 \quad (3.66)$$

Substituons (3.66) dans (3.64), on obtient :

$$\dot{V} = -\alpha g k \dot{k} - g k \dot{y}^2 + \Phi z \quad (3.67)$$

Intégrons (3.67),

$$V = -\frac{1}{2} \alpha g k^2 - \int_t^0 g k \dot{y}^2 d\tau + \int_t^0 \Phi z d\tau \quad (3.68)$$

Selon le lemme (voir [108]), de (3.63) il existe deux nombres M_1 et M_2 positifs tels que :

$$\int_t^0 \Phi z d\tau \leq M_1 + M_2 \int_t^0 z^2 d\tau$$

En utilisant cela et (3.66), nous avons

$$\begin{aligned} V &\leq -\frac{1}{2}\alpha g k^2 - \int_t^0 g k \dot{y}^2 d\tau + M_1 + M_2 \int_t^0 z^2 d\tau \\ &= \alpha M_2 k - \frac{1}{2}\alpha g k^2 - \int_t^0 (g k - M_2) \dot{y}^2 d\tau + M_1 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Supposons maintenant que $k \notin L^\infty$, alors il doit exister quelque t tel que $k(t)$ est grand et le côté droit de (3.69) devient négatif, ce qui contredit la positivité de V , donc : $k \in L^\infty$.

De (3.61), nous avons aussi $k_p \in L^\infty$, $k_i \in L^\infty$, $y \in L^2$ et $\dot{y} \in L^\infty$ par conséquent.

(B)

À ce point, nous pouvons voir que pour prouver que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, il suffit de montrer que $\dot{y} \in L^\infty$ puisque $y \in L^2$ et $\dot{y} \in L^\infty$ impliquent $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. D'autre part, si $z(t) \in L^2$, alors nous avons $\dot{y} \in L^\infty$ de $z(t) = \dot{y} + \alpha y(t)$. Par conséquent, $z(t) \in L^\infty$ suffira pour garantir la stabilité de la boucle fermée et $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Nous le montrons ci-dessous.

De (3.63) et (3.63), le système en boucle fermée peut être écrit comme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & b_1 \\ c_1 & a - g k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} (k^* - k) z \\ z &= [01] \begin{bmatrix} x_1 \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.70)$$

D'où

$$z = [01] (pI - Q)^{-1} [0g]^T (k^* - k) z \quad (3.71)$$

Où

$$Q = \begin{bmatrix} A_1 & b_1 \\ c_1 & a - g k^* \end{bmatrix}$$

Et k^* est une constante choisie pour que Q soit stable et p indique l'opérateur différentiel.

A partir de (3.61), on a $y = (p + \alpha)^{-1} z$, la relation (3.71) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} z &= GQ(p) (k^* (p + \alpha)^{-1} z - (p + \alpha)^{-1} k z) \\ &= GQ(p) (k^* y - (p + \alpha)^{-1} k z) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Où

$$G_Q(p) = [01] (pI - Q)^{-1} [0g]^T (p + \alpha)$$

A partir de la relation (3.72), on peut considérer z comme une sortie du système proprement stable $G_Q(p)$ avec l'entrée $k^*y - (p + \alpha)^{-1}kz$, du fait que $y \in L^\infty$, l'entrée sera liée si $(p + \alpha)^{-1}kz \in L^\infty$. Pour montrer la bornitude de la sortie z , il est donc suffisant de montrer que $(p + \alpha)^{-1}kz \in L^\infty$, le calcul correct donne :

$$\begin{aligned} (p + \alpha)^{-1}kz &= (p + \alpha)^{-1} (y^2 + \alpha k_i) (\dot{y} + \alpha y) \\ &= (p + \alpha)^{-1} (y^2 \dot{y} + \alpha y^3 + \alpha k_i \dot{y} + \alpha^2 k_i y) \\ &= (p + \alpha)^{-1} \left(\frac{1}{3} p (y^3) + \alpha (p + \alpha) k_i y \right) \\ &= \frac{p}{3(p + \alpha)} y^3 + \alpha k_i y \end{aligned} \quad (3.73)$$

Puisque $k_i \in L^\infty$ et $y \in L^\infty$, le membre droit de (3.74) est borné donc $(p + \alpha)^{-1}kz \in L^\infty$, la preuve est complète. □

Remarques :

– Remarque 1

Le contrôleur adaptatif proposé peut résoudre aussi le problème de la poursuite de la référence échelon, c.-à-d., en appliquant le contrôleur (3.53) avec $e(t) = y(t) - r$ au lieu de $y(t)$ au système (3.52), le système en boucle fermée est stable et satisfait la condition : $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, où r est une constante.

Pour traiter le problème de poursuite pour le système (3.52), nous pouvons écrire l'équation d'erreur :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= Ax_e(t) + bu(t) + d_e \\ e(t) &= cx_e(t) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Où $x_e(t) = x(t) - x_r$, x_r étant un vecteur constant tel que $cx_r = r$ et $d_e \equiv Ax_r + d$ sera un autre vecteur constant.

On note que (3.74) a la même forme que (3.52). Comme montré précédemment, il peut être stabilisé par le contrôleur (3.55) avec $e(t)$ au lieu de $y(t)$, c.-à-d., $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

– **Remarque 2**

Le réglage des paramètres α_1, α_2 et k_c affectera le système dans les performances transitoires, mais n'influera pas sur la stabilité. La réponse peut être accélérée en mettant un plus grand k_c , mais cela exige une grande entrée initiale, alors qu'un grand α_1 dans l'action P et α_2 dans l'action I peut contribuer à améliorer le temps de montée sans exiger une grande entrée initiale. Cependant, le réglage doit être dépendant des problèmes spécifiques à l'application, et un examen supplémentaire est nécessaire en pratique.

3.8 Conclusion

Ce chapitre introduit les notions de base sur les techniques de commande adaptative concernées par notre travail de recherche. Nous y présentons la commande adaptative à modèle de référence avec ses lois de commande et sa structure de régulation. Une technique de robustification de cette commande utilisant un feedforward parallèle intéresse aussi ce travail.

Une autre approche de la commande adaptative basée sur le grand gain et applicable à une certaine classe de systèmes linéaires est abordée. Le régulateur PI adaptatif développé par Fan et al. [45] sur la base de cette commande est aussi présenté.

Ces différentes méthodes feront l'objet de modifications plus ou moins importantes pour y introduire des opérateurs et des transferts d'ordre fractionnaire dans le but d'obtenir une amélioration des performances de la boucle de commande adaptative.

Chapitre 4

Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire

4.1 Introduction

Il était presque naturel que les chercheurs travaillant dans le domaine naissant de la commande d'ordre fractionnaire s'intéressent à la commande adaptative CAMR (Commande adaptative à Modèle de référence), en effet les premières tentatives d'introduction de modèles d'ordre fractionnaire dans la boucle de CAMR sont apparues depuis plus d'une décennie [54]. Deux raisons principales ont encouragé cette orientation de la commande d'ordre fractionnaire :

- La commande CAMR se base sur le choix d'un modèle de référence qui spécifie les performances désirées par le concepteur en boucle fermée. Or, beaucoup de travaux de recherche avaient montré que les caractéristiques de la dynamique d'un système d'ordre fractionnaire étaient meilleures que celles d'un système d'ordre entier [126, 154, 27] (voir section 2.5.7).
- La simplicité de la loi de commande CAMR, qui permet l'introduction de modèle d'ordre élevé (approximation rationnelle des modèles d'ordre fractionnaire) sans destabiliser la boucle de commande.

C'est ainsi, que nos travaux de recherche sur la commande adaptative d'ordre fractionnaire se sont focalisés au début sur l'étude de la commande CAMR d'ordre fractionnaire ainsi qu'une commande similaire basée sur le même principe, la commande auto-ajustable.

Notre objectif sur le schéma de commande CAMR était d'aller encore plus loin, en introduisant en sus du modèle d'ordre fractionnaire les opérateurs intégr-différentiels d'ordre non entier dans la loi de commande CAMR (Loi de M.I.T.).

Nous avons pu ainsi améliorer nettement le comportement dynamique et le domaine de stabilité en utilisant une intégration d'ordre fractionnaire dans la loi d'ajustement des paramètres du régulateur adaptatif. Il faut noter qu'un résultat similaire avait été développé par Vinagre et al. [167] en 2002, ce qui démontre l'intérêt d'une telle démarche et conforte les conclusions de notre travail.

Nous avons alors proposé un nouveau schéma de commande CAMR d'ordre fractionnaire, combinant l'utilisation d'un modèle d'ordre non entier avec l'introduction d'un filtre dérivateur d'ordre fractionnaire à la sortie du processus commandé, ce qui a permis d'obtenir une dynamique du système en boucle fermée aussi performante que celle obtenue avec le schéma précédent, mais aussi d'améliorer la robustesse du système en présence de bruits externes.

Nous nous sommes alors intéressés à la notion de commande adaptative robuste, notamment via une technique classique de robustification de la la CAMR qui est l'ajout d'un filtre en feedforward parallèle, par un choix adéquat d'un filtre d'ordre fractionnaire.

Ces résultats sont illustrés par plusieurs exemple de simulation, et de comaraison avec les schémas de commande classiques d'ordre entier.

Ce chapitre se présente comme suit :

Dans la section 4.2, nous commençons par l'étude de la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire, comprenant un schéma "ancien", la commande CAMR avec modèle d'ordre fractionnaire (paragraphe 4.2.2), et un schéma proposé dans le cadre de nos travaux, la commande adaptative auto-ajustable à modèle d'ordre fractionnaire (paragraphe 4.2.1).

Dans la section 4.3, nous présentons le schéma de commande CAMR avec modèle d'ordre fractionnaire et une loi de commande comprenant une intégration d'ordre fractionnaire.

La section4.4, présente un autre schéma de commande adaptative CAMR d'ordre fractionnaire, comprenant une dérivation d'ordre fractionnaire en feedback, et un modèle de référence d'ordre fractionnaire adéquat.

Un nouveau schéma de commande robuste d'ordre fractionnaire basé sur la CAMR et l'introduction d'un feedforward avec transfert d'ordre fractionnaire est présenté à la section 4.5.

Enfin nous concluons par des commentaires et des remarques sur les différents algorithmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire présentés.

4.2 Commande adaptative à modèle de référence fractionnaire

L'objectif de cette section est de montrer que l'on peut améliorer les performances de la commande auto-ajustable, en introduisant une dynamique fractionnaire dans l'algorithme d'adaptation.

Certains auteurs ont déjà tenté d'introduire les systèmes fractionnaires comme modèle dans la commande adaptative à modèle de référence [54, 69], et nous avons essayé de le généraliser aux autres approches de commande adaptative. En effet, beaucoup de travaux antérieurs ont montré que les systèmes d'ordre fractionnaire présentaient de meilleures qualités, en temps de réponse et en stabilité de la dynamique de transition [154].

4.2.1 Commande Auto-ajustable directe à modèle fractionnaire

L'application proposée à cette méthode est la commande d'un bras flexible, assez complexe dont le modèle évolue avec la charge supportée et dont certains modèles sont à phase non-minimale [67].

Cette méthode est utilisée dans le cas des systèmes variant dans le temps, donc difficile à analyser. Pour simplifier le problème, on suppose que le système possède des paramètres constants mais inconnus qu'il suffit d'identifier en proposant une structure appropriée de modèle et de régulateur (2) selon le schéma de la figure FIG. 4.1.

L'approche la plus évidente est d'estimer les paramètres des systèmes puis de calculer ceux du régulateur, ce qui donne un algorithme adaptatif indirect. Souvent, le modèle peut être reparamétrisé tel que les paramètres du modèle puissent être estimés directement. Ce qui donne un algorithme adaptatif direct qui ne nécessite pas l'identification du procédé à commander (conf. (3.17)).

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'approche directe de la commande auto-ajustable.

4.2.1.1 Algorithme auto-ajustable direct d'ordre fractionnaire

L'inconvénient de l'approche indirecte est qu'elle peut être coûteuse en temps de calcul et mal conditionnée pour certaines valeurs de paramètres. Dans la méthode directe, le calcul de conception est simplifié voire éliminé.

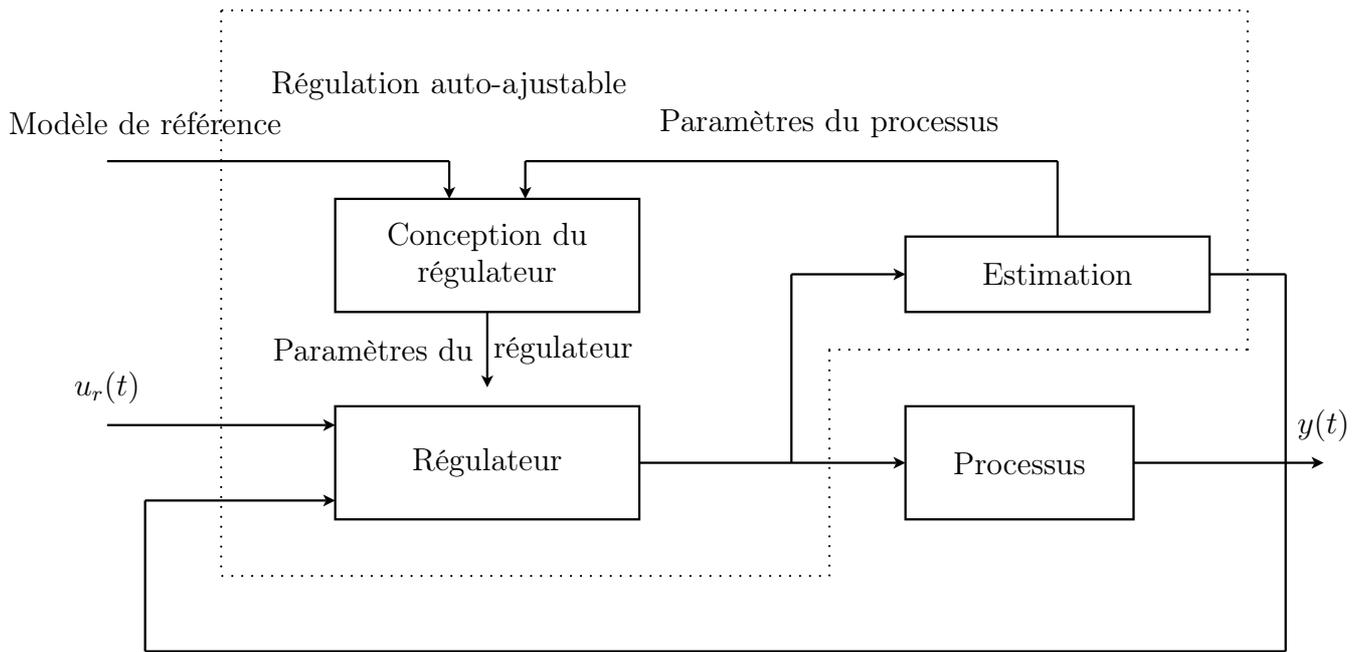


FIG. 4.1: Schéma-bloc de la régulation auto-ajustable

Soit le système décrit par l'équation (3.1) avec $v = 0$ soit,

$$Ay(t) = Bu(t) \quad (4.1)$$

et la réponse désirée donnée par (3.5) :

$$A_m y_m(t) = B_m u_r(t) \quad (4.2)$$

Un régulateur général peut être décrit par :

$$Ru(t) = Tu_r(t) - Sy(t) \quad (4.3)$$

où R , S et T sont des polynômes, en enlevant $u(t)$ de (4.2) et (4.3) on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{BT}{AR + BS} u_r(t) \\ u(t) &= \frac{AT}{AR + BS} u_r(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le polynôme caractéristique en boucle fermée est donc :

$$A_c = AR + BS \quad (4.5)$$

L'idée clé est de spécifier le polynôme caractéristique A_c par un choix de modèle de référence d'ordre fractionnaire, soit :

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{BT}{A_c} = \frac{B_m}{A_m} \quad (4.6)$$

où $\frac{B_m}{A_m}$ est une fonction de transfert d'ordre fractionnaire.

en décomposant B en polynôme monique à zéros stables donc simplifiable B^+ et en polynôme à zéros instables B^- on a :

$$B = B^+ \times B^- \quad (4.7)$$

et donc $B_m = B^- \times B'_m$ et on obtient :

$$A_c = A_0 A_m B^+ \quad (4.8)$$

où A_0 est un observateur approprié.

En mettant $R = R' \times B^+$, on obtient l'équation diophantine (3.11),

$$A_c = A_0 A_m = AR' + B^- S \quad (4.9)$$

Ce qui donne :

$$A_0 A_m y(t) = R' A y(t) + B^- S y(t) = R' B u(t) + B^- S y(t)$$

il vient :

$$R' B = R' B^+ B^- = R B^-$$

soit :

$$A_0 A_m y(t) = B^- (R u(t) + S y(t)) \quad (4.10)$$

Cette équation peut être considérée comme un modèle de procédé dont les paramètres sont les polynômes B^- , R et S . Si les paramètres de l'équation (4.10) sont estimés on obtient directement la loi de commande, sans autre calcul de conception.

Cas des systèmes à phase minimale

Si la dynamique du procédé est à minimum de phase, on a :

$$\deg A_0 = \deg A - \deg B - 1$$

B^- étant une constante, et (4.10) devient :

$$\begin{aligned} A_0 A_m y(t) &= b_0 (R u(t) + S y(t)) \\ &= \tilde{R} u(t) + \tilde{S} y(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

où : $\tilde{R} = b_0 R$ et $\tilde{S} = b_0 S$.

Les spécifications sont choisies telles que $B_m = q^{d_0}$ avec $d_0 = \deg A - \deg B$.

L'équation (4.11) peut être écrite :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{A_0 A_m} \left(\tilde{R}u(t) + \tilde{S}y(t) \right) \\ &= R^* u_f(t - d_0) + S^* y_f(t - d_0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

où :

$$\begin{aligned} u_f(t) &= \frac{1}{A_0 A_m} u(t) \\ y_f(t) &= \frac{1}{A_0 A_m} y(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

En introduisant le vecteur de paramètres :

$$\theta = (r_0 r_1 \dots r_k s_0 s_1 \dots s_k)$$

et le vecteur de régression,

$$\varphi(t) = (u_f(t) u_f(t-1) \dots u_f(t-k) y_f(t) y_f(t-1) \dots y_f(t-k))$$

on peut écrire :

$$y(t) = \varphi^T(t - d_0) \times \theta$$

Et on peut estimer les paramètres avec l'algorithme des moindres carrés avec oubli exponentiel, ou avec erreur prédictive [158] dont la base est donnée par 3.17 :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + K(t)\epsilon(t) \\ \epsilon(t) &= y(t) - \varphi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1) \\ K(t) &= P(t-1)\varphi(t-1) (\lambda + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1))^{-1} \\ P(t) &= I - K(t)\varphi(t-1)P(t-1)/\lambda \end{aligned} \quad (4.14)$$

Cas des systèmes à phase non minimale

A partir de l'équation (4.10) on introduit les polynômes :

$$\begin{aligned} \check{R} &= B^- R \\ \check{S} &= B^- S \end{aligned}$$

l'équation devient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{A_0 A_m} \left(\check{R}u(t) + \check{S}y(t) \right) \\ &= \check{R}^* u_f(t - d_0) + \check{S}^* y_f(t - d_0) \end{aligned} \quad (4.15)$$

où u_f et y_f sont les entrées et sorties filtrées dans l'équation (4.13). On peut utiliser la division Euclidienne pour éliminer les facteurs communs de \check{R}^* et \check{S}^* .

4.2.1.2 Application à l'asservissement d'un bras flexible

Présentation du bras flexible [8]

Le système est un bras flexible, d'une longueur d'un mètre, fixé par une de ses extrémités à un axe vertical. Cet axe peut être mis en rotation par un moteur à courant continu, faisant alors décrire au bras un mouvement circulaire dans le plan horizontal (figure FIG.4.2). L'extrémité libre du bras peut recevoir une charge dans la masse varie de 0 à 75g, et la position de cette extrémité est mesurée par un capteur infra-rouge. Ce système a pour entrée, la commande u de l'asservissement analogique de position de l'axe du moteur, et pour sortie y , la position de l'extrémité libre du bras, mesurée par le capteur.

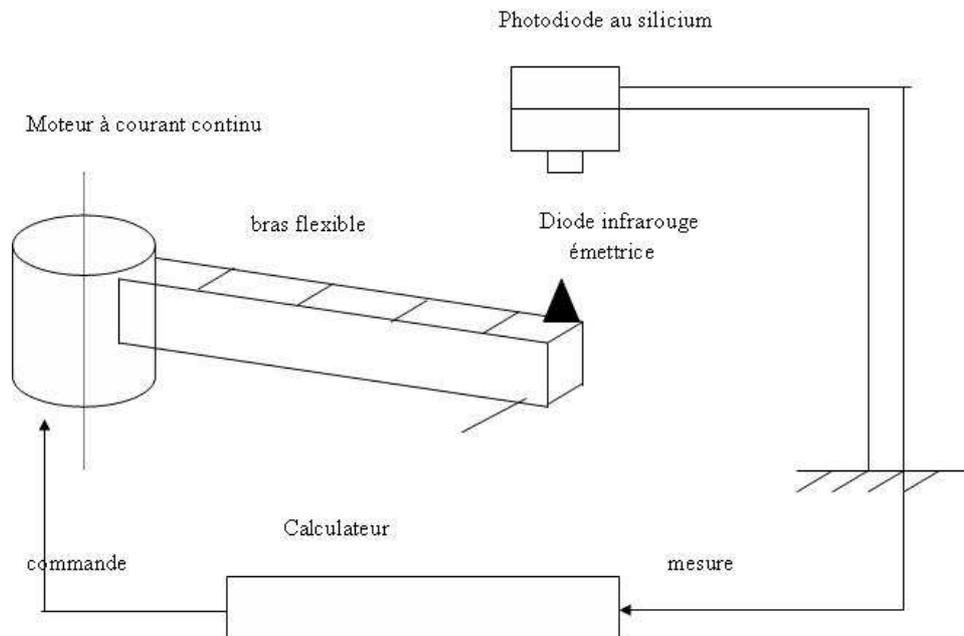


FIG. 4.2: Dispositif expérimental du bras flexible

Modèle Mathématique

On dispose de trois modèle à temps discret du système, obtenus pour différents modèles de la charge (sans charge, charge de 25g et charge de 75g) avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.07$ sec. Ces modèles sont décrits par leur fonction de transfert qui est de la forme :

$$H(z) = \frac{\sum_5^{k=0} b_{5-k} z^k}{\sum_6^{k=0} a_{6-k} z^k} \quad (4.16)$$

Dont les coefficient sont donnés dans le tableau TAB.4.1. Le diagramme de bode des

Coefficient	Sans charge	Charge de 25g	Charge de 75g
b_0	0	0	0
b_1	0.054037	0.0393523	0.0390205
b_2	-0.162508	-0.116242	-0.098099
b_3	0.261206	0.178397	0.0972530
b_4	-0.134469	-0.893726	0.0260669
b_5	0.0256689	0.0139438	-0.0447154
a_0	1	1	1
a_1	-2.14437	-2.45389	-1.96501
a_2	1.75906	2.27894	0.45148
a_3	-0.961539	-1.02085	1.33546
a_4	1.20525	0.628664	-0.438726
a_5	-1.54819	-0.85989	-0.97402
a_6	0.774686	0.474607	0.626318

TAB. 4.1: Coefficients des fonctions de transfert du bras flexible

transferts représentant le bras flexible en fonction de la charge est représenté dans la figure FIG.4.3

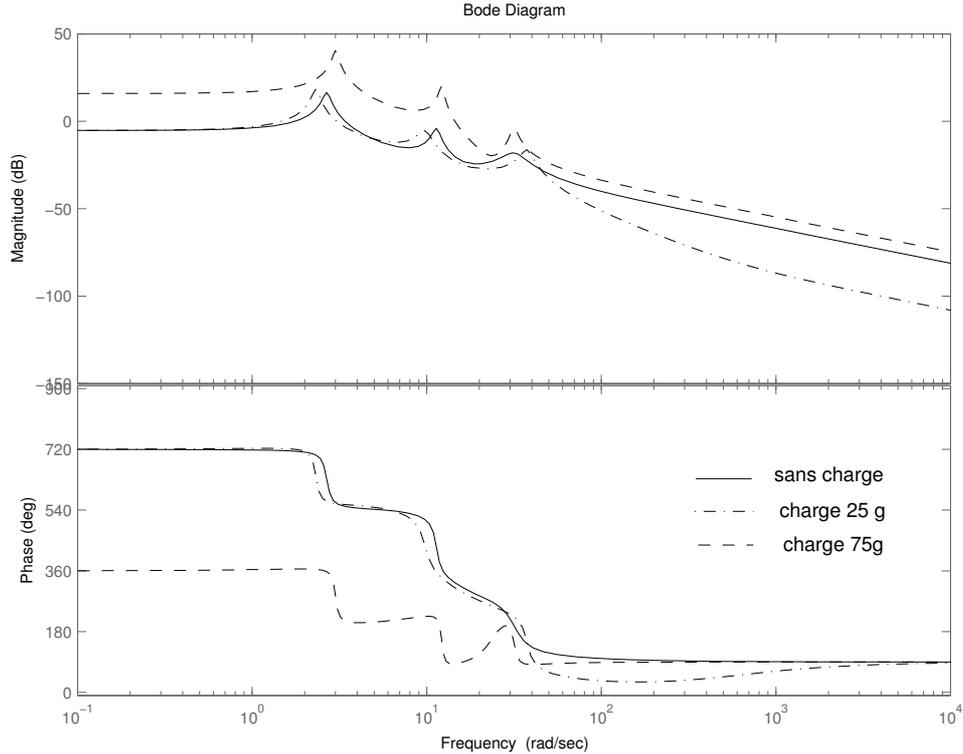


FIG. 4.3: Diagramme de Bode du transfert du bras flexible pour les différentes charges

Mise en oeuvre de la commande et résultats de simulations

Nous avons d'abord pris un modèle de référence d'ordre entier de la forme :

$$G_m(s) = \frac{B_m}{A_m} = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1\right)}$$

tel que : $\omega_n = 10$; $\xi = 0.95$.

Puis on a considéré un modèle d'ordre fractionnaire de 2^{nd} degré, donné par (2.109) :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\beta}$$

avec : $\omega_n = 10$; $\xi = 0.95$, $\beta = 0.55$, on obtient le modèle approximé :

$$G_m(s) = \frac{4.466810^3 s^6 + 2.724910^6 s^5 + 5.236610^{10} s^4 + 4.014410^{10} s^3 + 1.302710^{12} s^2 + 1.745310^{13} s + 7.94310^{13}}{s^8 + 1.230710^3 s^7 + 4.833910^5 s^6 + 7.786710^7 s^5 + 5.641510^9 s^4 + 1.935710^{11} s^3 + 3.240310^{12} s^2 + 2.583410^{13} s + 7.943210^{13}}$$

Puis ce modèle fractionnaire est discrétisé avec une période d'échantillonnage ($T_e = 0.07$ sec).

Les paramètres du régulateur θ de l'équation (3.19) sont directement estimés en utilisant l'algorithme des moindres carrés avec oubli exponentiel donné dans l'équation (3.17).

La figure FIG.4.4 donne un exemple de l'estimation des paramètres dans le cas du bras flexible sans charge. Nous obtenons alors les réponses de la figure FIG.4.5.

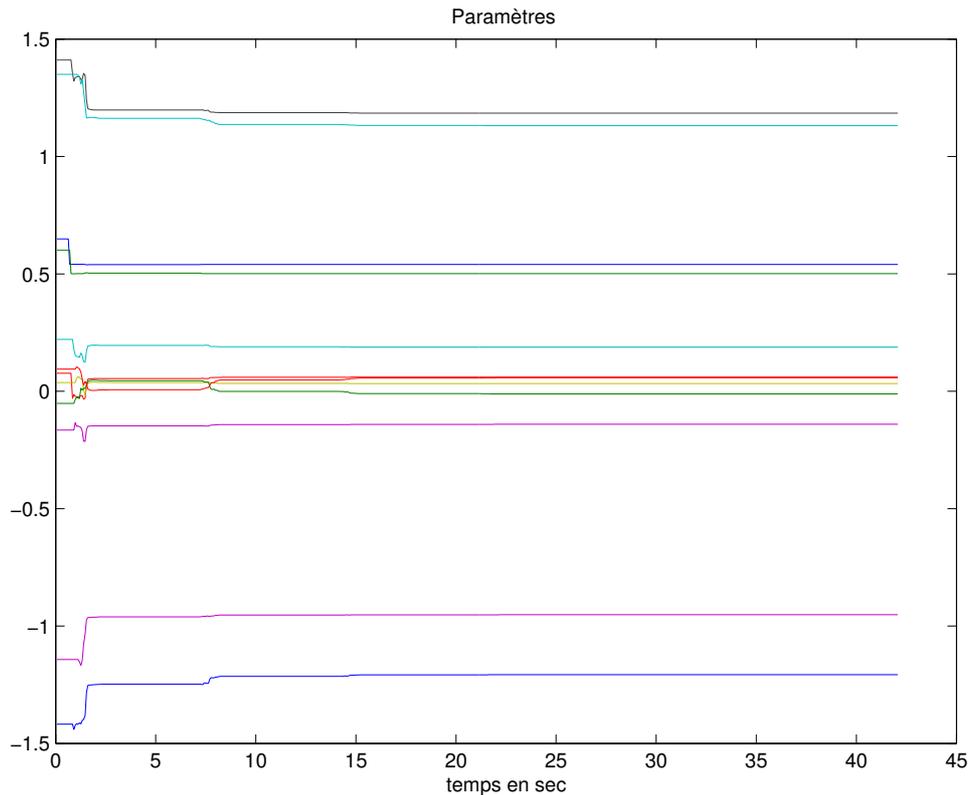


FIG. 4.4: Estimation des paramètres du régulateur auto-ajustable dans le cas du bras sans charge

4.2.1.3 Commentaires

- Les réponses de la figure FIG. 4.5 montrent que le système réagit de bonne manière pour tous les états de charge du bras flexible. Nous avons réussi à obtenir une très bonne précision avec un temps de réponse satisfaisant.
- L'utilisation d'un modèle d'ordre fractionnaire dans l'équation Diophantine ne compromet aucunement la stabilité du système de commande, et permet d'améliorer le niveau de performances obtenues avec un modèle d'ordre entier.
- La figure 4.4 montre que la convergence de l'estimateur MCR vers sa valeur finale est assez rapide, cependant elle est très sensible à la valeur initiale du vecteur de paramètres.
- Le bras flexible étudié dans cet exemple est un bon "test" pour cette méthode, car le système varie entre stabilité et instabilité avec phase minimale ou non minimale selon la charge du bras commandé.

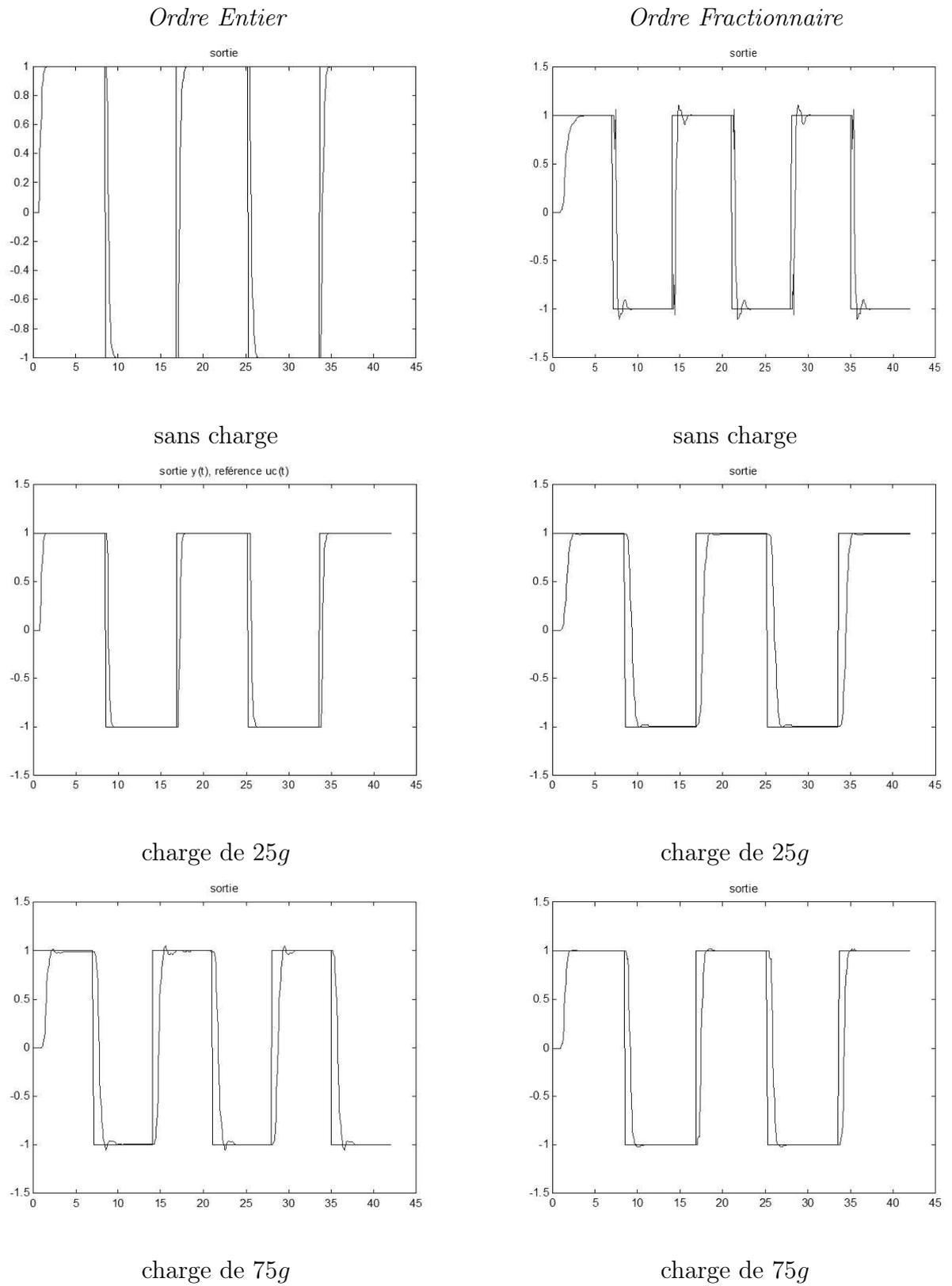


FIG. 4.5: Réponse du bras pour différentes valeurs de la charge

4.2.1.4 Conclusion

La conviction qui a mené à ce travail est " un meilleur modèle pour un meilleur résultat ", avec un modèle d'ordre fractionnaire nous avons pu appliquer une commande adaptative au bras artificiel, qui permet d'améliorer la dynamique de la réponse à un train d'échelons.

Nous avons réussi à stabiliser le système en BF, tout en assurant la précision de la sortie ainsi qu'un meilleur temps de réponse. D'autre part, il faut noter que cette méthode est équivalente à un placement de pôles adaptatif, ce qui ouvre la voie vers d'autres schémas de commande adaptative d'ordre fractionnaire.

4.2.2 CAMR avec modèle fractionnaire

4.2.2.1 Introduction

Le but de cette section est de montrer que l'utilisation d'un système d'ordre fractionnaire comme modèle de référence dans l'algorithme de commande adaptative CAMR, permet d'améliorer la dynamique de la réponse du processus commandé. Ce résultat est d'ailleurs devenu classique, et plusieurs travaux l'ont démontré depuis le début des années 1990 [54]. Nous donnerons un exemple de simulation pour mettre en valeur le gain en performance du processus.

4.2.2.2 Stratégie de commande

Nous nous intéressons ici à la commande adaptative directe à modèle de référence (CAMR) et notamment à l'approche utilisant la loi de M.I.T. que nous avons présenté dans la section 3.4.1.

La structure du régulateur et la loi de commande reste donc inchangées et l'on se borne à utiliser une approximation d'ordre entier de la fonction de transfert du modèle d'ordre fractionnaire.

En effet soit $G(s)$ la fonction de transfert du système à commander,

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

et soit $G_m(s)$ la fonction de transfert du modèle d'ordre fractionnaire choisi avec :

$$G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)}$$

et $G_m^*(s)$ l'approximation d'ordre entier obtenu par la méthode de la fonction des singularités (voir section 2.3.3) telle que :

$$G_m^*(s) = \frac{B_m^*(s)}{A_m^*(s)}$$

Nous utiliserons le polynôme caractéristique approximé $A_m^*(s)$ au lieu de $A_m(s)$ dans l'équation (3.18),

$$A_o A_m^* y(t) = b_o (Ru(t) + Sy(t)) \quad (4.17)$$

On obtient d'après la loi de M.I.T. de l'équation (3.30),

$$\theta = -\frac{\gamma}{s} y_m (y - y_m) = -\frac{\gamma}{s} y_m e$$

donc

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m(t)e(t) \tag{4.18}$$

et

$$\theta(t) = -\gamma \int_0^t y_m(t)e(t)dt \tag{4.19}$$

et on utilise la loi de commande normalisée de l'équation (3.31),

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \frac{\varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi}$$

où d'après les équations (3.38), (3.39) et (3.40) :

$$\theta^0 = (r_1 \dots r_k \ s_0 \dots s_l \ t_0 \dots t_m)$$

le vecteur de régression φ :

$$\varphi^T = \frac{b_0}{A_o A_m} (p^{k-1}u \dots u \ p^l y \dots y \ - p^m u_r \dots - u_r)$$

et l'erreur,

$$e = \varphi^T \theta^0$$

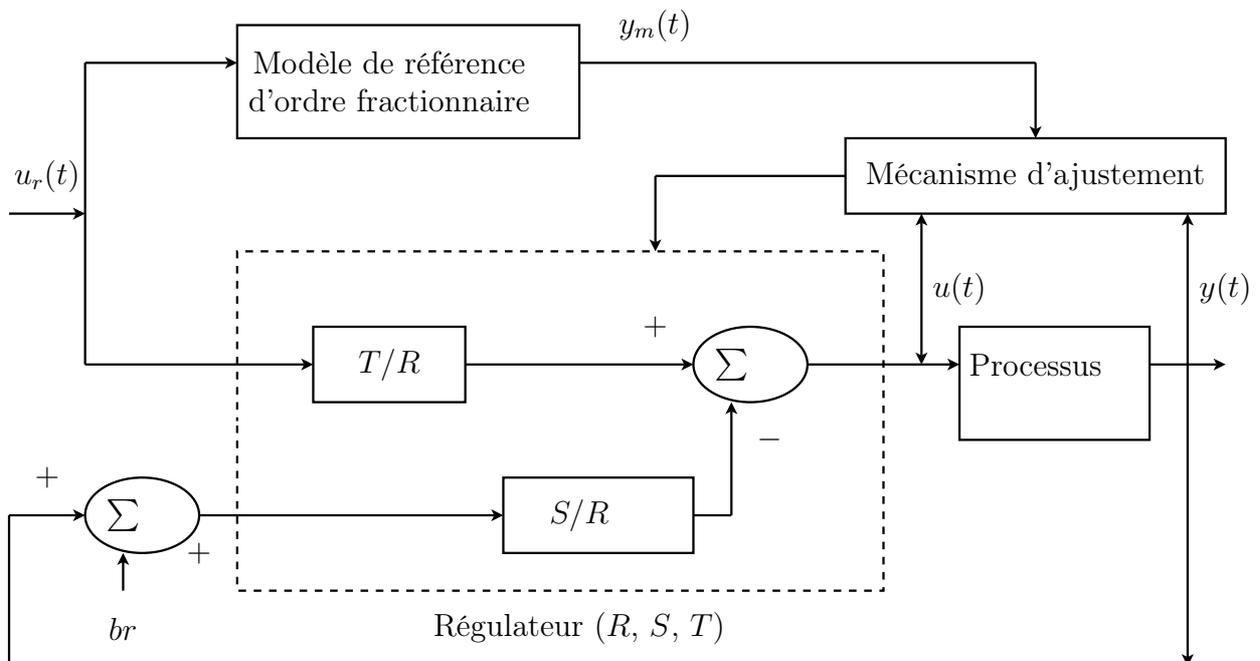


FIG. 4.6: CAMR directe à modèle d'ordre fractionnaire

4.2.2.3 Exemple de simulation : Commande en vitesse d'un moteur à CC

Nous considérons un moteur à courant continu alimenté par un hacheur [110]. L'ensemble (convertisseur + moteur) est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_e}{L}y(t) + \frac{k}{L}u(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{k_e}{J}i(t) - \frac{f}{J}y(t) - \frac{1}{J}Cr(t)\end{aligned}\quad (4.20)$$

où $i(t)$ représente le courant d'induit, $y(t)$ la vitesse angulaire du moteur, $u(t)$ la tension de commande et $Cr(t)$ le couple résistant (perturbation).

Ce moteur est à faible puissance, ses caractéristiques sont :

- Moment d'inertie $J = 0.018kg.m^2$,
- Coefficient d'amortissement $f = 0.0055nm/rad.s$
- Constante du couple moteur $k_e = 1$
- Résistance du moteur $R = 6.25\Omega$
- Inductance du moteur $L = 0.024H$
- Constante d'amplification $k = 35$

En introduisant l'opérateur de différentiation, le système (4.20) devient :

$$i(t) = \frac{-k_e y + ku}{Lp + R} \quad (4.21a)$$

$$y(t) = \frac{k_e i(t) - Cr(t)}{Jp + f} \quad (4.21b)$$

En substituant l'équation (4.21a) dans (4.21b),

$$y(t) = \frac{b_0}{p^2 + a_1 p + a_2} u(t) - \frac{br_0 p + br_1}{p^2 + a_1 p + a_2} Cr(t) \quad (4.22)$$

avec,

- $b_0 = \frac{k_e k}{JL}$
- $br_0 = \frac{1}{J}$
- $br_1 = \frac{R}{JL}$
- $a_1 = \frac{JR + Lf}{JL}$
- $a_2 = \frac{fR + k_e^2}{JL}$

Et le système devient après remplacement des valeurs numériques des paramètres,

$$y(t) = \frac{81018}{p^2 + 260.7p + 2394} u(t) - \frac{55.55p + 14460}{p^2 + 260.7p + 2394} Cr(t) \quad (4.23)$$

Nous ferons deux essais avec un modèle d'ordre entier, puis un modèle d'ordre fractionnaire.

Modèle d'ordre entier

Le modèle est un système de second ordre de la forme

$$G_m^e(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

avec $\omega_n = 10$, $\xi = 0.95$, ce qui donne

$$G_m^e(s) = \frac{100}{s^2 + 19s + 100} \quad (4.24)$$

La structure du régulateur satisfaisant les équations (3.36), (3.42) et (3.43) est la suivante :

$$\begin{aligned} A_o &= s + 3, \quad \text{deg}A_o = 1 \\ k &= \text{deg}R = 1 \\ l &= \text{deg}S = 0 \\ m &= \text{deg}T = 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Pour l'implémentation, les transferts sont discrétisés avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.1\text{sec}$.

On obtient les réponses données dans la figure FIG. 4.7, avec $\gamma = 1.8$.

Modèle d'ordre fractionnaire

Pour un système de second ordre décrit par l'équation (2.109) :

$$G_m^f(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\beta}$$

avec $\omega_n = 10$, $\xi = 0.95$, et $\beta = 0.3$ ce qui donne

$$G_m^f(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{100} + 1.9\frac{s}{10} + 1\right)^{0.3}} \quad (4.26)$$

La structure du régulateur est la suivante :

$$\begin{aligned} A_o &= s + 3, \quad \text{deg}A_o = 1 \\ k &= \text{deg}R = 4 \\ l &= \text{deg}S = 3 \\ m &= \text{deg}T = 4 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pour l'implémentation, les transferts sont discrétisés avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.1sec$.

On obtient les réponses données dans la figure FIG. 4.8, avec $\gamma = 0.00042$.

4.2.2.4 Commentaires

- Les réponses obtenues pour le cas du modèle d'ordre entier dans la figure FIG. 4.7 et pour le cas du modèle d'ordre fractionnaire dans la figure FIG. 4.8, montrent une nette amélioration de la dynamique du système de commande en boucle fermée.
- La valeur du paramètre gain d'adaptation γ nécessaire pour stabiliser le système adaptatif est très petite dans le cas du modèle d'ordre fractionnaire (un rapport de l'ordre de 1/1000 avec celle du cas classique) ce qui permet d'augmenter la marge de stabilisabilité du système. En effet, l'augmentation de la valeur γ a tendance à destabiliser le système.

4.2.2.5 Conclusion

L'introduction d'un modèle d'ordre fractionnaire comme modèle de référence dans l'algorithme de CAMR a permis :

- d'augmenter la rapidité de convergence du processus
- et de garantir la stabilité de la boucle de commande (cette propriété été beaucoup plus dépendante de la loi de commande utilisée)

Une application de ce schéma de commande est faite sur un système typique, le moteur à courant continu commandé en vitesse. Elle montre qu'un modèle de référence d'ordre fractionnaire peut sensiblement améliorer les performances de la boucle de commande adaptative.

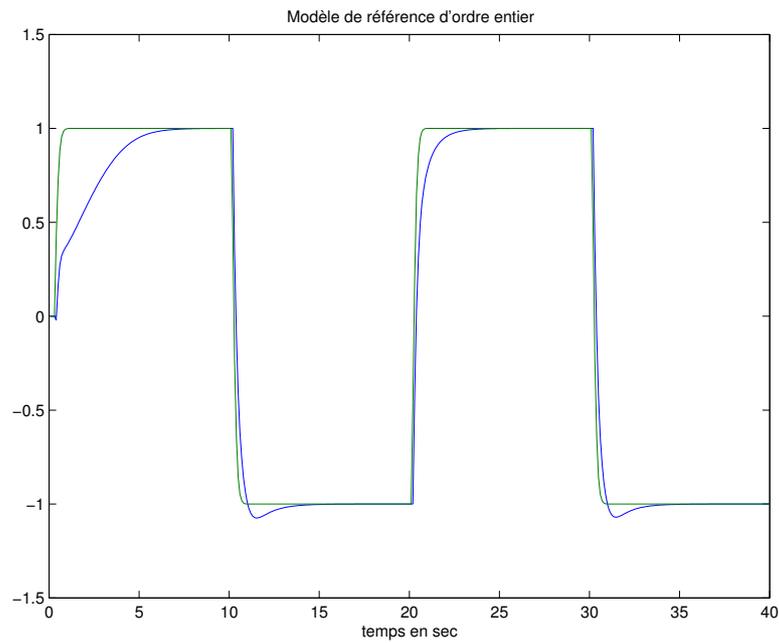


FIG. 4.7: Réponse de la CAMR avec modèle de référence d'ordre entier

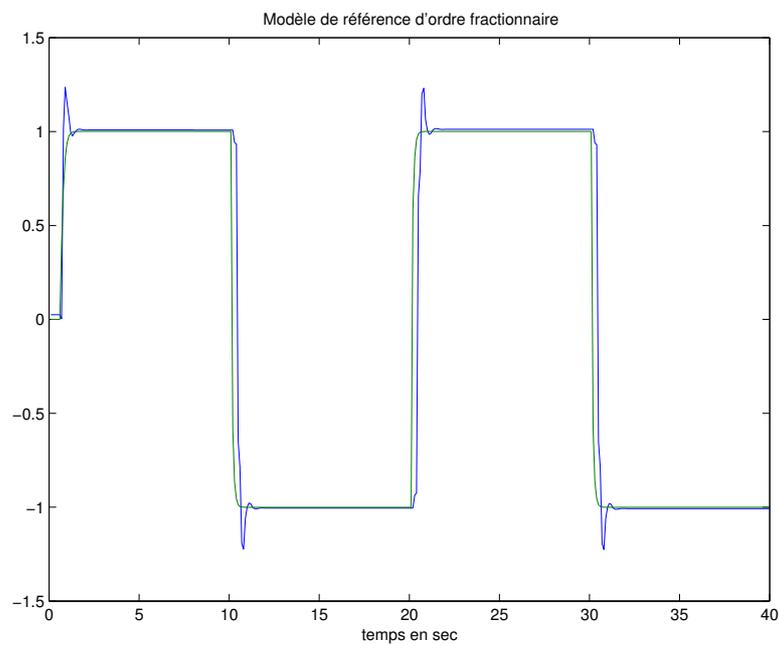


FIG. 4.8: Réponse de la CAMR avec modèle de référence d'ordre fractionnaire

4.3 CAMR avec intégration d'ordre fractionnaire

4.3.1 Introduction

Après l'amélioration des performances obtenue par l'utilisation de modèle d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande adaptatifs (CAMR et Auto-ajustable), notre objectif dans cette section est d'aller encore plus loin en introduisant un intégrateur d'ordre fractionnaire dans la loi de commande M.I.T de la CAMR pour les processus SISO.

Nous espérons ainsi améliorer le temps de convergence de l'algorithme, introduire un élément "robustifiant" par rapport aux bruits et augmenter le domaine de stabilité du système par rapport au gain d'adaptation.

Des exemples de simulations illustrent l'efficacité de cette nouvelle approche.

4.3.2 Stratégie de commande

Dans l'algorithme d'ajustement représenté par le schéma-blocs de la figure FIG.3.4 on utilise une intégration d'ordre λ , où λ est un nombre réel positif non nul vérifiant :

$$0 < \lambda < 2$$

On utilise aussi un modèle de référence G_m d'ordre fractionnaire [167, 76, 70, 75], ce qui mène au schéma-bloc de la figure FIG.4.9 On obtient,

$$\theta = -\frac{\gamma}{s^\lambda} y_m (y - y_m) = -\frac{\gamma}{s^\lambda} y_m e$$

donc

$$\frac{d^\lambda \theta}{dt^\lambda} = -\gamma y_m e \quad (4.28)$$

et

$$\theta = -\gamma I^\lambda (y_m e) \quad (4.29)$$

Vinagre et al. [167] ont remarqué que l'introduction d'une intégration d'ordre fractionnaire dans la CAMR permettait d'élargir le domaine de variation de l'amplitude du signal de référence où la stabilité du système de commande en boucle fermée est maintenue. En effet, cet objectif de stabilité de la commande est mieux atteint avec un paramètre de réglage γ et une amplitude du signal de référence suffisamment petits. C'est pourquoi on peut stabiliser la boucle de commande adaptative en utilisant une intégration d'ordre fractionnaire là où une commande d'ordre entier va échouer.

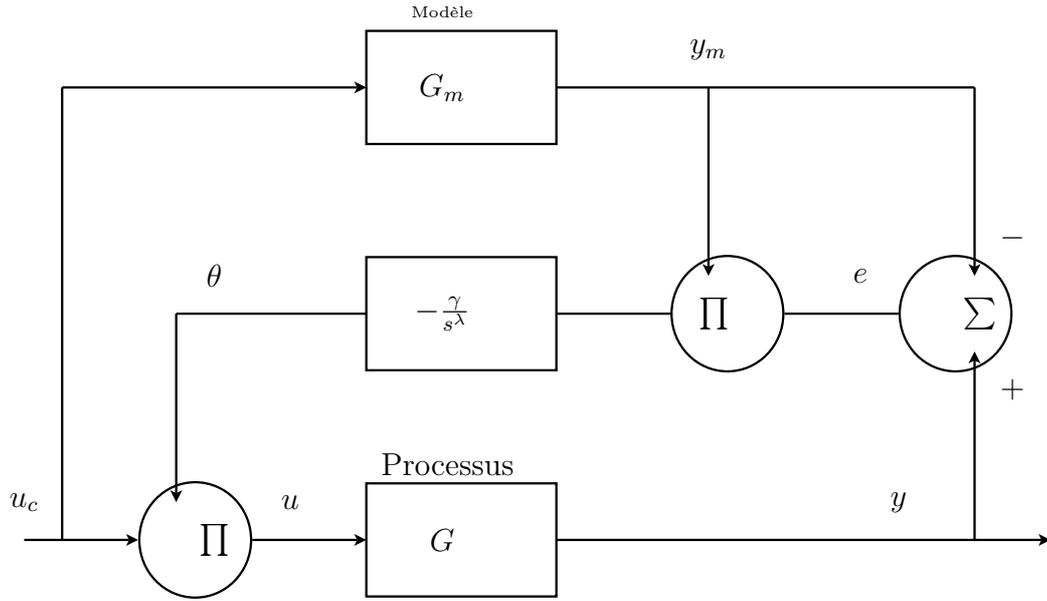


FIG. 4.9: Algorithme d'adaptation avec Intégration d'ordre fractionnaire.

4.3.3 Simulations et commentaires

4.3.3.1 Simulations

On applique l'algorithme adaptatif utilisant l'intégration d'ordre fractionnaire à la commande en vitesse d'un moteur à courant continu, dont la fonction de transfert identifiée est donnée par [110] :

$$G(s) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} \quad (4.30)$$

Et choisissons comme modèle de référence :

$$G_m(s) = \frac{100}{(s^2 + 9s + 100)^{0.4}} \quad (4.31)$$

$G_m(s)$ est approximée par une fonction d'ordre entier en utilisant la méthode de la fonction de singularité de Charef (2.50), ce qui donne :

$$\hat{G}_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{0.003162s^2 + 0.1316s + 1}{1.77810 - 7s^4 + 0.0001912s^3 + 0.01362s^2 + 0.2105s + 1} \quad (4.32)$$

La structure du régulateur satisfaisant les équations (3.36), (3.42) et (3.43) est la suivante :

$$\begin{aligned} A_o &= 1, \quad \text{deg}A_o = 0 \\ k &= \text{deg}R = 4 \\ l &= \text{deg}S = 3 \\ m &= \text{deg}T = 4 \end{aligned} \quad (4.33)$$

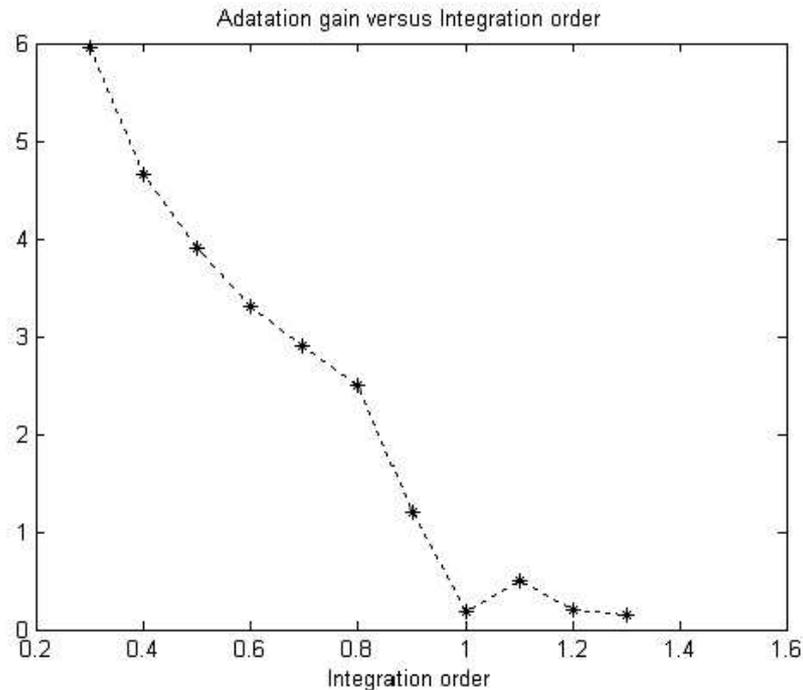


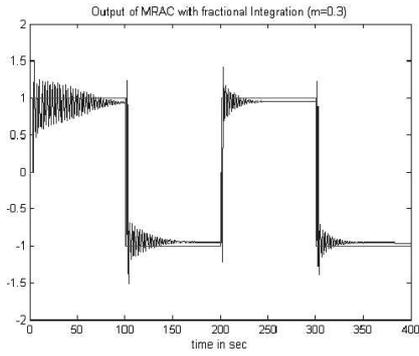
FIG. 4.10: Evolution du gain d'adaptation γ en fonction de l'ordre d'intégration λ .

Pour l'implémentation, les transferts sont discrétisés avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.5 \text{sec}$.

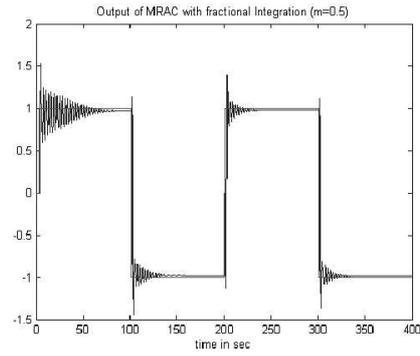
On obtient les réponses données dans la figure FIG. 4.11, pour différentes valeurs de l'ordre d'intégration.

4.3.3.2 Commentaires

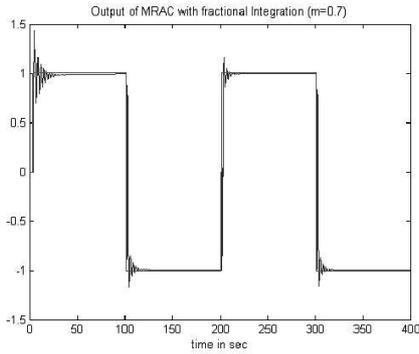
1. La stabilité de la boucle fermée est assurée pour toutes les valeurs de λ .
2. A partir des simulations numériques, on peut remarquer que le niveau de performance est meilleur pour $\lambda \approx 1.2$, en termes de temps de réponse et de lissage de la courbe.
3. Pour les petites valeurs de l'ordre fractionnaire d'intégration ($\lambda \leq 0.5$), de grandes oscillations apparaissent dans la phase transitoire.
4. La figure 4.10 donne l'évolution du gain d'adaptation en fonction de l'ordre fractionnaire d'intégration, et montre clairement que pour les petites valeurs de λ on a besoin de grandes valeurs du gain d'adaptation γ , ce qui mène la boucle de commande à une situation de faible stabilité; ce qui explique la difficulté d'atteindre une erreur statique nulle dans ces cas.



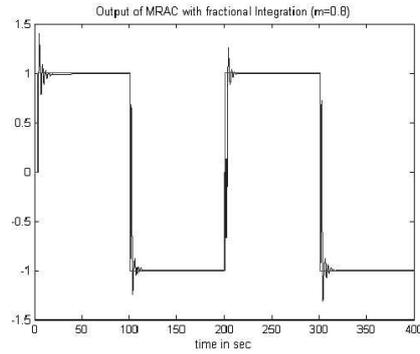
$\lambda = 0.3$



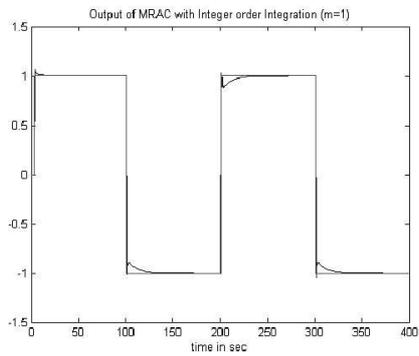
$\lambda = 0.5$



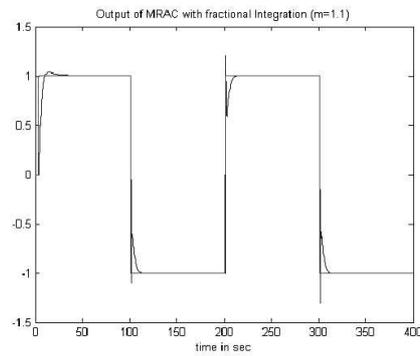
$\lambda = 0.7$



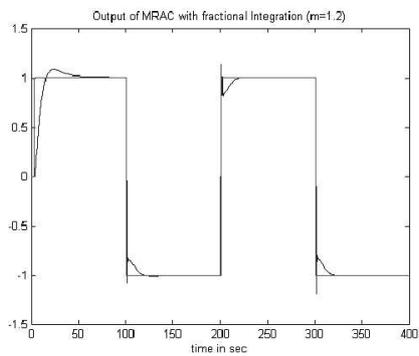
$\lambda = 0.8$



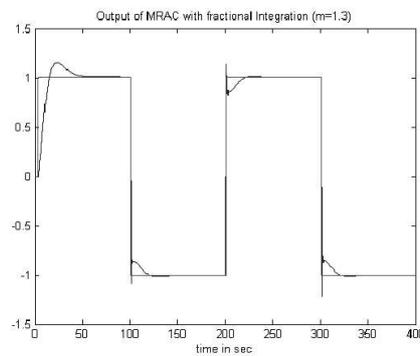
$\lambda = 1$



$\lambda = 1.1$



$\lambda = 1.2$



$\lambda = 1.3$

FIG. 4.11: CAMR avec intégration d'ordre fractionnaire, ordres d'intégration : $\lambda = 0.3-1.3$

4.3.4 Conclusion

La modification de la loi de commande de M.I.T. par l'introduction d'une intégration d'ordre fractionnaire combinée avec un choix de modèle de référence d'ordre fractionnaire approprié, a permis d'améliorer le niveau de performance de la commande CAMR d'un processus SISO. Ainsi la réponse est plus rapide et la stabilité de la boucle fermée est assurée pour toutes les valeurs de l'ordre d'intégration.

Mieux encore, le domaine de stabilité relativement au paramètre gain d'adaptation γ a été élargi, comme confirmé par l'étude de Vinagre et al. [167]. En effet les valeurs de γ nécessaires pour la convergence de l'algorithme sont nettement inférieures dans le cas fractionnaire, or un gain d'adaptation trop élevé peut destabiliser le système. Dans le paragraphe suivant, nous proposons un nouveau schéma de commande adaptative qui comporte une dérivée d'ordre fractionnaire en feedback combinée avec un modèle de référence d'ordre fractionnaire adéquat.

4.4 CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire en feedback

4.4.1 Introduction

L'utilisation d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande CAMR a montré une amélioration de la dynamique du système surtout en temps de réponse à cause de la rapidité du modèle de référence d'ordre fractionnaire. D'autre part, l'introduction d'une intégration d'ordre non entier dans la loi de commande CAMR a permis de garantir la stabilité pour un domaine plus large du gain d'adaptation, et un meilleur niveau de performance comparativement aux algorithmes classiques par un bon choix de l'ordre d'intégration.

L'originalité de cette contribution est l'introduction d'un dérivateur d'ordre fractionnaire de la sortie du processus dans l'algorithme de commande adaptative CAMR combiné avec l'utilisation d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire.

L'utilisation de l'action dérivée dans la théorie de commande a toujours nécessité beaucoup de prudence car, en présence de bruit, elle peut compromettre les performances désirées ou pire, la stabilité du système. Cependant, dans le cas de la dérivée d'ordre fractionnaire, qui est un processus à long mémoire, on montre sur la base de quelques exemples de simulation que le rejet des perturbations est réalisé à un niveau satisfaisant, ce qui rejoint plusieurs autres résultats de recherche sur la robustesse des systèmes de commande d'ordre fractionnaire par rapport aux perturbations.

4.4.2 Stratégie de commande

Dans ce schéma de commande on utilise un modèle de référence G_m ayant une fonction de transfert de second ordre fractionnaire comme dans (2.109). On introduit aussi un bloc de dérivation d'ordre fractionnaire à la sortie du processus, comme représenté dans la figure FIG.4.12. On suppose que le degré relatif de la fonction de transfert du processus SISO n est connu [73, 71, 75, 78].

Cela veut dire que,

$$G(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)} \quad (4.34)$$

avec,

$$\text{Deg}(\text{Den}(s)) - \text{Deg}(\text{Num}(s)) = n \quad (4.35)$$

Alors quand $|s|$ est assez grand, on peut écrire :

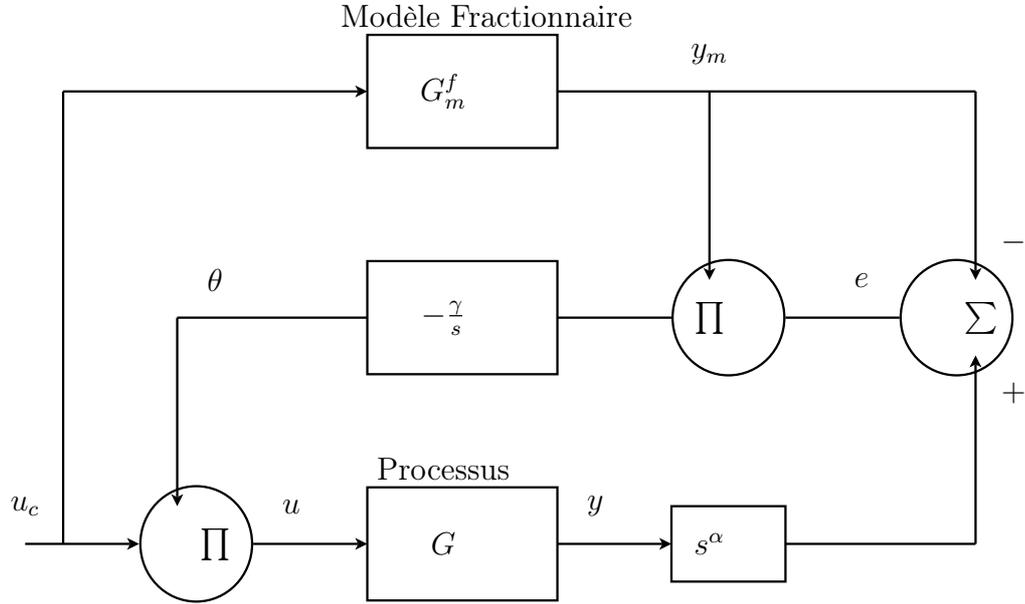


FIG. 4.12: Algorithm d'adaptation utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire de la sortie

$$G_m(s) = \frac{y_m}{u_c} = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\beta} |s| \xrightarrow{\approx} \infty \frac{1}{s^{2\beta}} \quad (4.36)$$

et aussi,

$$G(s) = \frac{y}{u} |s| \xrightarrow{\approx} \infty \frac{1}{s^n} \quad (4.37)$$

Donc pour pouvoir comparer $y_m(t)$ avec $\frac{d^{\alpha y}(t)}{dt^\alpha}$ on doit avoir,

$$\frac{s^\alpha}{s^n} = \frac{1}{s^{2\beta}} \quad (4.38)$$

en d'autres termes,

$$\alpha = n - 2\beta \quad (4.39)$$

Introduire une action dérivée dans un régulateur PD par exemple, permet d'améliorer le temps de réponse en boucle fermée (voir [140]), donc un effet similaire est prévu dans le cas de l'introduction d'une dérivée d'ordre fractionnaire qui est une généralisation de la dérivée d'ordre entier classique. En outre, le fait que le calcul de la dérivée d'ordre fractionnaire dépende de toute l'histoire du signal dérivé, donne de meilleures performances au vu des fluctuations du signal et des perturbations externes.

4.4.3 Simulations et commentaires

Pour étudier les performances de ce nouvel algorithme, nous allons l'appliquer à deux systèmes différents de premier et de second ordre respectivement.

4.4.3.1 Résultats pour un système SISO de premier ordre

Considérons un processus SISO de premier ordre défini par sa fonction de transfert,

$$G(s) = \frac{10}{s + 5} \quad (4.40)$$

et le modèle de référence choisi,

$$G_m(s) = \frac{1}{(s^2 + 1.8s + 1)^\beta} \quad (4.41)$$

La fonction de transfert $G_m(s)$ est approximée par un modèle d'ordre entier en utilisant la méthode de la fonction de singularité (voir (2.44)). La structure du régulateur satisfaisant les équations (3.36), (3.42) et (3.43) est calculée pour chaque valeur de β avec un polynôme observateur $A_o = 1$. Pour l'implémentation numérique de l'algorithme de commande les transferts sont discrétisés avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.1 \text{ sec}$. On obtient les résultats de simulation donnés dans la figure FIG.4.13 pour $\beta = 0.4$, $\beta = 0.35$, $\beta = 0.2$ et $\beta = 0.1$ respectivement. On étudiera le cas sans perturbation et le cas où le système est l'objet d'un bruit aléatoire dont l'amplitude est de 10% de celle du signal de référence.

4.4.3.2 Résultats pour un système SISO de second ordre

Appliquons cette commande à un moteur à courant continu (4.30) dont la fonction de transfert est de second ordre, en choisissant comme modèle de référence la fonction :

$$G_m(s) = \frac{100}{(s^2 + 9s + 100)^\beta} \quad (4.42)$$

$G_m(s)$ est approximée par une fonction transfert d'ordre entier en utilisant la méthode de la fonction de singularité (2.50). La structure du régulateur satisfaisant les équations

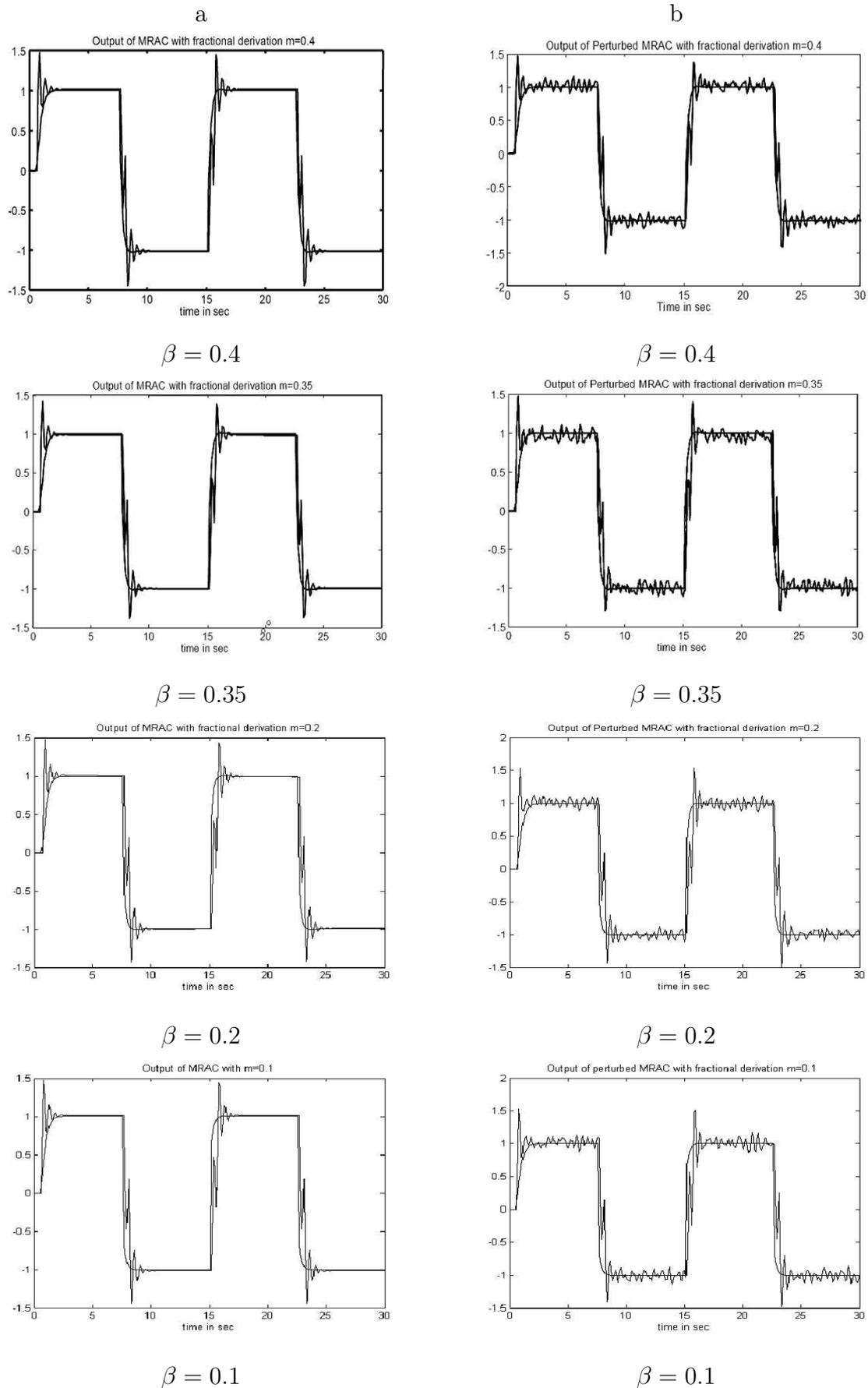


FIG. 4.13: CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 1er ordre. pour resp. $\beta = 0.4$, $\beta = 0.35$, $\beta = 0.2$ et $\beta = 0.1$, a- sans perturbations, b- avec bruit aléatoire (amplitude 10% du signal de référence)

(3.36), (3.42) et (3.43) est calculée pour chaque valeur de β avec un polynôme observateur $A_o = 1$. Pour les besoins de la simulation numérique les fonctions de transfert sont discrétisées avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.5sec$.

On obtient les résultats de simulation de la figure FIG.4.14 pour différentes valeurs de β et aussi pour des bruits aléatoires additifs à l'entrée.

Commentaires

1. La stabilité de la boucle fermée est maintenue dans les deux exemples pour toutes les valeurs de β , avec un bon niveau de performances.
2. Pour le processus de premier ordre (4.40) quand $\beta \ll 0.5$ ce qui veut dire que $\alpha \approx 1$ (par exemple $\beta = 0.1 \Rightarrow \alpha = 0.8 \approx 1$) le rejet de bruits n'est pas bien réalisé relativement aux autres cas, car l'ordre d'intégration est proche de l'unité, sachant que la dérivée d'ordre entier a tendance à amplifier les bruits. Cependant, pour de plus grandes valeurs de β il y a un rejet évident des perturbations comme prévu parce que on peut voir dans (2.3) le calcul de la dérivée d'ordre fractionnaire dépend de toute l'histoire du signal, ce qui modère l'effet des variations du signal.
3. Pour le processus de second ordre (4.30), la méthode proposée offre un meilleur niveau de performance pour les différentes valeurs de l'ordre fractionnaire de dérivation avec de petites valeurs du gain d'adaptation γ .
4. On peut remarquer que le schéma bloc de la figure 4.12 peut être modifié sous la forme de la figure 4.15, ce qui est le même schéma adaptatif présenté dans la figure FIG.4.9 où une intégration d'ordre fractionnaire $1 - \alpha$ est utilisée avec un modèle de référence d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est $\frac{1}{s^\alpha G_m(s)}$.
Cependant, les deux schémas adaptatifs ne sont pas équivalents en performances. Il est plus pratique d'utiliser la calcul numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire. De plus, nous sommes plus convaincus de la robustesse du schéma dérivatif par rapport aux bruits et aux perturbations (le signal de sortie est filtré par le dérivateur d'ordre fractionnaire avant d'être intégré).

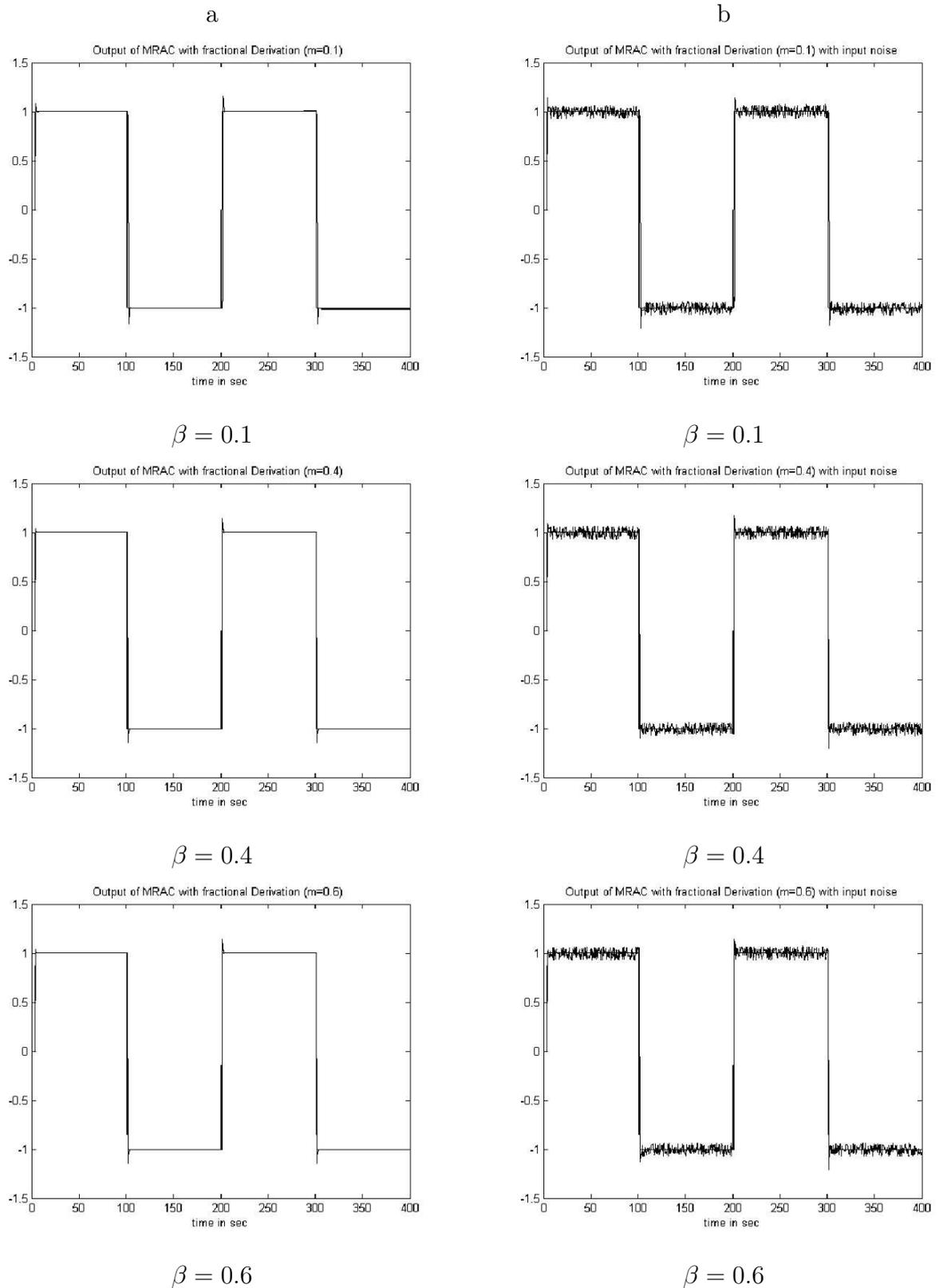


FIG. 4.14: CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus de 2nd ordre. pour resp. $\beta = 0.1$, $\beta = 0.4$ et $\beta = 0.6$, a- sans perturbations, b- avec bruit aléatoire à l'entrée (amplitude 0.2% du signal de référence)

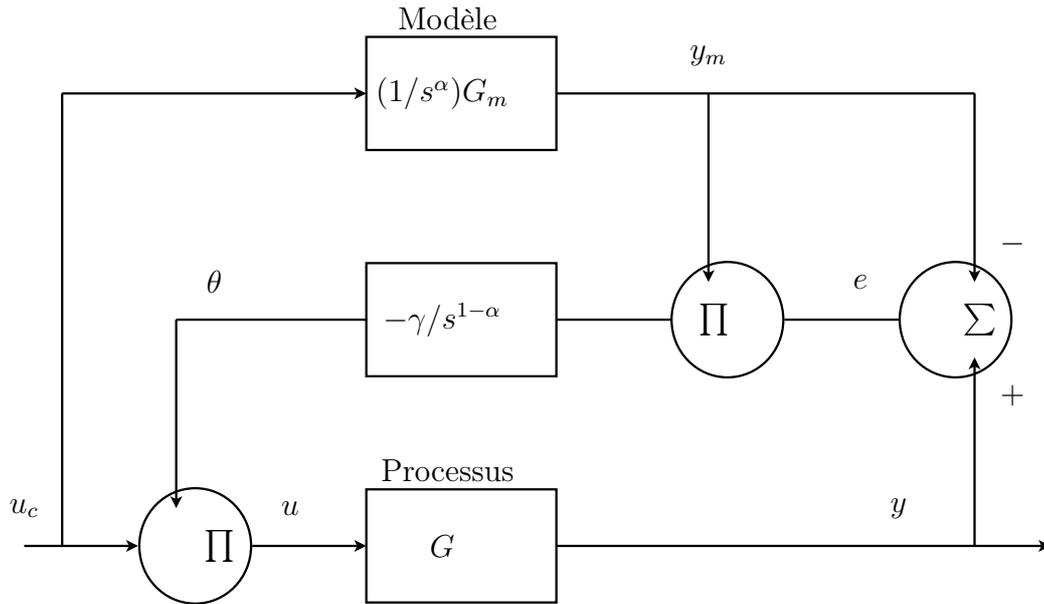


FIG. 4.15: Algorithme d'adaptation équivalent.

4.4.3.3 Etude de la robustesse par rapport aux bruits

Le fait que le calcul de la dérivée d'ordre fractionnaire dépend de toute l'histoire du signal, devrait donner une meilleure performance par rapport aux fluctuations des signaux et des perturbations externes. Nous allons illustrer cette propriété par un exemple de simulation.

Appliquons l'algorithme proposé à un système continu de second degré à phase non minimale donné par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{4 - 0.3s}{(s - 0.2)(s + 1)} \quad (4.43)$$

qui mène au système discret suivant :

$$\tilde{G}(z) = \frac{0.3166z + 0.511}{z^2 - 1.712z + 0.6703} \quad (4.44)$$

avec une période d'échantillonnage de 0.5s et un bloqueur d'ordre zéro.

Algorithme adaptatif d'ordre entier

Le modèle de référence G_m^i est choisi comme un système de second ordre bien amorti donné par :

$$G_m^i(s) = \frac{2.25}{s^2 + 2.4s + 1} \quad (4.45)$$

Algorithme adaptatif d'ordre fractionnaire

Nous prendrons la fonction de transfert suivante comme modèle de référence G_m^f de la forme (2.109) avec $\beta = 0.35$, et maintiendrons la même fréquence nominale et le même coefficient d'amortissement dans (4.45)

$$G_m^f(s) = \frac{2.25}{(s^2 + 2.4s + 1)^{0.35}} \quad (4.46)$$

G_m^f est alors approximée par une fonction rationnelle en utilisant la méthode de la fonction de singularité donnant :

$$G_m^f(s) = \frac{2.745e^{-5}s^4 + 0.008048s^3 + 0.2439s^2 + 1.014s + 1}{5.662e^{-10}s^6 + 2.863e^{-6}s^5 + 0.001458s^4 + 0.0842s^3 + 0.6701s^2 + 1.414s + 1}$$

En utilisant une période d'échantillonnage $\Delta = 0.5s$ et un bloqueur d'ordre zéro on obtient :

$$\tilde{G}_m^f(z) = \frac{0.6935z^5 - 0.4984z^4 + 0.0833z^3 - 0.0006257z^2 + 7.911e^{-17}z - 1.251e^{-33}}{z^6 - 1.003z^5 + 0.2921z^4 - 0.01103z^3 + 7.963e^{-15}z^2 + 5.97e^{-31}z - 2.286e^{-47}}$$

Nous obtenons les résultats de simulation de la figure FIG.4.16 qui compare le schéma de commande classique avec l'algorithme proposé avec $\beta = 0.35$ en l'absence de bruits. Les figures FIG.4.17 et FIG.4.18 présentent une comparaison des deux schémas de commande adaptative pour des bruits additionnels aléatoires à la sortie et à l'entrée respectivement.

Remarques

- La stabilité de la boucle fermée est assurée dans les deux cas, avec un bon niveau de performances.
- L'algorithme de commande adaptative utilisant les opérateurs d'ordre fractionnaire présente une amélioration évidente du rejet des perturbations en comparaison avec l'algorithme d'ordre entier comme prévu.
- Cela est confirmé aussi par le calcul d'un critère de l'erreur quadratique J donné par :

$$J = \sum_{k=0}^N (y(k\Delta) - u_c(k\Delta))^2 \quad (4.47)$$

où $N\Delta$ est la longueur de la fenêtre temporelle de travail. On obtient les valeurs du tableau 4.2 (l'amplitude des bruits aléatoires étant la même pour les deux cas).

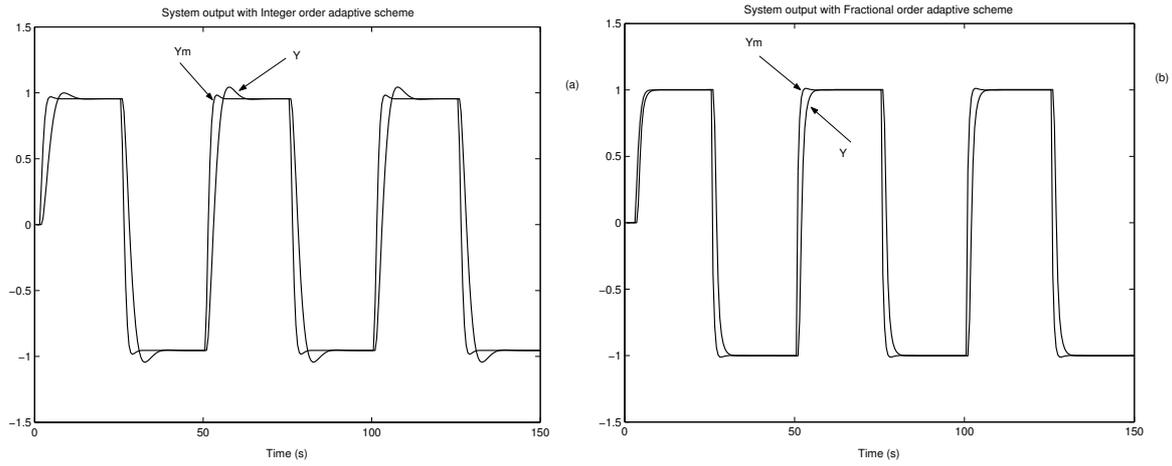


FIG. 4.16: Sortie du processus non perturbé. a- Schéma d'ordre entier. b- Schéma d'ordre fractionnaire proposé avec $\beta = 0.35$

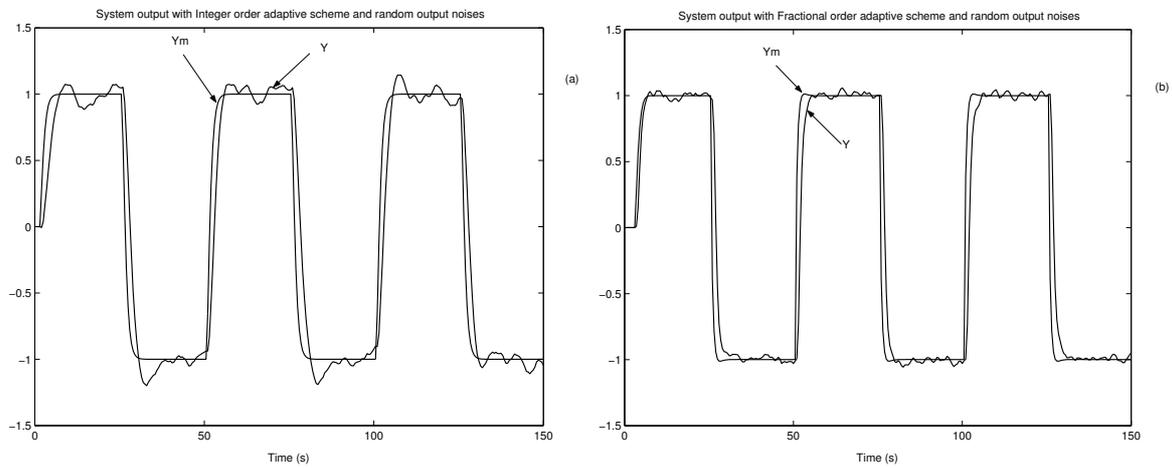


FIG. 4.17: Sortie du processus en présence de bruits aléatoires à la sortie. a- Schéma d'ordre entier. b- Schéma d'ordre fractionnaire proposé avec $\beta = 0.35$

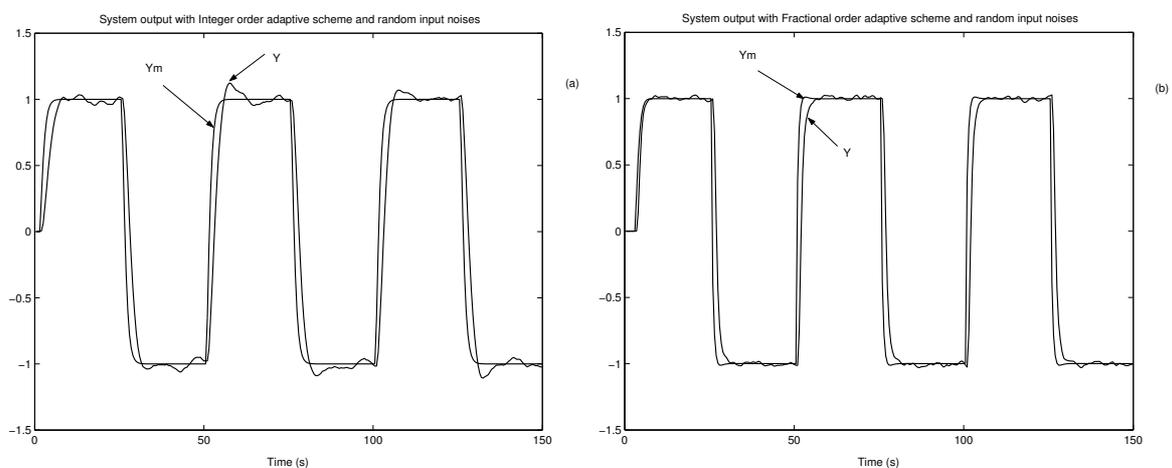


FIG. 4.18: Sortie du processus en présence de bruits aléatoires à l'entrée. a- Schéma d'ordre entier. b- Schéma d'ordre fractionnaire proposé avec $\beta = 0.35$

TAB. 4.2: Comparaison des deux algorithmes adaptatifs par un critère de l'erreur quadratique

J	sans bruit	bruit additif à l'entrée	bruit additif à la sortie
Integer order scheme	17.41	16.58	17.04
Fractional order scheme	8.97	9.08	9.11

Ce tableau montre clairement l'amélioration obtenue avec le schéma de commande adaptative d'ordre fractionnaire proposé.

- Le dérivateur d'ordre fractionnaire agit comme un filtre à la sortie du processus ce qui améliore la robustesse de la commande contre les bruits et les perturbations.

4.4.4 Conclusion

Un nouvel algorithme de commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour les processus SISO, qui inclut l'utilisation d'une dérivée d'ordre non entier, a été proposé. Il garantit la stabilité de la boucle fermée et offre un niveau satisfaisant de performances dynamiques avec une grande capacité à rejeter les perturbations externes. Les simulations ont montré de bonnes performances du système de commande adaptative même en présence de bruit. Cette approche est aussi intéressante pour la commande des systèmes d'ordre fractionnaire.

Par une légère comparaison avec la loi de commande adaptative comprenant une intégration d'ordre non entier présentée précédemment (section 4.3), nous pouvons observer une grande similitude.

En conclusion, ces résultats ont montré des avantages qui peuvent être d'un intérêt certain pour la commande de systèmes partiellement inconnus pour lesquels le temps de réponse est une priorité ou évoluant dans un environnement bruité.

4.5 CAMR robuste avec feedforward d'ordre fractionnaire

4.5.1 Introduction

Dans cette section, on présente une solution de commande adaptative robuste d'ordre fractionnaire pour les systèmes perturbés, basée sur les travaux de Bar-kana [15, 16], qui utilise la propriété de base de la stabilisabilité du procédé et un feedforward parallèle simple dans le but de garantir la stabilité robuste du régulateur adaptatif non linéaire [72].

4.5.2 Stratégie de Commande

On propose une configuration de feedforward d'ordre fractionnaire similaire à celle d'ordre entier (3.46) de la forme :

$$F(s) = \frac{F_p}{\left(1 + \frac{s}{s_0}\right)^\alpha} \quad (4.48)$$

avec une puissance réelle fractionnaire $0 < \alpha < 1$.

Le but de l'introduction de ce feedforward d'ordre fractionnaire améliorer la robustesse de l'algorithme d'adaptation en présence de perturbations, puisque ces systèmes n'amplifient pas ces signaux aléatoires. Cette configuration peut être considérée comme dans (3.45) comme l'inverse d'un correcteur impropre PD d'ordre fractionnaire, qui est utilisé actuellement dans les systèmes de commande avec de bonnes performances [57, 123].

4.5.3 Simulations et commentaires

Sans perte de généralité on va appliquer cette méthode de commande adaptative robuste aussi bien dans le cas de feedforward d'ordre entier que d'ordre fractionnaire, à un modèle SISO d'un moteur à courant continu commandé en vitesse, donné par :

$$G_p(z) = \frac{0.8513z + 5.09910^{-6}}{z^2 + 2.44210^{-7}z + 1.3710^{-11}} \quad (4.49)$$

avec une période d'échantillonnage $T = 0.3$ sec, et un modèle d'actionneur de la forme :

$$A(z) = \frac{0.007667z + 0.007049}{z^2 - 1.763z + 0.7772} \quad (4.50)$$

Le moteur fait l'objet de perturbations à l'entrée et à la sortie modélisées respectivement par les formules :

$$\begin{aligned}d_0(t) &= 2\sin 80t \\d_1(t) &= 0.05\sin 60t\end{aligned}\tag{4.51}$$

et un modèle de référence G_m :

$$G_m(z) = \frac{0.9411z + 0.1208}{z^2 + 0.05679z + 0.005092}\tag{4.52}$$

4.5.3.1 Cas du feedforward d'ordre entier

Le transfert du feedforward d'ordre entier F est donné par :

$$F(z) = \frac{3.239410^{-7}}{z - 0.9997}\tag{4.53}$$

avec un paramètre de régulation $\gamma = 0.001$, on obtient les résultats de la Figure FIG.4.19.

4.5.3.2 Cas du feedforward d'ordre fractionnaire

Le transfert du feedforward d'ordre fractionnaire F est donné par :

$$F(s) = \frac{0.001}{(s + 500)^{0.6}}\tag{4.54}$$

qui est approximée par une fonction de transfert d'ordre entier par la méthode de la fonction singulière (2.45) et échantillonnée pour donner la formule suivante :

$$\hat{F}(z) = \frac{0.001(z - 4.7810^{97})}{z^2 - 2.40710^{-96}z + 1.00110^{-207}}\tag{4.55}$$

avec un paramètre de régulation $\gamma = 0.005$, on obtient les résultats de la figure FIG.4.20.

4.5.3.3 Commentaires

- Le signal de commande u est plus lisse dans le cas d'ordre fractionnaire ce qui peut être d'un intérêt certain le problème de régulation.
- La configuration du feedforward d'ordre fractionnaire proposée maintient la stabilité et un bon niveau de performances, ce qui confirme l'intérêt d'intégrer une stratégie fractionnaire dans la commande adaptative robuste.

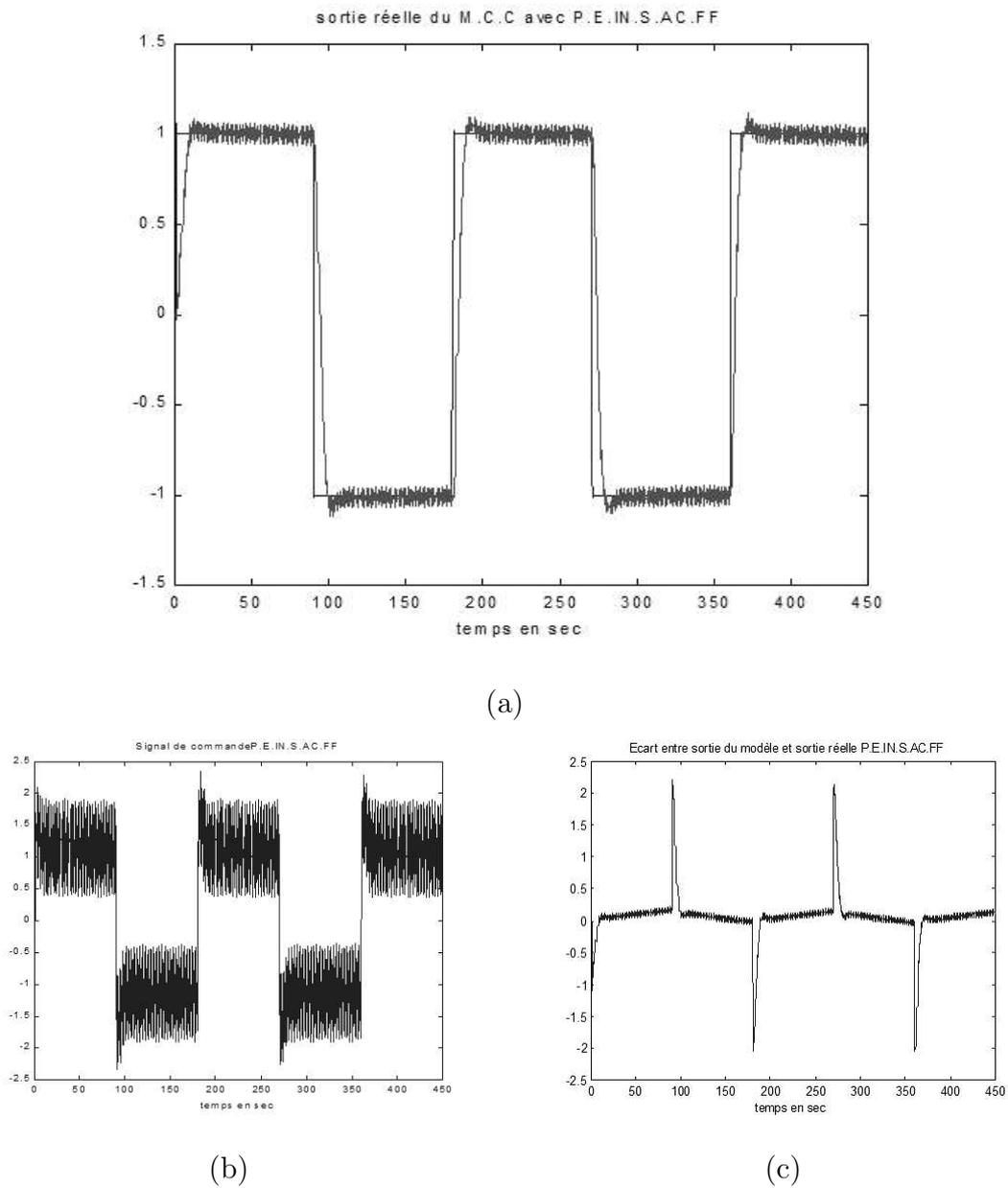


FIG. 4.19: Sortie du processus avec feedforward d'ordre entier
(a) sortie du processus $y(t)$, (b) signal de commande $u(t)$, (c) signal d'erreur $e(t)$

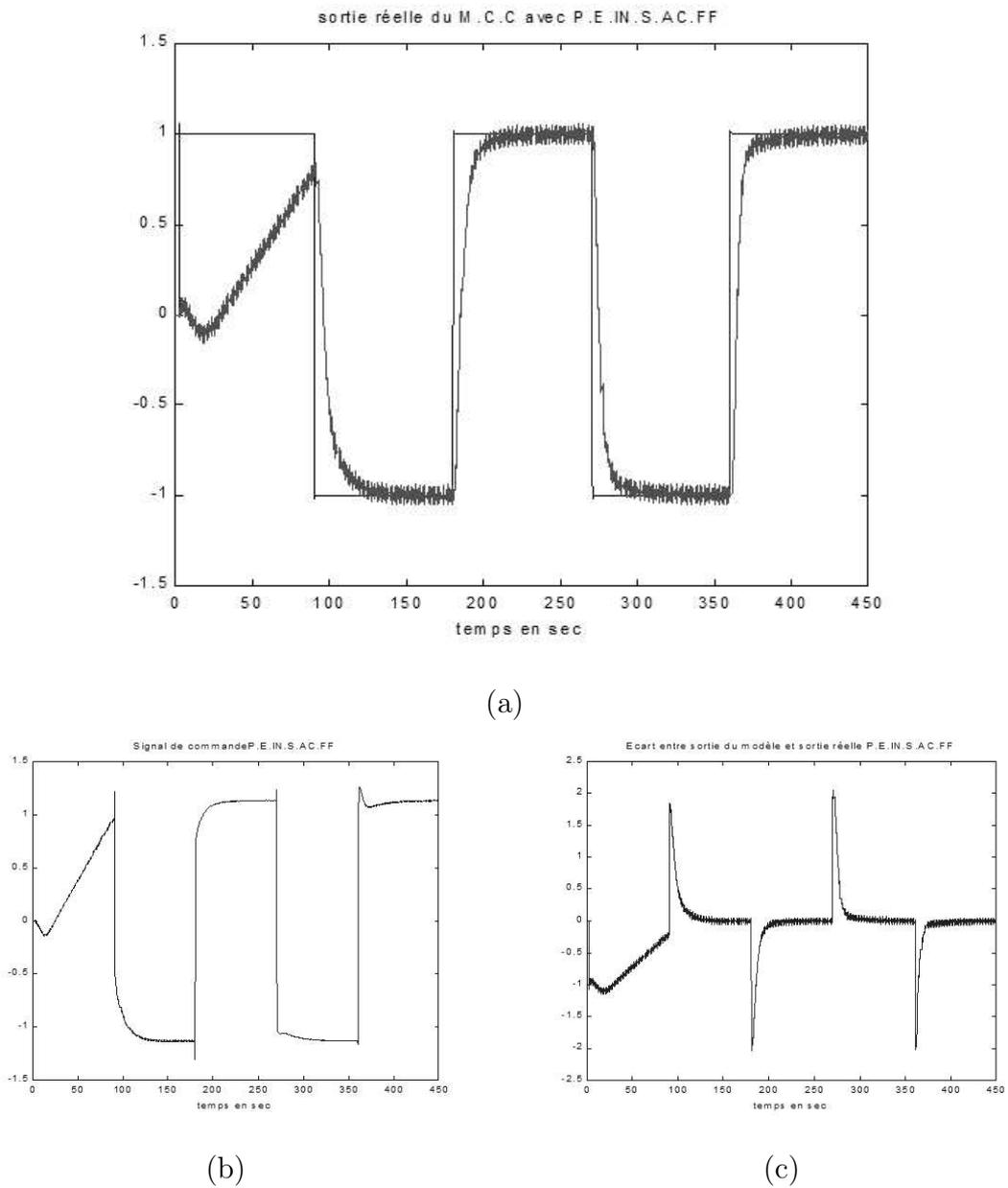


FIG. 4.20: Sortie du processus avec feedforward d'ordre fractionnaire (a) sortie du processus $y(t)$, (b) signal de commande $u(t)$, (c) signal d'erreur $e(t)$

4.5.4 Conclusion

Dans cette section on a présenté une nouvelle stratégie de commande adaptative robuste, où on introduit une configuration de feedforward simple d'ordre fractionnaire dans l'algorithme de la CAMR d'un système SISO. Notre but était d'améliorer les performances de la boucle de commande sans pour autant compliquer le schéma du système de commande.

Les résultats de simulation ont montré une meilleure capacité de filtrage des signaux de commande et de sortie, et plus de robustesse contre les perturbations additives que dans le cas de la configuration du feedforward d'ordre entier.

Ce schéma de commande proposé trouve son intérêt dans la combinaison du feedforward pour compenser l'effet des perturbations et l'utilisation d'un filtre fractionnaire ayant un effet similaire sur les signaux bruités.

4.6 Conclusion

L'essentiel de ce chapitre a été consacré à la commande adaptative à modèle de référence CAMR, avec la loi de commande M.I.T. Cette méthode présente l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre ce qui nous a permis (ainsi qu'à d'autres chercheurs) de proposer diverses modifications de son algorithme basées sur l'utilisation des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Nous avons montré que l'introduction d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire avait un effet bénéfique sur les performances du processus de commande. Plus encore, nous avons proposé deux autres schémas différents où la loi de commande et d'ajustement des paramètres du régulateur comprenait une intégration et une dérivée d'ordre non entier.

Nous avons pu ainsi améliorer les temps de réponse et garantir la stabilité de la boucle fermée. Des essais avec des bruits additifs aléatoires d'amplitudes conséquentes aussi bien à l'entrée qu'à la sortie du système commandé ont montré l'amélioration de la robustesse de la loi de commande.

Nous avons aussi étudié la commande auto-ajustable en y introduisant un modèle d'ordre fractionnaire avec des résultats similaires à ceux trouvés avec la commande adaptative CAMR. Cela était prévisible car cette méthode se base sur un placement de pôle, et donc par le choix d'une dynamique ou d'un modèle de référence. C'est donc le même principe dont la base est la loi de commande dite *Equation Diophantine*.

Nous nous sommes intéressés aussi de près à la notion de robustesse de la commande adaptative à modèle de référence, en utilisant une technique classique de robustification qui est l'ajout d'un feedforward parallèle à la boucle d'adaptation. Nous avons proposé l'utilisation d'un transfert d'ordre fractionnaire au lieu du gain d'ordre entier habituel.

Les résultats de simulation sur un processus complexe (bras flexible) avec un modèle d'ordre élevé et variable selon la charge, a confirmé la supériorité de l'algorithme proposé par rapport au schéma classique.

L'une des critiques qui ont pu être dirigées contre ces schémas de commande, est l'ordre élevé de l'approximation par des fonctions rationnelles des transferts d'ordre fractionnaire, ce qui semble augmenter la complexité du schéma de commande. La réponse réside dans le fait que ces transferts d'ordre entier ne sont que des images des systèmes d'ordre fractionnaire utilisés, et dont il résultent par une méthode assez simple. Ainsi et vu l'insignifiance de la différence du temps de calcul avec les machines actuelles, l'argument de complexité

n'est plus valable.

Nous savons que beaucoup d'autres approches de la commande adaptative doivent être réétudiées du point de vue fractionnaire, afin d'obtenir des résultats encore meilleurs.

Il est clair que la plupart des résultats obtenus dans cette partie sont basés sur des applications ou simulations numériques ; nos travaux se poursuivront pour assoir une assise plus théorique aux algorithmes proposés notamment par des démonstrations analytiques des performances observées et particulièrement de la stabilité.

Chapitre 5

Commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons proposer différents schémas de commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire d'une classe de systèmes linéaires. Le résultat le plus important est l'élaboration d'un théorème de la stabilité de la commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire, avec une démonstration mathématique, ce qui en fait l'un des rares travaux sur la commande d'ordre fractionnaire à établir une base théorique en parallèle des résultats obtenus en application.

Un exemple de simulation met en évidence l'amélioration de la dynamique du système commandé, par rapport à celle obtenue avec le schéma d'origine.

D'autre part nous allons proposer, à l'image du régulateur PI adaptatif d'ordre entier, l'introduction d'une action intégrale d'ordre fractionnaire pour aboutir à un nouveau régulateur PI^λ adaptatif d'ordre non entier.

L'introduction d'une autre action dérivée d'ordre fractionnaire permet d'obtenir un contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ adaptatif, dont les paramètres sont auto-ajustables, ce qui simplifie sa mise en oeuvre par rapport au schéma non adaptatif proposé par Podlubny [140]. Les ordres d'intégration et de dérivation λ et μ donnent plus de flexibilité au concepteur. Un algorithme d'initialisation du régulateur est proposé.

Des exemples de simulations seront donnés pour les différents schémas de commande étudiés accompagnés de comparaisons avec les schémas originaux de commande adaptative d'ordre entier.

5.2 Stabilité de la Commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire

5.2.1 Introduction

L'analyse de la stabilité et la démonstration de la stabilité des systèmes de commande d'ordre fractionnaire [55, 150] sont encore considérés comme des problèmes ouverts. Cela est dû au fait que la théorie existante développée à ce jour pour l'étude de la stabilité est destinée essentiellement aux systèmes d'ordre entier. Beaucoup de travaux de recherche ont essayé de donner des réponses à ces questions, en utilisant des approches numériques ou analytiques [29, 58, 83, 135].

C'est particulièrement le cas des nouveaux schémas de commande adaptative d'ordre fractionnaire [166]. L'application de la théorie du calcul fractionnaire dans la commande adaptative est un nouvel axe de recherche, mais de plus en plus de chercheurs s'intéressent à ce sujet [70, 75, 167].

Ce schéma de commande est basé sur la théorie de la commande à grand gain [7, 34], qui est très attractive car elle ne nécessite pas l'identification du processus ou l'estimation des paramètres du système ou l'injection de signaux additifs.

La contribution principale de cette section est de proposer une preuve analytique de la stabilité pour la généralisation de cette méthode à des schémas d'ordre non entier dans le cas d'un système linéaire à phase minimale de degré relatif unité [77, 79].

5.2.2 Aspects mathématiques

Dans ce travail nous considérons la définition de Riemann-Liouville des opérateurs d'ordre fractionnaire présentée dans la section 2.2.1.1.

On rappelle que l'intégration d'ordre fractionnaire est définie par :

$$D_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d(\xi) \quad (5.1)$$

La définition de la dérivée d'ordre fractionnaire est définie par :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= \frac{d}{dt} [D_a^{-(1-\alpha)} f(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\xi)^{-\alpha} f(\xi) d(\xi) \end{aligned} \quad (5.2)$$

où

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy \quad (5.3)$$

est la fonction Gamma, $(a, t) \in \mathfrak{R}^2$ et α ($\alpha > 0$, $\alpha \in \mathfrak{R}$) est l'ordre de l'opération.

Par souci de simplification on notera $D^\alpha f(t)$ pour $D_0^\alpha f(t)$.

5.2.3 Problème de stabilité

On considère un système siso incertain décrit par (3.48)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.4a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5.4b)$$

où $t \in \mathfrak{R}$ est la variable de temps, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est l'état avec n inconnu, $u(t) \in \mathfrak{R}$ est la commande scalaire et $y(t) \in \mathfrak{R}$ est la sortie scalaire mesurée; A , B , C , sont des matrices inconnues de dimensions appropriées.

On rappelle les hypothèses de la section 3.6.2.

Hypothèse A 1 (A, B) est controlable et (C, A) est observable.

Supposons que (5.4a) est l'objet d'un régulateur linéaire en boucle fermée ayant un gain $-k \in \mathfrak{R}$, i.e.,

$$u = -ky \quad (5.5)$$

Alors le système commandé résultant en boucle fermée peut être décrit par

$$\dot{x} = \tilde{A}(k)x \quad (5.6)$$

où

$$\tilde{A}(k) \triangleq A - kBC \quad (5.7)$$

Le système (5.6) est asymptotiquement stable si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$Re(\lambda) \leq -\epsilon \quad \forall \lambda \in \sigma[\tilde{A}(k)]$$

où $\sigma[\tilde{A}(k)]$ symbolise l'ensemble des valeurs propres de $\tilde{A}(k)$. On fait l'hypothèse suivante.

Hypothèse A 2 *Le système (5.4) est de phase minimale, de degré relatif unité et de gain positif en hautes fréquences.*

Les régulateurs adaptatifs considérés ici sont simplement des versions adaptatives paramétriques de (5.5), ils sont donnés par

$$u = -\hat{k}y \quad (5.8a)$$

$$D^\alpha(\hat{k}) = \gamma y^2 \quad (5.8b)$$

où $\hat{k}(t) \in \mathfrak{R}$ est le paramètre adaptatif, $\alpha \in \mathfrak{R}$ avec

$$0 < \alpha < 2 \quad (5.9)$$

et γ est un nombre réel qui satisfait

$$\gamma > 0 \quad (5.10)$$

5.2.4 Résultat principal

On considère un système décrit par (5.4) et commandé par un régulateur adaptatif donné par (5.8). Le système commandé obtenu peut être décrit par

$$\dot{x} = \tilde{A}(\hat{k})x \quad (5.11a)$$

$$D^\alpha(\hat{k}) = \gamma(Cx)^2 \quad (5.11b)$$

où $\tilde{A}(\hat{k})$ est défini par (5.7). C'est un système dont l'état est $(x, \hat{k}) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$. L'objectif principal de cette partie est de présenter les propriétés de stabilité de (5.11). Ces propriétés sont établies dans le théorème suivant.

Theoreme 2 *Considérons un système décrit par (5.4), satisfaisant les hypothèses H1, H2 et faisant l'objet d'une commande donnée par (5.8). Le système commandé résultant (5.11), a les propriétés suivantes.*

Pour tout $(t_0, x_0, \hat{k}_0) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$, il existe une solution $(x(\cdot), \hat{k}(\cdot)) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$, $t_0 < t_1$, de (5.11) avec $x(t_0) = x_0$, $\hat{k}(t_0) = \hat{k}_0$.

Toute solution peut être continuée sur $[t_0, \infty)$ et satisfait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

$\hat{k}(\cdot)$ est borné.

5.2.5 Preuve du résultat principal

Nous aurons besoin du théorème suivant (see [34]).

Theoreme 3 *Considérons tout système siso décrit par*

$$\dot{x} = [A - k(t)BC]x \quad (5.12a)$$

$$y = Cx \quad (5.12b)$$

où A, B, C satisfont les hypothèses $H1, H2$ et $k(\cdot) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}, t_0 < t_1$, est une fonction différentiable satisfaisant

$$\dot{k}(t) \geq 0.$$

Ils existent alors $\underline{k} \in \mathfrak{R}, \epsilon > 0$ et $M > 0$ tels que si $k(t) \geq \underline{k}$ pour tout $t \geq t_0$ et pour tout $x(\cdot) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}^n$, solution de (5.12a), et on a :

$$|y(t)| \leq M e^{-\epsilon(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_1)$$

Preuve du Théorème 3. (sketch)

Considérons quelque $(t_0, x_0, \hat{k}_0) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$. Puisque le coté droit de (5.11) sont des fonctions continues de (x, \hat{k}) , il existe une solution $(x(\cdot), \hat{k}(\cdot)) : [t_0, t_1) \rightarrow \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}, t_1 > t_0$, de (5.11) avec $x(t_0) = x_0, \hat{k}(t_0) = \hat{k}_0$.

Comme le coté droit de (5.11a) est Lipschitz en x , on peut voir aisément que s'il existe $t^* \in \mathfrak{R}$ tel qu'une solution de (5.11a) ne puisse pas être étendue au-delà de t^* , alors $\lim_{t \rightarrow t^*} \hat{k}(t) = \infty$.

□

On procédera d'abord par démontrer le Théorème 2 pour le système (5.11) pour le cas

$$1 \leq \alpha < 2 \quad (5.13)$$

puis on élargira la démonstration au cas

$$0 < \alpha < 1 \quad (5.14)$$

Cas où $1 \leq \alpha < 2$

On aura aussi besoin du lemme suivant

Lemma 1 *La fonction paramétrique du régulateur \hat{k} définie dans (5.8) où α est défini dans (5.13) satisfait*

$$\dot{\hat{k}}(t) \geq 0 \quad (5.15)$$

Preuve du Lemme 1.

Si $\alpha = 1$ alors (5.15) est évident.

Si $1 < \alpha < 2$, définissons $\beta \in \mathfrak{R}$ tel que

$$\beta = \alpha - 1$$

A partir de (5.9), $0 < \beta < 1$, et à partir de (5.8b) on a

$$\begin{aligned} D^\alpha(\hat{k}) &= \gamma y^2 \\ D^{1+\beta}(\hat{k}) &= \gamma y^2 \\ \dot{\hat{k}} &= D^{-\beta}(\gamma y^2) \end{aligned}$$

et à partir de la définition de Riemann-Liouville de l'intégration d'ordre fractionnaire (5.1) on obtient

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\gamma}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \xi)^{\beta-1} y^2(\xi) d(\xi) \quad (5.16)$$

Il est évident que le coté droit de l'équation (5.16) est positif ($\Gamma(\beta) \geq 1$ pour $0 < \beta < 1$).

Le résultat en découle.

□

Maintenant on démontre que $\hat{k}(\cdot)$ est borné sur tout intervalle (fini ou infini).

Supposons par contradiction qu'il existe $t^* \in (t_0, \infty]$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \hat{k}(t) = \infty \quad (5.17)$$

L'évolution de $x(\cdot)$ satisfait

$$\dot{x} = [A - \hat{k}(t)BC]x$$

où à partir de (5.15),

$$\dot{\hat{k}}(t) \geq 0$$

Soit \underline{k} tel que défini dans le Théorème 3. Alors il existe $t_2 \in [t_0, t^*)$ tel que $\hat{k}(t) \geq \underline{k}$ pour tout $t \in [t_2, t^*)$. Il suit à partir du Théorème 3 qu'ils existent $\epsilon > 0$ et $M \in \mathfrak{R}$ tels que

$$|y(t)| \leq M e^{-\epsilon(t-t_2)} \quad \forall t \in [t_2, t^*) \quad (5.18)$$

Mais (5.11a) et (5.18) impliquent que $\hat{k}(\cdot)$ est borné sur $[t_2, t^*)$. Cela contredit l'hypothèse initiale (5.17); donc $\hat{k}(\cdot)$ est borné.

La bornitude de $\hat{k}(\cdot)$ garantit que toute solution de (5.11) peut être étendue indéfiniment; elle implique aussi que $y(\cdot) \in L^2$, i.e., $\int_0^\infty y(t)^2 dt < \infty$; en vertu de (5.11b).

Pour démontrer que $x(\cdot)$ converge vers zéro, on réécrit (5.11a) comme

$$\dot{x} = \bar{A}x + B\mu(t)$$

où

$$\bar{A} \triangleq A - \underline{k}BC$$

est asymptotiquement stable et

$$\mu(t) \triangleq (\hat{k} - \underline{k})y(t).$$

Puisque $y(\cdot) \in L^2$ et $\hat{k}(\cdot)$ est borné, $\mu \in L^2$. Puisque $x(\cdot)$ est maintenant l'état observable et contrôlable d'un système linéaire asymptotiquement stable faisant l'objet d'une entrée L^2 , alors $x(\cdot) \in L^2$, et donc,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

□

Cas où $0 < \alpha < 1$

On peut réécrire l'équation (5.11b) comme suit,

$$\begin{aligned} D^\alpha(\hat{k}) &= \gamma y^2 \\ D(D^\alpha(\hat{k})) &= D(\gamma y^2) \\ D^{1+\alpha}(\hat{k}) &= 2\gamma y \dot{y} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Par une simple étude de l'équation résultante (5.19) on peut distinguer 3 cas de figure possibles qui dépendent du signe du coté droit de l'équation.

– $sign(y\dot{y}) \geq 0$ sur tout l'intervalle de temps considéré :

A partir de l'équation (5.19) on a,

$$\begin{aligned} D^{1+\alpha}(\hat{k}) &= 2\gamma y\dot{y} \\ D(\hat{k}) &= 2\gamma D^{-\alpha}(y\dot{y}) \\ \dot{\hat{k}} &= \frac{2\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\xi)^{\alpha-1} (y(\xi)y'(\xi)) d(\xi) \end{aligned} \tag{5.20}$$

alors $\dot{\hat{k}} \geq 0$ car $sign(y\dot{y}) \geq 0$ et $\Gamma(\alpha) > 0$. Le même raisonnement utilisé quand α satisfait (5.13) permet de démontrer que \hat{k} est borné sur tout intervalle (fini ou infini) et donc $y(\cdot) \in L^2$ et $y(\cdot) \in L^2$.

So $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

– $sign(y\dot{y}) < 0$ sur tout l'intervalle de temps considéré :

$y\dot{y} < 0$ implique directement que la fonction $|y|$ est une fonction strictement décroissante et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. A partir de (5.4b) on a

$$y(t) = Cx(t)$$

Puisque le système (5.4) satisfaisant l'hypothèse $H1$ est observable, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

– $sign(y\dot{y})$ est variable sur l'intervalle de temps $T = [t_0, \infty)$:

En divisant la fenêtre temporelle en un nombre fini ou infini de sous-intervalles T_i , i.e.

$$T = \bigcup T_i$$

tel que $sign(y\dot{y})$ reste constant sur tout sous-intervalle T_i , et en utilisant les arguments du cas ($sign(y\dot{y}) < 0$) ou du cas ($sign(y\dot{y}) \geq 0$) on peut montrer que la fonction $|y(t)|$ est décroissante sur tout intervalle T_i et puisque $y(t)$ is continue on a,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Et comme tous les états du systèmes sont observables et commandables, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Remarque

1. On peut montrer que la stabilité adaptative de la classe de systèmes considérée est possible en utilisant le régulateur nonlinéaire étendu

$$u = -\hat{k}y \quad (5.21a)$$

$$D^\alpha(\hat{k}) = \gamma \|y\|^p \quad (5.21b)$$

où $p \geq 1$.

2. L'ordre fractionnaire α de la dérivée dans (5.8b) peut être considéré comme un paramètre de réglage supplémentaire, qui peut être utilisé pour améliorer le comportement du système de commande en boucle fermée.
3. Un autre bénéfice de l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaires est d'augmenter la robustesse du système de commande contre les bruits et les perturbations comme démontré dans plusieurs autres travaux (voir par exemple [78]).
4. Pour les systèmes décrits par (3.48) satisfaisant les hypothèses $H1$ et $H2$ sauf qu'ils sont de gains négatifs en hautes fréquences, le même résultat peut être retrouvé avec le régulateur donné par

$$u = \hat{k}y \quad (5.22a)$$

$$D^\alpha(\hat{k}) = \gamma y^2 \quad (5.22b)$$

5.2.6 Exemple de simulation

Pour étudier les performances de ce nouvel algorithme, appliquons le à un système continu instable et de degré relatif un donné par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-2)(s-3)} \quad (5.23)$$

Fig. 5.1 donne une vue comparative de la réponse indicielle du système avec un régulateur adaptatif (5.8) pour une dérivée d'ordre entier $A(\alpha = 1, \text{ conditions initiales } y(0) = 5 \text{ et } \gamma = 0.3)$, et le cas de la dérivée d'ordre fractionnaire, pour deux valeurs de α : $B(\alpha = 1.45, \text{ conditions initiales } y(0) = 5 \text{ et } \gamma = 0.0000001)$ et $C(\alpha = 0.20, \text{ conditions initiales } y(0) = 5 \text{ et } \gamma = 0.00001)$.

Il est bien visible sur les résultats de simulation que le comportement dynamique de

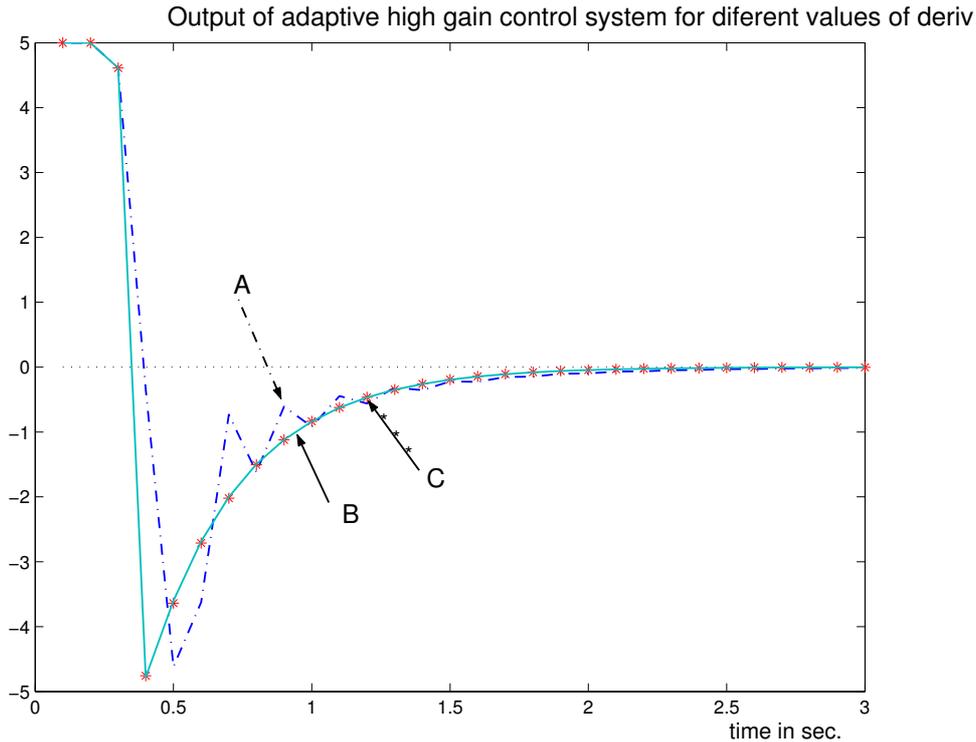


FIG. 5.1: Sortie de l'algorithme de commande adaptative à grand gain pour différentes valeurs de α , A : $\alpha = 1$, B : $\alpha = 0.20$, C : $\alpha = 1.45$

l'algorithme fractionnaire est meilleur que celui de l'algorithme classique particulièrement en ce qui concerne le temps de convergence et le lissage du signal de sortie. On remarque aussi que la valeur du paramètre γ est beaucoup plus petite dans le cas de l'utilisation de la dérivée d'ordre fractionnaire.

5.2.7 Conclusion

Nous avons présenté un nouveau régulateur adaptatif à grand gain pour une classe donnée de systèmes linaires, qui introduit de nouveaux paramètres de réglage pour l'amélioration des performances de la boucle fermée. l'analyse de la stabilité a été développée avec un nouveau théorème de stabilité établi et démontré sur une base mathématique, et un exemple de simulation a été donné pour illustrer l'amélioration des performances qui peut résulter de l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans un tel algorithme de commande. Ce schéma simple de commande adaptative donne de nouveaux arguments pour le développement de régulateurs adaptatifs PI^λ and $PI^\lambda D^\mu$.

5.3 Commande Adaptative $PI^\lambda D^\mu$

5.3.1 Introduction

La contribution principale dans ce travail réside dans l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans un schéma classique de commande PI Adaptative pour aboutir à un régulateur $PI^\lambda D^\mu$ plus performant et ne nécessitant pas un grand effort pour l'ajustement des paramètres, voir Figure FIG.5.2.

Le régulateur $PI^\lambda D^\mu$ adaptatif d'ordre fractionnaire proposé dans ce travail est auto-ajustable [74]. Il est basé sur l'approche de la rétroaction à gain élevé d'Ilchmann A., et al [63], et le contrôleur PI adaptatif simple proposé par Fan J.C., et al [45], en employant une intégration et une différentiation d'ordre fractionnaire dans la stratégie de réglage des paramètres des actions de commande.

L'intérêt de ce genre de régulateur est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il présente deux paramètres supplémentaires qui sont les nombres réels λ et μ des actions intégrales et dérivées, respectivement.

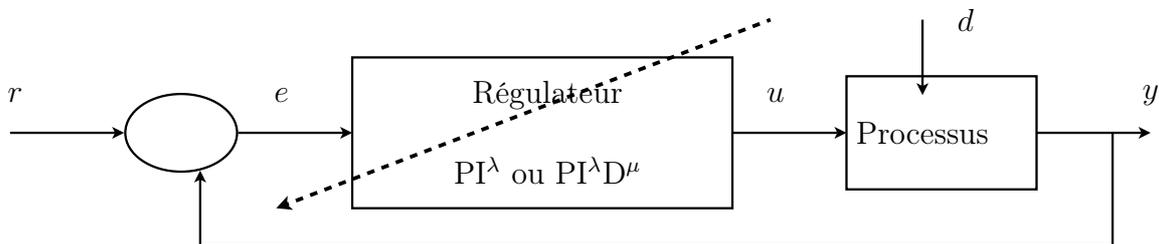


FIG. 5.2: Régulateur Adaptatif PI^λ ou $PI^\lambda D^\mu$ de systèmes perturbés

5.3.2 Régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ

5.3.2.1 Stratégie de commande

Le principe du régulateur d'ordre fractionnaire PI^λ est basé sur le remplacement de l'intégration d'ordre entier dans la loi de commande adaptative PI de l'équation (3.55) par une intégration d'ordre fractionnaire.

L'introduction de cette intégrale d'ordre fractionnaire donne un paramètre supplémentaire de réglage λ qui est l'ordre fractionnaire de l'intégration.

La nouvelle loi de commande adaptative PI^λ des système à phase minimale, de degré

relatif 1 et objet d'une perturbation constante sera donc comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -k_c [k_1(t)e(t) + I^\lambda \{k_2(t)e(t)\}] \\
 k_1(t) &= k_p(t) + \alpha_1 k_i(t), \quad k_2(t) = \alpha_2 k_i(t) \\
 k_p(t) &= e^2(t), \quad k_i(t) = I^\lambda \{e^2(t)\} \\
 e(t) &= y(t) - r(t)
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

où k_c , α_1 , et α_2 sont des constantes positives, l'opérateur $I^\lambda(\cdot)$ est l'intégration d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville définie dans (2.2) et l'ordre d'intégration λ est un nombre réel tel que $\lambda \in [0.5, 2]$.

La représentation en schéma-bloc du système de commande global en boucle fermée est donné dans FIG. 5.3.

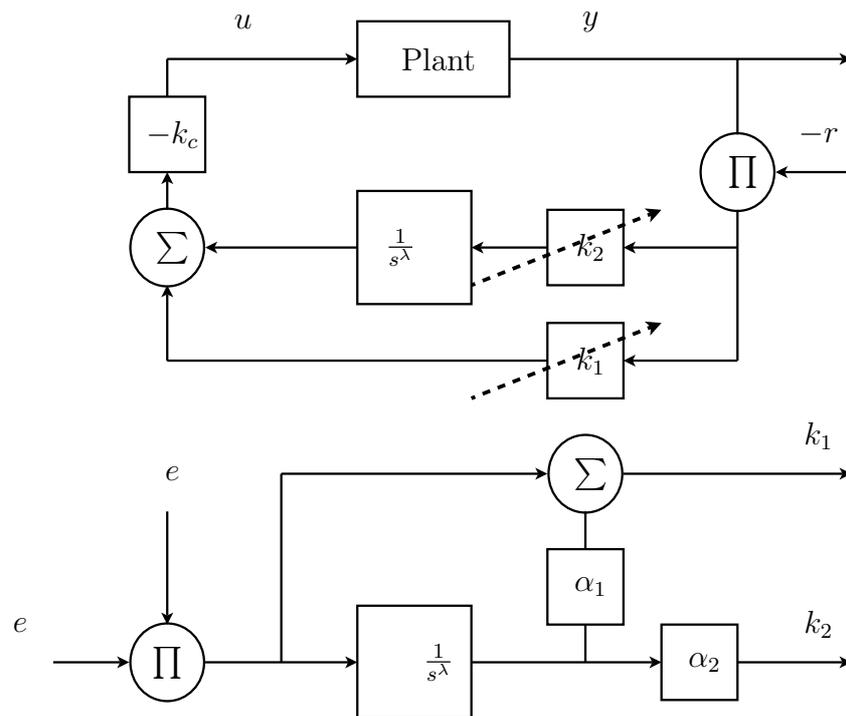


FIG. 5.3: Système de commande adaptative d'ordre fractionnaire PI^λ

5.3.2.2 Exemple d'application du régulateur PI^λ

Pour tester l'utilité et l'efficacité de l'algorithme proposé de commande adaptative d'ordre fractionnaire PI^λ de l'équation (5.25), considérons l'exemple proposé par Fan et al. [45]. Le processus à commander est instable de phase minimale et de degré relatif 1.

Sa représentation en espace d'état est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + d \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (5.25)$$

où d est un vecteur de perturbation constant et :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1.414 \\ 0 & 1.414 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (5.26)$$

$$C = (1 \ 5 \ 0), \quad d = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ .08 \end{pmatrix}$$

Les paramètres de réglage de la figure FIG.5.4 sont les suivants :

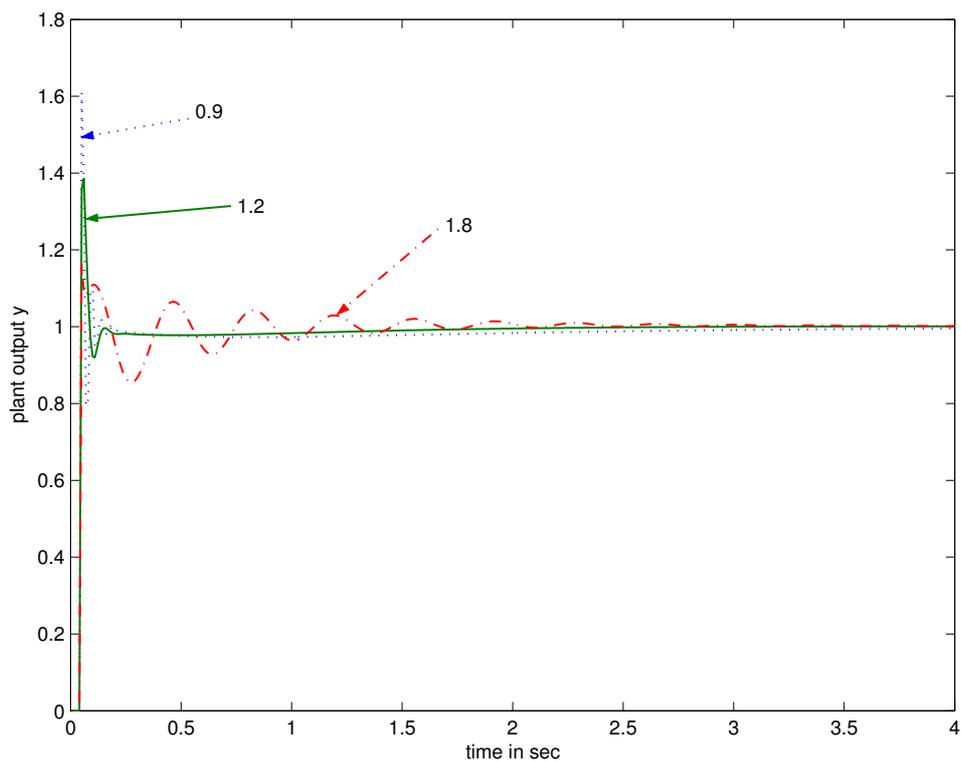


FIG. 5.4: Réponse du système de commande PI^λ pour différentes valeurs de λ

- $\lambda = 0.9$ ($k_c = 45$, $\alpha_1 = 255$, $\alpha_2 = 12000$)
- $\lambda = 1.2$ ($k_c = 45$, $\alpha_1 = 200$, $\alpha_2 = 20000$)
- $\lambda = 1.8$ ($k_c = 40$, $\alpha_1 = 190$, $\alpha_2 = 30000$)

Toutes les valeurs initiales dans le processus et le régulateur sont mises à zéro de même que la commande initiale $u(0) = 0$, le signal de référence est un échelon $r(t) = 1$. Pour une valeur donnée de l'ordre fractionnaire de l'intégration variant de 0.5 à 1.9 avec un pas de 0.1, on a appliqué l'algorithme de commande adaptative d'ordre fractionnaire PI^λ de l'équation (5.25) pour des valeurs appropriées des paramètres de réglage k_c , α_1 , et α_2 pour obtenir la meilleure réponse transitoire du système de commande global. Les résultats de simulation pour $\lambda = 0.9, 1.2$ et 1.8 sont donnés dans la figure FIG. 5.4.

Commentaires :

- Malgré que dans la référence [45], la mise à zéro de l'entrée initiale est présentée comme un élément stabilisant pour le système, dans notre simulation cette valeur initiale n'est pas nulle.
- A partir des résultats de simulation, on remarque que le rejet de la perturbation constante et la poursuite de l'échelon de référence est bien réalisée pour toutes les valeurs utilisées de l'ordre fractionnaire λ de l'intégration.
- A partir de la figure FIG. 5.4, on peut aisément voir que le paramètre additionnel λ de l'intégration d'ordre fractionnaire peut avoir un effet sérieux sur le comportement du système de commande global. En effet, on a trouvé que pour quelques valeurs de λ les caractéristiques de performances du système de commande en terme de pic de dépassement en pourcentage, en temps de montée et temps de réponse sont largement meilleures que celles trouvées dans [45], pour le même exemple avec une intégration d'ordre entier.
- On a aussi remarqué que la réponse de la sortie devient plus oscillatoire quand l'ordre fractionnaire λ de l'intégration se rapproche de l'ordre 2. Les simulations ont montré aussi que quand λ est supérieur à 1.5, le pic de dépassement et le temps correspondant atteignent leurs valeurs minimales et deviennent indépendants de l'ordre fractionnaire λ de l'intégration.
- On a aussi vérifié que le paramètre $k_i(t)$ donné dans l'équation (5.25) converge vers une valeur constante pour toutes les valeurs de l'ordre fractionnaire λ de l'intégration.

Pour obtenir la meilleure conception du régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ on a utilisé une fonction objective J définie comme un critère de l'erreur quadratique sur

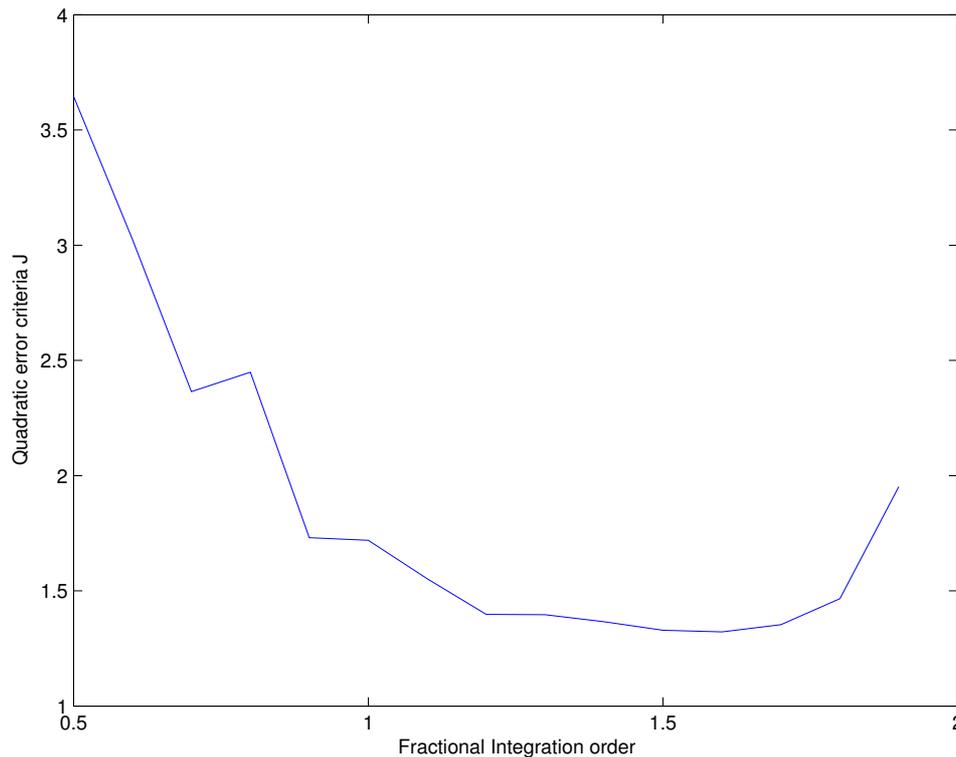


FIG. 5.5: Critère de l'erreur quadratique en fonction de l'ordre d'intégration fractionnaire λ

l'intervalle de temps T de la simulation et donnée par l'équation suivante :

$$J = \int_0^T e^2(t)dt \quad (5.27)$$

La figure FIG. 5.5 présente la fonction objective J en fonction de l'ordre fractionnaire λ de l'intégration.

On peut remarquer que la valeur minimale de J est obtenue pour $\lambda = 1.6$ avec les paramètres $\lambda = 0.9$ ($k_c = 40$, $\alpha_1 = 190$ et $\alpha_2 = 30000$).

Dans ce cas, la réponse de la sortie est montrée dans la figure FIG. 5.6 où le dépassement est de l'ordre de 17%, le temps de réponse est d'environ 1s et le temps de montée de 0.1s. Ces performances sont franchement meilleures que celles trouvées par Fan et al. [45], pour le même exemple.

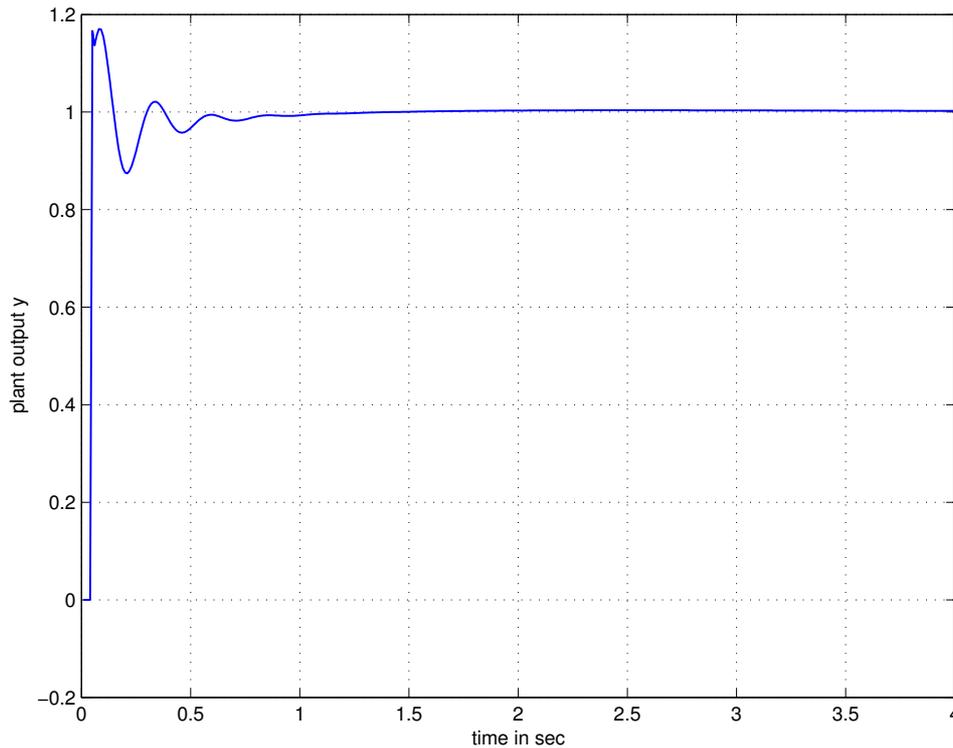


FIG. 5.6: Réponse de la sortie pour $\lambda = 1.6(k_c = 40, \alpha_1 = 190, \alpha_2 = 30000)$

5.3.3 Régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$

5.3.3.1 Stratégie de commande

Après les performances satisfaisantes obtenues avec le régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ comparées à celles du régulateur adaptatif PI proposé dans [45], l'idée du régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ est maintenant étendue à un régulateur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ plus général car le régulateur PI^λ n'est qu'un cas spécial du régulateur $PI^\lambda D^\mu$ quand le nombre réel μ de la dérivée d'ordre fractionnaire est mis à zéro [74].

En ajoutant à l'algorithme donné dans l'équation (5.25) une action dérivée d'ordre fractionnaire μ , on obtient le régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$. L'introduction de cette action dérivée d'ordre fractionnaire donne un paramètre de réglage supplémentaire μ .

La loi de commande adaptative d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ pour les systèmes à phase minimale, de degré relatif 1 et objet d'une perturbation constante sera donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
u(t) &= -k_c [k_1(t)e(t) + I^\lambda(k_2(t)e(t)) + D^\mu(k_3(t)e(t))] \\
k_1(t) &= k_p(t) + \alpha_1 k_i(t) + \alpha_3 k_d(t), \\
k_2(t) &= \alpha_2 k_i(t) \\
k_3(t) &= \alpha_4 k_d(t) \\
k_p(t) &= e^2(t) \\
k_i(t) &= I^\lambda(e^2(t)) \\
k_d(t) &= D^\mu(e^2(t)) \\
e(t) &= y(t) - r(t)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

où $k_c, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sont des constantes positives, l'opérateur $I^\lambda(\cdot)$ est l'intégration d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville définie dans l'équation (2.2) et l'ordre d'intégration λ est un nombre réel positif; l'opérateur $D^\mu(\cdot)$ est la dérivation d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville définie dans l'équation (2.3) et l'ordre de dérivation μ est un nombre réel positif.

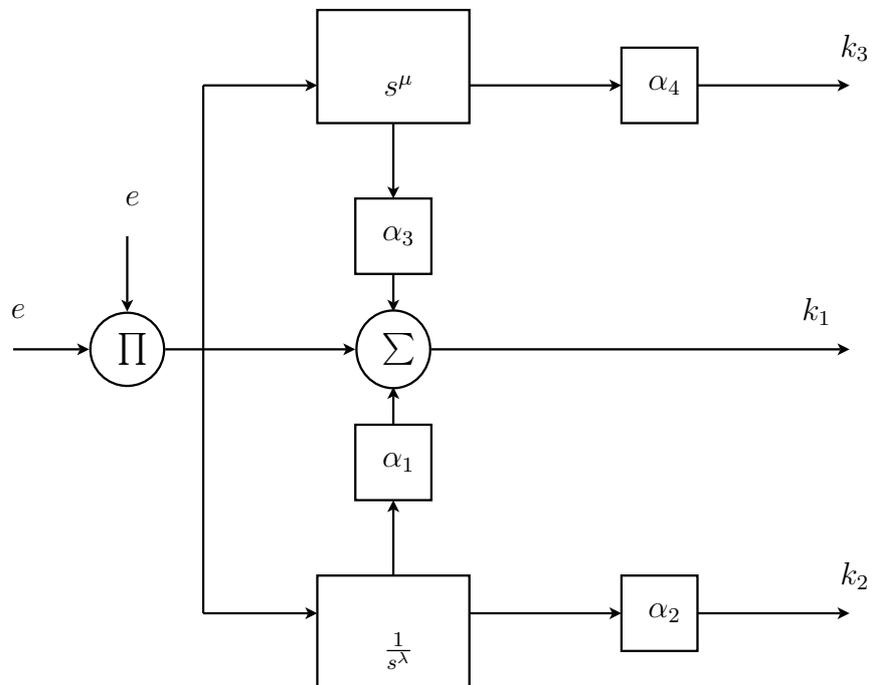
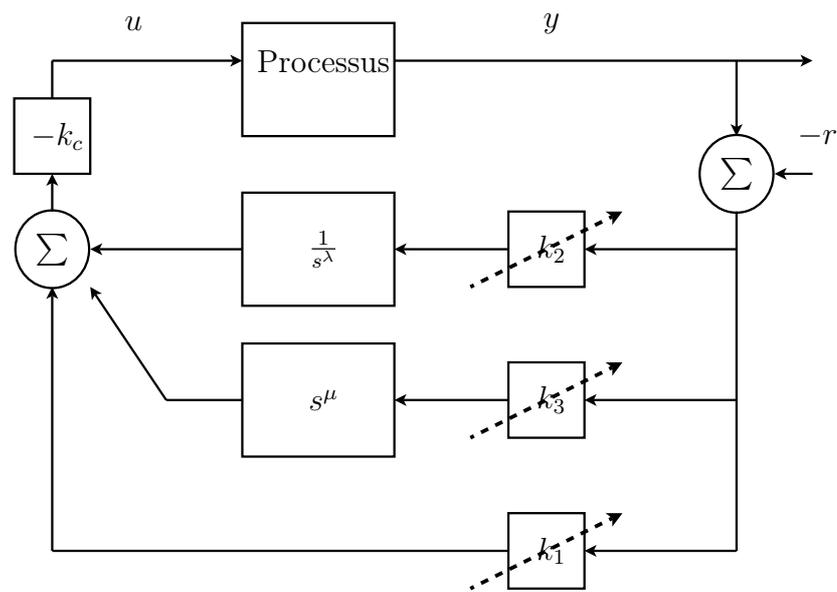
La représentation en schéma-bloc de ce système de commande en boucle fermée est présenté dans la figure FIG. 5.7.

5.3.3.2 Exemple d'application du régulateur $PI^\lambda D^\mu$

Pour tester l'algorithme de commande adaptative d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$, on va reconsidérer l'exemple précédent (page 136) qui est un processus instable à phase minimale, de degré relatif unité et faisant l'objet d'une perturbation constante et dont la représentation dans l'espace d'état est donnée dans les équations (5.25) et (5.26).

Toutes les valeurs initiales dans le processus et le régulateur sont nulles et la commande initiale $u(0)$ est aussi égale à zéro, le signal de référence est un échelon unité $r(t) = 1$. Pour des valeurs données de l'ordre fractionnaire d'intégration λ et l'ordre fractionnaire de dérivation μ qu'on a pris de 0.5 à 1.9 avec un pas de 0.1, on a appliqué l'algorithme de commande adaptative d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ des équations (5.29) pour des valeurs adéquates des paramètres de réglage $k_c, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 afin d'obtenir la meilleure réponse transitoire du système de commande global.

Le réglage de ces paramètres est effectué en deux étapes :

FIG. 5.7: Système de commande adaptative d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$

1. D'abord, on choisit les valeurs de α_1 et α_2 qui sont liés à l'action intégrale en mettant α_3 et α_4 à zéro, comme dans le cas du régulateur PI^λ ;
2. Puis α_3 et α_4 qui sont liés à l'action dérivée sont ajusté afin d'améliorer les performances de la boucle de commande, ces paramètres étant très petits comparativement aux valeurs de α_1 et α_2 .

Les résultats de simulation pour les couples $(\lambda, \mu) = (0.7, 0.7), (1.4, 1.4)$ et $(1.8, 0.9)$ sont donnés dans la figure FIG. 5.8.

Commentaires :

- A partir des résultats de simulation, on a trouvé que le rejet des perturbations constantes et la poursuite de l'échelon de référence sont bien réalisés pour toutes les valeurs de l'ordre fractionnaire d'intégration λ et de l'ordre fractionnaire de dérivation μ utilisés.
- De la figure FIG. 5.9, on peut aisément remarquer que les paramètres additionnels λ et μ peuvent effectivement améliorer le comportement du système de commande global.
- L'influence du paramètre λ sur le système commandé est plus importante que celle du paramètre μ car le processus commandé est un système de degré relatif 1. L'effet de l'action dérivé est très court, seulement dans la phase transitoire ; en effet le coefficient $k_d(t)$ converge très rapidement vers zéro et le coefficient $k_i(t)$ converge vers une constante non nulle pour toute les valeurs de l'ordre d'intégration fractionnaire λ utilisés.
- On a remarqué que pour certaines valeurs du couple (λ, μ) , le dépassement est meilleur que celui obtenu dans le cas du régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ mais les temps de montée et de réponse sont du même ordre que ceux du cas du régulateur PI^λ ce qui justifie l'ajout de l'action dérivée.
- On a aussi noté que la réponse de la sortie devient plus oscillatoire quand l'ordre fractionnaire λ de l'intégration se rapproche de l'ordre 2 pour toutes les valeurs de l'ordre fractionnaire μ de la dérivée.
- $(\lambda, \mu) = (0.7, 0.7)(k_c = 44, \alpha_1 = 300, \alpha_2 = 7000, \alpha_3 = 10^{-5}, \alpha_4 = 10^{-6})$
- $(\lambda, \mu) = (1.4, 1.4)(k_c = 17, \alpha_1 = 550, \alpha_2 = 35000, \alpha_3 = 10^{-3}, \alpha_4 = 10^{-5})$

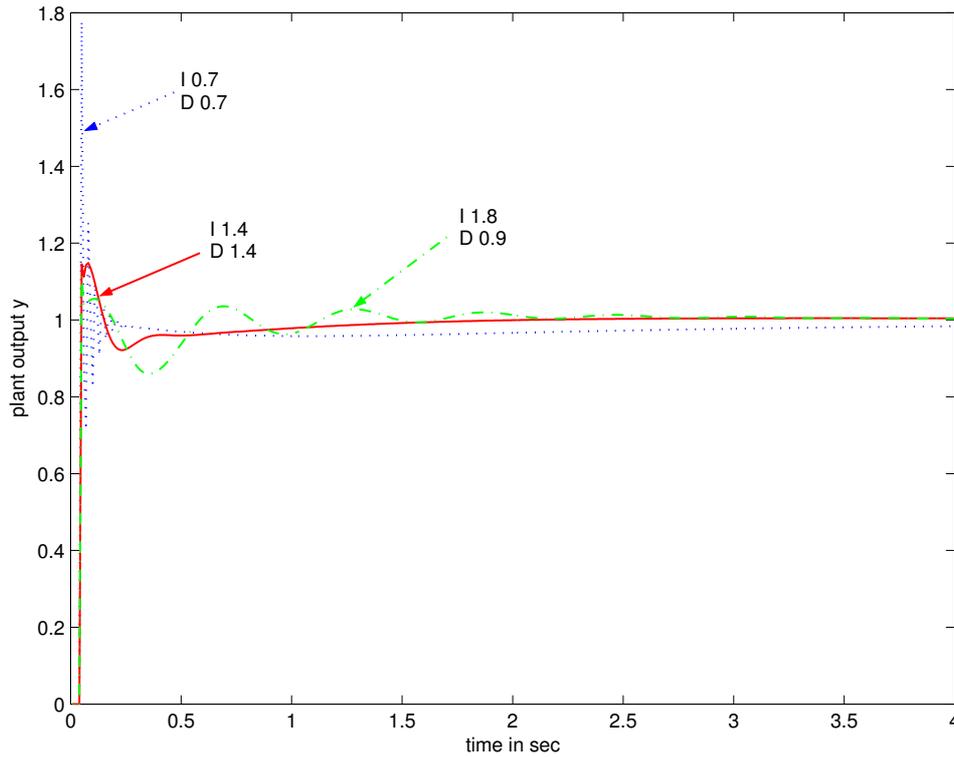


FIG. 5.8: Réponses de la sortie pour différentes valeurs du couple (λ, μ)

$$- (\lambda, \mu) = (1.8, 0.9) (k_c = 17, \alpha_1 = 550, \alpha_2 = 35000, \alpha_3 = 10^{-4}, \alpha_4 = 10^{-5})$$

Pour obtenir la meilleure conception du régulateur adaptatif $PI^\lambda D^\mu$ on a introduit une fonction objective J définie comme le critère de l'erreur quadratique donné dans l'équation (5.27) sur l'intervalle de temps T de simulation. On a trouvé que la valeur minimale de la fonction J est obtenue pour le couple $(\lambda, \mu) = (1.5, 1.2)$ avec les paramètres $k_c = 17, \alpha_1 = 550, \alpha_2 = 35000, \alpha_3 = 10^{-4}, \alpha_4 = 10^{-5}$.

Dans ce cas, la réponse du système est montrée dans la figure FIG 5.9 où le dépassement est de 12%, le temps de réponse est inférieur à 1s et le temps de montée de l'ordre de 0.1s.

Ces performances sont bien meilleures que celle obtenue par Fan et al. [45] pour le même exemple. Il y a même une amélioration du taux de dépassement par rapport à la réponse obtenue avec le régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ de la section précédente.

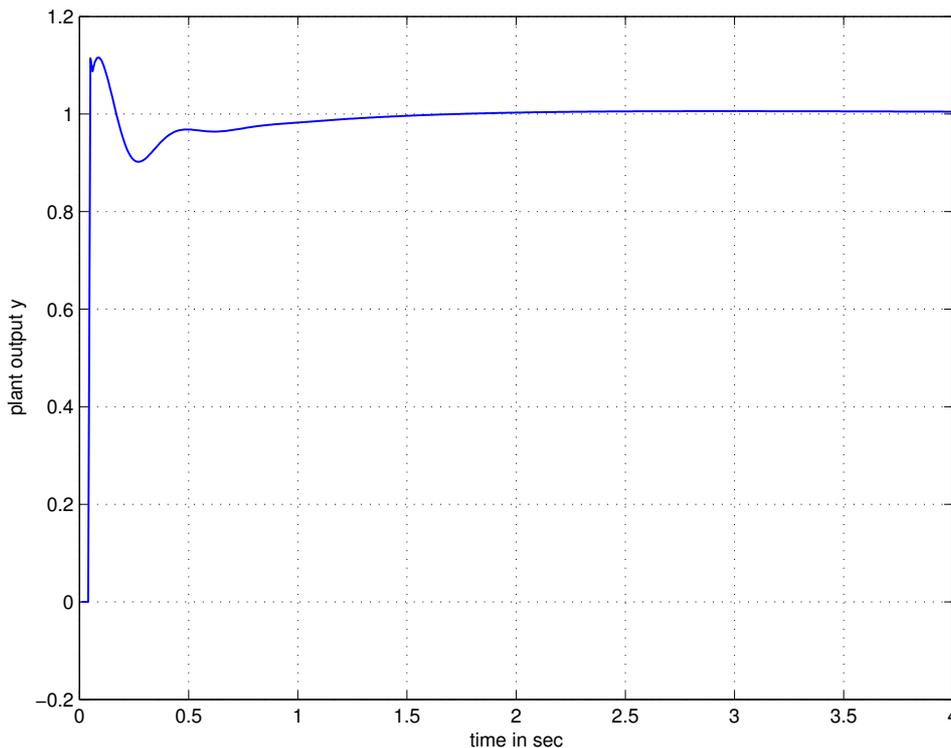


FIG. 5.9: Réponse de la sortie pour le couple $(\lambda, \mu) = (1.5, 1.2)$ ($k_c = 17, \alpha_1 = 550, \alpha_2 = 35000, \alpha_3 = 10^{-4}, \alpha_4 = 10^{-5}$)

5.3.4 Conclusion

L'intérêt de l'utilisation des actions d'ordre non entier est de fournir des paramètres supplémentaires de réglage qui peuvent améliorer les performances du système de commande.

Au vu des résultats de simulation, le rejet des perturbations constantes et la poursuite de l'échelon de référence sont bien réalisés pour les deux régulateurs. Les performances du système de commande utilisant le régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ mesurées en termes de taux de dépassement, de temps de montée et temps de stabilisation sont bien meilleures que celles obtenues en utilisant le régulateur adaptatif de type PI. Malgré les performances satisfaisantes obtenues en utilisant le régulateur proposé d'autres efforts de recherche doivent être entrepris pour généraliser l'application de ce type de régulation à des systèmes de degré relatif élevé et d'autres types de perturbations.

La simplicité de construction de ce régulateur est un atout majeur par rapport au régulateur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire invariant classique.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons traité de la commande adaptative à grand gain d'une classe de systèmes linéaires. Nous avons commencé par proposer une nouvelle loi de commande adaptative d'ordre fractionnaire à grand gain. La stabilité d'un tel algorithme est étudiée, et un théorème de stabilité de la boucle de commande est établi sur la base d'une démonstration analytique. Un exemple de simulation met en évidence l'amélioration de la dynamique du système commandé, par rapport à celle obtenue avec le schéma d'origine.

D'autre part nous avons proposé, à l'image du régulateur PI adaptatif d'ordre entier, l'introduction d'une action intégrale d'ordre fractionnaire pour aboutir à un nouveau régulateur PI^λ adaptatif d'ordre non entier. Les performances de la boucle de commande sont nettement meilleures que celles obtenues par le régulateur PI adaptatif proposé par Fan et al. [45], avec moins de contraintes sur les conditions initiales du système de commande pour garantir la stabilité de la boucle fermée.

L'introduction d'une autre action dérivée d'ordre fractionnaire permet d'obtenir un contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ adaptatif, dont les paramètres sont auto-ajustables, ce qui simplifie sa mise en oeuvre par rapport au schéma non adaptatif proposé par Podlubny [140]. Les ordres d'intégration et de dérivation λ et μ donnent plus de flexibilité au concepteur. Un algorithme d'initialisation du régulateur est proposé.

Les résultats de simulation montrent l'avantage de ce nouveau schéma de commande quant aux performances de la boucle de commande.

Chapitre 6

Conclusion Générale

Ce travail sur la commande adaptative d'ordre fractionnaire a permis de valider les quelques résultats qui existaient dans ce domaine mais son mérite est de faire plusieurs propositions sur des algorithmes adaptatifs améliorés par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire, et d'élargir cette théorie de commande naissante, en ouvrant de nouveaux horizons pour le développement de la commande adaptative.

Notre contribution comporte d'autre part des parties basées sur des exemples de simulations numériques mais aussi une partie théorique basée sur des arguments analytiques avec l'élaboration d'un théorème de stabilité de la commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire.

Dans les deux cas, nous montrons que l'utilisation des systèmes d'ordre fractionnaire permet d'améliorer le niveau de performance des systèmes de commande concernant la phase transitoire de la réponse, et d'obtenir une meilleure robustesse contre les bruits et les perturbations.

Ces résultats ont été scindés en deux parties :

- La commande adaptative basée sur un modèle de référence,
- La commande adaptative à grand gain

Dans la première catégorie nous avons commencé par l'introduction d'un modèle d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande CAMR et l'algorithme de commande auto-ajustable ; des exemples de simulations montrent un meilleur niveau de performance

par rapport aux algorithmes originaux. En effet les modèles d'ordre fractionnaire ont un comportement transitoire plus avantageux (voir section 2.5.7), et il évident qu'en améliorant le modèle de référence (tout en restant dans le domaine physiquement réalisable par le processus commandé) la réponse ne saurait être que meilleure.

Nous avons alors, voulu intégrer des modules d'ordre fractionnaire dans la structure du régulateur adaptatif CAMR, en plus du modèle d'ordre fractionnaire. En effet, la dérivation et l'intégration d'ordres fractionnaires permettent d'augmenter la rapidité de convergence des algorithmes, et agissent dans la boucle de commande comme des filtres qui réduisent l'effet des bruits et fluctuations des signaux du fait qu'elles sont des opérations à longue mémoire, permettant une pondération des différents points de mesures. C'est ainsi que nous avons proposé deux nouveaux schéma de commande adaptative d'ordre fractionnaire :

- L'introduction d'une intégration d'ordre fractionnaire dans la loi de commande M.I.T. de la CAMR ; nous avons pu montrer par des exemples de simulation que l'ordre λ de l'intégration agit comme un nouveau paramètre de réglage, permettant d'améliorer le comportement du processus et d'élargir le domaine de stabilité en réduisant l'amplitude nécessaire du gain d'adaptation γ . Un schéma similaire a été proposé en parallèle par d'autres auteurs avec les mêmes résultats [167].
- L'introduction d'une dérivée d'ordre fractionnaire à la sortie du processus commandé, combinée avec un modèle de référence fractionnaire d'ordre compatible avec celui de la dérivée ; de même que pour le schéma avec intégration d'ordre fractionnaire, nous avons pu améliorer les performances de la boucle de commande. Un intérêt particulier a été donné à la robustesse de ce schéma de commande, validés par plusieurs exemples de simulations.

Dans ce même contexte, nous avons proposé l'utilisation d'un filtre d'ordre fractionnaire en feedforward parallèle dans le schéma de commande CAMR. La combinaison d'un transfert d'ordre fractionnaire avec la technique classique de robustification basée sur le feedforward a montré un meilleur rejet des perturbations agissant sur le processus commandé.

Dans la catégorie des schémas de commande adaptative à grand gain d'une classe de systèmes linéaires, nous avons commencé par proposer une nouvelle loi de commande

adaptative d'ordre fractionnaire à grand gain. Nous avons étudié la stabilité d'un tel algorithme, et avons établi sur la base d'une démonstration analytique un théorème de stabilité de la boucle de commande.

D'autre part nous avons proposé, à l'image du régulateur PI adaptatif d'ordre entier, l'introduction d'actions intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire pour aboutir à un nouveau régulateur $PI^\lambda D^\mu$ adaptatif d'ordre non entier.

Les paramètres de ce contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ sont auto-ajustables, ce qui simplifie sa mise en oeuvre par rapport au schéma non adaptatif proposé par Podlubny [140]. Les ordres d'intégration et de dérivation λ et μ donnent plus de flexibilité au concepteur. Nous proposons en outre une démarche pour l'initialisation du régulateur. Là aussi, les performances de la boucle de commande sont nettement meilleures que celles obtenues par le régulateur PI adaptatif proposé par Fan et al. [45], avec moins de contraintes sur les conditions initiales du système de commande pour garantir la stabilité de la boucle fermée.

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a permis de réaliser plusieurs publications, dont notamment :

- pour ce qui concerne la *commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire* un journal international [75], un journal national [69], plusieurs conférences internationales [70, 78] et nationales [76, 71, 73],
- concernant la *commande auto-ajustable d'ordre fractionnaire* deux conférences nationales [72, 67],
- la *commande adaptative robuste avec feedforward* a donné lieu à une conférence nationale [68],
- la *commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire* à une conférence internationale [77] et un journal international (à paraître en 2007) [79],
- la *commande adaptative $PI^\lambda D^\mu$* à une conférence internationale [74].

Nous pensons que beaucoup de travail de recherche reste à faire dans le domaine de la commande adaptative d'ordre fractionnaire, notamment pour :

- Assoir une base théorique aux différents schémas proposés, et prospecter de nouvelles approches de commande adaptative d'ordre fractionnaire.

- Généraliser les résultats obtenus au cas des systèmes MIMO.
- Étudier l'application des algorithmes de commande classique à des processus d'ordre fractionnaire.
- Développer d'autres méthodes de commande adaptative robuste d'ordre fractionnaire, en utilisant les propriétés des opérateurs fractionnaires à l'image des résultats obtenus par la commande CRONE.
- Réaliser des applications réelles des schémas de commande proposés, (Nous travaillons actuellement sur l'application à une machine asynchrone au niveau de la station d'essai de l'IRCCYN, Nantes, France).

Annexes

Annexe A

Propriétés de la fonction Gamma

La fonction gamma complète $\Gamma(x)$ joue un rôle important dans la théorie de différentiation. Il est donc convenable de présenter ici certaines formules liées à cette fonction. Une définition générale de $\Gamma(x)$ est celle donnée par la limite d'Euler,

$$\Gamma(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N! N^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+N)} \right] \quad (\text{A.1})$$

Mais la définition intégrale,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy, \quad x > 0 \quad (\text{A.2})$$

est utilisée plus souvent, même si elle est restreinte aux valeurs positives de x .

Une intégration par partie de (A.2) mène à la relation de récurrence suivante,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\text{A.3})$$

qui est la propriété la plus importante de la fonction gamma. Le même résultat est une conséquence simple de la définition de la limite d'Euler. Puisque,

$$\Gamma(1) = 1$$

Cette récurrence montre que pour tout entier positif n

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n[n-1]\Gamma(n-1) = \dots = n[n-1]\dots 2.1.\Gamma(1) = n! \quad (\text{A.4})$$

qu'on peut réécrire comme,

$$\Gamma(x-1) = \frac{\Gamma(x)}{[x-1]},$$

cette formule récursive sert aussi comme une continuation analytique, qui étend la définition de la fonction gamma aux arguments négatifs pour lesquels la définition (A.2) n'est pas applicable. L'extension montre que $\Gamma(0)$ et $\Gamma(-1)$ sont infinis, comme sont les valeurs de la fonction gamma pour tous les arguments entiers négatifs. Cependant le rapport des fonctions gamma de entiers négatifs est fini. En effet, si n et N sont des entiers négatifs,

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-N)} = (-N)(-N+1)\dots(-n-2)(-n-1) = [-1]^{N-n} \frac{N!}{n!} \quad (\text{A.5})$$

Vu l'alternation de signe pour les arguments négatifs et la convergence asymptotique vers zéro pour les grandes valeurs de x , on peut approximer la fonction gamma par,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \approx \frac{x^{\frac{1}{2}-x}}{\sqrt{2\pi}} e^x, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{A.6})$$

La fonction gamma $\Gamma(\frac{1}{2} + n)$ et $\Gamma(\frac{1}{2} - n)$ donne des multiples de $\sqrt{\pi}$; en effet,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) &= \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

et,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{[-4]^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!} \quad (\text{A.8})$$

Pour plus de détails voir [118].

Annexe B

Fonctions de type Mittag-Leffler

La relation (2.105) nous permet de calculer la transformée inverse de (2.101) comme suit :

Soit $\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_0 > 0$, alors

$$\begin{aligned}
 G_n(s) &= \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}}} \frac{1}{1 + \frac{\sum_{k=0}^{n-2} a_k s^{\beta_k}}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}}}} \\
 &= \frac{a_n^{-1} s^{-\beta_{n-1}}}{s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}} \frac{1}{1 + \frac{a_n^{-1} s^{-\beta_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} a_k s^{\beta_k}}{s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}}} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n^{-1} s^{-\beta_{n-1}}}{\left(s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{m+1}} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{a_k}{a_n}\right) s^{\beta_k - \beta_{n-1}} \right)^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n^{-1} s^{-\beta_{n-1}}}{\left(s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{m+1}} \quad (\text{continue}) \\
 &\quad \sum_{\substack{(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \\ k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} s^{(\beta_i - \beta_{n-1})k_i} \\
 &= \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \\ k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (\text{continue}) \\
 &\quad \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} \frac{s^{-\beta_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} (\beta_i - \beta_{n-1})k_i}}{\left(s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{m+1}} \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

où $(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2})$ sont les coefficients multinomiaux [1].

L'inversion terme par terme, basée sur le théorème de l'expansion générale pour la transformée de Laplace [40], utilisant la relation (2.105) donne l'expression finale de la transformée inverse de Laplace de $G_n(s)$ (equation (2.107)) :

$$g_n(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \text{ (continue)} \\ k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \mathcal{E}_m \left(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j \right) \quad (\text{B.2})$$

D'autres transformées de Laplace inverses peuvent être obtenues en combinant (2.106) et (2.107). Par exemple en prenant,

$$F(s) = \sum_{i=1}^N b_i s^{\alpha_i} G_n(s), \quad (\text{B.3})$$

où $\alpha_i < \beta_n$, ($i = 1, 2, \dots, N$). Alors la transformée inverse de Laplace de $F(s)$ est

$$f(t) = \sum_{i=1}^N b_i D^{\alpha_i} g_n(t) \quad (\text{B.4})$$

où les les dérivées d'ordre fractionnaire de $g_n(t)$ sont évaluées à l'aide de (2.106).

Bibliographie

- [1] A. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Appl. Math. Nat. Bureau of Standards (Russian translation : Nauka, Moskow, 1979), 1964.
- [2] R.P. Agarwal. A propos d'une note de m. pierre humbert. *C.R. Seances Acad. Sci.*, 236(21) :2031–2032, 1953.
- [3] M.A. Al-Alaoui. Novel digital integrator and differentiator. *Electronics Letters*, 29(4) :376–378, 1993.
- [4] M.A. Al-Alaoui. Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 41(2) :186–187, 1994.
- [5] M.A. Al-Alaoui. A class of second-order integrators and low-pass differentiators. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 42(4) :220–223, 1995.
- [6] M.A. Al-Alaoui. Filling the gap between the bilinear and the backward difference transforms : An interactive design approach. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 34(4) :331–337, 1997.
- [7] F. Allgöwer, J. Ashman, and A. Ilchmann. High-gain Adaptive λ -tracking for Non-linear Systems. *Automatica*, 33(5) :881–888, 1997.
- [8] F. Asmin. *Commande robuste d'une structure flexible garantissant des performances optimales*. PhD thesis, thèse Doc, Université d'Orsay, 12 mai, France, 1993.
- [9] K. Åström and T. Hägglund. *PID Controllers : Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America, North Carolina USA, 1995.
- [10] K. Åström and B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, USA, 1995.

- [11] M. Axtell and E.M. Bise. Fractional calculus applications in control systems. Proc. IEEE 1990 National Aerospace and Electronics Conference, pages 563–566, New York, USA, 1990.
- [12] R.L. Bagley and R.A. Calico. Fractional-order state equations for the control of viscoelastic damped structures. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 14(2) :304–311, 1991.
- [13] R.L. Bagley and P.J. Torvik. Fractional calculus : a different approach to the analysis of viscoelastic damped structures. *AIAA Journal*, 21(5) :741–748, 1983.
- [14] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On the appearance of the fractional derivative in the behaviour of real materials. *J. Appl. Mech.*, 51 :294–298, 1984.
- [15] I. Bar-Kana. Positive realness in discrete-time adaptive control systems. *International Journal of Systems Science*, 17(7) :1001–1006, 1986.
- [16] I. Bar-Kana. Parallel feedforward and simplified adaptive contro. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, 1(2) :95–109, 1987.
- [17] R.S. Barbosa, J.A. T. Machado, and I.M. Ferreira. A fractional calculus perspective of pid tuning. Proc. DETC’03, ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and computers and Information in Engineering Conference, Chicago, Illinois USA, 2003.
- [18] R.S. Barbosa, J.A.T. Machado, and I.M. Ferreira. Tuning of pid based on bode’s ideal transfer function. *Nonlinear Dynamics*, 38 :305–321, 2004.
- [19] R. Bellman. *Adaptive Control Processes : A guided tour*. Princeton University Press, New Jersey, USA, 1961.
- [20] D. Benson, C. Tadjeran, M.M. Meerschaert, I. Farnham, and G. Pohll. Radial fractional-order dispersion through fractured rock. *Water Resources Research*, 40 :1–9, 2004.
- [21] I.A. Brin. On the stability of certain systems with distributed and lumped parameters. *Automat. Remote Control*, 23 :798–807, 1962.
- [22] C.A. CanudasDeWit. Adaptive control for partially known systems : Theory and applications. volume 7 of *Studies in Automation and Control*, Elsevier, Amsterdam, 1988.

- [23] M. Caputo. *Elasticita e Dissipazione*. Bologna : Zanichelli, 1969.
- [24] M. Caputo and F. Mainardi. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Appl. Geophysics*, 91(8) :134–147, 1971.
- [25] G.E. Carlson and C.A. Halijak. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by regular newton process. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 11(2) :210–213, 1964.
- [26] A. Charef. Modelling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation. *Nonlinear Dynamics*, 46 :195–210, 2006.
- [27] A. Charef, A. Djouambi, and H. Sun. Fractional order feedback control systems. Proceedings of the 4th J.I.E.E.E.C, Jordanie, Avril, 2001.
- [28] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral. Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 37 :1465–1470, Sept. 1992.
- [29] Y. Q. Chen and K. L. Moore. Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, December, 2001.
- [30] Y.Q. Chen, L. Kevin, and L. Moore. Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I. Fundamental Theory and Applications*, 49(3) :363–367, 2002.
- [31] Y.Q. Chen and B.M. Vinagre. A new IIR-type digital fractional order differentiator. *Signal Processing*, 83 :2359–2365, 2003.
- [32] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. Continued Fraction Expansion Approaches to Discretizing Fractional Order Derivatives - an Expository Review. *Nonlinear Dynamics*, 38 :155–170, 2004.
- [33] G. Cooper and D. Cowan. The application of fractional calculus to potential field data. *Exploration geophysics*, 34 :51–56, 2003.
- [34] M. Corless. First order adaptive controllers for systems which are stabilizable via high gain output feedback. *Analysis and Control of Nonlinear Systems*, pages 13–16, 1988.
- [35] M. Corless and E.P. Ryan. Adaptive control of a class of nonlinearly perturbed linear systems of relative degree two. *Systems & Control Letters*, 21 :59–64, 1993.

- [36] D.W. Davidson and R.H. Cole. Dielectric relaxation in glycerol, propylene glycol and n-propanol. *Journal of Chemical Physics*, 19 :1484–1490, 1951.
- [37] D. Del-Castillo-Negrete, B.A. Carreras, and V.E. Lynch. Fractional diffusion in plasma turbulence. *Physics of plasma*, 11(8) :3584, 2004.
- [38] K. Diethelm. An Algorithm for the Numerical Solution of Differential Equations of Fractional Order. *Electronic Trans. On Numerical Analysis*, 5 :1–6, 1997.
- [39] K. Diethelm, N.J. Ford, and A.D. Freed. A predictor-corrector approach for numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29 :3–22, 2002.
- [40] G. Doetsch. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation*. Oldenbourg, München, Germany, 1956.
- [41] P. Duta and P.M. Horn. Low frequency fluctuations in solids : 1/f noise. *Review of modern physics*, 53(3), July 1981.
- [42] J.T. Edwards, N.J. Ford, and A.C. Simpson. The numerical solution of linear multi-term fractional differential equations : systems of equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 148 :401–418, 2002.
- [43] A.M.A. El-Sayed and F.M. Gaafar. Fractional calculus and some intermediate physical processes. *Applied Mathematics and Computation*, 144 :117–126, 2003.
- [44] A. Erdélyi et al. *Higher transcendental functions*, volume 3. Mc Graw-Hill, New York, 1955.
- [45] J.C. Fan and T. Kobayashi. A simple adaptive pi controller for linear systems with constant disturbances. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 43(5) :733–736, 1998.
- [46] Z.E.A Fellah, S. Berger, S. Lauriks, and C. Depollier. Verification of kramers-konig relationship in porous materials having a rigid frame. *Journal of sound and vibration*, 270 :865–885, 2004.
- [47] Y. Ferdi. Computation of fractional order derivative and integral via power series expansion and signal modelling. *Nonlinear Dynamics*, 46 :1–15, 2006.
- [48] Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, and A. Charef. Un filtre numérique basé sur la dérivation non-entière pour l’analyse du signal électrocardiographique. *ITBM-RBM*, 21 :205–209, 2000.

- [49] Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, A. Charef, and B. Boucheham. R wave detection using fractional digital differentiation. *ITBM-RBM*, 24 :273–280, 2003.
- [50] Ch. Friedrich. Relaxation and retardation functions of the maxwell model with fractional derivatives. *Rheol. Acta.*, 30 :151–158, 1991.
- [51] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, pages 223–276. Springer-Verlag, Wien and New York, 1997.
- [52] R. Gorenflo, F. Mainardi, M. Raberto, and E. Scalas. *Fractional diffusion in finance : Basic theory*. In *Modelli dinamici in economia e finanza*. Urbino : MDF, 2000.
- [53] A. Goutas, Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, M. Boudraa, and B. Boucheham. Digital fractional order differentiation-based algorithm for p and t-waves detection and delineation. *ITBM-RBM*, 26 :127–132, 2005.
- [54] M.L. Hadjili and L. Abida. Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire. Proc. CMSE'94, Skikda, Algérie, 10 Mai., 1994.
- [55] T.T. Hartley and C.F. Lorenzo. Dynamics and Control of Initialized Fractional Order Systems. *Nonlinear Dynamics*, 29 :201–233, 2002.
- [56] U. Helmke and D.-P. Wolters. Stability and robustness properties of universal adaptive controllers for first-order linear systems. *International Journal of Control*, 48 :1153–1182, 1988.
- [57] R. Hotzel and M. Fliess. Systèmes linéaires fractionnaires avec et sans retard : Stabilité, commande, exemples. Proc. Actes d'AGIS'97, pages 53–58, Angers, France, 1997.
- [58] C. Hwang and Y.C. Cheng. A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems. *Automatica*, 42 :825–831, 2006.
- [59] C. Hwang, J-F. Leu, and S-Y. Tsay. A note on Time-Domain Simulation of Feedback Fractional-Order Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4) :625–631, 2002.
- [60] A. Ilchmann. *Non -Identifier -Based High -Gain Adaptive Control*, volume 189. Berlin, Germany : Springer-Verlag, 1993.
- [61] A. Ilchmann. Universal adaptive stabilization of nonlinear systems. *Dynamics and Control*, 7 :199–213, 1997.

- [62] A. Ilchmann and E.P. Ryan. On tracking and disturbance rejection by adaptive control. *Systems and Control Letters*, 52 :137–147, 2004.
- [63] A. Ilchmann and S. Townley. Simple adaptive stabilization of high gain stabilizable systems. *Systems and Control letters*, 20 :189–198, 1993.
- [64] G.D. Kaloyanov and Z.M. Dimitrova. Theoretical-experimental determination of the region of applicability of the system $\pi(i)$ controller-noninteger order as tatic object. *Izvestiya Vysshikh Utchebnykh Zavedehii, Elektromekhanika*, 2 :65–72, 1992.
- [65] T. Kobayashi. Global adaptive stabilization of infinite-dimensional systems. *Systems & Control Letters*, 9 :215–223, 1987.
- [66] P.V. Kokotovic. *Foundations of Adaptive Control*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [67] S. Ladaci, F. Azzaza, K. Arbatni, and A. Charef. Commande auto-ajustable à modèle fractionnaire d'un bras artificiel. Proc. SNAS'02 Séminaire National d'Automatique et des Systèmes, Annaba, Algérie, 27-28 Octobre., 2002.
- [68] S. Ladaci, N. Boulbir, R. Sassi, and A. Arhab. Commande adaptative robuste avec feedforward. Proc. CNIE'02 Premières Journées d'Electronique, C.U. Bordj Bou Arriridj, Algérie, Avril, 2004.
- [69] S. Ladaci and A. Charef. Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire d'un bras artificiel. *Communication Sciences & Technologie*, 1 :50–52, 2002.
- [70] S. Ladaci and A. Charef. Mit adaptive rule with fractional order integration. Proc. CESA'2003 IMACS Multi-conference Computational Engineering in Systems Applications, Lille-France, July 9-11, 2003.
- [71] S. Ladaci and A. Charef. Model reference adaptive control with fractional derivative. Proc. CISTEMA'2003 Conference Internationale sur les systèmes de Télécommunication d'Electronique Médicale et d'Automatique, Université Aboubekr Blkaid, Tlemcen, Algérie, 27–29 septembre, 2003.
- [72] S. Ladaci and A. Charef. Commande adaptative robuste avec feedforward d'ordre fractionnaire. Proc. CMGE'04 Conférence Maghrébine sur le Génie Electrique, Constantine, Algérie, Avril, 2004.
- [73] S. Ladaci and A. Charef. Fractional adaptive control. Proc. CGE'03 Conférence sur le Génie Electrique, EMP, Alger, Algérie, 15–16 Février, 2004.

- [74] S. Ladaci and A. Charef. An adaptive fractional $pi^{\lambda}d^{\mu}$ controller. Proc. TMCE 2006, Sixth International Symposium on Tools and Methods of Competitive Engineering, Ljubljana, Slovenia, April 18–22, 2006.
- [75] S. Ladaci and A. Charef. On fractional adaptive control. *Nonlinear Dynamics*, 43(4) :365–378, Springer, Mars 2006.
- [76] S. Ladaci, A. Charef, and A. Bennia. Loi de commande adaptative m.i.t. avec intégration d'ordre fractionnaire. Proc. CNIE'02 Conférence Nationale d'Ingénierie Electrique, pages 392–395, USTO, Oran, Algérie, 15–16 Décembre, 2002.
- [77] S. Ladaci, J.J. Loiseau, and A. Charef. Stability analysis of fractional adaptive high-gain controllers for a class of linear systems. Proc. The 32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, IECON'06, Conservatoire National des Arts & Metiers - Paris - France, November 7 - 10, 2006.
- [78] S. Ladaci, J.J. Loiseau, and A. Charef. Using fractional order filter in adaptive control of noisy plants. Proc. ICAMEM 2006, The third International Conference on Advances in Mechanical Engineering And Mecanics, Hammamet, Tunisia, December, 2006.
- [79] S. Ladaci, J.J. Loiseau, and A. Charef. Fractional order adaptive high-gain controllers for a class of linear systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, A paraitre en 2007.
- [80] I.D. Landau. *Adaptive Control : The model reference Approach*. Marcel Dekker, New York, 1979.
- [81] I.D. Landau. From robust control to adaptive control. *Control Engineering practice*, 7 :1113–1124, 1999.
- [82] P. Lanusse, T. Poinot, O. Cois, A. Oustaloup, and J.C. Trigeassou. Tuning of an active suspension system using a fractional controller and a closed-loop tuning. Proc. of the 11th International conference of advanced robotics, IEEE, pages 258–263, Coimbra, 2003.
- [83] M.P. Lazarević. Finite time stability analysis of PD^{α} fractional control of robotic time-delay systems. *Mechanics Research Communications*, 33 :269–279, 2006.
- [84] A. LeMéhauté and G. Crepy. Introduction to transfer and motion in fractal media : The geometry of kynetics. *Solid State Ionics*, 9-10 :17–30, 1983.

- [85] Y. Li and H-F. Chen. Robust Adaptive Pole Placement for Linear Time-Varying Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(5) :714–719, 1996.
- [86] H. Logemann and B. Martensson. Adaptive stabilization of infinite dimensional systems. *IEEE Trans. Automat. Contr*, 37 :1869–1883, 1992.
- [87] J.J. Loiseau and H. Mounier. Stabilisation de l'équation de la chaleur commandée en flux. *ESAIM : Proc.*, pages 131–144, 1998.
- [88] C.F. Lorenzo and T.T. Hartley. Variable order and Distributed order Fractional Operators. *Nonlinear Dynamics*, 29 :57–98, 2002.
- [89] S. Lu, F.J. Molz, and G.J. Fix. Possible problems of scale dependency in applications of the three-dimensional fractional advection-dispersion equation to natural porous media. *Water Resources Research*, 38(9) :1–9, 2002.
- [90] C.H. Lubich. Discretized fractional calculus. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 17(3) :704–719, 1986.
- [91] B.J. Lurie. Three-parameter tunable tilt-integral-derivative (TID) controller. Technical Report US Patent US5371670, USA, 1994.
- [92] J.A.T. Machado. Analysis and design of fractional-order digital control systems. *Journal of Systems Analysis, Modelling and Simulation*, 27 :107–122, 1997.
- [93] J.A.T. Machado. A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 6(1) :73–80, 2003.
- [94] A. Makroglou, R.K. Miller, and S. Skaar. Computational results for a feedback control for rotating viscoelastic beam. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 17(1) :84–90, 1994.
- [95] R. Malti, M. Aoun, O. Cois, A. Oustaloup, and F. Levron. H_2 norm of fractional differential systems. Proceedings of the design technical conferences and Computer and information in engineering conference, ASME 2003, Chicago, 2003.
- [96] S. Manabe. The non-integer integral and its application to control systems. *Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan*, 80(860) :589–597, 1960.
- [97] S. Manabe. The system design by the use of non-integer integral and transport delay. *Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan*, 81(878) :1803–1812, 1961.

- [98] B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, CA, 1982.
- [99] I. Mareels. A simple selftuning controller for stably invertible systems. *Systems & Control Letters*, 4 :5–16, 1984.
- [100] B. Mårtensson. The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization. *Systems & Control Letters*, 6 :87–91, 1985.
- [101] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, and Ch. Ceyral. Fractional differentiation for edge detection. *Signal Processing*, 83 :2421–2432, 2003.
- [102] K. Matsuda and H. Fujii. H_∞ optimized wave-absorbing control : Analytical and experimental results. *Journal of guidance, Control and Dynamics*, 16(6) :1146–1153, 1993.
- [103] K.S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley, New York, USA, 1993.
- [104] S. Momani and K. Al-Khaled. Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 162 :1351–1365, 2005.
- [105] C.A. Monje, A.J. Calderon, B.M. Vinagre, Y.Q. Chen, and V. Feliu. On fractional π^λ controllers : Some tuning rules for robustness to plant uncertainties. *Nonlinear Dynamics*, 38 :369–381, 2004.
- [106] G. Montseny. *Représentation diffusive*. Hermes Science, Paris, France, 2005.
- [107] A.S. Morse. *Recent problems in parameter adaptive control*, pages 254–264. Outils et Modèles Mathématiques pour l’Automatique, l’Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal. ED. I.D. Landau, CNRS 3, Paris, France, 1983.
- [108] A.S. Morse. Simple algorithms for adaptive stabilization. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 105 :254–264, 1988.
- [109] F. Naceri and L. Abida. A novel robust adaptive control algorithm for ac drives. *Computers and Electrical Engineering*, 29 :523–534, 2003.
- [110] F. Naceri, N. Lakhdari, and S. Sellami. *Théorie de la Commande Adaptative*. Batna University Press, Algérie, 1998.
- [111] M. Nakagawa and K. Sorimachi. Basic characteristics of a fractance device. *IEICE Trans. Fundamentals*, E75-A(12) :1814–1819, 1992.

- [112] M. García-Fi nana and L.M. Cruz-Orive. Fractional trend of the variance in cavalieri sampling. *Image analysis and stereology*, 19(2) :71–79, 2000.
- [113] K.S. Narendra. The maturing of adaptive control. *Lecture Notes in Control and Information Systems*, 160 :3–36, 1991.
- [114] K.S. Narendra and A.M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [115] R.R. Nigmatullin and A. LeMéhauté. The geometrical and physical meaning of the fractional integral with complex exponent. *International Journal of Science Georesources*, 1(8) :2–9, 2004.
- [116] T.F. Nonnenmacher and W.G. Glöckle. A fractional model for mechanical stress relaxation. *Philosophical Magazine Lett.*, 64(2) :89–93, 1991.
- [117] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. 3 ed. Prentice Hall International, London, 1974.
- [118] K.B. Oldham and J. Spanier. *Fractional Calculus*. Academic Press, New York, 1974.
- [119] K.B. Oldham and C.G. Zoski. Analogue instrumentation for processing polarographic data. *J. Electroanal. Chem.*, 157 :27–51, 1983.
- [120] P.V. Osburn, H.P. Whitaker, and A. Kezer. New developments in the design of adaptive control systems. Technical Report No 61–39, Institute of Aeronautical Sciences, February 1961.
- [121] P. Ostalczyk. Fundamental properties of the fractional-order discrete-time integrator. *Signal Processing*, 83 :2367–2376, 2003.
- [122] A. Oustaloup. Fractional order sinusoidal oscillators : Optimization and their use in highly linear FM modulators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28(10) :1007–1009, 1981.
- [123] A. Oustaloup. *Systèmes asservis linéaires d’ordre fractionnaire*. Masson. Paris, 1983.
- [124] A. Oustaloup. From fractality to non integer derivation through recursivity, a property common to these two concepts : A fundamental idea for a new process control strategy. Proc. 12th IMACS World Congr., Paris, France July 18-22, 1988.
- [125] A. Oustaloup. *La commande CRONE*. Hermès. Paris, 1991.

- [126] A. Oustaloup. *La dérivation non entière*. Hermès. Paris, 1995.
- [127] A. Oustaloup, F. Levron, F. Nanot, and B. Mathieu. Frequency band complex non integer differentiator : Characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 47(1) :25–40, 2000.
- [128] A. Oustaloup and B. Mathieu. *La commande CRONE : du scalaire au multivariable*. Hermès. Paris, 1999.
- [129] A. Oustaloup, B. Mathieu, and P. Lanusse. The CRONE control of resonant plants : Application to flexible transmission. *European Journal of Control*, 1(2) :113–121, 1995.
- [130] A. Oustaloup, X. Moreau, and M. Nouillant. The CRONE suspension. *Control Engineering Practice*, 4(8) :1101–1108, 1996.
- [131] A. Oustaloup, B. Orosni, P. Melchior, and H. Linarès. Path planning by fractional differentiation. *Robotica*, 21 :59–69, 2003.
- [132] A. Oustaloup, J. Sabatier, and P. Lanusse. From fractal robustness to CRONE control. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2(1) :1–30, 1999.
- [133] J. Padovan and J.T. Sawicki. Nonlinear Vibrations of Fractionally Damped Systems. *Nonlinear Dynamics*, 16 :321–336, 1998.
- [134] I. Petrás. The fractional order controllers : Methods for their synthesis and application. *Journal of Electrical Engineering*, 50(9-10) :284–288, 1999.
- [135] I. Petrás, Y.Q. Chen, and B.M. Vinagre. A robust stability test procedure for a class of uncertain lti fractional order systems. Proceedings of the International Carpathian Conference ICCO'2002, pages 247–251, Malenovice, Czech Republic, May 27-30, 2002.
- [136] I. Petrás, I. Podlubny, P. O'Leary, and L. Dorcak. Analogue fractional-order controllers : Realization, tuning and implementation. Proc. International Carpathian Control Conference ICCO'2001, pages 9–14, Krynica, Poland, 2001.
- [137] I. Petrás, B.N. Vinagre, L. Dorcak, and V. Feliu. Fractional digital control of a heat solid : Experimental results. Proc. International Carpathian Control Conference ICCO'2002, Malenovice, Czech Republic, May 27-30, 2002.

- [138] I. Podlubny. The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order. Technical Report UEF-02-94, Inst. Exp. Phys. Slovak Academy of Sciences. Kosice, Slovak Republic, 1994.
- [139] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego, 1999.
- [140] I. Podlubny. Fractional order systems and $\pi^{\lambda}d^{\mu}$ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1) :208–214, 1999.
- [141] I. Podlubny. Fractional-order Systems and fractional-Order Controllers. Technical Report UEF-03-94, Inst. Exp. Phys. Slovak Academy of Sciences. Kosice, Slovak Republic, November 1994.
- [142] I. Podlubny, I. Petrás, B.M. Vinagre, P. O’leary, and L. Dorcak. Analogue Realisations of fractional-Order Controllers. *Nonlinear Dynamics*, 29 :281–296, 2002.
- [143] V. Pommier, R. Musset, P. Lanusse, and A. Oustaloup. Study of two robust controls for an hydraulic actuator. Proceedings of the European Control Conference, Cambridge, EUCA, 2003.
- [144] H.-F. Raynaud and A. Zergainoh. State-space representation of fractional order controllers. *Automatica*, 36 :1017–1021, 2000.
- [145] B. Ross(Editor). *Fractional Calculus and its applications*, volume 457 of *Lecture Notes in Mathematics [Proc. Int. Conf. held at Univ. of New Haven, USA, 1974]*. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [146] E.P. Ryan. Universal $W^{1,\infty}$ -tracking for a class of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 18 :201–210, 1992.
- [147] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach, 1987.
- [148] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control : Stability, Convergence and Robustness*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [149] J.T. Sawicky and J. Padovan. Analogue Realisations of fractional-Order Controllers. *Journal of the Franklin Institute*, 336 :423–433, 1999.
- [150] H.M. Srivastava and R.K. Saxena. Operators of fractional integration and their applications. *Applied Mathematics and Computation*, 118 :1–52, 2001.
- [151] A.A. Stanislavsky. Probability interpretation of the integral of fractional order. *Theoretical and Mathematical Physics*, 138(3) :418–431, 2004.

- [152] J.I. Suárez, B.M. Vinagre, and Y.Q. Chen. Spacial path tracking of autonomous industrial vehicle using fractional order controllers. Proceedings of the 11th Conference on advanced robotics. IEEE, pages 405–410, Coimbra, 2003.
- [153] H. Sun, A.A. Abdelwahab, and B. Onaral. Linear Approximation of Transfer Function with a Pole of Fractional Power. *IEEE Trans. Automatic Control*, 29(5) :441–444, Mai 1984.
- [154] H. Sun and A. Charef. Fractal System-A time domain Approach. *Annals of Biomedical Engineering*, 18 :597–621, 1990.
- [155] H. Sun, A. Charef, Y.Y. Tsao, and B. Onaral. Analysis of polarization dynamics by singularity decomposition method. *Annals of Biomedical Engineering*, 20(3) :321–335, May 1992.
- [156] H. Sun and B. Onaral. A unified approach to represent metal electrode interface. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 31 :399–406, July 1984.
- [157] E. Tajahuerce, G. Saavedra, W.D. Furlan, E.E. Sicre, and P. Andrés. White-light optical implementation of the fractional Fourier transform with adjustable order control. *Applied optics*, 39(2) :238–245, 2000.
- [158] S. Torsten and S. Petre. *System Identification*. Prentice-Hall, 1989.
- [159] C.-C. Tseng. Design of fractional order digital FIR differentiator. *Signal Processing Letters*, 8(3) :77–79, 2001.
- [160] C.-C. Tseng, S.-C. Pei, and S.-C. Hsia. Computation of fractional derivatives using fourier transform digital FIR differentiator. *Signal Processing*, 80 :151–159, 2000.
- [161] D. Valério. *Fractional Robust System Control*. PhD thesis, Universidade Técnica de Lisboa, 2005.
- [162] A. VanDerZiel. On the noise spectra of semiconductor noise and of flicker effects. *Physica*, 16 :359–372, 1950.
- [163] B.M. Vinagre. *Modelado y control de sistemas dinámicos caracterizados por ecuaciones íntegro-diferenciales de orden fraccional*. PhD thesis, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, 2001.
- [164] B.M. Vinagre, Y.Q. Chen, and I. Petrás. Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator. *Journal of the Franklin Institute*, 340 :349–362, 2003.

- [165] B.M. Vinagre, I. Petráš, P. Merchan, and L. Dorcak. Two digital realisation of fractional controllers : Application to temperature control of a solid. Proc. European Control Conference (ECC2001), pages 1764–1767, Porto, Portugal, 2001.
- [166] B.M. Vinagre, I. Petráš, I. Podlubny, and Y.Q. Chen. Stability of fractional-order model reference adaptive control. Proceedings of the MTNS'2002 (Open problems book), pages 118–121, Notre Dame, USA, August 12-16, 2002.
- [167] B.M. Vinagre, I. Petráš, I. Podlubny, and Y.Q. Chen. Using Fractional Order Adjustment Rules and Fractional Order Reference Models in Model-Reference Adaptive Control. *Nonlinear Dynamics*, 29 :269–279, 2002.
- [168] B.M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez, and V. Feliu. Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 3(3) :231–248, 2000.
- [169] B.M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez, and V. Feliu. On realisation of fractional order controllers. Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA2000), Lille, France, Juillet 2000.
- [170] J. Wang and R.L. Bras. Ground heat flux estimated from surface soil temperature. *Journal of hydrology*, 216 :214–226, 1999.
- [171] S. Westerlund. Capacitor theory. *IEEE Trans. Dielectrics Electron. Insulation*, 1 :826–839, 1994.
- [172] J.C. Willems and C.I. Byrnes. Global adaptive stabilization in the absence of information of the sign of the high frequency gain. *Lecture Notes in Control and Information Science*, 62 :49–57, 1984.
- [173] C.C. Yu. *Autotuning of PID Controllers*. Advances in Industrial Control. Springer-Verlag, 1999.

Résumé

Ce travail présente des idées nouvelles pour améliorer des schémas de la commande adaptative par l'introduction d'éléments du calcul fractionnaire. Plusieurs concepts adaptatifs sont étudiés et de nouveaux schémas de commande sont proposés comportant des opérateurs d'ordre fractionnaire (dérivateur et intégrateur) ainsi que des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire.

L'état de l'art des systèmes de commande d'ordre fractionnaire est présenté avec les définitions des notions importantes du calcul fractionnaire. De même les différentes approches adaptatives concernées par ce travail sont introduites avec les algorithmes classiques de commande.

La contribution de ce travail comporte la proposition de plusieurs schémas de commande adaptative d'ordre fractionnaire notamment :

- Commande adaptative à modèle de référence avec des lois de commande utilisant une intégration d'ordre fractionnaire ou une dérivée d'ordre fractionnaire de la sortie du processus et un modèle de référence d'ordre fractionnaire.
- Commande adaptative à grand gain d'ordre fractionnaire où le "gain" est fonction de l'intégrale fractionnaire d'une norme de la sortie.
- Commande adaptative $PI^{\lambda}D^{\mu}$ comportant des actions intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire, ce schéma de commande étant inspiré de la commande adaptative à grand gain.

La comparaison avec les schémas de commande d'ordre entier classique montre une nette amélioration des performances (temps de réponse, temps de montée, stabilité) et une meilleure robustesse contre les bruits et les perturbations. Ces observations sont étayées par des simulations numériques mais aussi par des arguments théoriques dans le cas de la commande adaptative à grand gain.

Mots Clés :

Calcul fractionnaire, système de commande d'ordre fractionnaire, commande adaptative à modèle de référence, commande adaptative à grand gain, commande auto-ajustable.

Abstract

This work presents new ideas to improve adaptive control schemes by introducing fractional calculus elements. Many adaptive concepts are studied, and new control algorithms are proposed using fractional order operators (differentiator, integrator) as well as fractional order transfer functions.

The state of the art of fractional order control systems is presented with definitions of the most important notions of fractional calculus. And the different approaches of adaptive control concerned with this work are introduced together with the classical control algorithms.

The main contribution of this work is to propose many fractional adaptive control schemes, mainly :

- Model reference adaptive control with control rules using fractional order integration or the process output derivative of fractional order with a fractional order reference model.
- Fractional order high-gain adaptive control where the gain depends on a norm fractional integral of the process output.
- $PI^\lambda D^\mu$ adaptive control using fractional order integral and derivative, this control scheme being inspired from the high-gain control.

By comparing these results with classical integer order control schemes, we show an important performance improvement (response time, settling time, stability) and a better robustness against noises and perturbations. These observations are illustrated by numerical simulations and theoretical arguments in the case of high-gain adaptive control.

Key Words :

Fractional calculus, fractional order control system, model reference adaptive control, high-gain adaptive control, self-tuning control.

ملخص

هذا العمل يقدم أفكارا جديدة لتحسين أنظمة التحكم المتكيف بإستعمال عناصر من الحساب الجزئي. لقد تمت دراسة عدة طرق للتحكم المتكيف مع إقتراح تركيبات جديدة تحتوي على عوامل جزئية (اشتقاق، تكامل) وكذا دوال التحويل الجزئية.

كما قدمت لمحة شاملة حول أنظمة التحكم الجزئي مع التعريف بأهم مبادئ الحساب الجزئي كذلك تم التعريف بطرق التحكم المتكيف المعتمدة في هذا العمل، مع البرامج الكلاسيكية المتعلقة بها. أهم المساهمات التي جاءت في هذه الرسالة تتلخص في إقتراح مجموعة من التركيبات الجديدة للتحكم المتكيف الجزئي خاصة :

- التحكم المتكيف ذو المثال المرجعي الذي يحتوي على قوانين تحكم تستعمل تكامل جزئيا أو إشتقاقا جزئيا لمخرج النظام المسير مع مثال مرجعي جزئي.
 - تحكم متكيف جزئي ذو ربح عالي حيث يكون "الربح" دالة بدلالة تكامل جزئي للقيمة المطلقة للمخرج.
 - تحكم متكيف من نوع (تناسب - تكامل - إشتقاق) جزئي يحتوي على عمليتي تكامل وإشتقاق جزئيتين، هذا النظام مستنبط من التحكم المتكيف ذو الربح العالي.
- بالمقارنة مع تركيبات التحكم المتكيف الكلاسيكي، يظهر تحسن واضح للكفاءات (زمن الإجابة، زمن الصعود، الإرتزان) وصمود أكبر ضد الضجيج والإزعاج.
- هذه الملاحظات مدعمة بتمثيلات عديدة و كذلك ببراهين نظرية في حالة التحكم المتكيف ذو الربح العالي.

كلمات المفاتيح:

الحساب الجزئي، أنظمة التحكم الجزئي، التحكم المتكيف ذو المثال المرجعي، التحكم المتكيف ذو الربح العالي، التحكم المعدل ذاتيا