

*RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE*  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

UNIVERSITÉ MENTOURI DE CONSTANTINE  
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR  
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

## Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de

### Doctorat

Spécialité : Electronique

Option : Contrôle

Par :

**Abdelbaki DJOUAMBI**

THEME

### **CONTRIBUTION A LA COMMANDE CRONE**

**Devant le Jury :**

Président	K. Belarbi	Professeur, Université de Constantine
Rapporteur	A. Charef	Professeur, Université de Constantine
Examineurs	A. Bennis	Professeur, Université de Constantine
	H. Tebbikh	Professeur, Université de Guelma
	Y. Ferdi	Professeur, Université de Skikda

Année : 2008

## Dédicaces

*A mes parents*

*A ma femme*

*A mon fils*



## Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Monsieur Khaled BELARBI, Professeur de l'Université de Constantine, d'avoir accepté la présidence du jury de ma soutenance, ainsi que Messieurs Abdelhak BENNIA, Professeur de l'Université de Constantine, Youcef FERDI, Professeur de l'Université de Skikda et Hichem TEBBIKH, Professeur de l'Université de Guelma, qui ont accepté d'examiner mon manuscrit de thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Abdelfatah CHAREF, Professeur de l'Université de Constantine, de m'avoir encadrer durant ces années de doctorat en étant toujours disponible et encourageant, pour son aide et conseils et pour ses grandes valeurs humaines.

J'adresse mes remerciements au personnel du Laboratoire d'Automatique de Grenoble qui m'ont accueilli pendant plusieurs mois et notamment Mme Alina VODA BESANÇON pour ces encouragements et les discussions scientifiques dont elle m'a fait l'honneur. Ses commentaires constructifs et ses explications sur la théorie de l'estimation et de l'identification m'ont permis de mieux appréhender certaines notions qui étaient obscures jusqu'alors. Mes remerciements vont aussi à Monsieur Ahmed CHEMOURI qui m'a constamment aidé à améliorer mes travaux, pour l'assistance qu'il m'a apporté malgré le peu de temps que lui laissaient ses travaux de recherche au niveau du laboratoire.

J'adresse un grand merci à mon ami et collègue Abdessalam BARKAT, pour son inestimable aide à la mise en forme de ce manuscrit. Merci à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études. Je ne peux conclure sans un mot de remerciement à tous mes enseignants tout le long de ma formation.

Bien sûr, je n'oublierai pas de remercier ma femme HIND pour sa grande patience et son soutien surtout durant les deux dernières années.

Enfin, un grand merci à mes parents et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien.



# Table des Matières

<b>Table des figures</b> .....	ix
<b>Liste des tableaux</b> .....	xiii
<b>Résumé</b> .....	xv
<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>I. Opérateurs et systèmes linéaires d'ordre fractionnaire</b> .....	5
<b>I.1 Introduction</b> .....	5
<b>I.2 Définitions mathématiques</b> .....	6
I.2.1 Définition de Grünwald-Letnikov.....	6
I.2.2 Définition de Riemann-Liouville .....	7
<b>I.3 Conditions d'existence et propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire</b> .....	7
I.3.1 Conditions d'existence.....	7
I.3.2 Propriétés principales.....	8
<b>I.4 Transformée de Laplace</b> .....	9
I.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle.....	9
I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle.....	9
<b>I.5 Caractéristiques fréquentielles et temporelles d'un dérivateur d'ordre fractionnaire</b> .....	10
I.5.1 Caractéristiques fréquentielles.....	10
I.5.1.1 <i>Définition de l'espace bi-complexe</i> .....	11
I.5.1.2 <i>Réponse en fréquences d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel...</i>	12
I.5.1.3 <i>Réponse en fréquences d'un dérivateur d'ordre fractionnaire complexe..</i>	13
I.5.2 Caractéristiques temporelles d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel .....	15
I.5.2.1 <i>Réponse impulsionnelle</i> .....	15
I.5.2.2 <i>Réponse indicielle</i> .....	16

I.5.3 Exemples de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire. ....	17
I.5.3.1 Dérivée d'ordre fractionnaire réel d'une exponentielle.....	17
I.5.3.2 Dérivée d'ordre fractionnaire réel d'un cosinus (ou d'un sinus).....	17
<b>I.6. Evaluation Numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire.....</b>	<b>18</b>
<b>I.7 Approximation et réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire</b>	
<b>réel ....</b> .....	<b>19</b>
I.7.1 Approximation par des fonctions rationnelles.....	19
I.7.2 Implémentation par des circuits électriques analogiques.....	22
I.7.2.1 Implémentation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire réel.....	22
I.7.2.2 Implémentation d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel.....	23
<b>I.8 Systèmes linéaire d'ordre fractionnaire .....</b>	<b>24</b>
<b>I.9 Conclusion .....</b>	<b>25</b>
<b>II. Représentation, simulation et analyse de systèmes d'ordre</b>	
<b>fractionnaire .....</b>	<b>27</b>
<b>II.1 Introduction .....</b>	<b>27</b>
<b>II.2 Représentation d'un système d'ordre fractionnaire .....</b>	<b>27</b>
II.2.1 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire explicite.....	27
II.2.2 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire implicite .....	28
II.2.3 Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire .....	29
II.2.4 Décomposition modale d'un système d'ordre fractionnaire .....	31
<b>II.3 Stabilité, observabilité et contrôlabilité de systèmes d'ordre fractionnaire .....</b>	<b>33</b>
II.3.1 Condition de stabilité .....	33
II.3.2 Observabilité et contrôlabilité .....	33
<b>II.4 Simulation temporelle de systèmes d'ordre fractionnaire réel.....</b>	<b>34</b>
II.4.1 Approches basées sur l'expression analytique de la sortie .....	34
II.4.1.1 Méthode basée sur la représentation modale du système	
<i>fractionnaire</i> .....	35
II.4.1.2 Méthode basée sur les fonctions de type Mittag-Leffler .....	35
II.4.1.3 Simulation analytique d'un système d'ordre fractionnaire explicite....	37
II.4.1.4 Simulation analytique d'un système d'ordre fractionnaire implicite....	39
II.4.2 Approches basées sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par	
un modèle rationnel discret .....	40

II.4.2.1 <i>Simulation par modèle à temps discret d'un système d'ordre fractionnaire explicite</i> .....	41
II.4.2.2 <i>Simulation par modèle à temps discret d'un système d'ordre fractionnel implicite</i> .....	42
II.4.3 Approche basée sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel continu.....	43
II.4.3.1 <i>Méthode de Carlson</i> .....	43
II.4.3.2 <i>Méthode de Matsuda</i> .....	44
II.4.3.3 <i>Méthode d'Oustaloup</i> .....	44
II.4.3.4 <i>Méthode de Charef</i> .....	45
II.4.3.5 <i>Méthode basée sur la fonction de distribution de temps de relaxation</i> ..	45
II.4.4 Exemple illustratif... ..	48
<b>II.5 Performances caractéristiques d'un système d'ordre fractionnaire</b> .....	50
<b>II.6 Conclusion</b> .....	51
<b>III. Identification de systèmes d'ordre fractionnaire</b> .....	53
<b>III.1 Introduction</b> .....	53
<b>III.2 Identification fréquentielle des systèmes d'ordre fractionnaire</b> .....	55
III.2.1 Rappel des principes de différentes approches d'identification fréquentielle...	55
III.2.2 Identification fréquentielle d'un modèle d'ordre fractionnaire explicite .....	58
III.2.3 Identification fréquentielle d'un modèle d'ordre fractionnaire implicite.....	59
<b>III.3 Identification temporelle des systèmes d'ordre fractionnaire</b> .....	62
III.3.1 Méthodes à erreur de sortie .....	63
III.3.2 Méthodes à erreur d'équation .....	67
III.3.2.1 Modèle discret de dimension infini .....	68
III.3.2.2 Estimation paramétrique du modèle discret .....	70
III.3.2.2.1 <i>Méthode des moindres carrés non récursifs</i> .....	70
III.3.2.2.2 <i>Méthode des moindres carrés récursifs</i> .....	71
III.3.2.2.3 <i>Analyse du biais d'estimation via l'erreur d'équation</i> .....	72
III.3.2.2.4 <i>Méthode des variables instrumentales récursives</i> .....	73
III.3.2.3 Retour aux coefficients de l'équation différentielle .....	74
III.3.2.4 Exemples d'applications .....	75
III.3.2.4.1 <i>Identification sans présence de bruit</i> .....	75

III.3.2.4.2 Identification en présence de bruit.....	78
<b>III.4 Conclusion .....</b>	<b>81</b>
<b>IV. Commande robuste d'ordre Fractionnaire.....</b>	<b>83</b>
<b>IV.1 Introduction.....</b>	<b>83</b>
<b>IV.2 Rappels des principes de la commande CRONE .....</b>	<b>84</b>
IV.2.1 Commande CRONE de première génération.....	85
IV.2.2 Commande CRONE de deuxième génération .....	87
IV.2.3 Commande CRONE de troisième génération .....	91
<b>IV.3 Performances caractéristiques d'un système de commande d'ordre Fractionnaire réel .....</b>	<b>91</b>
IV.3.1 Actions des commandes élémentaires d'ordre fractionnaire .....	92
IV.3.1.1 Action intégrale d'ordre fractionnaire.....	92
IV.3.1.2 Action dérivée d'ordre fractionnaire .....	94
IV.3.2 La Fonction de transfert idéale de Bode .....	95
IV.3.2.1 Caractéristiques temporelles .....	96
IV.3.2.2 Caractéristiques fréquentielles.....	99
<b>IV.4 Conception d'une commande d'ordre fractionnaire basée sur la fonction de transfert idéale de Bode .....</b>	<b>101</b>
IV.4.1 Méthode de conception de la commande .....	101
IV.4.2 Exemples illustratifs .....	106
<b>IV.5 Conception d'une commande <math>PI^{\alpha}D^{\beta}</math> d'ordre fractionnaire.....</b>	<b>116</b>
IV.5.1 Calcul de l'ordre du dérivateur et de l'intégrateur .....	117
IV.5.2 Identification récursive des paramètres $k_p$ , $k_i$ et $k_p$ .....	118
IV.5.3 Exemple d'application.....	120
<b>IV.6 Conclusion .....</b>	<b>124</b>
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>127</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>131</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>139</b>

## Table des figures

I.1	Diagramme de Bode d'un opérateur d'ordre fractionnaire réel .....	13
I.2	Diagramme de Bode d'un opérateur d'ordre fractionnaire complexe.....	15
I.3	Réponse impulsionnelle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre réel $\alpha$ .....	16
I.4	Réponse indicielle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre réel $\alpha$ .....	17
I.5	Principe de l'approximation par la fonction de singularité ( $0 < \alpha < 1$ ) .....	20
I.6	Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire réel.....	23
I.7	Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel.....	23
I.8	Système physique à entrée réelle et à sortie complexe.....	25
II.1	Réponse impulsionnelle du système: ${}_0 d_t^\alpha y(t) + y(t) = u(t)$ pour différentes valeurs de $\alpha$ .....	39
II.2	Réponse indicielle du système: ${}_0 d_t^\alpha y(t) + y(t) = u(t)$ pour différentes valeurs de $\alpha$ .....	39
II.3	Diagramme de Bode de l'amplitude de $H(s) = 1/(1 + s^{0.7})$ et de ses approximations en utilisant la méthode d'Oustaloup et la méthode de la fonction de distribution des temps de relaxation.....	48
II.4	Diagramme de Bode de la phase de $H(s) = 1/(1 + s^{0.7})$ et de ses approximations en utilisant la méthode d'Oustaloup et la méthode de la fonction de distribution des temps de relaxation.....	49
II.5	Réponses indicielles de $H(s) = 1/(1 + s^{0.7})$ en utilisant la méthode analytique, la méthode d'Oustaloup et la méthode de la fonction de distribution des temps de relaxation.....	49

II.6 Réponses indicielles du système (II.82) pour différentes valeurs du facteur d'amortissement $\xi$ , avec $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 1$ .....	50
II.7 Réponses indicielles du système (II.82) pour différentes valeurs du facteur d'amortissement $\xi$ , avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$ .....	51
III.1 Synthèse d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	64
III.2 Principe de l'identification récursive d'un système fractionnaire.....	71
III.3 Evolution de l'estimation paramétrique du modèle $M_1$ par la méthode des MCR (données non bruitées) .....	76
III.4 Réponse indicielle du système simulé et du modèle $M_3$ identifié par MCR .....	78
III.5 Tracé de Bode du système simulé du modèle $M_3$ identifié par MCR .....	78
III.6 Evolution de l'estimation paramétrique du modèle $M_1$ par la méthode des MCR (données bruitées).....	79
III.7 Evolution de l'estimation paramétrique du modèle $M_1$ par VIR (données bruitées).....	80
IV.1 diagramme de commande à retour unitaire.....	85
IV.2 Diagrammes de Bode du régulateur CRONE idéal à phase constante.....	86
IV.3 Représentation du gabarit vertical dans le plan de Black .....	88
IV.4 Diagramme d'un système de commande à retour avec action de commande d'ordre fractionnaire.....	92
IV.5 Action intégrale dans le cas d'un signal d'erreur carré et $\mu = 0, -0.2, -0.5, -1$ .....	93
IV.6 Action dérivée dans le cas d'un signal d'erreur trapézoïdal et $\mu = 0, 0.2, 0.5, 1$ .....	95
IV.7 Diagramme de la boucle idéale de Bode.....	96
IV.8 Réponses indicielles du système $F(s)$ pour différentes valeurs de $\alpha$ , avec $A = 1$ .....	97

IV.9 Réponses indicielles du système $F(s)$ pour différentes valeur de $A$ , avec $\alpha = 1.5$ ...	97
IV.10 Variation du premier dépassement en fonction de $\alpha$ .....	98
IV.11 Variation du temps de premier dépassement en fonction de $\alpha$ .....	99
IV.12 Variation du temps de monter en fonction de $\alpha$ .....	99
IV.13 Diagramme de Bode en boucle ouverte de la boucle idéale de Bode.....	100
IV.14 Système de commande à retour unitaire.....	101
IV.15 Tracé de Bode de l'amplitude de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ (ligne continue) et de la fonction de transfert du procédé $G_p(s)$ (ligne discontinue)...	108
IV.16 Tracé de Bode de la phase de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ (line continue) et de la fonction de transfert du procédé $G_p(s)$ (ligne discontinue).....	108
IV.17 Réponse indicielle de système de commande en boucle fermée pour différentes valeur du gain $K_0$ .....	109
IV.18 Tracé de Bode de l'amplitude de la fonction de transfert en BO $G(s)$ (ligne continue) et la fonction de transfert du procédé $G_p(s)$ (ligne discontinue).....	111
IV.19 Tracé de Bode de la phase de la fonction de transfert en BO $G(s)$ (ligne continue) et la fonction de transfert du procédé $G_p(s)$ (ligne discontinue).....	112
IV.20 Réponse indicielle du système de commande en boucle fermée pour différente valeurs du gain $K_0$ .....	112
IV.21 Tracé de Bode de phases des fonctions de transfert en BO : $C_{COF}(s)G_p(s)$ ( ____ ), $C_{PID}(s)G_p(s)$ ( ..... ), $C_{CRONE}(s)G_p(s)$ ( _ _ ) et la fonction de transfert du procédé $G_p(s)$ ( _ _ _ ) .....	114
IV.22 Réponse indicielle de système de commande $COF$ en boucle fermée pour différentes valeurs du gain $w_n$ .....	115
IV.23 Réponse indicielle de système de commande $CRONE$ en boucle fermée pour différentes valeurs du gain $w_n$ .....	115
IV.24 Réponse indicielle de système de commande $PID$ en boucle fermée pour différentes valeurs du gain $w_n$ .....	116
IV.25 Commande PID à partir d'un point jusqu'au plan .....	117

IV.26	Système de commande $PI^\alpha D^\beta$ à retour unitaire .....	117
IV.27	Principe de l'identification récursive des paramètres d'un $PI^\alpha D^\beta$ .....	119
IV.28	Evolution de l'estimation paramétrique en fonction du temps .....	122
IV.29	Réponse indicielle du système de commande avec le $PI^\alpha D^\beta$ pour différentes valeurs du gain $g_0$ .....	123
IV.30	Réponse indicielle du système de commande avec le $PID$ classique pour différentes valeurs du gain $g_0$ .....	123
IV.31	Réponse indicielle du système de commande CRONE pour différentes valeurs du gain $g_0$ .....	124

## Liste des tableaux

Tab. II.1	Approximation en temps discret de l'opérateur d'ordre fractionnaire $s^\alpha$ .....	41
Tab. II.2	Les valeurs optimales du paramètre $\lambda_{op}$ pour différentes valeurs de l'ordre $\alpha$ et $N$ .....	47
Tab. III.1	Résultat de l'estimation des paramètres du modèle $M_1$ par les méthodes des MCR et MCNR (données non bruitées).....	76
Tab. III.2	Résultat de l'estimation des paramètres du modèle $M_2$ par les méthodes des MCR et MCNR (données non bruitées).....	77
Tab. III.3	Résultat de l'estimation des paramètres du modèle $M_1$ par les méthodes des MCR et VIR (données bruitées).....	80



## Résumé

Ce travail porte essentiellement sur l'approximation et l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire, ainsi que sur la commande robuste d'ordre fractionnaire. En effet de nouvelles techniques d'identification et de commande sont proposées dans ce sens, tout en montrant leurs avantages en les appliquant aux différents procédés.

L'état de l'art de ces axes de recherche, est présenté avec les définitions de la plupart des notions du calcul fractionnaire.

Les contributions principales de ce travail sont bâties autour :

- d'une technique d'approximation optimale des systèmes d'ordre fractionnaire basée sur la fonction de distribution des temps de relaxation,
- d'une extension de la méthode des moindres carrés récursives, aux ordres fractionnaires,
- d'une extension de la méthode des variables instrumentales récursives, aux ordres fractionnaires.
- d'une nouvelle technique pour la conception de commandes robustes d'ordre fractionnaire, basée sur la fonction idéale de Bode.

Ces techniques ont non seulement permis de résoudre certains problèmes déjà posés avec les systèmes d'ordre fractionnaire (singularité matricielle en identification, identification des systèmes d'ordre fractionnaire non stationnaires, nombre de paramètres d'approximation, complexité de conception de la commande d'ordre fractionnaire) mais aussi d'améliorer certaines performances (robustesse, biais d'estimation, erreur d'approximation).

### Mots clés:

Identification de systèmes d'ordre fractionnaire, commande d'ordre fractionnaire, calcul fractionnaire, commande robuste.



## Introduction générale

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement technologique, sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performances. Ce progrès technologique et industriel est dû pour beaucoup au grand saut qualitatif qu'a connu l'outil informatique logiciel et matériel, notamment depuis l'apparition des microprocesseurs, ce qui a permis de rendre possible l'application de méthodes et de techniques considérées jusqu'à présent comme purement théoriques. Cela est dû aussi au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes.

L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie, est celle du *Calcul Fractionnaire* qui étend la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire, permettant le calcul de la dérivée d'ordre  $\alpha$  réel ou complexe d'une fonction différentiable  $f(t)$ , soit :

$$D^\alpha \{f(t)\} = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \quad (1)$$

Partant de quelques spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), cette théorie a été largement développée jusqu'à nos jours. De nombreux mathématiciens ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé, dont nous pouvons citer [GOR97]: P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822) N.H., J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grünwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard

(1892), O. Heaviside (1892), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A., E.R. Love (1938), A. Erdélyi (1939), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949)

Parallèlement à ce progrès théorique, quelques aspects pratiques limités du calcul fractionnaire, ont été développés par : Abel (1823, 1825), Boole (1824), Heavisid (1892,1922) et Gemant (1936) pour résoudre certains problèmes physiques.

Ce n'est qu'au début des années 1950 que Van Der Ziel [VAN50] dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole [DAV51] dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides, ont pu modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée d'ordre fractionnaire. Depuis ces découvertes, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt dans différentes disciplines tels que : l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'automatique et le traitement du signal, et dans différentes applications telles que : la modélisation, l'identification et la commande. En effet, Il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématiques d'ordre fractionnaire tels que : les processus électrochimiques: [ICH71] ; [SUN84a], la polarisation diélectrique [SUN84b], le Bruit de type  $(1/f)$  [KES82]; [VAN88], le matériel viscoélastique [MAK91] et les réseaux électriques [CLE84]. Et plus récemment, le développement de systèmes de commande d'ordre fractionnaire [OUS91]; [OUS94b]; [POD94a].

## **Identification des systèmes d'ordre fractionnaire**

L'une des applications de la théorie du calcul fractionnaire qui a connu un grand développement au cours de ces deux dernières décennies est l'identification par modèles d'ordre fractionnaire des systèmes dynamiques.

Bien que la modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire remonte au début du XXème siècle, les travaux dans le domaine de l'identification ont été très limités. Ces derniers ont été initiés par les recherches de (Sun et al., 1984) [SUN84a] sur l'identification du comportement de la polarisation électrode-électrolyte par modèles d'ordre fractionnaire en utilisant des techniques fréquentielles. Par la suite et à partir des années 1990, les travaux sur l'identification, tant dans le domaine temporel que fréquentiel, par modèles non entiers ont fait l'objet de nombreuses publications : (L. Le Lay, 1998) [LAY98]; (T. T. Hartley,

1999) [HAR99]; (J.C. Trigeassou, et al., 1999) [TRI99] ; (Olivier Cois, 2002) [OLI02] et (A. Oustaloup, 2005) [OUS05].

## Commande d'ordre fractionnaire

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup [OUS95]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. La synthèse d'une telle commande est effectuée de façon que l'équation différentielle d'ordre fractionnaire qui la décrit, soit de la même forme que celle qui régit la relaxation de l'eau sur une digue poreuse. Il a été remarqué qu'un tel phénomène physique est robuste au sens de l'automaticien. En effet, une observation attentive de la relaxation montre que son amortissement est indépendant de la nature de la digue, fluvial ou côtière, donc d'un certain nombre de paramètres, entre autre la masse d'eau en mouvement. Ce résultat est aussi remarquable que paradoxale dans l'approche entière de la mécanique où toute relaxation présente un amortissement lié à la masse transportée.

Depuis cette initiative, La commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny [POD99] a proposé le régulateur  $PI^\alpha D^\beta$  comprenant une intégration fractionnaire d'ordre  $\alpha$  et une dérivation fractionnaire d'ordre  $\beta$ , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande.

Dans ce sens, les travaux de cette thèse s'articulent autour de ces deux dernières applications. Intitulé "Contribution à la commande CRONE", ce sujet a pour objectif de développer de nouvelles techniques d'identification des systèmes d'ordre fractionnaire moins sensible aux bruits et de nouvelles approches de conception plus simples des systèmes de commande robuste d'ordre fractionnaire.

## Objectifs de la thèse et motivations

Notre intérêt à l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire est motivé par les bons résultats obtenus avec les modèles d'ordre fractionnaire, en qualité de description des phénomènes physiques relativement aux résultats des modèles entiers, ainsi que le besoin de développer des techniques simples et efficaces pour la conception et la synthèse des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Dans ce contexte, nous proposons de nouvelles

techniques d'identification paramétrique, basées sur l'extension aux ordres fractionnaires des techniques déjà existantes telle que l'algorithme des moindres carrés linéaires [LAN98].

Motivés aussi par la qualité remarquable en robustesse de la commande CRONE développée par Oustaloup [OUS95], nous proposons pour cela la fonction de transfert idéale de Bode [BOD45] comme modèle de conception de la boucle ouverte du système de commande.

## **Présentation de la thèse**

Cette thèse est organisée en quatre chapitres :

- Le premier chapitre présente une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres qui suivent. Les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire  $y$  sont répertoriés.

- Le deuxième chapitre illustre les formes usuelles de représentation et quelques méthodes couramment utilisées pour l'approximation et la simulation d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire. Nous proposons en outre une technique d'approximation optimale basée sur la fonction de distribution du temps de relaxation. Une analyse comparative des performances caractéristiques de ce type de systèmes avec celles des systèmes d'ordre entier ordinaires, est présentée à la fin de ce chapitre.

- L'objet du troisième chapitre est l'utilisation et l'exploitation du concept de la dérivation d'ordre fractionnaire dans un contexte d'identification paramétrique des systèmes fractionnaires. Il expose notre deuxième contribution qui consiste à étendre la méthode classique d'identification paramétrique des moindres carrés aux systèmes d'ordre fractionnaire.

- Le dernier chapitre est réservé à la commande robuste d'ordre fractionnaire. Après une présentation des principes de base de la commande CRONE, nous proposons notre troisième contribution pour la conception des systèmes de commande robustes d'ordre fractionnaire.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats réalisés et suggère les perspectives futures pour la suite de ce travail de recherche.

# Chapitre I

## Opérateurs et systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

### I.1 Introduction

L'extension de la notion d'ordre de dérivation au corps des complexes date du XIX<sup>e</sup> siècle et relève principalement des travaux de Liouville et Riemann [OLD74] [MIL93]. Récemment, une synthèse théorique a été proposée dans [MIL93] et [SAM93] où certains aspects algébriques des équations différentielles d'ordre fractionnaire sont complètement développés.

Si la définition mathématique d'un tel concept s'avère incontestable, sa dénomination reste plus confuse, prenant en effet dans la littérature des appellations différentes. Il est vrai que les appellations « dérivation d'ordre complexe », « dérivation non entière », « dérivation fractionnaire » ou bien « dérivation généralisée » désignent la même notion. Afin de ne pas alourdir la lecture de cette thèse, les appellations génériques « dérivation d'ordre fractionnaire » ou « intégration d'ordre fractionnaire » sont retenues pour désigner les opérateurs d'ordre complexe. Lorsque une distinction entre ordre strictement réel et ordre complexe mérite d'être soulignée, ces appellations sont respectivement complétées par les qualificatifs « dérivation d'ordre fractionnaire réel » ou « dérivation d'ordre fractionnaire complexe ». Par analogie, la même syntaxe est utilisée pour désigner un « système d'ordre fractionnaire » ainsi qu'un « modèle d'ordre fractionnaire ».

L'utilisation de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire réel est maintenant largement répandue dans des domaines aussi variés que la mécanique, l'automatique, l'électrochimie, la biologie... etc. En revanche, l'application de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire complexe est relativement récente et se limite pour l'instant à la synthèse d'une commande robuste (Commande CRONE de 3<sup>ème</sup> génération).

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.

## I.2 Définitions mathématiques

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions (en particulier pour les fonctions et les calculs considérés dans ce travail).

### I.2.1 Définition de Grünwald-Letnikov

Une des définitions les plus rencontrées de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Grünwald-Letnikov [MIL93], donnée par :

$${}_{t_0}D_t^\alpha y(t) = \frac{{}_{t_0}d_t^\alpha(y(t))}{dt^\alpha} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ Nh = t - t_0}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t - kh) \quad (\text{I.1})$$

où

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1, \quad t_0 < t \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{I.2})$$

Cette définition provient de la généralisation aux ordres fractionnaires de la formule donnant la dérivée d'ordre entier supérieur  $n$  d'une fonction continue  $y(t)$ , soit :

$$D^n y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n}{k} y(t - kh), \quad n, N \in \mathbb{N} \quad (\text{I.3})$$

Sous la condition que les dérivées  $y^{(k)}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, m+1$ ) sont continues dans  $[t_0, t]$  avec  $m \leq \Re(\alpha) < m+1$ , la définition de Grünwald-Letnikov peut être aussi donnée par [POD99] :

$${}_{t_0}D_t^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^m \frac{y^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-\alpha} y^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (\text{I.4})$$

où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma généralisée aux nombres fractionnaires, définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (\text{I.5})$$

### I.2.2 Définition de Riemann-Liouville

Une autre définition très utilisée de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Riemann-Liouville. Inspirée de la formule de Cauchy donnée par l'équation :

$${}_{t_0} D_t^{-n} y(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} y(x) dx \quad (\text{I.6})$$

la définition complète de Riemann-Liouville de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de  $y(t)$  est donnée par:

$${}_{t_0} D_t^{\alpha} y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-x)^{-\alpha-1} y(x) dx, & \text{si } \Re(\alpha) < 0 \\ y(t), & \text{si } \Re(\alpha) = 0 \\ D^n [{}_{t_0} D_t^{\alpha-n} y(t)], & n = \min\{k \in \mathbb{N} : k > \Re(\alpha)\}, \text{ si } \Re(\alpha) > 0 \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

où  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $n$  un entier positif et  $y$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, \infty[$ .

## I.3 Conditions d'existence et propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

### I.3.1 Conditions d'existence

Pour que la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle  $y(t)$  existe, il suffit que  $y(t)$  puisse s'écrire sous la forme [MIL93] :

$$y(t) = (t-t_0)^{\lambda} \eta(t-t_0) \quad (\text{II.8})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \lambda \in \mathbb{C} \\ \Re(\lambda) > -1 \\ \eta(t) \text{ fonction analytique de } \mathbb{C} \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

et pour que son intégrale d'ordre fractionnaire existe, il suffit que  $y(t)$  soit continue par morceaux sur  $]t_0, +\infty[$  et intégrable sur  $[t_0, t]$ .

### I.3.2 Propriétés principales

Les principales propriétés d'un opérateur d'ordre fractionnaire sont :

- deux paramètres,  $\alpha$  et  $t_0$  sont nécessaires pour définir un opérateur d'ordre fractionnaire ;
- la définition de la dérivation d'ordre fractionnaire étant basée sur celle d'une intégration d'ordre fractionnaire, une dérivation d'ordre fractionnaire revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s'avère en effet que la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction  $y$  nécessite la connaissance de  $y(t)$  sur l'intervalle  $[t_0, t]$ , alors que dans le cas entier, seule la connaissance locale de  $y$  autour de  $t$  est nécessaire. Cette propriété permet d'interpréter les systèmes d'ordre fractionnaire comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à mémoire courte ;
- la définition de Grünwald-Letnikov décrit l'unification des deux notions ; l'intégral et la dérivée d'ordre fractionnaire [MIL93],
- la dérivée d'ordre fractionnaire de l'intégrale de même ordre d'une fonction temporelle  $y(t)$  donne:

$${}_t D_t^\alpha \circ_{{}_t I_t^\alpha} y(t) = y(t) \text{ avec } \Re(\alpha) > 0 \quad (\text{I.9})$$

cette relation n'étant pas toujours vraie pour  $\Re(\alpha) < 0$

- les opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire vérifient la propriété de semi-groupe, soit [SAM 93] :

$${}_t I_t^{n_1} \circ_{{}_t I_t^{n_2}} y(t) =_{{}_t I_t^{n_1+n_2}} y(t) \text{ avec } \begin{cases} \Re(n_2) > 0 \\ \Re(n_1) > 0 \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

- contrairement aux opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire, les opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe), ne vérifient la propriété de semi-groupe que sous certaines conditions [MIL93], soit :

$${}_t D_t^{n_1} \left( {}_t D_t^{n_2} y(t) \right) =_{{}_t D_t^{n_1+n_2}} y(t) \quad (\text{I.11})$$

$$\text{et } {}_t D_t^r \left( {}_t D_t^n y(t) \right) =_{{}_t D_t^{r+n}} y(t) \quad \text{si } \begin{cases} r \text{ entier positif} \\ n \text{ arbitraire} \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

- l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe) est linéaire [CHE03a].

Ainsi, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et  $(\lambda, \mu)$  réelles, on aura :

$$D^{(\alpha)}(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.D^{(\alpha)}(f) + \mu.D^{(\alpha)}(g) \quad (\text{I-13})$$

- pour  $\alpha = 0$ ,  $D^\alpha f(t)$  est l'opérateur identité ( $D^0 f(t) = f(t)$ ).

## I.4 Transformée de Laplace

### I.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle

L'interprétation de l'équation (I.7) comme un produit de convolution permet le calcul de la transformée de Laplace de l'intégral d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle causale, soit [OLD74] :

$$\ell\left\{{}_0 D_t^{-\alpha} y(t)\right\} = \ell\left\{\frac{t^{\alpha-1} u(t)}{\Gamma(\alpha)} * y(t)\right\} = \ell\left\{\frac{t^{\alpha-1} u(t)}{\Gamma(\alpha)}\right\} \ell\{y(t)\} = s^{-\alpha} Y(s) \quad (\text{I.14})$$

où  $u(t)$  est l'échelon unitaire,  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $Y(s) = \ell\{y(t)\}$  et  $s = \sigma + jw$  désignant l'opérateur de Laplace.

Cette relation traduit un résultat remarquable en ce sens qu'elle généralise la formule bien connue de la transformée de Laplace de l'intégrale dans le cas entier.

### I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle

La transformée de Laplace de la dérivée entière d'une fonction temporelle causale est donnée par la relation bien connue sous la forme:

$$\ell\{D^n y(t)\} = s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k (I_0^{m-n} y(t)) \Big|_{t=0^+} \quad (\text{I.15})$$

Dans le cas où l'ordre  $n = \alpha$  est fractionnaire, si  $m$  désigne le plus petit entier supérieur à  $\Re(\alpha) > 0$ , l'utilisation de la relation (I.11) conduit à [OLD74] :

$${}_0 D_t^\alpha y(t) = D^m ({}_0 I_t^{m-\alpha} y(t)) \quad \text{avec } m-1 < \Re(\alpha) \leq m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (\text{I.16})$$

Soit conformément à la relation (I.15) :

$$\ell\{D_t^\alpha y(t)\} = L\left\{D^m \left({}_0 I_t^{m-\alpha} y(t)\right) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k \left({}_0 I_t^{m-\alpha} y(t)\right)\right\} \Big|_{t=0^+} \quad (\text{I.17})$$

ce qui conduit à l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle causale :

$$\ell\{D^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k \left(I_0^{m-\alpha} y(t)\right) \Big|_{t=0^+} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha \in \mathbb{C} \\ m = \text{Integer}[\Re(\alpha)] \\ \Re(\alpha) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Cette relation traduit un résultat remarquable en ce sens qu'elle généralise la formule bien connue dans le cas entier.

Ainsi, si les définitions temporelles des opérateurs d'ordre fractionnaire souffrent d'un formalisme mathématique quelque peu compliqué, leur expression dans le domaine opérationnel relève d'une simplicité remarquable dans le cas de l'étude des systèmes relaxés à l'instant  $t = 0$ .

## I.5 Caractéristiques fréquentielles et temporelles d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Le dérivateur d'ordre fractionnaire est l'élément de base de toute équation différentielle d'ordre fractionnaire, sa grandeur de sortie  $y(t)$  s'identifie à un facteur près, à la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha = a + ib$  de sa grandeur d'entrée  $u(t)$ , soit :

$$y(t) = \tau^\alpha \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = \tau^{a+ib} \frac{d^{(a+ib)} u(t)}{dt^{a+ib}} \quad (\text{I.19})$$

où  $\tau$  est un nombre réel positif désigne la constante du temps de la différentiation,  $a$  et  $b$  sont des nombres réels ou entiers.

### I.5.1 Caractéristiques fréquentielles

En utilisant la relation (I.18) et sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la transformée de Laplace du dérivateur d'ordre fractionnaire de l'équation (I.19) peut être donnée par :

$$Y(s) = (\tau s)^\alpha U(s) \quad (\text{I.20})$$

soit, en posant  $w_u = 1/\tau$  :

$$Y(s) = \left( \frac{s}{w_u} \right)^\alpha U(s) \quad (\text{I.21})$$

d'où l'on tire la transmittance complexe :

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left( \frac{s}{w_u} \right)^\alpha = \left( \frac{s}{w_u} \right)^{a+ib} = \left( \frac{s}{w_u} \right)^a \left[ \cos \left( b \ln \frac{s}{w_u} \right) + i \sin \left( b \ln \frac{s}{w_u} \right) \right] \quad (\text{I.22})$$

ou bien, en posant

$$T_{\text{réel}}(s) = \left( \frac{s}{w_u} \right)^a \cos \left( b \ln \frac{s}{w_u} \right) \quad (\text{I.23})$$

$$T_{\text{imag}}(s) = \left( \frac{s}{w_u} \right)^a \sin \left( b \ln \frac{s}{w_u} \right) \quad (\text{I.24})$$

$$T(s) = T_{\text{réel}}(s) + iT_{\text{imag}}(s) \quad (\text{I.25})$$

les fonctions  $T_{\text{réel}}(s)$  et  $T_{\text{imag}}(s)$  représentent les transmittances relatives à la sortie réelle  $y_{\text{réel}}(t)$  et imaginaire  $y_{\text{image}}(t)$  du dérivateur d'ordre fractionnaire complexe.

L'ordre de dérivation complexe considéré par J. Liouville en 1832 [LIO32], B. Riemann en 1892 [RIE92] et S.G. Samko en 1993 [SAM93] appartient au même plan complexe que la variable de Laplace. Dans ce paragraphe, une distinction mathématique est faite entre, d'une part, le plan complexe opérationnel noté  $C_j$  dont relève la variable de Laplace  $s = \sigma + j\omega$  et, d'autre part, le plan complexe temporel noté  $C_i$  dont relève l'ordre de dérivation  $\alpha = a + ib$  et les sorties  $y_r(t)$  et  $y_i(t)$ . L'espace généré par ces deux plans est appelé espace bi-complexe et noté  $\hat{C}$ .

#### 1.5.1.1 Définition de l'espace bi-complexe [OUS05]

L'espace bi-complexe est définie par l'ensemble  $\hat{C} = C_j \times C_j$ , aussi noté  $C_j + iC_j$  où  $i$  est le couple (0,1) de  $C_j \times C_j$ , cet espace est menu de deux lois + et \* telles que :

$$\text{si } \begin{cases} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{cases}, \text{ où } a, b, a' \text{ et } b' \text{ sont tous des éléments de } C_j$$

$$\text{alors } \begin{cases} z + z' = (a + a') + i(b + b') \\ z * z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b) \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

On munit aussi cet espace d'une norme définie par :

si  $z = a + ib$  où  $a$  et  $b$  sont des éléments de  $C_j$

$$\text{alors } \|z\| = \text{Max}(|a + jb|, |a - jb|) \quad (\text{I.27})$$

Ainsi défini, cet espace permet de décomposer mathématiquement la transmittance  $T(s)$  selon ses parties réelles et imaginaires par rapport au nombre complexe  $i$ , soit, en posant  $s = \rho e^{j\theta}$  et  $\alpha = a + ib$  :

$$T(s) = \left(\frac{s}{w_u}\right)^\alpha = \left(\frac{\rho}{w_u} e^{j\theta}\right)^{a+ib} = \left(\frac{\rho}{w_u}\right)^a e^{ja\theta} \left[ \cos\left(b \ln \frac{\rho}{w_u} + jb\theta\right) + i \sin\left(b \ln \frac{\rho}{w_u} + jb\theta\right) \right] \quad (\text{I.28})$$

### 1.5.1.2 Réponse fréquentielle d'un opérateur d'ordre fractionnaire réel

La réponse en fréquence d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel se déduit de sa transmittance en faisant  $s = jw$  et  $\alpha = a + i0 = a$  (la partie imaginaire  $b = 0$ ), soit :

$$T(s) = \left(\frac{jw}{w_u}\right)^a \quad (\text{I.29})$$

Définie comme le module et l'argument de  $T(s)$ , le gain et la phase de ce dérivateur admettent des expressions de la forme :

$$\begin{cases} |T(jw)| = \left(\frac{w}{w_u}\right)^a \\ \text{Arg}(T(jw)) = a \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

L'analyse d'un tel système d'équations révèle une propriété remarquable de ce type de dérivateurs dans le sens que :

- le diagramme de gain est caractérisé par une droite oblique de pente  $20a$  dB/décade ;
- le diagramme de phase est caractérisé par une droite horizontale d'ordonnée  $\varphi = a \frac{\pi}{2}$  rad.

La figure I.1 représente le diagramme de Bode d'un dérivateur fractionnaire réel pour différentes valeurs de l'ordre  $a$  compris entre -1 et 1.

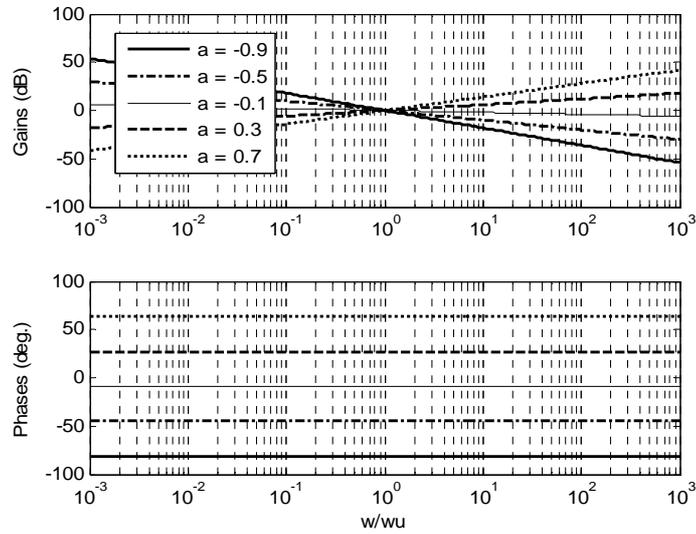


Figure I.1 Diagramme de Bode d'un opérateur d'ordre fractionnaire réel

Le caractère fractionnaire réel de l'ordre de dérivation  $a$ , permet ainsi d'assurer, tant au niveau du diagramme de gain que du diagramme de phase, une variation continue :

- de la pente de la droite de gain ;
- de l'ordonnée de la droite de phase.

### I.5.1.3 Réponse fréquentielle d'un opérateur d'ordre fractionnaire complexe

La réponse fréquentielle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire complexe se déduit de sa transmittance donnée par l'équation (I.28) en faisant  $s = jw$  et  $\alpha = a + ib$  avec  $b \neq 0$  [OUS05], les parties réelles et imaginaires relatives au plan complexe  $C_i$  de sa réponse fréquentielle admettent des expressions de la forme :

$$\begin{cases} \Re_{/i}(T(jw)) = T_{réel}(jw) = \left(\frac{w}{w_u}\right)^a e^{ja\frac{\pi}{2}} \left[ \cos\left(b \ln \frac{w}{w_u} + jb \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ \Im_{/i}(T(jw)) = T_{imag}(jw) = \left(\frac{w}{w_u}\right)^a e^{ja\frac{\pi}{2}} \left[ \sin\left(b \ln \frac{w}{w_u} + jb \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

Les gains et les phases du dérivateur se déduisant ensuite des modules et arguments de ces deux réponses en fréquence, soient, pour  $T_{réel}(jw)$  :

$$|\Re_{e/i}(T(jw))| = \left(\frac{w}{w_u}\right)^a \sqrt{\cos^2\left(b \ln \frac{w}{w_u}\right) + sh^2\left(b \frac{\pi}{2}\right)} \quad (I.32)$$

$$\text{et } \arg(\Re_{e/i}(T(jw))) = a \frac{\pi}{2} + \arg\left[\cos\left(b \ln \frac{w}{w_u}\right) ch\left(b \frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(b \ln \frac{w}{w_u}\right) sh\left(b \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (I.33)$$

et pour  $T_{imag}(jw)$  :

$$|\Im_{m/i}(T(jw))| = \left(\frac{w}{w_u}\right)^a \sqrt{\sin^2\left(b \ln \frac{w}{w_u}\right) + sh^2\left(b \frac{\pi}{2}\right)} \quad (I.34)$$

$$\text{et } \arg(\Im_{m/i}(T(jw))) = a \frac{\pi}{2} + \arg\left[\sin\left(b \ln \frac{w}{w_u}\right) ch\left(b \frac{\pi}{2}\right) + j \cos\left(b \ln \frac{w}{w_u}\right) sh\left(b \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (I.35)$$

Les valeurs et les pentes des gains à la fréquence  $w_u$  ont pour expressions :

$$|\Re_{e/i}(T(jw))|_{w=w_u} = \left| ch\left(b \frac{\pi}{2}\right) \right| \quad (I.36)$$

$$|\Im_{m/i}(T(jw))|_{w=w_u} = \left| sh\left(b \frac{\pi}{2}\right) \right| \quad (I.37)$$

$$\left. \frac{\partial |\Re_{e/i}(T(jw))|_{dB}}{\partial \log w} \right|_{w=w_u} = 20a \quad (I.38)$$

$$\left. \frac{\partial |\Im_{m/i}(T(jw))|_{dB}}{\partial \log w} \right|_{w=w_u} = 20a \quad (I.39)$$

Les quatre dernières relations expriment qu'à la fréquence  $w_u$  :

- les valeurs des gains sont exclusivement liées à la partie imaginaire  $b$  de l'ordre de dérivation;
- les pentes des gains sont exclusivement liées à la partie réelle  $a$  de l'ordre de dérivation.

Les valeurs et les pentes des phases à la fréquence  $w_u$  ont pour expressions :

$$\arg(\Re/i(T(jw_u))) = a \frac{\pi}{2} \quad (I.40)$$

$$\arg(\Im m / i(T(jw_u))) = a \frac{\pi}{2} + \text{sign}(b) \frac{\pi}{2} \quad (\text{I.41})$$

$$\left. \frac{\partial \arg(\Re_{/i}(T(jw)))}{\partial \log w} \right|_{w=w_u} = -b \text{th} \left( b \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{I.42})$$

$$\left. \frac{\partial \arg(\Im m_{/i}(T(jw)))}{\partial \log w} \right|_{w=w_u} = \frac{-b}{\text{th} \left( b \frac{\pi}{2} \right)} \quad (\text{I.43})$$

Les quatre dernières relations expriment qu'à la fréquence  $w_u$  :

- les valeurs des phases sont exclusivement liées à la partie réelle  $a$  de l'ordre de dérivation;
- les pentes des phases sont exclusivement liées à la partie imaginaire  $b$  de l'ordre de dérivation.

La figure I.2 représente le diagramme de Bode d'un dérivateur fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre complexe  $\alpha$ .

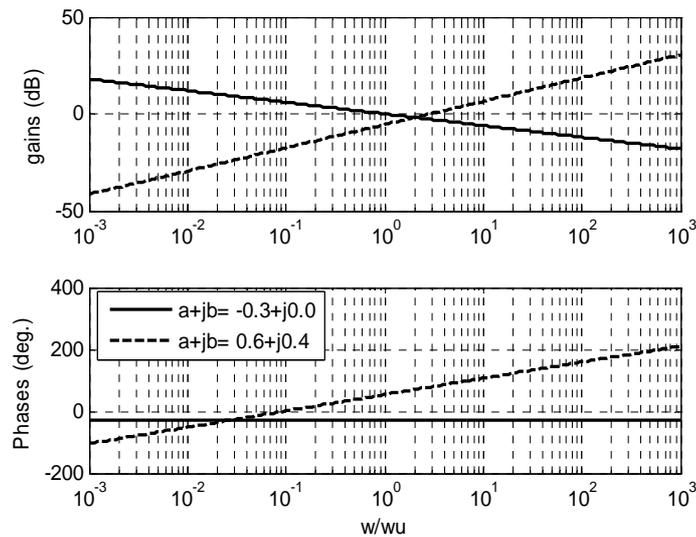


Figure. I.2 Diagramme de Bode d'un opérateur d'ordre fractionnaire complexe

## I.5.2 Caractéristiques temporelles d'un opérateur d'ordre fractionnaire réel

### I.5.2.1 Réponse impulsionnelle

A partir de l'équation (I.7) on peut écrire :

$$\ell\left\{{}_0 D_t^\alpha y(t)\right\} = \ell\left\{\frac{t^{-\alpha-1}u(t)}{\Gamma(-\alpha)} * y(t)\right\} = \ell\left\{\frac{t^{-\alpha-1}u(t)}{\Gamma(-\alpha)}\right\} \ell\{y(t)\} = s^\alpha Y(s) \quad (\text{I.44})$$

où  $u(t)$  est l'échelon unitaire.

Le cas de  $Y(s) = 1$  correspond à la dérivée d'ordre fractionnaire réel  $\alpha$  de la fonction de Dirac  $y(t) = \delta(t)$ , alors, en substituant  $y(t)$  dans (I.44), on peut déduire la réponse impulsionnelle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire, soit:

$$\ell\left\{{}_0 D_t^\alpha \delta(t)\right\} = s^\alpha = \ell\left\{\frac{t^{-\alpha-1}u(t)}{\Gamma(-\alpha)}\right\} \Leftrightarrow {}_0 D_t^\alpha \delta(t) = \frac{t^{-\alpha-1}u(t)}{\Gamma(-\alpha)} \quad (\text{I.45})$$

La figure (I.3) représente la réponse impulsionnelle d'un dérivateur fractionnaire réel pour différentes valeurs de l'ordre  $\alpha$ .

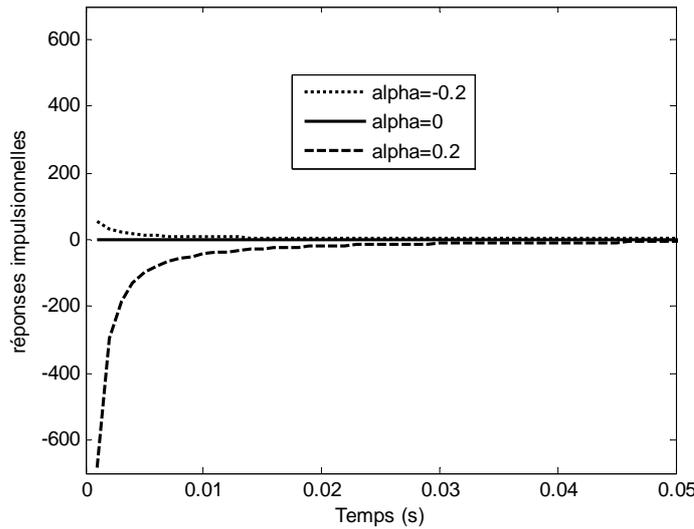


Figure. I.3 Réponse impulsionnelle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre réel  $\alpha$

### 1.5.2.2 Réponse indicielle

La dérivée d'ordre fractionnaire réel d'un échelon unitaire est obtenue en substituant  $Y(s) = 1/s$  dans l'équation (I.44), ce qui donne :

$$\ell\left\{{}_0 D_t^\alpha y_{unit}(t)\right\} = s^{\alpha-1} \Leftrightarrow {}_0 D_t^\alpha y_{unit}(t) = \frac{t^{-\alpha}u(t)}{\Gamma(-\alpha+1)} \quad (\text{I.46})$$

La figure (I.4) représente la réponse indicielle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel pour différentes valeurs de l'ordre  $\alpha$ .

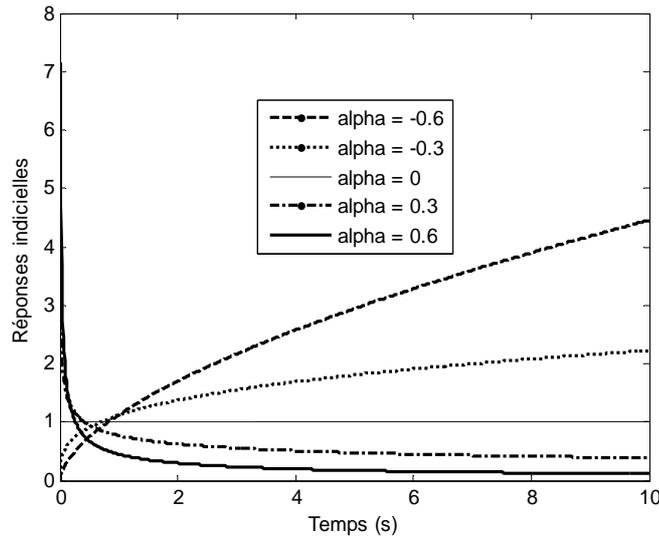


Figure I.4 Réponse indicielle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre réel  $\alpha$

### I.5.3 Exemples de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire

#### I.5.3.1 Dérivée d'ordre fractionnaire réel d'une exponentielle

Soit la fonction  $y(t) = e^{at}$  où  $a = \frac{1}{\tau} + jw$  est un nombre complexe. En utilisant les définitions citées dans la section (I.2), la dérivée d'ordre fractionnaire réel  $\alpha$  de  $y(t)$  est donnée par [OUS05]:

$${}_0D_t^\alpha e^{at} = a^\alpha e^{at} = \left( \left( \frac{1}{\tau} \right)^2 + w^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} e^{t/\tau} e^{j(wt + \alpha \arg(a))} \quad (\text{I.47})$$

Dans le cas d'une fonction réelle ( $w = 0$ ), l'expression précédente se réduit à :

$${}_0D_t^\alpha e^{at} = \tau^{-\alpha} e^{t/\tau} \quad (\text{I.48})$$

#### I.5.3.2 Dérivée d'ordre fractionnaire réel d'un cosinus (ou d'un sinus)

En se basant sur le fait qu'un cosinus (resp. un sinus) est égal à la partie réelle (resp. imaginaire) d'une exponentielle, et que l'opérateur de dérivée fractionnaire est linéaire, on peut déterminer facilement la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  d'un cosinus (resp. d'un sinus), soit :

$$D^\alpha [\cos(w_0 t - \varphi)] = w_0^\alpha \cos\left( w_0 t - \varphi + \alpha \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{I.49})$$

$$D^\alpha [\sin(w_0 t - \varphi)] = w_0^\alpha \sin\left(w_0 t - \varphi + \alpha \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{I.50})$$

## I.6. Evaluation Numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul de la dérivée ou l'intégrale d'ordre fractionnaire  $\alpha$  d'une fonction  $y(t)$  quelconque est généralement très difficile en utilisant les méthodes analytiques. Par conséquence, une approximation numérique est nécessaire. La méthode la plus simple à utiliser est celle basée sur la définition de Grünwald-Letnikov. Ainsi, la formule (I.1) peut être utilisée pour une évaluation numérique approximative de l'intégrale et de la dérivée d'ordre fractionnaire en choisissant une valeur appropriée du pas d'échantillonnage  $h$  [MIL93], soit :

$${}_{t_0} D_t^\alpha y(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\text{int}\left(\frac{t-t_0}{h}\right)} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t - kh) \quad (\text{I.51})$$

La série de sommation est tranchée avec un nombre de termes qui augmente lorsque  $h$  diminue. Pour une erreur d'approximation donnée  $\varepsilon$ , cette série peut être réduite à un nombre limité de termes  $N$ , fixé en utilisant le principe de la mémoire courte.

**Théorème 1 (Principe de mémoire courte)** [POD99] : Si une fonction temporelle  $y$  est bornée sur un intervalle  $[t_0, t]$ , c'est-à-dire, s'il existe une valeur  $M$  vérifiant

$$|y(\xi)| < M, \forall \xi \in [t_0, t] \quad (\text{I.52})$$

donc l'approximation :

$${}_{t_0} D_t^\alpha y(t) \approx {}_{t-L} D_t^\alpha y(t) \quad \text{avec } L < t - t_0 \quad (\text{I.53})$$

donne une erreur  $\varepsilon$  tel que :

$$|\varepsilon| < \frac{ML^{-\alpha}}{|\Gamma(1-\alpha)|} \quad (\text{I.54})$$

Par conséquence, la formule (I.51) peut être réécrite sous la forme :

$${}_a D_t^\alpha y(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t - kh) \quad (\text{I.55})$$

où  $N = \text{entier}(L/h)$ .

L'avantage d'une telle approche réside dans sa simplicité de mise en oeuvre.

## I.7 Approximation et réalisation analogique des opérateurs d'ordre

### Fractionnaire réel

#### I.7.1 Approximation par des fonctions rationnelles

Les méthodes d'approximation des l'opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles sont basées essentiellement sur les travaux de Charef *et al.* [CHA92]. Elles consistent à approximer le dérivateur ou l'intégrateur d'ordre fractionnaire réel, dans une bande de fréquence donnée, par une fonction rationnelle réalisable physiquement en utilisant un ensemble de cellules élémentaires de premier ordre.

La fonction de transfert d'un opérateur d'ordre fractionnaire élémentaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$T(s) = \frac{1}{s^\alpha} \quad (\text{I.56})$$

où  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $\alpha$  un nombre réel tel que  $-1 < \alpha < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[w_b, w_h]$ , cet opérateur peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire PPF (si  $\alpha > 0$ ) ou un zéro à puissance fractionnaire ZPF (si  $\alpha < 0$ ) comme suit :

$$T(s) \approx \frac{K}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\alpha} \quad (\text{I.57})$$

où  $w_c$  est la fréquence de coupure du PPF ou du ZPF obtenue à partir de la basse fréquence

$w_b$  ;  $w_c = w_b \sqrt{10^{\frac{\gamma_0}{10\alpha} - 1}}$ ,  $\gamma_0$  est l'erreur maximale permise entre la pente de la réponse fréquentielle de l'opérateur (I.56) et le PPF ou le ZPF de l'équation (I.57), et  $K = 1/w_c^\alpha$ .

En supposons que pour  $w \in [w_b, w_h]$  on a  $w \gg w_c$  on peut écrire :

$$\frac{K}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\alpha} \approx \frac{K}{\left(\frac{s}{w_c}\right)^\alpha} = \frac{1}{s^\alpha} = T(s) \quad (\text{I.58})$$

Dans le but de représenter le pôle ou le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (I.57), et par conséquent l'intégrateur ou le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de  $-20\alpha$  dB/dec sur le tracé de Bode du PPF ou du ZPF par un nombre de lignes sous forme de zigzag, (voir figure I.5), produite par une alternance de pente  $-20$ dB/dec et  $0$ dB/dec (si  $\alpha > 0$ ) ou  $20$ dB/dec et  $0$ dB/dec (si  $\alpha < 0$ ) correspondant à une alternance de pôles et zéros sur l'axe réel négatif du plan  $s$ . D'où, les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation, commence par le choix d'une erreur d'approximation  $\gamma$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $w_{\max}$ .

La fonction d'approximation sera donc donnée par :

$$T(s) \approx \frac{K}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\alpha} \approx T_a(s) = K \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I.59})$$

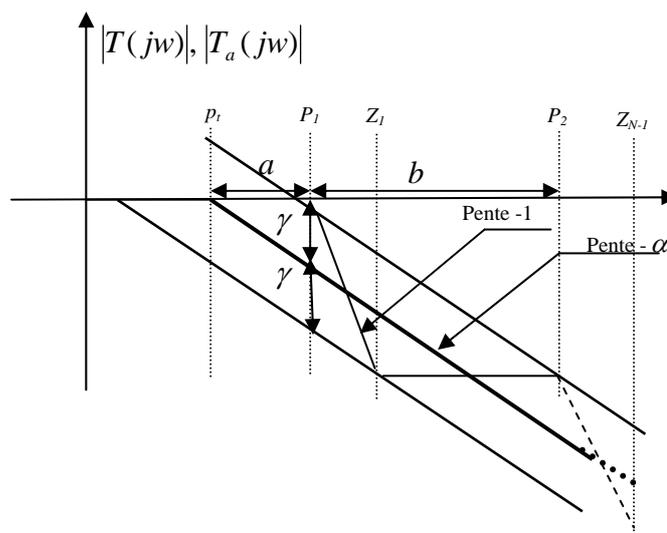


Figure I.5 Principe de l'approximation par la fonction de singularité ( $0 < \alpha < 1$ )

où les pôles  $p_i$  et les zéros  $z_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), peuvent être obtenus à partir des formules suivantes :

si  $\alpha > 0$  :

$$p_0 = w_c \sqrt{b}, \quad p_i = p_0 (ab)^i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{I.60})$$

$$z_i = ap_0 (ab)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{I.61})$$

$$a = 10^{\frac{\gamma}{10(1-\alpha)}}, \quad b = 10^{\frac{\gamma}{10\alpha}} \quad (\text{I.62})$$

$$N = \text{Integer} \left\{ \frac{\log \left( \frac{w_{\max}}{p_0} \right)}{\log(ab)} \right\} + 1 \quad (\text{I.63})$$

si  $\alpha < 0$  :  $a$  et  $b$  sont données toujours par l'équation (I.62),

$$z_0 = w_c \sqrt{b}, \quad z_i = z_0 (ab)^i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{I.64})$$

$$p_i = az_0 (ab)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{I.65})$$

$$N = \text{Integer} \left\{ \frac{\log \left( \frac{w_{\max}}{z_0} \right)}{\log(ab)} \right\} + 1 \quad (\text{I.66})$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, on doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires, soit :

dans le cas où  $\alpha > 0$  :

$$T_a(s) = K \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{s}{p_0 a (ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_0 (ab)^i} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left( 1 + \frac{s}{p_0 (ab)^i} \right)} \quad (\text{I.67})$$

où les coefficients  $h_i$  sont les résidus qui sont déterminés par :

$$h_i = K \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a}\right)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (\text{I.68})$$

dans le cas où  $\alpha < 0$ , pour des raisons concernant la réalisation, on développe  $\frac{T_a(s)}{s}$  en fonctions élémentaires, soit :

$$\frac{T_a(s)}{s} = \frac{1}{s} K \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0 (ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{az_0 (ab)^i}\right)} \quad (\text{I.69})$$

calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$T_a(s) = K + \sum_{i=0}^N \frac{h_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_0 (ab)^i}\right)} \quad (\text{I.70})$$

où  $h_i$  est donnée par :

$$h_i = -K \frac{\prod_{j=0}^{N-1} (1 - a(ab)^{i-j})}{z_0 a (ab)^i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (\text{I.71})$$

## I.7.2 Implémentation par des circuits électriques analogiques

### I.7.2.1 Implémentation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire réel

L'équation (I.67) de  $T_a(s)$  (pour  $\alpha > 1$ ) correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Forster de 1<sup>ère</sup> forme dont le schéma est représenté par la figure (I.6).

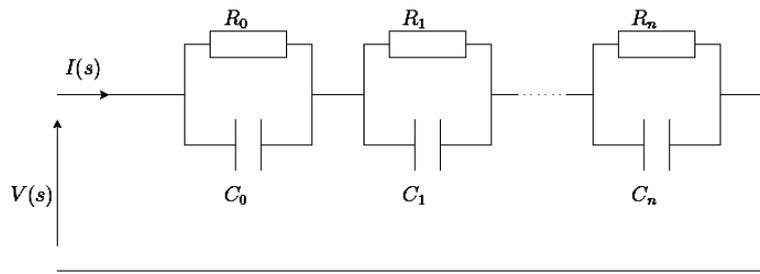


Figure I.6 Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

L'impédance de ce réseau est donnée par :

$$Z_1(s) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{R_i}{1 + R_i C_i s} \right) \quad (\text{I.72})$$

avec  $R_i = h_i$  et  $C_i = \frac{1}{p_0(ab)^i h_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  (I.73)

### 1.7.2.2 Implémentation d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel

De la même manière, l'équation (I.70) de  $T_a(s)$  (pour  $\alpha < 1$ ), correspond à l'admittance d'un réseau RC du type Forster de 2<sup>ème</sup> forme dont le schéma est représenté par la figure (I.7).

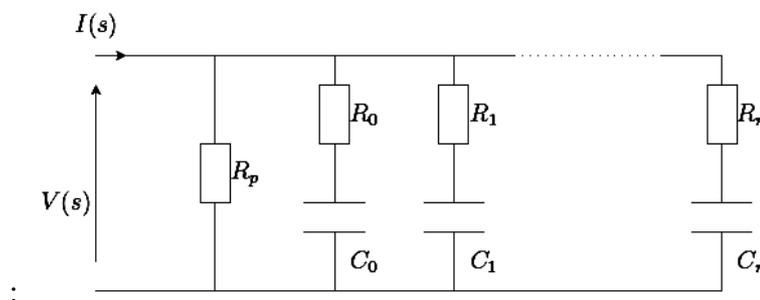


Figure I.7 Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

L'admittance de ce réseau est donnée par :

$$Z_2(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \frac{C_i s}{1 + s R_i C_i} \quad (\text{II.74})$$

avec  $C_i = h_i$ ,  $R_i = \frac{1}{p_0(ab)^i h_i}$  et  $R_p = \frac{1}{K}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  (I.75)

## I.8 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

L'analyse d'une large catégorie de processus physiques tel que le bruit électronique [VAN88], les réseaux de télécommunication [LEL95], les systèmes hydrauliques [BLA65], la mécanique des fluides [SCO95], la polarisation électrode-électrolyte [SUN84], montre que les tracés de Bode de ces systèmes sont caractérisés par une pente d'ordre fractionnaire et par un comportement temporel régit par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Ce type de processus est connu comme système d'ordre fractionnaire. L'utilisation des modèles entiers n'est donc pas convenable pour représenter ce type de systèmes. Alors, une nouvelle catégorie de modèles appelés modèles d'ordre fractionnaire, basés sur le concept de la différentiation d'ordre fractionnaire, a été développée [OLI02 ; LAY98 ; OUS05].

Un système linéaire d'ordre fractionnaire est par définition un système décrit, dans le cas monovariant, par des équations différentielles faisant intervenir des opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire, soit dans le cas général :

$$D^{n_{a_0}} y(t) + a_1 D^{n_{a_1}} y(t) + \dots + a_L D^{n_{a_L}} y(t) = b_0 D^{n_{b_0}} u(t) + \dots + b_M D^{n_{b_M}} u(t) \quad (\text{I.76})$$

où  $u(t)$  et  $y(t)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, les ordres de dérivation  $n_{a_l}$  et  $n_{b_m}$  ( $l = 0, 1, \dots, L; m = 0, 1, \dots, M$ ) sont des nombres entiers, non entiers, réels ou complexes.

Un problème fondamental posé par l'étude d'un système d'ordre fractionnaire complexe provient du fait que la dérivée d'ordre fractionnaire complexe d'une fonction réelle est à valeurs complexes.

$$y(t) \rightarrow D^\alpha y(t), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Physiquement, seuls les signaux réels sont mesurables et ont donc un sens concret.

En automatique, et notamment dans la commande CRONE de 3<sup>ème</sup> génération [OUS91], seule la partie réelle de la fonction dérivée est prise en compte. Pour ce type de système de commande, le comportement en boucle ouverte au voisinage de la fréquence au gain unité est en effet celui de la partie réelle de la transmittance d'un intégrateur d'ordre complexe.

Cette approche permet de modéliser des systèmes physiques par des équations différentielles dont les ordres de dérivation sont complexes. La partie réelle de  $y(t)$  représente

la sortie mesurable du système, la partie imaginaire de  $y(t)$  étant alors considérées comme non accessible.

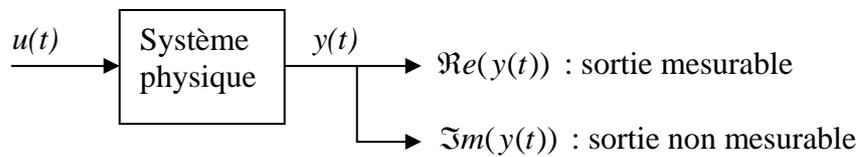


Figure I.8 Système physique à entrée réelle et à sortie complexe

**Remarque:** Cette approche ni nullement imposé par une contrainte mathématique ou physique mais correspond à un choix guidé par la stratégie de la commande CRONE [OUS91].

Un second problème concerne le choix de l'instant initial  $t_0$ , borne inférieure de l'intégration de la formule donnant la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle  $y(t)$ . Ce paramètre caractérise l'instant à partir duquel le passé de la fonction  $y(t)$  est pris en compte pour le calcul de la dérivée. Pour un système physique, cet instant ne peut être que celui qui initialise la sollicitation du système, c'est-à-dire l'instant où le signal d'entrée  $u(t)$  excite pour la première fois le système considéré. Dans la majorité des cas, cet instant ainsi que toutes les valeurs correspondantes de  $y(t)$  ne sont malheureusement pas accessible. Une solution consiste alors à donner au système un temps de repos suffisant pour pouvoir le considérer comme relaxé, l'instant initial étant alors fixé arbitrairement à  $t_0 = 0$ , réduisant ainsi la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction à :  $D^\alpha y(t)$  ou  $s^\alpha Y(s)$ . L'hypothèse suivante est donc adoptée dans toute la suite du thèse : les systèmes étudiés sont considérés relaxés à l'instant  $t = 0$ .

## I.9 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul fractionnaire. Nous avons présenté quelques définitions mathématiques des opérateurs d'ordre fractionnaire ainsi que les différentes propriétés et caractéristiques de la dérivée et de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle. Nous avons présenté aussi une méthode simple permettant l'évaluation numérique de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire basée sur la définition de Grünwald-Letnikov, et en utilisant le principe de la mémoire courte. Une méthode d'approximation permettant la simulation et l'implémentation des opérateurs d'ordre

fractionnaire réel, par des circuits analogiques, est également présentée. Enfin nous avons donné une définition générale de systèmes d'ordre fractionnaire réel ou complexe.

# Chapitre II

## Représentation, simulation et analyse de systèmes d'ordre fractionnaire

### II.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé quelques définitions et les propriétés principales des opérateurs d'ordre fractionnaire, ainsi que quelques méthodes d'approximation en temps discret et continue de ce type d'opérateur. Dans ce chapitre nous allons présenter les formes usuelles de représentation et quelques méthodes couramment utilisées pour l'approximation et la simulation d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire. Une analyse comparative des performances caractéristiques de ce type de systèmes avec celles des systèmes d'ordre entier ordinaires est présentée à la fin du chapitre.

### II.2 Représentation d'un système d'ordre fractionnaire

Si plusieurs formes de représentation sont à même de décrire un système entier (équation différentielle, équation récurrente, représentation d'état, fonction de transfert...), le comportement d'un système d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenant des opérateurs d'ordre fractionnaire.

#### II.2.1 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire explicite

Dans le domaine temporel, un modèle est dit *d'ordre fractionnaire explicite* lorsque il est fondé sur une représentation par une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{l=0}^L a_l D^{n_{a_l}} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m D^{n_{b_m}} u(t) \quad (\text{II.1})$$

où  $u(t)$  et  $y(t)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système,  $\{n_{a_l}, n_{b_m}\} \in \mathbb{C}$  et  $\{a_l; b_m\} \in \mathbb{R}$ , ( $l = 0, 1, \dots, L$ ;  $m = 0, 1, \dots, M$ ).

Dans le domaine opérationnel, sa fonction de transfert est donnée par un rapport de deux polynômes à puissances fractionnaires, soit,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{n_{b0}} + \dots + b_M s^{n_{bM}}}{a_0 s^{n_{a0}} + \dots + a_L s^{n_{aL}}} \quad (\text{II.2})$$

Dans le cas où tous les exposants de  $s$  sont multiples d'une certaine valeur réelle  $q$  (ordres commensurables), la fonction de transfert (II.2) peut être réécrite sous la forme :

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^{mq}}{\sum_{l=0}^L a_l s^{lq}} \quad (\text{II.3})$$

où  $q$  est un nombre réel,  $M$  et  $L$  sont des entiers tel que  $M < L$ .

Un système d'ordre fractionnaire décrit par une fonction de transfert de la forme (II.3) est appelé système commensurable.

Bien que n'importe quelle valeur réel  $q$  suffise pour que le système soit commensurable, la valeur de  $q$  est généralement prise comme étant un nombre rationnel  $1/Q$ , avec  $Q \in \mathbb{N}$ , soit :

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^{m/Q}}{\sum_{l=0}^L a_l s^{l/Q}} \quad (\text{II.4})$$

## II.2.2 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire implicite

La dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction  $g(t)$  est dite implicite lorsqu'elle ne porte pas directement sur  $g(t)$  mais sur le produit de  $g(t)$  par une exponentielle croissante de constante du temps  $\tau$ ,  $e^{t/\tau}$  [OUS05], soit :

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_{imp}^\alpha g(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)^\alpha (g(t) e^{t/\tau}) \quad (\text{II.5})$$

La relation (II.5) définit ce que nous appelons la dérivée implicite d'ordre  $\alpha$  de  $g(t)$ . La transformée de Laplace de cette équation donne [LAY98]:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)^\alpha}, \text{ avec } \tau \in \mathfrak{R}^+ \text{ et } \Re(\alpha) > 0 \quad (\text{II.6})$$

expression dont la forme évoque bien la présence implicite d'une dérivée d'ordre  $\alpha$ .

Dans le cas général, un modèle est dit à dérivée d'ordre fractionnaire implicite lorsque il est fondé sur le produit de pôles et zéros d'ordre fractionnaire, soit :

$$G(s) = \prod_{i=1}^N (1 + \tau_i s)^{\alpha_i}, \text{ avec } \Re(\tau_i) \in \mathfrak{R}^+ \quad \alpha_i (i = 1, \dots, N) \in \mathbb{C} \quad (\text{II.7})$$

### II.2.3 Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire

Comme dans le cas entier, une représentation d'état d'ordre fractionnaire comporte deux équations :

- une équation d'état d'ordre fractionnaire dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel;
- une équation d'observation identique à celle du cas entier.

Elle est ainsi définie par le système d'équation :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

dans lequel :

$u$  est le vecteur des entrées de dimension  $(n_e \times 1)$  ;

$x$  est le vecteur d'état d'ordre fractionnaire de dimension  $(n_x \times 1)$  ;

$y$  est le vecteur des sorties de dimension  $(n_y \times 1)$  ;

$\alpha$  est l'ordre de dérivation tel que  $0 < \alpha < 1$  ;

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont tous des matrices ou des vecteurs à éléments constants et de dimension appropriée.

**Remarque 1** : Comme pour les représentations d'état d'ordre entier, les représentations d'état d'ordre fractionnaire ne sont pas uniques.

Les systèmes d'ordre fractionnaire réel commensurable, permettent aussi une représentation dans l'espace d'état [POD99], soit :

$$\begin{cases} D^{(1/Q)}x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

**Théorème 1** [OUS05] : La représentation d'état (II.9) correspond à la matrice de transfert :

$$y = \left( C \left( s^{1/Q} I - A \right)^{-1} B + D \right) u \quad (\text{II.10})$$

avec l'hypothèse que toutes les conditions initiales sont nulles.

**Preuve** À partir de la dernière hypothèse on peut écrire,

$$s^{1/Q}x = Ax + Bu \Leftrightarrow \left( s^{1/Q}I - A \right)x = Bu \Rightarrow x = \left( s^{1/Q}I - A \right)^{-1} Bu$$

en substituant  $x$  dans l'équation (II.9), on obtient (II.10).

**Remarque 2** [OGA97]: Il faut souligner le fait qu'une fonction de transfert d'ordre fractionnaire ne peut être obtenue à partir de la représentation d'état que dans le seul cas où les conditions initiales le permettent ; et si la définition de Riemann-Liouville de la dérivée d'ordre fractionnaire est utilisée, Pour cette raison la définition de Gründwald-Leitnikov est souvent utilisée pour ces calculs.

Le résultat suivant peut être démontré à partir du théorème 1, comme dans le cas d'ordre entier.

**Théorème 2** la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^N b_j s^{j/Q}}{s^{N/Q} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i s^{i/Q}}, \quad N, Q \in \mathbb{N}, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R} \quad (\text{II.11})$$

est équivalente au système d'état suivant, appelé forme canonique contrôlable [OGA97]:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D^{(1/Q)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \\
 \\
 y = \begin{bmatrix} b_{N-1} - a_{N-1}b_N & b_{N-2} - a_{N-2}b_N & \cdots & b_0 - a_0b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u
 \end{array} \right. \quad (\text{II.12})$$

Elle peut être aussi représentée par une deuxième forme, appelée forme canonique observable :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D^{(1/Q)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{N-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0b_N \\ b_1 - a_1b_N \\ 0 \\ \vdots \\ b_{N-1} - a_{N-1}b_N \end{bmatrix} u \\
 \\
 y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u
 \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

#### II.2.4 Décomposition modale d'un système d'ordre fractionnaire

Dans le cas entier, la décomposition modale d'un système s'effectue, soit par décomposition en éléments simples si le système est décrit par une fonction de transfert de la forme  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$ , soit par diagonalisation de la matrice d'évolution si le système est décrit par une représentation d'état.

De manière analogue au cas entier, la décomposition modale d'un système d'ordre fractionnaire réel commensurable s'effectue par la diagonalisation de la matrice d'évolution. Un changement de base par transformation semblable du système (II.9) permet en effet d'obtenir une nouvelle formulation, soit :

$$\begin{cases} D^{(1/Q)} x_J = Jx_J + B_J u \\ y = C_J x_J + Du \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

où  $J$  est la matrice de Jordan contenant sur sa diagonale l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A$ .

Mettant  $\alpha = 1/Q$ , alors, la sortie  $y(t)$  peut être exprimée par :

$$y(t) = \ell^{-1} \left\{ C_J (s^\alpha I - J)^{-1} B_J \right\}^* u(t) + Du(t). \quad (\text{II.15})$$

Comme  $J$  est une matrice de Jordan, la matrice  $(s^\alpha I - J)^{-1}$  peut être exprimée par :

$$(s^\alpha I - J)^{-1} = \begin{bmatrix} (s^\alpha I - J_{d_1}(\lambda_1))^{-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & (s^\alpha I - J_{d_l}(\lambda_l))^{-1} & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & (s^\alpha I - J_{d_N}(\lambda_N))^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

avec

$$(s^\alpha I - J_{d_l}(\lambda_l))^{-1} = \begin{bmatrix} (s^\alpha - \lambda_l)^{-1} & (s^\alpha - \lambda_l)^{-2} & \dots & (s^\alpha - \lambda_l)^{-d_l} \\ & (s^\alpha - \lambda_l)^{-1} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & (s^\alpha - \lambda_l)^{-2} \\ & & & (s^\alpha - \lambda_l)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

où  $\lambda_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ), sont les valeurs propres du système et  $d_l$  est la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_l$ .

La sortie  $y(t)$  est donc un vecteur dont les composantes sont définies par une combinaison linéaire d'éléments, appelés modes propres du système de la forme  $\ell^{-1} \left\{ (s^\alpha - \lambda_l)^{-d_l} \right\}^* u(t)$ .

## II.3 Stabilité, observabilité et contrôlabilité de systèmes d'ordre fractionnaire

### II.3.1 Conditions de stabilité

Précisons ici que l'on entend par stabilité d'un système définie par sa fonction de transfert  $G(s)$ , la stabilité BIBO (Bounded Input–Bounded Output) dont une condition suffisante est donnée par l'équation :

$$\int_0^{\infty} |L^{-1}\{G(s)\}dt| = K < \infty, \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, un système de type (II.3) est stable dans le sens BIBO si et seulement si toutes les racines complexes  $r_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) de son dénominateur vérifient le théorème de Matignon [MAT96], soit :

$$|\arg(r_l)| > \frac{\pi}{2Q}, \quad \forall l = 1, \dots, L \quad (\text{II.19})$$

Dans le cas où l'ordre de dérivation est un nombre réel supérieur à 1, la condition de stabilité se ramène à une condition sur les valeurs propres donnée par [MAT96] :

$$|\arg(\lambda_l)| > \frac{\pi}{2Q}, \quad \forall l = 1, \dots, L \quad (\text{II.20})$$

### II.3.2 Observabilité et contrôlabilité

Les deux résultats suivants peuvent être démontrés comme leurs similaires dans le cas d'ordre entier [VIN01, VAL05].

**Théorème 1 :** Un système d'ordre fractionnaire commensurable de la forme (II.9) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité donnée par (II.21) est une matrice de rang plein,

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{L-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

où  $L$  est le nombre de variable d'état

**Théorème 2 :** Un système d'ordre fractionnaire commensurable représenté par le système d'équation d'état (II.9) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité donnée par l'équation (II.22) est de rang plein,

$$M_{cont} = [B \ AB \ \dots \ A^{L-1}B] \quad (\text{II.22})$$

où  $L$  est le nombre de variable d'état.

## II.4 Simulation temporelle de systèmes d'ordre fractionnaire réel

À cause de sa représentation irrationnelle, l'utilisation des méthodes ordinaires pour la simulation et l'identification d'un système d'ordre fractionnaire est dans la plus part des cas très compliquée [OUS95]. Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes ont été développées durant les 20 dernières années, [OUS83 ; CHA92 ; VIN00 ; PET01, CHE02].

Trois approches peuvent être distinguées :

- approches basées sur l'expression analytique de la sortie du système, destiné pour la simulation.
- approches basées sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire réel par un modèle rationnel discret, destiné pour la simulation, l'identification et l'implémentation numérique.
- approches basées sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire réel par un modèle rationnel continu, destiné pour la simulation, l'identification et l'implémentation analogique.

Le mérite relatif de chaque approche dépend de l'ordre de dérivation ou de l'intégration, de l'ordre de complexité du système, de la bande de fréquence dans la quelle s'effectue l'approximation, de l'objectif à réaliser, et d'autre facteurs, ....

### II.4.1 Approches basées sur l'expression analytique de la sortie

Bien qu'ayant fait l'objet d'une résolution numérique [OUS95], la simulation d'un système décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire complexe est généralement difficile par les méthodes analytiques. Notre étude dans cette section se bornera donc aux systèmes décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire réel.

#### II.4.1.1 Méthode basée sur la représentation modale de systèmes fractionnaires

La sortie d'un système d'ordre fractionnaire réel commensurable peut être calculée en utilisant la forme modale de sa fonction de transfert (voir section II.2.4), soit, dans le cas de pôles distincts :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{l=1}^L \frac{A_l}{s^\alpha - \lambda_l}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{II.23})$$

Ainsi, la sortie du système est une combinaison linéaire des modes propres. La sortie correspondant à la  $l^{\text{ème}}$  mode propre est :

$$y_l(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{A_l}{s^\alpha - \lambda_l} \right\} \otimes u(t) = g_l(t) \otimes u(t) \quad (\text{II.24})$$

où  $\otimes$  dénote le produit de convolution et  $g_l(t)$  est la transformée inverse de Mellin-Fourier du  $l^{\text{ème}}$  mode propre donnée par [OUS83] :

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{A_l}{s^\alpha - \lambda_l} \right\} = A_l \sum_{k=1}^{\text{Nombre de pôles}} \frac{p_k}{\alpha \lambda_l} e^{p_k t} + \frac{A_l \sin(\alpha \pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^\alpha e^{-tx}}{x^{2\alpha} - 2\lambda_l x^\alpha \cos(\alpha \pi) + \lambda_l^2} dx \quad (\text{II.25})$$

où  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) sont les pôles du système.

La première partie du deuxième membre de (II.25) est appelée mode exponentiel. Elle résulte du calcul des résidus dans chaque pôle de  $1/(s^\alpha - \lambda_l)$ . La deuxième partie est appelée multimode aperiodique. Elle exprime la caractéristique fractionnaire du système.

#### II.4.1.2 Méthode basée sur les fonctions de type Mittag-Leffler

Considérons le système décrit par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire réel suivante:

$$a_0 D^{\beta_0} y(t) + a_1 D^{\beta_1} y(t) + \dots + a_n D^{\beta_n} y(t) = u(t) \quad (\text{II.26})$$

où  $a_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des constantes arbitraires et  $\beta_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres réels tels que :

$$(\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_0),$$

La fonction de transfert correspondant à (II.26) est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\beta_0}} \quad (\text{II.27})$$

Pour trouver la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle de ce système, nous devons évaluer la transformée de Laplace inverse de  $G(s)$ . En 1953, Agarwal [AGA53] a introduit la fameuse fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres  $E_{\alpha,\beta}(z)$  permettant de faciliter ce passage dans le domaine temporel. Sa définition fut modifiée plus tard par Erdélyi *et al.* [ERD55] pour devenir,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (\text{II.28})$$

sa dérivée d'ordre  $k$  est donnée par :

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+k)! z^i}{i! \Gamma(\alpha i + \alpha k + \beta)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II.29})$$

Podlubny a introduit lui aussi une forme plus convenable pour le calcul de cette dérivée [POD94a], donnée par :

$$\varepsilon_k(t, a; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} E^{(k)}_{\alpha,\beta}(at^\alpha) \quad (\text{II.30})$$

dont la transformée de Laplace est donnée par [POD94b]

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \varepsilon_k(t, a; \alpha, \beta) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha + a)^{k+1}}, \quad (\Re(s) > |a|^{1/\alpha}) \quad (\text{II.31})$$

Parmi les principales propriétés de la fonction  $\varepsilon_k(t, a; \alpha, \beta)$  est la simplicité de sa différentiation :

$$D^\lambda \varepsilon_k(t, a; \alpha, \beta) = \varepsilon_k(t, a; \alpha, \beta - \lambda), \quad (\lambda < \beta) \quad (\text{II.32})$$

Ainsi, la transformée de Laplace inverse du transfert (II.27) calculée en utilisant l'équation (II.31) donne la réponse impulsionnelle (voir Annexe A) :

$$y_{imp}(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_{n-2}=m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_1, k_2, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \varepsilon_m \left( t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j \right) \quad (\text{II.33})$$

Pour trouver la réponse indicielle unitaire  $y_{ind}(t)$ , on doit intégrer (II.33) en utilisant (II.32), on obtient alors :

$$y_{ind}(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_{n-2}=m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_1, k_2, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \varepsilon_m \left( t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j + 1 \right) \quad (II.34)$$

#### II.4.1.3 Simulation analytique d'un système d'ordre fractionnaire explicite

Considérant le système d'ordre fractionnaire décrit par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire donné par :

$${}_0D_t^\alpha y(t) + ay(t) = bu(t) \quad (II.35)$$

où  $\alpha$ ,  $a$  et  $b$  sont des nombres réels positifs.

On considère que ce système est relaxé à l'instant  $t = 0$ . En utilisant les définitions de la transformée de Laplace d'un opérateur d'ordre fractionnaire, (cf. section I.2), la transformée de Laplace de l'équation (II.35) peut être donnée par :

$$s^\alpha Y(p) + aY(p) = bU(p) \quad (II.36)$$

ou sous la forme opérationnelle par :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{b}{s^\alpha + a} \quad (II.37)$$

Puisque  $b$  est un facteur multiplicatif, on peut le considérer égale à un. Alors, la fonction de transfert  $G(s)$  peut être développée sous la forme:

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha + a} = \frac{1}{s^\alpha} - \frac{a}{s^{2\alpha}} + \frac{a^2}{s^{3\alpha}} - \dots = \frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{s^{k\alpha}} \quad (II.38)$$

En utilisant les relations (I.44) et (I.45) du chapitre I, la transformée de Laplace inverse de la série (II.38) donne :

$$g(t) = y_{impl}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} - \frac{a}{s^{2\alpha}} + \frac{a^2}{s^{3\alpha}} - \dots \right\} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{at^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{a^2t^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} - \dots \quad (II.39)$$

L'équation (II.39) représente la réponse impulsionnelle du système (II.35). Elle peut être réécrite sous la forme :

$$y_{imp}(t) = t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} = F_{\alpha}[-a, t], \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.40})$$

où  $F_{\alpha}[a, t]$  est une fonction définie par [HAR98] :

$$F_{\alpha}[a, t] = \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha} - a} \right\}, \quad \alpha > 0. \quad (\text{II.41})$$

Cette fonction est reliée à la fonction de Mittag-Laffler par les relations suivantes :

$$\ell \{ E_{\alpha}[-at^{\alpha}] \} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + a} = s^{\alpha-1} \ell \{ F_{\alpha}[-a, t] \} \quad (\text{II.42})$$

et  ${}_0D_t^{\alpha-1} F_{\alpha}[-a, t] = E_{\alpha}[-at^{\alpha}] \quad (\text{II.43})$

où  $E_{\alpha}$  est la fonction de Mittag-Leffler avec un seul paramètre, définie par:

$$E_{\alpha}[z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.44})$$

La multiplication de l'équation (II.42) par  $s^{-\alpha}$  donne :

$$s^{-\alpha} L \{ E_{\alpha}[-at^{\alpha}] \} = s^{-1} L \{ F_{\alpha}[-a, t] \} = \frac{1}{s(s^{\alpha} + a)} \quad (\text{II.45})$$

L'équation (II.45) représente la transformée de Laplace de  $y(t)$  lorsque l'entrée  $u(t)$  est un échelon unitaire. Alors, en utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse indicielle du système (II.35) lorsque ses conditions initiales sont nulles est donnée par :

$$y_{ind}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{\alpha} + a)} \right\} = L^{-1} \{ s^{-\alpha} L \{ E_{\alpha}[-at^{\alpha}] \} \} = {}_0D_t^{-\alpha} E_{\alpha}[-at^{\alpha}] = \frac{1}{a} [1 - E_{\alpha}[-at^{\alpha}]] \quad (\text{II.46})$$

ou sous la forme:

$$y_{ind}(t) = \frac{1}{a} \left[ 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \right], \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.47})$$

Les figures (II.1) et (II.2) représentent respectivement la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle du système (II.35) pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $\alpha$  avec  $a = 1$ .

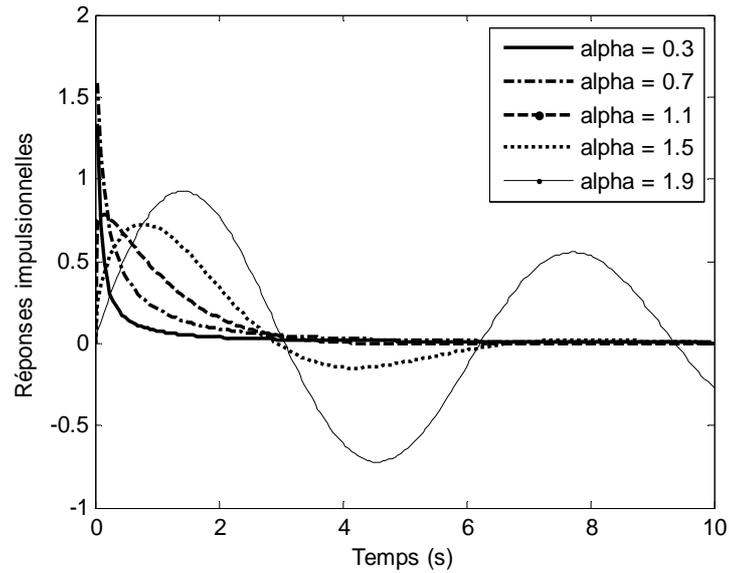


Figure II.1 Réponse impulsionnelle du système  ${}_0D_t^\alpha y(t) + y(t) = u(t)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

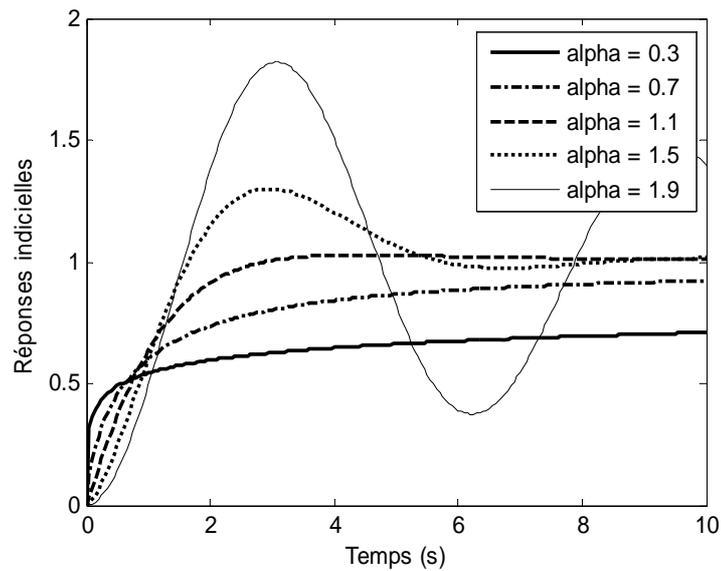


Figure II.2 Réponse indicielle du système  ${}_0D_t^\alpha y(t) + y(t) = u(t)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

#### II.4.1.4 Simulation analytique d'un système d'ordre fractionnaire implicite

Nous avons montrés précédemment comment résoudre analytiquement une équation différentielle d'ordre fractionnaire explicite. La solution retenue pour la résolution d'un système implicite est de se ramener à un système explicite par l'intermédiaire d'un changement de variables [OUS05].

La fonction de transfert d'un système élémentaire d'ordre fractionnaire implicite peut être considérée de la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{g_0}{(1 + \tau s)^\alpha} = \frac{g_0}{\tau^\alpha} \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} + s\right)^\alpha} \quad (\text{II.48})$$

en effectuant le changement de variable  $s' = \frac{1}{\tau} + s$ , l'équation (II.48) peut être réécrite

sous la forme :

$$G\left(s' - \frac{1}{\tau}\right) = \frac{g_0}{\tau^\alpha} \frac{1}{(s')^\alpha} \quad (\text{II.49})$$

En utilisant les transformées de Laplace suivantes :

$$\ell^{-1}\{G(s)\} = g(t) \quad (\text{II.50})$$

$$\ell^{-1}\{G(s+a)\} = g(t)e^{-at} \quad (\text{II.51})$$

$$\ell^{-1}\{s^\alpha G(s+a)\} = D^\alpha(g(t)e^{-at}) \quad (\text{II.52})$$

on peut facilement calculer la sortie temporelle comme suit :

$$Y\left(s' - \frac{1}{\tau}\right) = \frac{g_0}{\tau^\alpha} \frac{1}{(s')^\alpha} U\left(s' - \frac{1}{\tau}\right) \xrightarrow{\ell^{-1}} y(t)e^{t/\tau} = \frac{g_0}{\tau^\alpha} D^{-\alpha} [u(t)e^{t/\tau}] \quad (\text{II.53})$$

soit

$$y(t) = \frac{g_0}{\tau^\alpha} e^{-(t/\tau)} D^{-\alpha} [u(t)e^{t/\tau}] \quad (\text{II.54})$$

## II.4.2 Approches basées sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret

Cette approche consiste à approximer le modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret en substituant l'opérateur de Laplace  $s$  dans le modèle fractionnaire par son équivalent en temps discret, ce qui donne dans le cas d'une fonction de transfert de type (II.2) :

$$G(z) = \frac{b_0(w(z^{-1}))^{n_{b_0}} + \dots + b_M(w(z^{-1}))^{n_{b_M}}}{a_0(w(z^{-1}))^{n_{a_0}} + a_1(w(z^{-1}))^{n_{a_1}} + \dots + a_L(w(z^{-1}))^{n_{a_L}}} \quad (\text{II.55})$$

où  $w(z)$  est la transformée en  $Z$  de l'opérateur de Laplace  $s$ .

L'approximation numérique de  $(w(z))^\alpha$  peut être calculée par développement en série en utilisant différentes méthodes. Parmi les méthodes les plus répandues celles d'Euler (Grünwald), de Tustin, de Simpson ou d'Al-alaoui [Tab.II.1, ALA94 ; VIN00].

Tab. II.1 Approximation en temps discret de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $s^\alpha$ .

Euler (Grünwald) :	$(w(z^{-1}))^\alpha = \left( \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \right)^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \left( 1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^{-2} + \dots \right)$
Tustin :	$(w(z^{-1}))^\alpha = \left( \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^\alpha = \left( \frac{2}{T} \right)^\alpha \left( 1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} + \dots \right)$
Simpson :	$(w(z^{-1}))^\alpha = \left( \frac{3}{T} \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}} \right)^\alpha = \left( \frac{3}{T} \right)^\alpha \left( 1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots \right)$
Al_alaoui :	$(w(z^{-1}))^\alpha = \left( \frac{8}{7T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}/7} \right)^\alpha = \left( \frac{8}{7T} \right)^\alpha \left( 1 - \frac{8}{7} \alpha z^{-1} + \left( -\frac{24}{49} \alpha + \frac{32}{49} \alpha^2 \right) z^{-2} + \dots \right)$

Comme on peut le voir dans les expressions du tableau II.1, un système d'ordre fractionnaire décrit par une fonction de transfert continue irrationnelle dans le domaine de Laplace est équivalent à une fonction de transfert de dimension infinie dans le domaine de Z. En d'autres termes, un système d'ordre fractionnaire a une mémoire illimitée, au contraire d'un système d'ordre entier où la mémoire est limitée.

#### II.4.2.1 Simulation par modèle à temps discret d'un système d'ordre fractionnaire explicite

La technique la plus utilisée pour la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire explicites est celle issue de la définition de Grünwald-Letnikov basée sur la méthode d'approximation numérique d'Euler [MIL93]. L'opérateur d'ordre fractionnaire est approximé en utilisant la formule de l'équation (I.51), (cf. section I.6).

Le remplacement de chaque opérateur d'ordre fractionnaire de l'équation différentielle (II.1) par son approximation discrète conduit donc à l'équation récurrente [OUS95] :

$$y(t) = - \frac{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{al}}} \sum_{k=1}^N (-1)^k \binom{n_{al}}{k} y((N-k)h)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{al}}}} + \frac{\sum_{m=0}^M \frac{b_m}{h^{n_{bm}}} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n_{bm}}{k} u((N-k)h)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{al}}}} \quad (\text{II.56})$$

La borne supérieure  $N$  des sommes portant sur  $y$  et  $u$  dépendant du temps  $t = Nh$ , ce qui définit une équation récurrente de dimension croissante avec le temps. Cette propriété confirme le caractère global de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire.

L'avantage d'une telle approche réside dans sa simplicité de mise en œuvre. Elle est de plus applicable quelles que soient les valeurs des ordres de dérivation, commensurables ou non, réels ou complexes, et pour une entrée quelconque.

Néanmoins, la simulation de l'équation (II.56) requiert, pour chaque pas d'échantillonnage, le calcul des sommes de dimension croissante avec le temps. L'implémentation d'un tel calcul est donc difficilement envisageable dans le cadre d'une simulation en temps réel.

#### II.4.2.2 Simulation par modèle à temps discret d'un système d'ordre fractionnel implicite

La transmittance en  $z$  correspondant à la transmittance en  $s$  d'un système d'ordre fractionnaire implicite représenté par un pôle à puissance fractionnaire :

$$G(z) = Z \left[ \frac{g_0}{(1 + \tau s)^\alpha} \right], \quad \alpha \in \mathfrak{R}, \quad \tau \in \mathfrak{R}^+ \quad (\text{II.57})$$

peut être exprimée par la relation [LEVR04] :

$$G(z) = g_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{h \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(i + \alpha)}{\Gamma(i + 1)} \left( \frac{h}{\tau + h} \right)^\alpha \left( 1 + \frac{h}{\tau} \right)^{-i} z^{-i} \quad (\text{II.58})$$

avec  $h$  désignant la période d'échantillonnage.

Sachant que cette transmittance n'est autre que la transformée en  $Z$  de la réponse impulsionnelle discrète  $y_{impl}(ih)$ , soit

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y_{impl}(ih) z^{-i} \quad (\text{II.59})$$

L'identification des relations (II.58) et (II.59) permet d'exprimer  $y_{impl}(ih)$  par :

$$y_{impl}(ih) = \frac{g_0}{h\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+1)} \left(\frac{h}{\tau+h}\right)^\alpha \left(1+\frac{h}{\tau}\right)^{-i} \quad (\text{II.60})$$

Le passage à la réponse impulsionnelle continue s'effectuant en faisant tendre  $h$  vers zéro, et  $i$  vers l'infini conformément à  $t = ih$ , il est possible d'écrire :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+1)} = i^{\alpha-1} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ i \rightarrow \infty}} \left(1+\frac{h}{\tau}\right)^{-i} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ i \rightarrow \infty}} e^{-i \ln\left(1+\frac{h}{\tau}\right)} = e^{-\frac{ih}{\tau}} \quad (\text{II.61})$$

la réponse  $y_{impl}(ih)$  devienne ainsi :

$$y_{impl}(ih) = \frac{g_0}{\tau\Gamma(\alpha)} \left(\frac{ih}{\tau}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{ih}{\tau}} \quad (\text{II.62})$$

### II.4.3 Approche basée sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel continu

Cette approche consiste à calculer la sortie du système en utilisant un modèle rationnel continu équivalent, obtenu à partir de l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire dans une bande de fréquence bien définie. Plusieurs méthodes d'approximation ont été développées. Le choix d'une méthode parmi les autres, dépend de la structure des systèmes que l'on cherche à simuler.

#### II.4.3.1 Méthode de Carlson

La méthode proposée par Carlson [CAR64], tirée de processus régulier de Newton, utilisé pour l'approximation itérative de  $\alpha^{ème}$  racine, peut être utilisée pour l'approximation itérative de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $s^\alpha$ . Cette méthode est basée sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\alpha} - (G(s)) = 0 ; \quad H(s) = (G(s))^\alpha \quad (\text{II.63})$$

En posant  $\alpha = 1/q$ ,  $m = q/2$ , à chaque itération à partir de la valeur initiale  $H_0(s) = 1$ , une fonction rationnelle d'approximation de  $(G(s))^\alpha = s^\alpha$  peut être donnée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (\text{II.64})$$

Le modèle d'approximation est obtenu ensuite, en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle par son approximation rationnelle.

#### II.4.3.2 Méthode de Matsuda

La méthode proposée par [MAT93] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s) = s^\alpha$  par une fonction rationnelle  $\hat{G}(s)$  en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Le gain est calculé en utilisant  $M$  fréquences réparties dans une bande de fréquence  $[w_o, w_M]$  dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble de points sélectionnés  $w_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ , l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{s - w_0}{a_1 +} \frac{s - w_1}{a_2 +} \frac{s - w_2}{a_3 +} \dots = \left[ a_0; \frac{s - w_{i-1}}{a_i} \right]_{i=1}^M \quad (\text{II.65})$$

$$\text{où } a_i = f_i(w_i), f_{i+1}(s) = \frac{s - w_i}{f_i(s) - a_i} \text{ et } f_0(w) = |G(jw)|, , i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (\text{II.66})$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation.

#### II.4.3.3 Méthode d'Oustaloup

La méthode d'Oustaloup [OUS91] repose sur l'approximation en temps continu de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s) = s^\alpha, \alpha \in \mathfrak{R}$ , par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre entier, répartis dans une bande de fréquence limitée.

Ainsi, l'approximation de l'opérateur  $s^\alpha$  dans une bande de fréquence  $[w_b, w_h]$  est donnée par :

$$G(s) = s^\alpha \approx \hat{G}(s) = C_0 \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \right) \quad (\text{II.67})$$

avec

$$\text{si } \alpha > 0 : \begin{cases} z_1 = w_b \sqrt{\eta} \\ p_i = z_i \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ z_{i+1} = p_i \eta, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ w_h = p_N \sqrt{\eta} \end{cases}, \quad \text{si } \alpha < 0 : \begin{cases} p_1 = w_b \sqrt{\eta} \\ z_i = p_i \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ p_{i+1} = z_i \eta, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ w_h = z_N \sqrt{\eta} \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

$$N = \text{Integer} \left\{ \frac{\log(w_h / w_b)}{\log(\alpha \eta)} \right\} \quad (\text{II.69})$$

$$\alpha = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{|\lambda|/N}, \quad \eta = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{(1-|\alpha|)/N} \quad (\text{II.70})$$

Le modèle rationnel est obtenu ensuite en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire du modèle original par son approximation rationnelle. La sortie du modèle est donc la convolution du modèle rationnel obtenu avec le signal d'entrée.

#### II.4.3.4 Méthode de Charef

Cette méthode est utilisée essentiellement pour la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire implicites. La méthode de Charef (cf. chapitre I section I.7), appelée aussi méthode de la fonction de singularité, repose sur l'approximation des pôles à puissance fractionnaire (PPF) et des zéros à puissance fractionnaire (ZPF) de la fonction de transfert du système irrationnelle implicite par une fonction rationnelle, facilitant ainsi, l'utilisation des méthodes de simulation ordinaires.

#### II.4.3.5 Méthode basée sur la fonction de distribution des temps de relaxation

Dans ce paragraphe nous allons présenter une nouvelle méthode proposée essentiellement pour l'approximation et la simulation de la fonction de transfert fondamentale d'ordre fractionnaire définie par Cole-Cole [COL41], soit :

$$G(s) = \frac{b_0}{1 + (\tau_0 s)^\alpha} \quad (\text{II.71})$$

où  $b_0, \tau_0$  et  $\alpha$  sont des nombres réels et  $0 < \alpha < 1$ .

Fuoss R. M. and Kirkwood J.K. [FUR41] ont introduit une approche globale dont le formalisme peut permettre d'exprimer ce type de système sous la forme d'une distribution des temps de relaxation  $R(\tau)$ , soit :

$$G(s) = \int_0^{\infty} \frac{R(\tau)}{1 + \tau s} d\tau \quad (\text{II.72})$$

Cole K. S. and Cole R. H. [COL41] ont appliqués cette méthode pour calculer la fonction de distribution des temps de relaxation du modèle (II.71), soit :

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\cosh\left[\alpha \log\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right] - \cos[(1-\alpha)\pi]} \quad (\text{II.73})$$

La méthode d'approximation considérée ici commence par la discrétisation de la fonction de distribution des temps de relaxation  $R(\tau)$  dans une bande de fréquence  $w_{\max}$  ( $w_{\min} \ll 1$ ), comme suit [SUN92] :

$$R(\tau) = \sum_{i=1}^{2N-1} R(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i) \quad (\text{II.74})$$

$$\tau_i = \tau_0 (\lambda)^{(N-i)}, \text{ for } i = 1, 2, \dots, 2N-1, \lambda > 1 \quad (\text{II.75})$$

$$N = \text{Integer} \left[ \frac{\log(\tau_0 w_{\max})}{\log(\lambda)} \right] + 1 \quad (\text{II.76})$$

En utilisant les équation (II.74) et (II.75), la fonction de transfert (II.71) peut être approximée par:

$$G(s) \approx G_N(s) = b \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{R(\tau_i)}{1 + \tau_i s} \quad (\text{II.77})$$

où  $b$  est un nombre réel positif.

À partir de la condition  $G(jw) \approx G_N(jw)|_{w=w_{\min}}$ , le paramètre  $b$  peut être donné par :

$$b = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2N-1} R(\tau_i)} \quad (\text{II.78})$$

Pour un ordre fractionnaire donné  $0 < \alpha < 1$  et un nombre  $N$  fixe, la valeur optimale du paramètre  $\lambda$  peut être calculée en minimisant un critère  $J_r(\lambda)$  qui prend en considération simultanément l'erreur de gain et l'erreur de phase entre la fonction originale et son approximation rationnelle, soit :

$$J_r(\lambda) = \sum_{w_{\min}}^{w_{\max}} \left[ r \left( |G_N(jw)| - |G(jw)| \right)^2 + (1-r) \left( \arg(G_N(jw)) - \arg(G(jw)) \right)^2 \right] \quad (\text{II.79})$$

$$[\lambda_{op}] = \arg \min(J(\lambda)) \quad (\text{II.80})$$

avec  $\lambda > 1$  et  $0 < r < 1$  est un facteur de pondération.

Le paramètre inconnu  $\lambda_{op}$  apparaisse sous une forme non linéaire, pour déterminer sa valeur optimale il est donc nécessaire d'utiliser une méthode d'optimisation non linéaire.

En utilisant l'algorithme génétique implémenté dans MATLAB TOOLBOX, l'approximation optimale de la fonction de transfert (II.71) pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $\alpha$  avec trois valeurs différentes de  $N$  et un rapport  $r = 0.5$ , sont donnés par le tableau (II.2).

Tab. II.2: Les valeurs optimales du paramètre  $\lambda_{op}$  pour différentes valeurs de l'ordre  $\alpha$  et  $N$   
avec  $\tau_0 = 1$  et  $r = 0.5$ .

		$N=10$	$N=20$	$N=40$
$\alpha = 0.1$	$\lambda_{op}$	22.644	10.343	4.748
	$ \max_{eg} _{dB}$	1.162	0.233	0.052
	$ \max_{eph} _{deg}$	2.725	0.644	0.105
$\alpha = 0.4$	$\lambda_{op}$	7.115	3.645	2.640
	$ \max_{eg} _{dB}$	0.331	0.028	0.002
	$ \max_{eph} _{deg}$	1.610	0.125	0.004
$\alpha = 0.7$	$\lambda_{op}$	5.044	2.740	2.261
	$ \max_{eg} _{dB}$	0.225	0.013	0.004
	$ \max_{eph} _{deg}$	1.680	0.092	0.014
$\alpha = 0.9$	$\lambda_{op}$	3.563	1.987	1.488
	$ \max_{eg} _{dB}$	2.451	0.599	0.056
	$ \max_{eph} _{deg}$	4.000	1.327	0.165

### II.4.4 Exemple illustratif

On propose par cet exemple une étude comparative de la méthode d'approximation proposée dans le paragraphe précédent avec celle d'Oustaloup [OUS91]. Pour cela, considérons le système dont la fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{1}{1 + s^{0.7}} \quad , \quad (\text{II.81})$$

Les figures (II.3) et (II.4) représentent respectivement les diagrammes de Bode de  $G(s)$  et de ses approximations rationnelles obtenues en utilisant la méthode d'Oustaloup et la méthode de la fonction de distribution des temps de relaxation dans une bande de fréquence  $[w_{\min}, w_{\max}] = [10^{-3}, 10^3]$ . La comparaison des réponses fréquentielles de ces deux approximations avec la réponse fréquentielle du système original montre clairement que l'approximation obtenue par la méthode de la fonction de distribution, utilisant un seul paramètre, est bien meilleure que celle obtenue par la méthode d'Oustaloup utilisant deux paramètres.

La figure (II.5) compare la réponse indicielle de (II.81), obtenue par la méthode analytique, avec les réponses indiciaires des deux approximations. On peut observer aussi que la réponse temporelle du système d'approximation obtenue par la fonction de distribution des temps de relaxation est la plus proche de celle obtenue analytiquement.

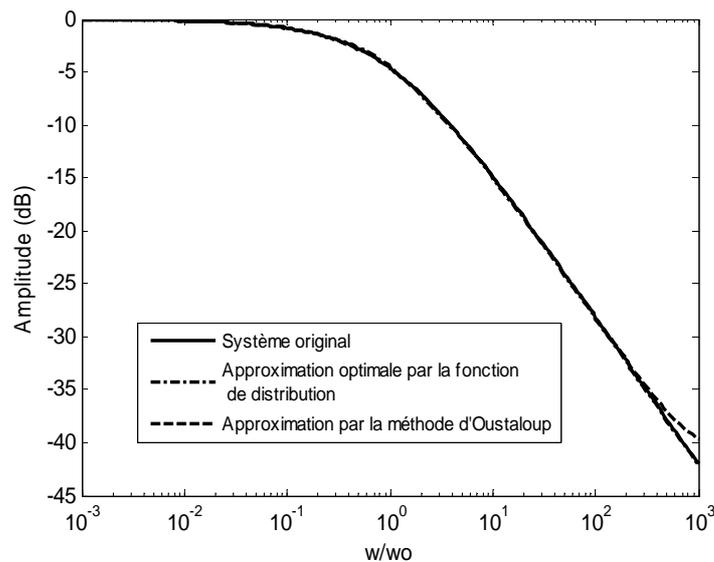


Figure II.3 Diagrammes de Bode de l'amplitude de  $G(s) = 1/(1 + s^{0.7})$  et de ses approximations en utilisant la méthode d'Oustaloup et la méthode de la fonction de distribution des temps de relaxation.

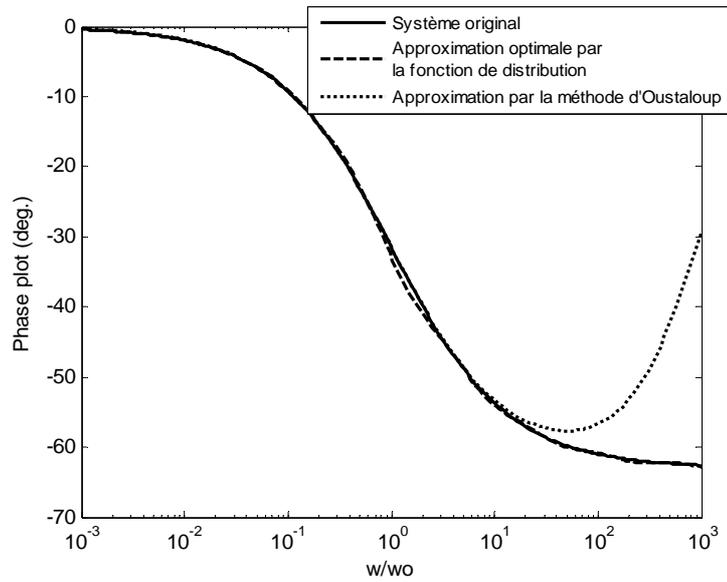


Figure II.4 Diagrammes de Bode de la phase de  $G(s) = 1/(1 + s^{0.7})$  et de ses approximations en utilisant la méthode d'Oustaloup et la méthode de la fonction de distribution des temps de relaxation.

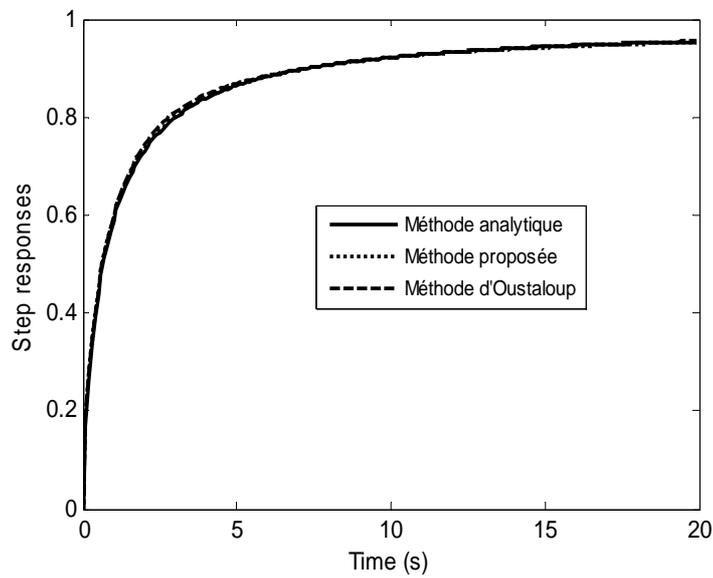


Figure II.5 Réponses indicielles de  $G(s) = 1/(1 + s^{0.7})$  en utilisant la méthode analytique, la méthode d'Oustaloup et la méthode de la fonction de distribution des temps de relaxation.

## II.5 Performances caractéristiques d'un système d'ordre fractionnaire

L'analyse fréquentielle et temporelle des systèmes d'ordre fractionnaire a montré que ce type de système possède des bonnes performances en termes de robustesse [OUS82]; [SUN90]; [CHA01].

Pour illustrer ces caractéristiques, on considère le système donné par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_n}\right)^{\alpha_1} + 2\xi\left(\frac{s}{w_n}\right)^{\alpha_2} + 1} \quad (\text{II.82})$$

Les figures (II.6) et (II.7) représentent respectivement les réponses indicielles du système (II.82) dans le cas d'ordres entiers avec  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = 1$ , et dans le cas d'ordres fractionnaires avec  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$ , pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement  $\xi$  avec  $w_n = 1$ . On peut remarquer clairement que l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire fait d'un système de deuxième ordre classique, un système d'ordre fractionnaire robuste par rapport à la variation du facteur d'amortissement.

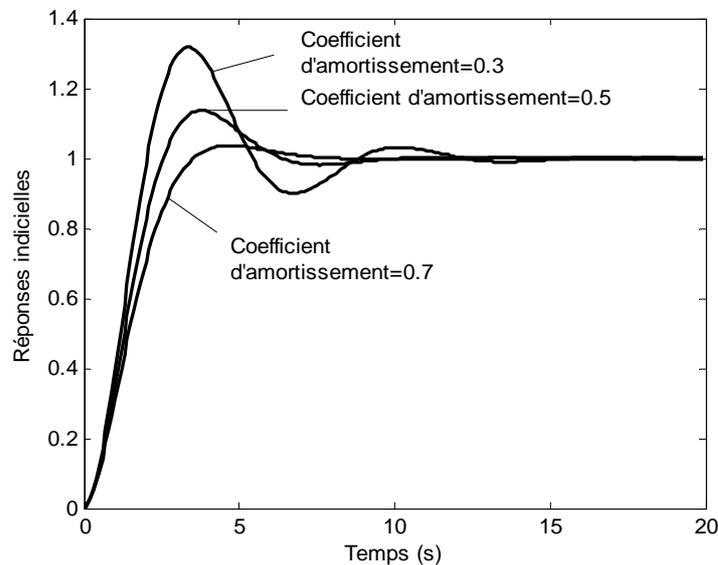


Figure II.6 Réponses indicielles du système (II.82) pour différentes valeurs du facteur d'amortissement  $\xi$ , avec  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = 1$ .

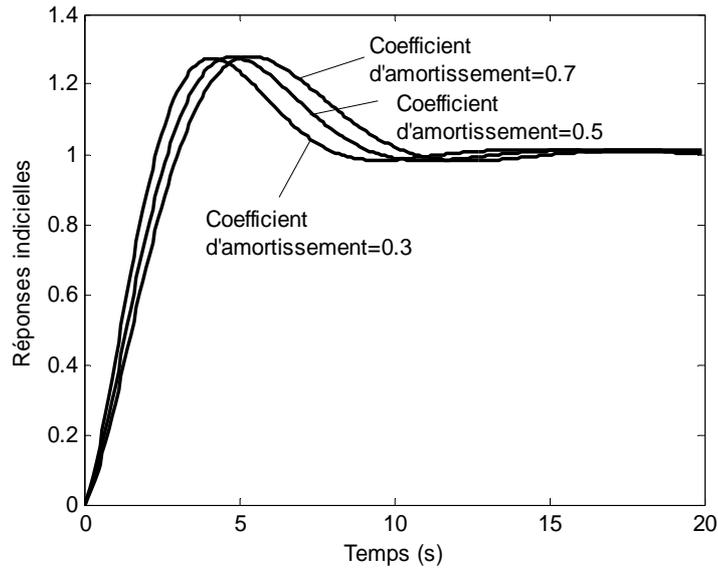


Figure II.7 Réponses indicielles du système (II.82) pour différentes valeurs du facteur d'amortissement  $\xi$ , avec  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$

## II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques outils mathématiques de base utilisés pour la représentation et la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire ainsi que les performances caractéristiques de ce type de systèmes. Après avoir rappelé les différentes méthodes d'approximation, largement utilisées pour la simulation et la synthèse de systèmes d'ordre fractionnaire réel, une méthode d'approximation optimale utilisant la fonction de distribution des temps de relaxation d'une classe de modèles de type Cole-Cole est proposée. Une étude comparative de cette approche avec la méthode d'Oustaloup nous a montrée que cette nouvelle technique donne des résultats remarquables en ce sens qu'elle donne une meilleure approximation avec un nombre réduit de paramètres.



# Chapitre III

## Identification de systèmes d'ordre fractionnaire

### III.1 Introduction

La construction et l'utilisation de modèles constituent, de nos jours, des étapes incontournables de nombreuses disciplines scientifiques et technologiques (physique, chimie, biologie, économie...). La modélisation permet en effet de formaliser le comportement du processus étudié à l'aide d'une représentation, baptisée « modèle », à partir de laquelle il est possible de comprendre, commander ou améliorer le fonctionnement du procédé analysé.

L'identification a pour but la détermination, généralement à partir de mesures physiques, des paramètres numériques d'un modèle mathématique, de telle sorte que dans le domaine de fonctionnement pour lequel il a été établi, ce modèle présente un comportement aussi proche que possible de celui du système réel.

Le modèle peut être choisi en se basant sur des lois physiques, alors, on aura un modèle descriptif dont les paramètres ont un sens physique, facilitant ainsi la compréhension de l'évolution dynamique du procédé et permet d'établir son implémentation physique. Mais de tels modèles sont souvent complexes et ne décrivent pas le comportement réel du procédé identifié. D'autres modèles ont une structure établie à partir des considérations physiques mais les paramètres sont obtenus par des méthodes basées sur des algorithmes d'optimisation. Un troisième type de modèles appelés modèles comportementaux ont une structure établie sans aucune considération physique mais les paramètres peuvent être déterminés soit par des procédés heuristiques, soit de manière systématique par des procédés algorithmiques en minimisant un critère d'optimisation, ces modèles présentent une grande souplesse d'exploitation.

L'objet de ce chapitre consiste à utiliser et exploiter le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire dans un contexte d'identification paramétrique des systèmes fractionnaires.

D'un point de vue mathématique, l'introduction de l'opérateur de dérivation fractionnaire dans une équation différentielle permet d'obtenir une solution analytique dont la dynamique présente des modes non exponentiels à mémoire longue (mulimodes apériodiques).

D'un point de vue physique, une équation différentielle d'ordre fractionnaire permet incontestablement une modélisation plus compacte (au sens du nombre de paramètres) qu'une équation différentielle entière.

Identifier un modèle à partir de données réelles devient difficile lorsque l'ordre fractionnaire est introduit. Pour un modèle entier, une fois l'ordre maximal du système à identifier fixé, les paramètres du modèle peuvent être optimisés directement, alors, que l'identification des modèles d'ordre fractionnaire nécessite le choix du nombre d'opérateurs, les puissances fractionnaires et le coefficient de chaque opérateur.

Plusieurs modèles et plusieurs méthodes ont été déjà proposés, notamment en France (Bordeaux, Poitiers, Toulouse). Un des problèmes majeur engendré par l'évaluation numérique de la dérivation d'ordre fractionnaire est la manipulation des matrices de données de dimension élevée qui conduit aux problèmes des singularités matricielles et par conséquence, au biais d'estimation dû aux erreurs de calculs. Pour pallier ce problème, et dans le but de l'identification paramétrique des systèmes non stationnaires ou dans le cas de systèmes de commandes où il faut prendre des décisions en ligne comme dans la commande adaptative, une méthode temporelle récursive basée sur l'extension de la méthode des moindres carrés pour l'estimation des paramètres d'une classe de modèles d'ordre fractionnaire est proposée dans ce chapitre.

La première partie de ce chapitre est consacrée à une étude bibliographique sur l'identification fréquentielle par modèle d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Elle propose une présentation non exhaustive des différentes techniques et leur évolution depuis les travaux de Levy datant de 1959. Levy donne une solution au problème d'interpolation de courbes par la minimisation de la norme  $\ell_2$  d'une fonction critère. Le problème ainsi défini, qui consiste à adapter une structure de transmittance spécifiée par l'utilisateur à un ensemble de données fréquentielles est largement rencontré dans le domaine de l'automatique, que ce soit pour identifier un procédé à partir de son analyse harmonique ou synthétiser un régulateur à partir de sa réponse en fréquence.

La deuxième partie présente quelques techniques fréquentielles déjà utilisées dans l'estimation paramétrique des modèles d'ordre fractionnaire.

Après avoir présentée une technique temporelle proposée par [TRI99] pour l'estimation paramétrique des systèmes d'ordre fractionnaire, une nouvelle technique est proposée dans la troisième partie de ce chapitre. Elle consiste à étendre la méthode des moindres carrés récursifs aux systèmes d'ordre fractionnaire.

## III.2 Identification fréquentielle de systèmes d'ordre fractionnaire

### III.2.1 Rappel des principes de différentes approches d'identification fréquentielle

Dans le domaine fréquentiel, la synthèse de certains régulateurs ou l'identification des systèmes dynamiques linéaires exige l'utilisation des techniques d'interpolation de courbes pour l'estimation des paramètres d'une transmittance. Le problème consiste alors à adapter les paramètres du modèle d'identification défini comme le rapport de deux polynômes, soit :

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_M s^{n_b}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_L s^{n_a}} = \frac{\sum_{j=0}^{n_b} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_a} a_i s^i}, \text{ avec } a_0 = 1 \quad (\text{III.1})$$

où  $A(s)$  et  $B(s)$  sont des polynômes de degrés spécifiés  $n_a$  et  $n_b \in \mathbb{N}$ .

Le principe de base de l'ensemble des algorithmes d'identification fréquentielle consiste à estimer le vecteur des paramètres  $\theta$  composé par les coefficients des polynômes  $B(s)$  et  $A(s)$ , soit :

$$\theta = [b_0, \dots, b_{n_b}, a_1, \dots, a_{n_a}]^T \quad (\text{III.2})$$

en minimisant la norme  $\ell_2$  de l'écart  $\mathcal{E}(j\omega)$  entre le modèle  $H(j\omega)$  et le système à identifier  $G(j\omega)$  sur un ensemble de  $N$  fréquences de mesure notées  $\omega_k$  avec  $k = [1, \dots, N]$ , soit:

$$\arg_{\theta} \min |\mathcal{E}(j\omega)|^2 = \sum_{k=1}^N |H(j\omega_k) - G(j\omega_k)|^2 \quad (\text{III.3})$$

Ce simple critère est non linéaire par rapport au vecteur  $\theta$ . Il convient alors de distinguer, parmi les approches existants, celle qui utilisent des techniques d'optimisation non linéaires de celles qui linéarisent le problème.

Les premières approches minimisent directement le critère. Si elles présentent l'avantage d'une implémentation immédiate, elles s'avèrent en revanche très sensible au problème de convergence et de minima locaux, surtout si le vecteur des paramètres n'est pas correctement initialisé.

Les autres approches contournent ce problème des minima locaux en linéarisant le problème initial (mais au prix d'un biais). Afin de mieux appréhender ce type d'approches, il convient de définir un critère d'erreur unifié  $J_\lambda$ , soit :

$$J_\lambda = \sum_{k=1}^N W_\lambda^2(jw_k) |e_\lambda(jw_k)|^2 \quad (\text{III.4})$$

où  $e_\lambda(jw_k)$  est une fonction linéaire vis-à-vis le vecteur de paramètres  $\theta$ ,  $W_\lambda(jw_k)$  est une fonction de pondération et  $\lambda$  un nombre d'itération.

En utilisant le dénominateur  $A(jw_k)$  du modèle d'identification comme pondération des erreurs de modélisation au carré, Levy [LEV59] pose le problème d'identification de la manière suivante :

$$\begin{cases} W_\lambda(jw_k) = 1 \\ e_\lambda(jw_k) = A(jw_k) \left[ \frac{B(jw_k)}{A(jw_k)} - G(jw_k) \right] = B(jw_k) - G(jw_k)A(jw_k) \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Une telle formulation se prête à une résolution par une méthode de types moindres carrés. Cependant, la technique développée par Levy donne un résultat biaisé compte tenu de la pondération par le polynôme  $A(jw)$ .

En 1963, Sanathanan et Koerner [SAN63] s'affranchissent du problème de biais par une approche itérative, soit :

$$\begin{cases} W_\lambda(jw_k) = 1 \\ e_\lambda(jw_k) = \frac{1}{A_{\lambda-1}(jw_k)} [B_\lambda(jw_k) - G(jw_k)A_\lambda(jw_k)] \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

où  $A_{\lambda-1}(jw_k)$  est calculé à partir des paramètres  $a_i$  estimés à l'itération  $\lambda - 1$ .

En 1970, Payne [PAY70] améliore les méthodes de Levy et de Sanathanan en intégrant directement, dans l'algorithme d'optimisation, les connaissances a priori du système (gain statique, comportement aux hautes fréquences...). En plus de l'amélioration de l'interpolation, la stabilité du modèle estimé est garantie.

Gyürki [GYÜ70] préconise un critère d'erreur relatif, en prenant une fonction de pondération de la forme :

$$W_\lambda(jw_k) = \frac{1}{|G(jw_k)|} \quad (\text{III.7})$$

En 1974, Jong et Shanmugan [JON74] proposent une procédure itérative permettant d'estimer les paramètres du modèle en utilisant uniquement le gain du système à identifier. Cette technique fait l'objet de problème de convergence pour les systèmes à forte variation de gain sur de faibles gammes de fréquences.

Lawrence et Rogers [LAW79] développent un algorithme à la fois itératif (à travers  $\lambda$  pour pallier le problème de biais) et récursif (à travers  $k$  pour éviter l'inversion matricielle), en posant le problème d'identification de la manière suivante :

$$\begin{cases} W_\lambda(jw_k) = 1 \\ e_\lambda(jw_k) = \frac{1}{A_\lambda^{k-1}(jw_k)} [B_\lambda(jw_k) - G(jw_k)A_\lambda(jw_k)] \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

où  $A_\lambda^{k-1}(jw_k)$  est calculé à partir des paramètres  $a_i$  estimés avec  $(k-1)$  à l'itération  $\lambda$ .

Cette technique consiste à mettre à jour le vecteur des paramètres  $\theta$  à l'itération  $\lambda$  après chaque prise en compte d'une nouvelle donnée fréquentielle. Cependant cette technique nécessite un très grand nombre de données pour assurer la convergence de l'algorithme.

En 1984, toujours pour s'affranchir du problème de biais, Stahl [STA84] propose une méthode sensiblement différente de Sanathanan et Koerner en posant le problème d'identification de la manière suivante :

$$\begin{cases} W_\lambda(jw_k) = 1 \\ e_\lambda(jw_k) = B_\lambda(jw_k) - \frac{B_{\lambda-1}(jw_k)}{A_{\lambda-1}(jw_k)} [A_\lambda(jw_k) - 1] - G(jw_k) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Pour s'affranchir à la fois du problème de biais et d'inversion matricielle, une technique consiste à combiner les approches de Stahl et de Lawrence et Rogers, en posant le problème d'identification sous la forme générale :

$$\begin{cases} W_\lambda(jw_k) = 1 \\ e_\lambda(jw_k) = B_\lambda(jw_k) - \frac{B_{\lambda-1}^{k-1}(jw_k)}{A_{\lambda-1}^{k-1}(jw_k)} [A_\lambda(jw_k) - 1] - G(jw_k) \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

En 1993, Hakvoort [HAK93] développe une technique d'estimation des paramètres d'une transmittance continue ou discrète en minimisant un critère  $\ell_\infty$  pondéré. Comme pour toutes les techniques d'optimisation non linéaire, la convergence et la qualité du résultat dépendent du vecteur des paramètres initialisant l'algorithme. Aussi, un vecteur initial est calculé à partir d'une technique de programmation linéaire. La technique utilisée est celle de Sanathanan et Koerner étendue à un critère  $\ell_\infty$ . Le modèle optimal est ensuite estimé en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes non linéaires : une contrainte consiste notamment à garantir sa stabilité par une restriction du domaine des pôles au demi-plan complexe gauche.

En 1995, Mathieu et al. [MAT95] développent une technique basée sur la combinaison des approches de Levy et Hakvoort, appliquée à des modèles d'identification d'ordre fractionnaire. Elle consiste en effet à annuler la norme  $\ell_\infty$  du critère d'erreur de Levy étendu aux modèles à dérivées d'ordre fractionnaire explicites, la technique de programmation linéaire utilisée étant celle du simplexe. La solution converge globalement en un nombre fini d'opérations élémentaires sans initialisation particulière.

### III.2.2 Identification fréquentielle d'un modèle d'ordre fractionnaire explicite

Plusieurs méthodes d'identification de systèmes d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentielle ont été proposées [OUS05] ; [LAY89] ; [HAR99]. L'approche proposée par Hartely [HAR99] peut être considérée comme une technique plus générale. En effet, cette méthode est fondée sur le fait qu'on peut modéliser un système physique en utilisant une distribution continue de l'ordre, soit :

$$\left( \int_0^\infty k(q) s^q dq \right) Y(s) = E(s) \quad (\text{III.12})$$

Sous l'hypothèse que  $k(q)$  tend vers zéro lorsque  $q$  devient de plus en plus grand, l'intégrale de l'équation (III.12) converge et peut être remplacée par l'approximation d'Euler, soit:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^N k_i(s)^{iQ} Q} \quad (\text{III.13})$$

où  $Q$  est un nombre réel représentant le pas d'échantillonnage de l'ordre, les  $k_i$  sont les coefficients correspondants aux ordres  $iQ$  et  $N$  un nombre entier fixé en fonction du  $Q$ .

A partir de  $M$  mesures en fréquence  $G_m(jw_j)$  ( $j = 0, \dots, M$ ) du système à identifier, l'algorithme d'identification consiste à déterminer les paramètres  $k_i$  qui doivent vérifier pour chaque fréquence  $w_j$  l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^N k_i (jw_j)^{iQ} = \frac{1}{G_m(jw_j)} \quad (\text{III.14})$$

Ce qui est équivalent au système d'équations :

$$\begin{bmatrix} 1 & (jw_1)^Q & \dots & (jw_1)^{NQ} \\ 1 & (jw_2)^Q & \dots & (jw_2)^{NQ} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (jw_M)^Q & \dots & (jw_M)^{NQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/G_m(w_1) \\ \vdots \\ 1/G_m(w_M) \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Le système (III.15) peut être réécrit sous une forme matricielle :

$$W\hat{k} = \hat{g} \quad (\text{III.16})$$

si  $M > N$ , la solution du système (III.16) peut être obtenue en utilisant l'algorithme des moindres carrés, soit :

$$\hat{k} = (W^T W)^{-1} W^T \hat{g} \quad (\text{III.17})$$

Le problème majeur de cette approche réside dans la singularité de la matrice  $W$  lorsque le pas d'échantillonnage  $Q$  est très petit ou le nombre  $N$  est très large. Pour pallier à ce problème, la version récursive de l'algorithme des moindres carrés peut être utilisée, elle consiste à développer une forme récursive de l'équation (III.17) permettant d'estimer sur plusieurs étapes le vecteur de paramètres  $\hat{k}$ , ce qui permet de manipuler un nombre limité de données dans chaque étape de calcul.

### III.2.3 Identification fréquentielle d'un modèle d'ordre fractionnaire implicite

L'objet de ce paragraphe est de présenter une technique linéaire d'estimation des paramètres d'un modèle résultant de la mise en cascade d'une intégration entière d'ordre  $n_0$  avec un modèle d'ordre fractionnaire implicite [LAY98], soit :

$$G(s) = \frac{k_0}{s^{n_0}} F(s), \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad (\text{III.18})$$

où

$$F(s) = \prod_{i=1}^N \left( 1 + \frac{s}{w_i} \right)^{n_i}, \quad n_i \in \mathbb{R} \quad (\text{III.19})$$

Les fréquences transitionnelles  $w_i$  étant réelles ou complexes conjugués, la constante  $k_0$  et l'ordre  $n_0$  du pôle à l'origine étant les seuls paramètres supposés connus.

A partir de la réponse en fréquence  $G_m(j\omega)$  du système à identifier, l'algorithme d'identification consiste à déterminer le vecteur  $\theta$ , dont les composantes sont les paramètres inconnus du modèle (III.19), soit :

$$\theta = [n_1, \dots, n_N, w_1, \dots, w_N]^T \quad (\text{III.20})$$

Le problème revient donc à rechercher une solution du système d'équations :

$$\prod_{i=1}^N \left( 1 + \frac{j\omega}{w_i} \right)^{n_i} = G'_m(j\omega) \quad (\text{III.21})$$

avec

$$G'_m(j\omega) = \frac{(j\omega)^{n_0}}{k_0} G_m(j\omega) \quad (\text{III.21})$$

où  $w$  étant le vecteur des  $2N$  fréquences de mesure,  $w = (w_{m_1}, \dots, w_{m_{2N}})$ .

Le problème ainsi posé est non linéaire par rapport au vecteur des paramètres  $\theta$ . Une technique de linéarisation consiste à se ramener à une identification par modèle linéaire entier obtenu par dérivation par rapport à  $s$  du logarithme de  $F(s)$ .

En effet, le logarithme de (III.19) admet comme expression :

$$\ln F(s) = \sum_{i=1}^N n_i \ln \left( 1 + \frac{s}{w_i} \right), \quad (\text{III.22})$$

celle-ci faisant déjà apparaître une linéarisation par rapport aux ordres de dérivation  $n_i$ .

Etant donné que la dérivée du logarithme d'une fonction complexe quelconque  $X(s)$  est donnée par

$$\frac{d}{ds} \ln X(s) = \frac{1}{X(s)} \frac{d}{ds} X(s) \quad (\text{III.23})$$

il est possible de réécrire la relation (III.22) sous la forme :

$$\frac{d}{ds} \ln F(s) = \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{w_i} \frac{1}{1 + \frac{s}{w_i}} \quad (\text{III.24})$$

Expression qui n'est autre que la décomposition en éléments simples d'un modèle linéaire entier.

Afin d'utiliser l'une des techniques linéaires d'estimation paramétrique rappelées dans la section (III.2.1), il suffit d'exprimer le second membre de (III.24) sous la forme d'une fonction rationnelle, soit :

$$\sum_{i=1}^N \frac{n_i}{w_i} \frac{1}{1 + \frac{s}{w_i}} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (\text{III.25})$$

dans laquelle les polynômes non nuls  $A(s)$  et  $B(s)$  à puissance entières sont donnés par :

$$A(s) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k s^k \quad (\text{III.26})$$

et

$$B(s) = 1 + \sum_{k=0}^N b_k s^k \quad (\text{III.27})$$

Ainsi, il est possible de poser le problème d'identification comme la minimisation d'un critère d'erreur par rapport au nouveau vecteur des paramètres,  $\theta' = [a_1, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N]^T$ , soit :

$$\arg_{\theta'} \min |\varepsilon(j\omega)|^2 = \arg_{\theta'} \min \sum_{k=1}^{2N} \left[ \frac{B(j\omega_{m_k})}{A(j\omega_{m_k})} - \left[ \frac{d}{d(j\omega_{m_k})} \ln G'_m(j\omega_{m_k}) \right] \right] \quad (\text{III.28})$$

Le problème d'identification ainsi posé, peut être résolu en utilisant une approche de type Levy, conformément à l'étude bibliographique de la section (III.2.1). La technique linéaire d'estimation des nouveaux paramètres étant alors un problème des moindres carrés.

Cette technique nécessite le calcul numérique de la dérivée du logarithme de la réponse en fréquence  $G'_m(j\omega)$ . Ce calcul s'avère la partie sensible de cette technique. Dans le cas de données bruitées, la dérivation amplifie en effet fortement le bruit. Il est néanmoins possible de s'affranchir de ce problème par un filtrage préalable des données puis d'accroître la précision numérique par une interpolation des données. La dérivée du logarithme de  $G'_m(j\omega)$  est en l'occurrence calculée conformément à la relation :

$$\frac{d}{d(j\omega_{m_k})} \ln(G'_m(j\omega_{m_k})) = \frac{\ln G'_m(j\omega_{m_{k+1}}) - \ln G'_m(j\omega_{m_k})}{j\omega_{m_{k+1}} - j\omega_{m_k}} \quad (\text{III.29})$$

Le problème d'estimation du nouveau vecteur  $\theta'$  ainsi résolu, il convient de déterminer le vecteur initial  $\theta$  qui paramétrise  $F(s)$ . Le modèle rationnel à puissance entière,  $B(s)/A(s)$ , paramétré par le vecteur  $\theta'$  conduit, à travers une décomposition en éléments simple, à un modèle constitué d'une somme de transmittances du premier ordre. Conformément à la relation (III.25), les paramètres  $n_i$  et  $w_i$  s'obtiennent alors par identification terme à terme.

### III.3 Identification temporelle des systèmes d'ordre fractionnaire

Sous sa forme la plus générale, un modèle d'ordre fractionnaire dit *explicite* est défini par une équation ou un système d'équations différentielles de la forme (II.1), dont les ordres de dérivation sont réels, entiers ou non entiers, soit dans le cas monovariante :

$$\sum_{l=0}^L a_l D^{n_{a_l}} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m D^{n_{b_m}} u(t) \quad (\text{III.30})$$

où  $y(t)$  et  $u(t)$  désignent respectivement la sortie et l'entrée du système,  $a_0 = 1$  et  $a_l, b_m \in \mathfrak{R}$ .

Si dans le cas entier, les coefficients des opérateurs de dérivation suffisent à décrire complètement une équation différentielle, les ordres de dérivation étant distribués implicitement en raison d'un écart unitaire entre deux ordres consécutifs, il en est autrement dans le cas fractionnaire, où la connaissance des ordres de dérivation s'avère aussi nécessaire.

Dans un contexte d'identification par estimation paramétrique, l'étude de l'équation (III.30) révèle que les coefficients des opérateurs différentiels interviennent linéairement alors que les ordres de dérivation interviennent quant à eux non linéairement. Deux cas d'étude sont alors à distinguer.

Dans le premier cas, les ordres de dérivation doivent être estimés au même titre que les coefficients [TRI99], le modèle étant alors de type boîte noire. Basée sur les méthodes à erreur de sortie, les techniques d'optimisation utilisées sont non linéaires par rapport aux paramètres et font appel à des algorithmes de programmation non linéaire.

Le second cas correspond à l'identification d'un système dynamique dont une analyse préalable permet de fixer a priori les ordres de dérivation du modèle. Seules les coefficients des opérateurs font alors l'objet d'une estimation paramétrique. Basées sur les méthodes à erreur d'équation, les techniques d'optimisations utilisées sont linéaires par rapport aux paramètres et permettent une estimation directe.

### III.3.1 Méthodes à erreur de sortie

L'estimation des ordres de dérivation en même titre que les coefficients requiert l'utilisation d'un algorithme de programmation non linéaire. Dans le contexte d'une telle exigence, une méthode d'estimation à erreur de sortie dont l'avantage est de ne pas présenter de biais d'estimation, apparaît des plus appropriées.

La méthode d'estimation sommairement présentée ici relève des travaux de Trigeassou et Lin [TRI99]. Elle est basée sur l'utilisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire borné en fréquence définie comme un intégrateur conventionnel présentant un comportement d'ordre fractionnaire réel dans une bande de fréquence donnée  $[w_b, w_h]$ , soit :

$$\frac{1}{s^\alpha} \rightarrow I(s) = \frac{1}{s} C_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{w_b}}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^{1-\alpha}, \text{ avec } 0 < \alpha < 1. \quad (\text{III.31})$$

La synthèse d'un tel intégrateur repose sur l'approximation de la partie fractionnaire par une distribution récursive de pôles et de zéros [OUS95], soit :

$$I(s) \rightarrow I_N(s) = \frac{1}{s} C_0 \prod_{k=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{w_k'}}{1 + \frac{s}{w_k}} \right) \quad (\text{III.32})$$

avec

$$\begin{cases} \frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{w_{k+1}'}{w_k'} = \lambda \eta, & \frac{w_k}{w_k'} = \lambda, & \frac{w_{k+1}'}{w_{k+1}} = \eta \\ \alpha = \frac{\log \lambda}{\log \lambda + \log \eta} \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

où les rapport  $\lambda$  et  $\eta$  sont appelés facteurs de récursivité.

Pour un ordre de dérivation fractionnaire  $\alpha$  donné et un rapport  $\mu = w_b / w_h$  donné entre les fréquences transitionnelles  $w_b$  et  $w_h$ , les facteurs  $\lambda$  et  $\eta$  ne dépendent que du paramètre  $N$ , soit :

$$\lambda = \mu^{-\alpha/N}, \quad \eta = \mu^{(\alpha-1)/N} \quad (\text{III.34})$$

La figure (III.1) représente l'intégrateur synthétisé sous forme d'un schéma-bloc.

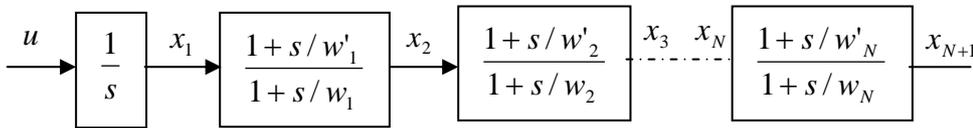


Figure. III.1 Synthèse d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

L'intégrateur d'ordre fractionnaire ainsi approximé peut être exprimé sous forme d'une représentation d'état comme suit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ w_1 & -w_1 & & & \vdots \\ 0 & w_2 & -w_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_N & -w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{III.35})$$

soit:

$$\dot{x}_I = A_I x + b_I u \quad (\text{III.36})$$

avec :

$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ w_1 & -w_1 & & & \vdots \\ 0 & w_2 & -w_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_N & -w_N \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

$$b_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

Dans un objectif d'identification d'un système d'ordre fractionnaire, la représentation d'état (III.36) de l'opérateur est insérée dans une représentation d'état décrivant le système à identifier, soit, dans le cas d'un système monovarié dont la représentation d'état fractionnaire est de dimension 1 :

$$\begin{cases} D^\alpha(x(t)) = a_0 x(t) + b_0 u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

ce système conduit à une représentation d'état classique de grande dimension, soit, pour un ordre de dérivation  $\alpha$  compris entre 0 et 1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ A_{I+} \begin{bmatrix} 0 & \dots & -C_0 a_0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{III.41})$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1} b_I \quad (\text{III.42})$$

$$\text{et} \quad c = [0, \dots, 0 \quad b_0] \quad (\text{III.43})$$

L'objectif de l'identification consiste à estimer les paramètres  $[a_0, b_0, \alpha, w_b, w_h]$  du système (III.39). En pratique, l'estimation est basée sur l'approximation (III.40), soit :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + b(\theta)u \\ y = c(\theta)x \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

où  $\theta$  est le vecteur des paramètres à estimer, donné par :

$$\theta = [a_0, b_0, w_1, \lambda, \eta]^T \quad (\text{III.45})$$

L'ensemble de données d'estimation est composé de  $N$  couples entrées/sorties  $[u(kh), y^*(kh)]$  où  $h$  désigne le pas d'échantillonnage et :

$$y^*(kh) = y(kh) + p(kh), \quad (\text{III.46})$$

$p(kh)$  étant la perturbation additif par les capteurs.

Alors, l'estimation paramétrique est obtenue en minimisant un critère basé sur l'erreur de sortie du modèle vis-à-vis du vecteur des paramètres  $\hat{\theta}$ , soit :

$$\varepsilon(kh) = y^*(kh) - \hat{y}(kh, \hat{\theta}) \quad (\text{III.47})$$

Le critère sur lequel porte l'optimisation est un critère quadratique défini, pour  $N$  points de mesure, par :

$$J_N(\hat{\theta}) = E^T E \quad (\text{III.48})$$

$$\text{où} \quad E^T = [\varepsilon(k_0h), \dots, \varepsilon((k_0 + N - 1)h)]$$

Le problème d'estimation se formalise alors par la recherche du vecteur des paramètres optimal,  $\hat{\theta}_{opt}$ , minimisant le critère quadratique  $J_N(\hat{\theta})$ , soit :

$$\hat{\theta}_{opt} = \arg \min(J_N(\hat{\theta})) \quad (\text{III.49})$$

La sortie estimée  $\hat{y}(t, \hat{\theta})$  étant non linéaire par rapport à  $\hat{\theta}$ , l'estimation paramétrique s'effectue donc par une technique d'optimisation à erreur de sortie basée sur un algorithme de programmation non linéaire, en l'occurrence l'algorithme de Marquardt [MAR63] est utilisée pour déterminer itérativement  $\hat{\theta}_{opt}$ , soit :

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i + \left\{ J''_{\theta\theta} + \xi I \right\}^{-1} J'_{\theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_i} \quad (\text{III.50})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} J'_{\theta} = -2 \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} \varepsilon(kh) \sigma(kh, \hat{\theta}) : \text{Gradient} \\ J''_{\theta\theta} = 2 \sum_{k=0}^{k_0+N-1} \sigma(kh, \hat{\theta}) \sigma^T(kh, \hat{\theta}) : \text{Hessien} \\ \sigma_{y,\theta}(kh, \hat{\theta}) = \frac{\partial y(kh, \hat{\theta})}{\partial \theta} : \text{fonction de sensibilité} \\ \xi : \text{paramètre de Marquardt} \end{array} \right. \quad (\text{III.51})$$

La fonction de sensibilité est donnée par [RIC71]:

$$\sigma_{y,\theta}(kh, \hat{\theta}) = \frac{\partial y(kh, \hat{\theta})}{\partial \theta} = c(\hat{\theta}) \sigma_{x,\theta}(kh, \hat{\theta}) + \left[ \frac{\partial c}{\partial \theta}(\hat{\theta}) \right]_x \quad (\text{III.52})$$

avec

$$\sigma_{x,\theta}(kh, \hat{\theta}) = \frac{\partial x(kh, \hat{\theta})}{\partial \theta} \quad (\text{III.53})$$

et

$$\dot{\sigma}_{x,\theta} = A(\hat{\theta}) \sigma_{x,\theta} + \left[ \frac{\partial A}{\partial \theta}(\hat{\theta}) \right]_x + \frac{\partial b}{\partial \theta}(\hat{\theta}) u \quad (\text{III.54})$$

### III.3.2 Méthodes à erreur d'équation

L'objectif de cette approche consiste à estimer les coefficients  $(a_1, \dots, a_L, b_0, \dots, b_M)$  d'un modèle d'ordre fractionnaire défini par une équation différentielle généralisée de la forme :

$$\sum_{l=0}^L a_l D^{n_{a_l}} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m D^{n_{b_m}} u(t) + e(t) \quad (\text{III.55})$$

où  $n_{a_l}, n_{b_m} \in \mathfrak{R}, l \in [0 \dots L], m \in [0 \dots M], a_0 = 1$  et  $e(t)$  représente un bruit stochastique.

Nous présentons dans cette section deux techniques d'estimation paramétrique où seuls les coefficients  $(a_1, \dots, a_L, b_0, \dots, b_M)$  seront estimés, les ordres de dérivation étant supposés connus. La première, développée par B. Matthieu et L. Le Lay [LAY98], repose sur l'extension de la méthode classique des moindres carrés non récursifs aux systèmes fractionnaires en utilisant l'approximation numérique de Grünwald-Letnikov. La seconde est une nouvelle technique que nous proposons dans ce chapitre, elle repose sur l'extension aux systèmes fractionnaires de la méthode classique d'estimation paramétrique des moindres carrés récursifs et celle des variables instrumentales récursives.

L'estimation paramétrique se décompose en trois phases bien distinctes. La première consiste à discrétiser le modèle d'ordre fractionnaire puis linéariser le modèle discret ainsi obtenu à l'aide d'un changement de variables. La deuxième consiste à estimer les nouveaux paramètres (paramètres du modèle discrétisé) par une méthode à erreur de prédiction en utilisant deux techniques d'optimisation des moindres carrés linéaires : la technique non récursive et la technique récursive. Enfin, dans la troisième phase, les paramètres du modèle originale à temps continu (coefficients  $a_l$  et  $b_m$ ) seront calculés à partir de l'inversion du changement de variables.

### III.3.2.1 Modèle discret de dimension infini

La discrétisation de l'équation (III.55) en utilisant l'approximation numérique de Grünwald (cf. chapitre II) donne un modèle discret équivalent de la forme :

$$\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y(K-k) = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{h^{n_{b_m}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u(K-k) + e(K) \quad (\text{III.56})$$

où  $h$  est le pas d'échantillonnage et  $K = \text{entier}(t/h)$ .

Ce modèle, reliant tous les échantillons de la sortie à tous les échantillons de l'entrée, est de dimension croissante avec le temps  $t = Kh$ . En effet, contrairement aux modèles paramétriques entiers dont la mémoire se limite aux  $L$  dernières valeurs de la sortie et aux  $M$  dernières valeurs de l'entrée, les modèles d'ordre fractionnaire prennent en compte quant à eux tout le passé du système à travers la somme sur  $K$ . Mais ce caractère global ne se paie pas pour autant aux prix d'une complexification démesurée du modèle puisque seulement  $(L+M)$  paramètres suffisent à la description complète du modèle fractionnaire.

En vue d'utiliser une méthode d'estimation à erreur d'équation, la sortie du modèle à l'instant  $K$  peut être exprimée en fonction des entrées et sorties passées en isolant le terme  $y(K)$  obtenu pour  $k = 0$  dans l'équation (III.56), soit :

$$y(K) = - \frac{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y(K-k)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} + \frac{\sum_{m=0}^M \frac{b_m}{h^{n_{b_m}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u(K-k)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} + \frac{e(K)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} \quad (\text{III.57})$$

Cette relation est non linéaire par rapport aux paramètres  $(a_0, \dots, a_L, b_0, \dots, b_M)$ . Une technique de linéarisation qui permet l'utilisation de la méthode des moindres carrés linéaires, consiste alors à exprimer  $y(K)$  par une relation linéaire par rapport à un nouveau ensemble de paramètres  $(a'_0, \dots, a'_L, b'_0, \dots, b'_M)$ , soit :

$$y(K) = - \sum_{l=0}^L a'_l Y_l(K) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(K) + e'(K) \quad (\text{III.58})$$

avec

$$a'_l = \frac{\frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}, \quad 0 \leq l \leq L, \quad \sum_{l=0}^L a'_l = 1, \quad b'_m = \frac{\frac{b_m}{h^{n_{b_m}}}}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}, \quad 0 \leq m \leq M \quad (\text{III.59})$$

$$Y_l(K) = \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y(K-k), \quad U_m(K) = \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u(K-k) \quad (\text{III.60})$$

$$e'(K) = \frac{e(K)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} \quad (\text{III.61})$$

Le modèle ainsi obtenu est linéaire par rapport aux nouveaux paramètres, une procédure d'estimation telle que la méthode des moindres carrés linéaires s'avère maintenant applicable et fait l'objet des paragraphes suivants.

### III.3.2.2 Estimation paramétrique du modèle discret

#### III.3.2.2.1 Méthode des moindres carrés non récurrents

L'estimation des nouveaux paramètres devant s'effectuer sous la contrainte  $\sum_{l=0}^L a'_l = 1$ , (relation III.59), un jeu d'écriture tel que  $a'_0 = 1 - \sum_{l=1}^L a'_l$  permet d'exprimer une estimation de la sortie du modèle linéairement et sans contrainte par rapport au vecteur de paramètres  $\hat{\theta} = (\hat{a}'_1, \dots, \hat{a}'_L, \hat{b}'_0, \dots, \hat{b}'_M)^T$ . Ainsi, si le caractère de bruit n'est pas spécifié, on peut considérer le modèle de prédiction donnée par l'équation suivante :

$$\hat{y}(K) = -Y_0(K) - \sum_{l=1}^L \hat{a}'_l (Y_l(K) - Y_0(K)) + \sum_{m=0}^M \hat{b}'_m U_m(K) \quad (\text{III.62})$$

L'écriture de l'équation (III.62) pour  $N$  points de mesures entre  $K$  et  $K + N$ , conduit à la régression linéaire suivante :

$$\hat{Y}(K, \hat{\theta}) = -Y_0 + \phi(K) \hat{\theta} \quad (\text{III.63})$$

où  $\hat{Y} = [\hat{y}(K), \dots, \hat{y}(K + N)]^T$ ,  $Y_0 = [Y_0(K), \dots, Y_0(K + N)]^T$  et  $\phi$  est la matrice de régression composée de l'ensemble de données d'identification, définie par :

$$\phi(K) = \begin{bmatrix} -Y_1(K) + Y_0(K) & \dots & -Y_L(K) + Y_0(K) & \dots & U_0(K) & \dots & U_M(K) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -Y_1(K + N) + Y_0(K + N) & \dots & -Y_L(K + N) + Y_0(K + N) & \dots & U_0(K + N) & \dots & U_M(K + N) \end{bmatrix}$$

Le problème d'estimation se formalise maintenant par la recherche d'un vecteur de paramètres optimale,  $\hat{\theta}_{opt}$ , minimisant le critère quadratique des moindres carrés  $J_N(\hat{\theta})$  basé sur l'erreur de prédiction  $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ , soit :

$$\hat{\theta}_{opt} = \arg \min(J_N(\hat{\theta})), \text{ avec } J_N(\hat{\theta}) = E^T E \quad (\text{III.64})$$

où  $E^T = [\varepsilon(K), \dots, \varepsilon(K + N)]$ .

Le vecteur optimal  $\hat{\theta}_{opt}$ , solution de l'équation (III.64), est bien connu et s'exprime par [LAN89]:

$$\hat{\theta}_{ropt} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T (Y + Y_0) \quad (\text{III.65})$$

III.3.2.2.2 Méthode des moindres carrés récursifs

La prédiction de la sortie du modèle (III.62) à un instant donné  $K$ , peut être donnée par une régression linéaire de la forme :

$$\hat{y}(K, \hat{\theta}) = -Y_0(K) + \hat{\theta}^T(K) \phi(K) \tag{III.66}$$

où  $\phi(K) = [-Y_1(K) + Y_0(K), \dots, -Y_L(K) + Y_0(K), U_0(K), \dots, U_M(K)]$  est un vecteur composé de mesures (entrées/sorties) passées du système à identifier.

Le principe de base de l'estimation paramétrique par la méthode des moindres carrés récursifs, étendue aux systèmes d'ordre fractionnaire, est présenté par le schéma de la figure (III.2). L'élément de retard classique  $z^{-1}$  est remplacé par un élément de retard d'ordre fractionnaire défini par l'approximation de Grünwald :

$${}_{k_0} D_K^{n_x} \approx \frac{1}{h^{n_x}} \sum_{k=k_0}^K (-1)^k \binom{n_x}{k} z^{-k} .$$

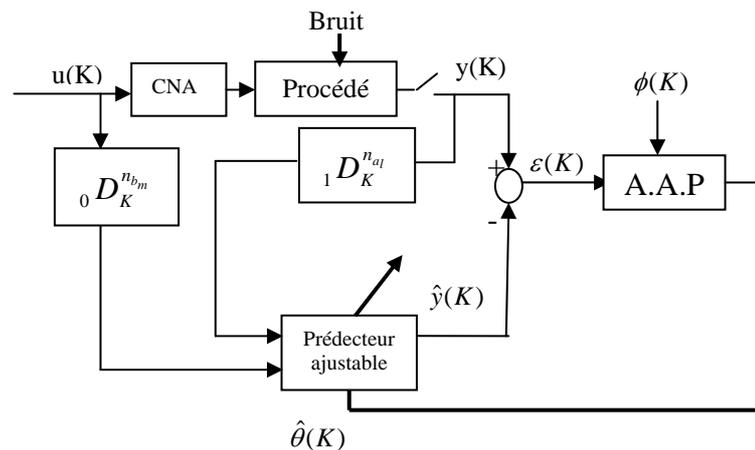


Figure. III.2 Principe de l'identification récursive d'un système fractionnaire

Le problème de l'estimation se formalise maintenant par la recherche d'un vecteur de paramètre  $\hat{\theta}_{opt}$ , minimisant le critère quadratique donné par l'équation suivante :

$$J_K(\hat{\theta}) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K [y(k) - \hat{y}(k, \hat{\theta}(K))]^2 \tag{III.67}$$

La solution de ce problème au sens des moindres carrés est donnée par [LJU83] :

$$\hat{\theta}(K) = \left[ \sum_{k=1}^K \phi(k) \phi^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^K \phi(k) [y(k) + Y_0(k)] \tag{III.68}$$

Un développement mathématique de la formule (III.68) (cf. Annexes B), permet d'obtenir une version récursive de l'algorithme des moindres carrés sous la forme:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(K) = \hat{\theta}(K-1) + \frac{F(K-1)\phi(K)}{1 + \phi^T(K)F(K-1)\phi(K)} \left( y(K) - [\hat{\theta}^T(K-1)\phi(K) - Y_0(K)] \right) \\ F(K) = F(K-1) - \frac{F(K-1)\phi(K)\phi(K)^T F(K-1)}{1 + \phi^T(K)F(K-1)\phi(K)} \end{cases} \quad (\text{III.69})$$

Pour que l'algorithme des moindres carrés récursifs soit exactement équivalent à l'algorithme des moindres carrés non récursif, il faut que l'algorithme commence par la première estimation obtenue à l'instant  $K = \dim(\phi)$  [LAN98]. En pratique l'algorithme commence à l'instant  $K = 0$  avec un vecteur de paramètres nul et :

$$F = \frac{1}{\delta} I, \text{ et } 0 < \delta \ll 1$$

### III.3.2.2.3 Analyse du biais d'estimation via l'erreur d'équation

Dans un contexte réaliste, la sortie du système à identifier est généralement mesurée par un capteur générant un signal de perturbation additif  $p(t)$ , la sortie mesurée s'exprimant alors à un instant  $k$  par:

$$y^*(k) = y(k) + p(k) \quad (\text{III.70})$$

et le vecteur estimé à un instant  $K$  sera donc donné par :

$$\hat{\theta}(K) = \left[ \sum_{k=1}^K \phi^*(k)\phi^{*T}(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^K \phi^*(k)[y^*(k) + Y_0^*(k)] \quad (\text{III.71})$$

En substituant  $y(k) = y^*(k) - p(k)$  dans l'équation différentielle régissant le modèle à identifier donné par:

$$y(K) = -\sum_{l=0}^L a'_l Y_l(K) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(K) \quad (\text{III.72})$$

on obtient:

$$y^*(K) = -\sum_{l=0}^L a'_l Y_l^*(K) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(K) + p(K) + \sum_{l=0}^L \frac{a'_l}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} p(K-k) \quad (\text{III.73})$$

Soit, en introduisant la notion d'erreur d'équation telle que :

$$e(K) = p(K) + \sum_{l=0}^L \frac{a'_l}{h^{n_{al}}} \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{al}}{k} p(K-k) \quad (\text{III.74})$$

on aura :

$$y^*(K) = -\sum_{l=0}^L a'_l Y_l^*(K) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(K) + e(K) \quad (\text{III.75})$$

La substitution de (III.75) dans (III.71) conduit alors, pour  $K$  tendant vers l'infini, à l'expression du biais de l'estimation, soit :

$$\Delta\theta = E[\hat{\theta} - \theta_{\text{réel}}] = \left[ \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \phi^*(k) \phi^{*T}(k) \right]^{-1} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \phi^*(k) e(k) \quad (\text{III.76})$$

Un cas d'étude fréquemment rencontré correspond à celui où le signal de perturbation  $p(k)$  se réduit à un bruit blanc  $b(k)$ , dans ce cas, compte tenu de la relation (III.74) reliant  $e(k)$  à  $p(k)$ , la relation (III.76) révèle que l'estimation est asymptotiquement biaisée. La cause principale de ce biais d'estimation provient de la corrélation entre le signal  $e(K)$  et le signal  $y^*(K)$  qui est contenu dans le vecteur  $\phi^*$ .

Afin de résoudre ce problème, l'estimation de  $\hat{\theta}$  peut être obtenue en utilisant la méthode des variables instrumentales récursives [YOU81]. Cette technique consiste à remplacer les éléments de  $\phi^*$  corrélés avec  $e(K)$  (ou encore  $y^*(K)$ ) par un vecteur de signaux non corrélés provenant de la simulation d'un modèle auxiliaire similaire.

#### III.3.2.2.4 Méthode des variables instrumentales récursives

Le principe général de cette méthode consiste en la construction d'un nouveau vecteur d'observation  $\psi$  composé des données non corrélées avec la perturbation  $e(K)$ , de tel sorte que lorsque  $K$  tend vers l'infini, le vecteur des paramètres  $\hat{\theta}$  vérifie l'équation suivant :

$$\frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \psi(k) e(k) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \psi(k) [y(k) - \hat{y}(\hat{\theta}, k)] = 0 \quad (\text{III.77})$$

Sachant que  $\hat{y}(\hat{\theta}, k)$  est donné par l'équation (III.66) et si  $\dim(\psi) = \dim(\hat{\theta})$ , alors, l'estimation peut être donnée par :

$$\hat{\theta}(K) = \left[ \sum_{k=1}^K \psi(k) \phi^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^K \psi(k) [y(k) + Y_0(k)] \quad (\text{III.78})$$

Par analogie au développement du paragraphe (III.3.2.2.2), l'algorithme des variables instrumentales récursives peut être obtenue par :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(K) = \hat{\theta}(K-1) + \frac{F(K-1)\psi(K)}{1 + \phi^T(K)F(K-1)\psi(K)} \left( y(K) - \left[ \hat{\theta}^T(K-1)\phi(K) - Y_0(K) \right] \right) \\ F(K) = F(K-1) - \frac{F(K-1)\psi(K)\phi(K)^T F(K-1)}{1 + \phi^T(K)F(K-1)\psi(K)} \end{cases} \quad (\text{III.79})$$

Le vecteur d'observation  $\psi$  est composé de données issues de la simulation d'un modèle auxiliaire dont la dynamique est proche de celle du système à identifier. Un modèle à temps discret possible dans notre cas est donné par la régression suivante :

$$\hat{y}^{IV}(K, \hat{\theta}) = -Y_0^{IV}(K) + \hat{\theta}^T \psi(K) \quad (\text{III.80})$$

où  $\hat{\theta}$  est le vecteur de paramètres estimés à l'instant  $K-1$ , soit

$$\hat{\theta} = \left[ \hat{a}'_1(K-1), \dots, \hat{a}'_L(K-1), \hat{b}'_0(K-1), \dots, \hat{b}'_M(K-1) \right]^T, \quad (\text{III.81})$$

$$\psi(K) = \left[ -Y_1^{IV}(K) + Y_0^{IV}(K), \dots, -Y_O^{IV}(K) + Y_0^{IV}(K), U_0(K), \dots, U_M(K) \right] \quad (\text{III.82})$$

et

$$Y_l^{IV}(K) = \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y^{IV}(K-k), \quad (l = 0, \dots, L) \quad (\text{III.83})$$

### III.3.2.3 Retour aux coefficients de l'équation différentielle

Les coefficients  $a_l$  du modèle à temps continu se déduisent par la résolution du système d'équations linéaires suivant ( $a_0$  étant fixé à 1) :

$$\begin{bmatrix} (a'_1-1)h^{-n_{a_1}} & a'_1 h^{-n_{a_2}} & \dots & a'_1 h^{-n_{a_L}} \\ a'_2 h^{-n_{a_1}} & (a'_2-1)h^{-n_{a_2}} & \dots & a'_2 h^{-n_{a_L}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_L h^{-n_{a_1}} & a'_L h^{-n_{a_2}} & \dots & (a'_L-1)h^{-n_{a_L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a'_1 h^{-n_{a_0}} \\ -a'_2 h^{-n_{a_0}} \\ \vdots \\ -a'_L h^{-n_{a_0}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.84})$$

Les coefficients  $b_m$  s'expriment alors par :

$$b_m = b'_m \sum_{l=0}^L a_l h^{n_{b_m} - n_{a_l}} \quad (\text{III.85})$$

### III.3.2.4 Exemples d'application

L'objectif de ce paragraphe est de valider les techniques d'identification proposées dans les sections précédentes et de comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus par la méthode des moindres carrés non récursifs. Le modèle considéré est défini par une équation différentielle d'ordre fractionnaire dont les coefficients sont inconnus et les ordres de dérivation sont supposés préalablement fixés. Les mesures sont obtenues à partir de la simulation temporelle d'un système d'ordre fractionnaire  $S_1$  donné par l'équation différentielle :

$$S_1 : 10 \left( \frac{d}{dt} \right)^{1.5} y(t) + 5 \left( \frac{d}{dt} \right)^{0.5} y(t) + y(t) = 100u(t) + e(t) \quad (86)$$

où  $e(t)$  est un bruit stochastique.

#### III.3.2.4.1 Identification en absence de bruit

Dans une première partie, on considère le problème d'identification en absence de bruit ( $e(t) = 0$ ) de trois structures différentes d'un modèle d'ordre fractionnaire en utilisant les méthodes des moindres carrés récursifs (MCR) et des moindres carrés non récursifs (MCNR). Les données entrées/sorties d'identification sont obtenues par simulation du modèle  $S_1$  en utilisant une séquence d'excitation de 100 échantillons d'un signal binaire pseudo-aléatoire (SBPA)  $u(t)$  avec un pas d'échantillonnage  $h = 0.5$  sec.

#### Structure 1

Supposons que la structure du modèle à identifier  $M_1$  est la même de celle du modèle simulé  $S_1$ ,

$$M_1 : a_2 \left( \frac{d}{dt} \right)^{1.5} y(t) + a_1 \left( \frac{d}{dt} \right)^{0.5} y(t) + y(t) = b_0 u(t) \quad (III.87)$$

L'algorithme des MCR est initialisée comme suit :

$$F(0) = \frac{1}{0.001} I, \quad \hat{\theta}(0) = [\hat{a}'_1(0), \hat{a}'_2(0), \hat{b}'_0(0)] = [0, 0, 0] \quad (III.88)$$

La figure (III.3) montre l'évolution en fonction du temps des paramètres estimés par MCR. On peut observer que l'estimation converge rapidement aux valeurs exactes du système simulé avec une erreur asymptotique nulle.

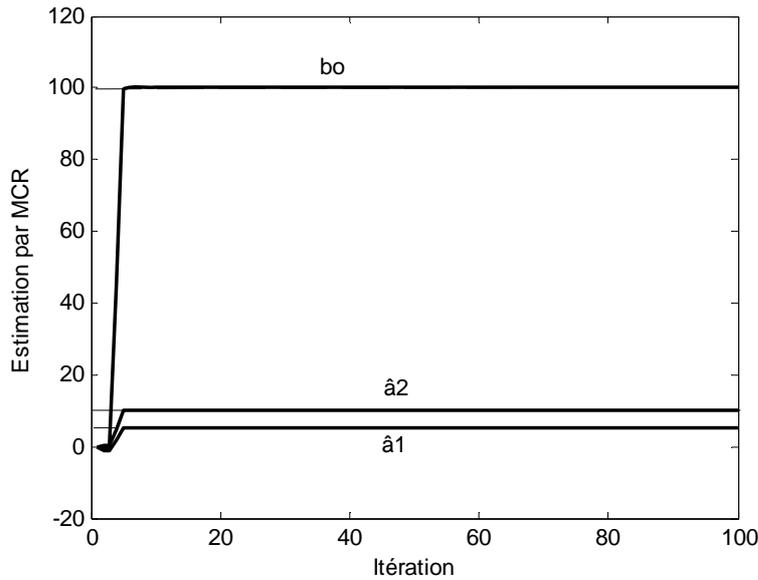


Figure III.3 Evolution de l'estimation paramétrique du modèle  $M_1$ , estimés par la méthode des MCR (données non bruitées)

Le tableau (III.1) compare les résultats obtenus par la méthode des MCR avec ceux obtenus par la méthode des MCNR, il montre clairement que les valeurs des paramètres estimés par la première méthode sont exactement celles du modèle simulé, alors que la méthode des MCNR présente un biais d'estimation.

Tab. III.1 Résultat de l'estimation des paramètres du modèle  $M_1$  par les méthodes des MCR et MCNR (données non bruitées)

	$a_1$	$a_2$	$b_0$
Valeurs exactes	5	10	100
Valeurs estimées par MCNR	5.022	10.045	99.900
Valeurs estimées par MCR	5.000	10.000	100.000

### Structure 2

Dans cet exemple on considère une structure  $M_2$  inclus celle du modèle simulé:

$$M_2 : a_4 \left( \frac{d}{dt} \right)^{1.8} y(t) + a_3 \left( \frac{d}{dt} \right)^{1.5} y(t) + a_2 \left( \frac{d}{dt} \right)^1 y(t) + a_1 \left( \frac{d}{dt} \right)^{0.5} y(t) + y(t) = b_0 u(t) + b_1 \left( \frac{d}{dt} \right)^{0.5} u(t)$$

(III.89)

L'algorithme des MCR est initialisée par :

$$F(0) = \frac{1}{0.001} I, \quad \hat{\theta}(0) = [\hat{a}_1'(0), \hat{a}_2'(0), \hat{a}_3'(0), \hat{a}_4'(0), \hat{b}_0'(0), \hat{b}_1'(0)] = [0, 0, 0, 0, 0, 0] \quad (\text{III.90})$$

Les résultats de l'identification obtenus par MCR et MCNR sont donnés par le tableau III.2. Ces résultats montrent clairement que le modèle obtenu par la méthode des MCR est identique à celui du système simulé, ce qui n'est pas le cas avec le modèle obtenu par les MCNR.

Tab. III.2 Résultat de l'estimation des paramètres du modèle  $M_2$  par les méthodes des MCR et MCNR (données non bruitées)

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b_0$	$b_1$
Valeurs exactes	5	0	10	0	100	0
Valeurs estimées par MCNR	4.837	-0.003	9.894	-0.259	97.766	-1.555
Valeurs estimées par MCR	5.000	0.000	10.000	0.000	100.000	0.000

### Structure 3

On considère l'identification par la méthode des MCR d'un modèle  $M_3$  dont la structure est complètement différente de celles du modèle simulé  $S_1$  :

$$M_3 : a_4 \left( \frac{d}{dt} \right)^{1.6} y(t) + a_3 \left( \frac{d}{dt} \right)^{1.4} y(t) + a_2 \left( \frac{d}{dt} \right)^{0.6} y(t) + a_1 \left( \frac{d}{dt} \right)^{0.4} y(t) + y(t) = b_0 u(t) \quad (\text{III.91})$$

L'algorithme est initialisée par :

$$F(0) = \frac{1}{0.001} I, \quad \hat{\theta}(0) = [\hat{a}_1'(0), \hat{a}_2'(0), \hat{a}_3'(0), \hat{a}_4'(0), \hat{b}_0'(0)] = [0, 0, 0, 0, 0] \quad (\text{III.92})$$

Le modèle identifié est donné par l'équation :

$$4.383 \left( \frac{d}{dt} \right)^{1.6} y(t) + 6.108 \left( \frac{d}{dt} \right)^{1.4} y(t) + 2.491 \left( \frac{d}{dt} \right)^{0.6} y(t) + 2.869 \left( \frac{d}{dt} \right)^{0.4} y(t) + y(t) = 108.155 u(t) \quad (\text{III.93})$$

Afin de valider ce résultat nous avons tracé sur la figure (III.4) les réponses indicielles et sur la figure (III.5) les tracés de Bode du système identifié et ceux du système simulé. On peut remarquer clairement que malgré la différence de structure entre le modèle d'identification et le modèle simulé (système à identifier), les comportements temporels et fréquentiels sont similaires.

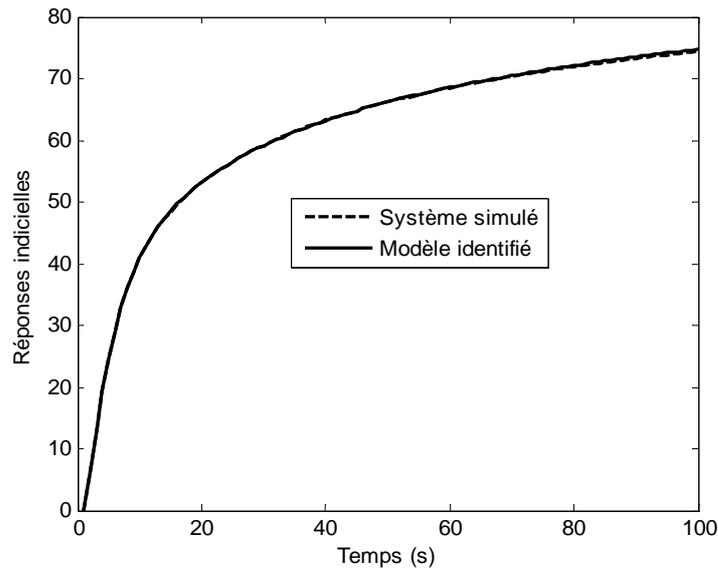


Figure III.4 Réponse indiciaire du système simulé  $S_1$  et du modèle  $M_3$  identifié par MCR.

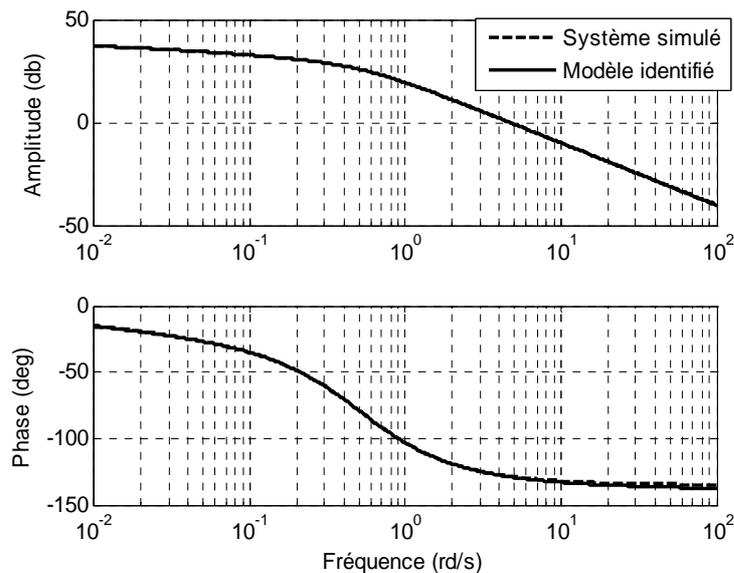


Figure III.5 Tracé de Bode du système simulé  $S_1$  et du modèle  $M_3$  identifié par MCR.

### III.3.2.3.2 Identification en présence de bruit

On considère maintenant le cas où les données d'identification sont affectées par un bruit additif  $e(t)$ . L'objectif de cet exemple est de valider les techniques d'identification des modèles fractionnaires en utilisant les méthodes des MCR et des variables instrumentales récursives (VIR) lorsque les données d'identification sont bruitées par un bruit blanc avec un rapporte signale sur bruit  $RSB = 45\%$ .

Le modèle l'identification est défini par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de type  $M_1$ . L'algorithme est initialisé avec :

$$F(0) = \frac{1}{0.0001} I, \quad \hat{\theta}(0) = [\hat{a}_1'(0), \hat{a}_2'(0), \hat{b}_0'(0)] = [0, 0, 0] \quad (\text{III.94})$$

Les figures (III.6) et (III.7) représentent respectivement l'évolution de l'estimation paramétrique en utilisant les MCR et les VIR. Ils montrent que la convergence de l'estimation est plus rapide avec la méthode des VIR.

Le tableau (III.3) montre aussi que les valeurs des coefficients estimées par la méthode des VIR sont les plus proches aux valeurs réelles. Ce qui confirme l'avantage de cette méthode dans le cas d'identification avec des mesures bruitées.

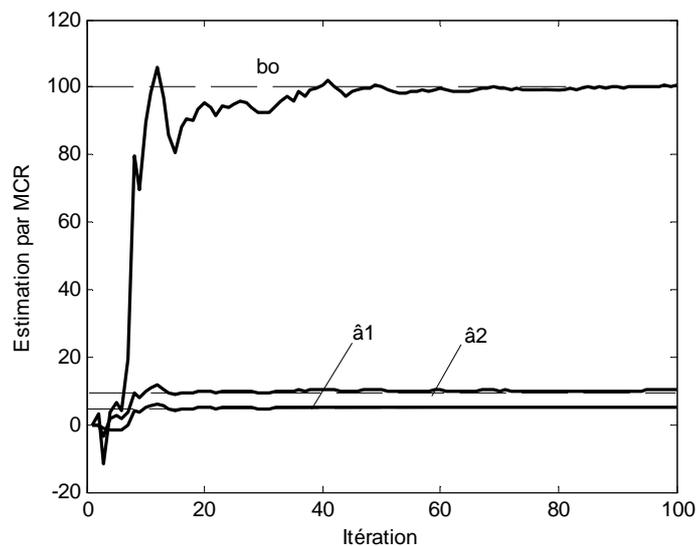


Figure III.6 Evolution de l'estimation paramétrique du modèle  $M_1$  par la méthode MCR (données bruitées)

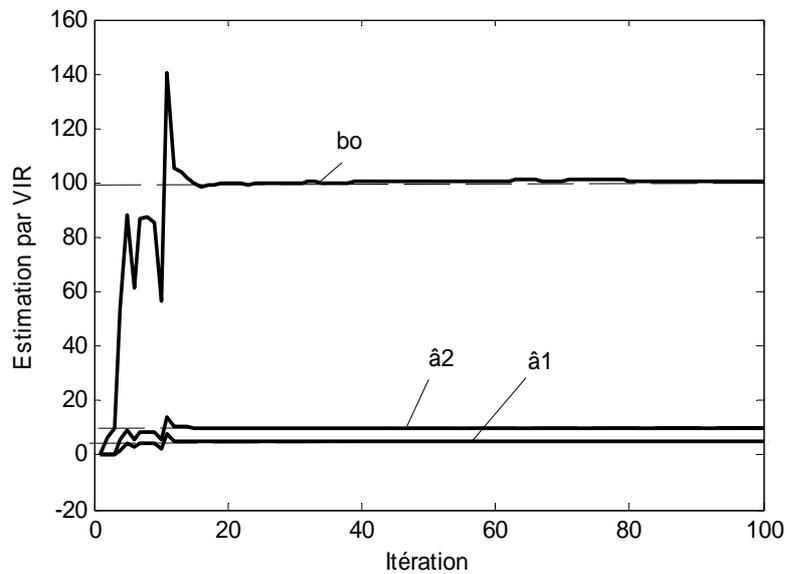


Figure III.7 Evolution de l'estimation paramétrique du modèle  $M_1$  par la méthode VIR (données bruitées)

Tab. III.3 Résultat de l'estimation des paramètres du modèle  $M_1$  par les méthodes des MCR et VIR (données bruitées)

	$a_1$	$a_2$	$b_0$
Valeurs exactes	5	10	100
Valeurs estimées par MCR	5.115	10.128	100.480
Valeurs estimées par VIR	5.076	10.080	100.092

### III.4 Conclusion

Après avoir présenter une étude bibliographique sur l'identification fréquentielle par modèle d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Une méthode d'identification récursive d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire est présentée dans ce chapitre. Il s'agit d'une extension de la méthode d'identification paramétrique des moindres carrés linéaires et celle des variables instrumentales récursives aux ordres fractionnaires. Après un développement théorique, nous avons montré avec des exemples de simulation que cette nouvelle technique permet de résoudre certains problèmes rencontrés avec les autres méthodes déjà existantes tels que : la sensibilité au bruit et les problèmes de calcul numérique posés par les inversions matricielles. Le caractère récursif de cette approche permet aussi de faire l'identification paramétrique des systèmes fractionnaires non stationnaires et d'envisager une estimation paramétrique en temps réel. L'analyse expérimentale et par simulation numérique des résultats obtenus par cette technique en utilisant quelques exemples de modèles typiques, nous a montré que ses performances caractéristiques sont meilleures par rapport à celles obtenues en utilisant la méthode des moindres carrés linéaires non récursifs. Ces performances sont considérablement améliorées en introduisant des variables instrumentales avec un modèle auxiliaire d'ordre fractionnaire.



# Chapitre IV

## Commande robuste d'ordre fractionnaire

### IV.1 Introduction

Dans le domaine de la commande, l'objectif est de déterminer le régulateur qui assure au procédé réglé, les performances fixées par le concepteur conformément à un compromis entre ces exigences et les limites physiques du procédé. La synthèse du régulateur ainsi adapté est effectuée à partir d'un état paramétrique donné du procédé (état paramétrique nominal).

Une modification de cet état, non accompagnée d'une reparamétrisation du régulateur (cas d'un régulateur fixe), se traduit par une désadaptation du régulateur au procédé. Il en résulte une modification des performances de la commande, traduisant ainsi sa sensibilité à un écart paramétrique du procédé.

D'une manière générale, cette absence de robustesse vis-à-vis des paramètres du procédé ne permet pas de garantir les spécifications sur les performances de la commande. En effet, l'état paramétrique du procédé pour lequel le régulateur est calculé, ne correspond que très rarement au véritable état paramétrique.

Ce problème constitue un souci constant de l'automaticien et fait l'objet de nombreuses recherches, d'autant que les écarts paramétriques sont très fréquents en raison de la diversité de leurs origines. Pour les procédés stationnaires, ce sont généralement les erreurs de modélisation et d'identification, la dispersion des caractéristiques des procédés de même type issus d'une fabrication artisanale ou industrielle, la modification des paramètres en fonction des conditions de fonctionnement, la dégradation du fonctionnement,...etc. Dans le cas des procédés non stationnaires vient s'ajouter à l'ensemble de ces causes, la variation temporelle des paramètres.

La robustesse est une notion très large qui traduit toujours la même idée, à savoir l'insensibilité ou par défaut la quasi-insensibilité. Aussi, dans un même domaine, il existe

autant de types de robustesses que de grandeurs insensibles. Le domaine de la commande n'y échappe pas. Dans celui ci, il est fréquent de considérer la robustesse de la stabilité dont l'objectif est le maintien de la stabilité ou en d'autre terme, la garantie d'une valeur maximale du facteur de résonance en asservissement ou en régulation.

Dans l'approche fractionnaire qu'utilise la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) [OUS91], la robustesse est de nature plus sévère puisqu'il s'agit de la robustesse du degré de stabilité. L'objectif étant alors le maintien de la performance dynamique fréquentielle ou temporelle qui mesure ce degré (robustesse en performance). Plus précisément, la robustesse dont il s'agit est celle du degré de stabilité de la commande vis-à-vis des incertitudes du procédé.

Notre contribution dans ce chapitre s'inscrit au cœur de ce problème. Motivés par la qualité remarquable en robustesse de la commande CRONE développée par Oustaloup [OUS91] et par les performances caractéristiques en qualité de robustesse vis-à-vis la variation du gain de la boucle idéale de Bode [BOD45], nous proposons de nouvelles techniques de conception de commandes robustes d'ordre fractionnaire basées sur la fonction de transfert idéale de Bode comme modèle de référence.

Ce chapitre est composé de trois parties principales, La première partie présente un rappel des principes de la commande CRONE. La deuxième partie est consacrée à l'étude des propriétés de l'action intégrale et de l'action dérivée d'ordre fractionnaire, et l'analyse des performances caractéristiques d'une commande élémentaire d'ordre fractionnaire basée sur la fonction de transfert idéale de Bode. Dans la troisième partie, la fonction de transfert idéale de Bode est utilisée comme un modèle de la boucle ouverte pour la conception de commandes robustes d'ordre fractionnaire.

## **IV.2 Rappels des principes de la commande CRONE**

Les bases de la commande CRONE ont été fondées dans la deuxième moitié des années 1970 par A. Oustaloup dans son travail de synthèse d'un laser à colorant continu [OUS75].

Trois stratégies bien distinctes assurant d'excellentes performances de robustesse ont fait l'objet de développements théoriques et technologiques importants. Chacune d'elles définit une génération de la commande CRONE [OUS91].

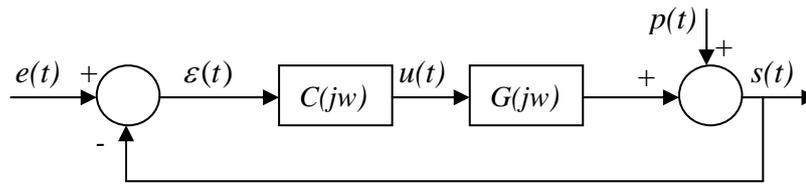


Figure. IV.1 Diagramme de commande à retour unitaire

### IV.2.1 Commande CRONE de première génération

La première stratégie repose sur une phase constante du régulateur  $C(j\omega)$  autour de la fréquence au gain unité en boucle ouverte  $w_u$ . Si  $C(j\omega)$  désigne la réponse en fréquences du régulateur en cascade avec le procédé (figure IV.1), les variations de marge de phase résultent toujours des variations additives de phase du procédé et du régulateur autour de la fréquence  $w_u$ , dans cette stratégie, le régulateur présente au moins le mérite de ne pas contribuer aux variations de marge de phase. Celles-ci se réduisent en effet aux variations de phase du procédé.

La version idéale du régulateur CRONE à phase constante est définie par une transmittance d'ordre fractionnaire de la forme:

$$C_\alpha(s) = C_0 \left( \frac{1 + s/w_b}{1 + s/w_h} \right)^\alpha \quad \text{avec } w_h, w_b, \alpha \in \mathfrak{R} \quad (\text{IV.1})$$

dont le diagramme de Bode est donné par la figure (IV.2)

Sa version réelle est définie par une transmittance d'ordre entier résultant d'une distribution récursive de zéros et de pôles, soit:

$$C_N(s) = C_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/z_i}{1 + s/p_i} \quad \text{avec } z_i, p_i \in \mathfrak{R}, N \in \mathfrak{N} \quad (\text{IV.2})$$

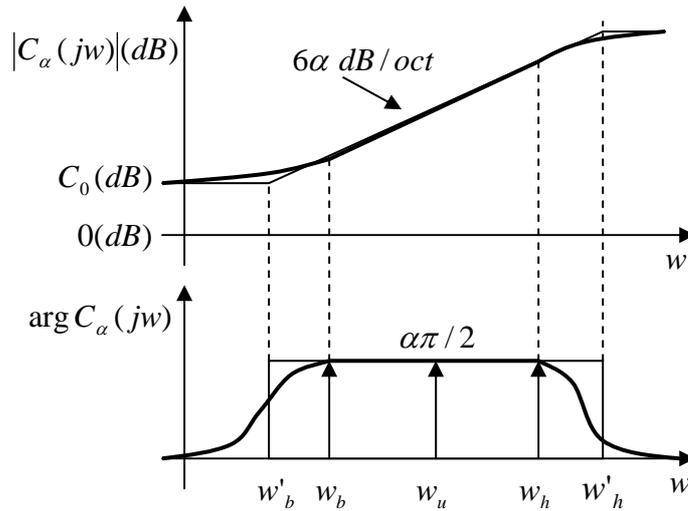


Figure IV.2 Diagrammes de Bode du régulateur CRONE idéal à phase constante

où

$$\text{si } \alpha > 0 \begin{cases} z_1 = w_b \sqrt{b} \\ p_i = z_i a, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ z_{i+1} = p_i b, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ w_h = p_N \sqrt{b} \end{cases}, \text{ si } \alpha < 0 \begin{cases} p_1 = w_b \sqrt{b} \\ z_i = p_i a, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ p_{i+1} = z_i b, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ w_h = z_N \sqrt{b} \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

$$w_h = w_b (ab)^N \Rightarrow N = \text{Integer} \left\{ \frac{\log(w_h / w_b)}{\log(ab)} \right\} \quad (\text{IV.4})$$

$$a = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{|\alpha|/N}, \quad b = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{(1-|\alpha|)/N} \quad (\text{IV.5})$$

Afin que le régulateur CRONE ainsi défini, tant idéalement que réellement, ait une action sur la sensibilité de l'entrée ainsi que sur les erreurs de position et de traînage, il convient d'en lui intégrant en cascade une transmittance de la forme :

$$C'(s) = \left( 1 + \frac{w'_b}{s} \right)^{n_b} \frac{1}{\left( 1 + s / w'_h \right)^{n_h}} \quad (\text{IV.6})$$

avec  $w'_b \ll w_b$ ,  $w'_h \gg w_h$  et  $n_b, n_h$  sont des nombres entiers.

la transmittance

$$C_{nh}(s) = \frac{1}{\left( 1 + s / w'_h \right)^{n_h}} \quad (\text{IV.7})$$

représente celle d'un filtre passe-bas d'ordre  $n_h$  tel que :

- $n_h = 0$  pour que la sensibilité de l'entrée demeure constante en hautes fréquences ;
- $n_h = 1$  pour que la sensibilité de l'entrée diminue avec les hautes fréquences.

et la transmittance :

$$C_{nb}(s) = \left(1 + \frac{W'_b}{s}\right)^{n_b} \quad (\text{IV.8})$$

est celle d'un proportionnel-intégrateur d'ordre  $n_b$  tel que, si  $n_{pb}$  représente l'ordre du comportement asymptotique du procédé en basses fréquences :

dans le cas où  $n_{pb} = 0$  :

- $n_b = 1$  pour annuler l'erreur de position,
- $n_b = 2$  pour annuler l'erreur de traînage ;

dans le cas où  $n_{pb} = 1$  :

- $n_b = 0$  pour annuler l'erreur de position,
- $n_b = 1$  pour annuler l'erreur de traînage ;

dans le cas où  $n_{pb} \geq 2$  :

$n_b = 0$  pour annuler les erreurs de position et de traînage .

La robustesse de la marge de phase est obtenue seulement lorsque  $w_u$  appartient à la bande de fréquence où la phase du procédé est constante.

Dans le cas où on ne peut pas utiliser la bande de fréquence à phase constante, la deuxième génération de la commande CRONE peut être utilisée.

#### IV.2.2 Commande CRONE de deuxième génération

Cette approche est basée sur la fonction de transfert en boucle ouverte autour de  $w_u$  définie à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un intégrateur d'ordre fractionnaire de la forme :

$$T(s) = \left( \frac{w_u}{s} \right)^\alpha \quad \text{avec } \alpha \in [1, 2] \quad (\text{IV.9})$$

L'objectif consiste en l'annulation directe des variations de marge de phase par un gabarit vertical (figure IV.3), que forme le lieu de Black en boucle ouverte entre  $-\pi/2$  et  $-\pi$  autour de  $w_u$ , pour l'état paramétrique nominal du procédé, et la réalisation d'un glissement de ce gabarit sur lui-même lors d'une reparamétrisation du procédé (variations du gain autour de  $w_u$ ).

La forme et le glissement vertical du gabarit assure, non seulement la constance de la marge de phase  $\phi_m$ , mais également :

- la constance du premier dépassement réduit de la réponse libre ou indicielle en asservissement ou en régulation, à travers la tangente du gabarit à un même contour d'isodépassement ;
- la constance du facteur d'amortissement en asservissement et en régulation, à travers la tangente du gabarit à un même contour d'isoamortissement.

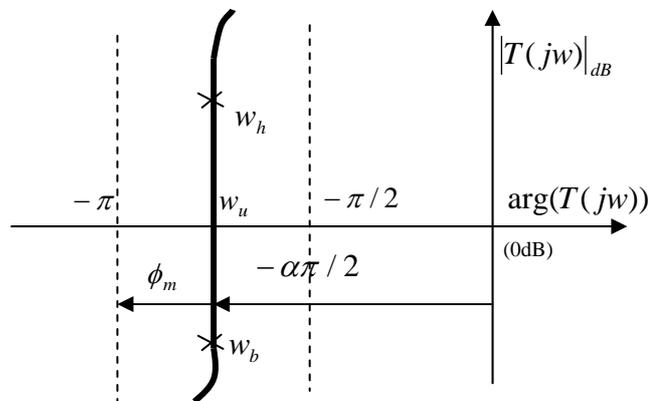


Figure IV.3 Représentation du gabarit vertical dans le plan de Black

Le comportement dynamique en boucle fermée est exclusivement lié au comportement en boucle ouverte au voisinage de la fréquence au gain unité. Aussi, l'étude d'un tel comportement peut être fondée sur les transmittances en asservissement  $H(s)$  et en régulation  $H_R(s)$  déterminées à partir de la transmittance en boucle ouverte réduite à la transmittance de description du gabarit  $T(s)$ , soit :

$$H(s) = \left[ \frac{S(s)}{E(s)} \right]_{P(s)=0} = \frac{T(s)}{1+T(s)} = \frac{1}{1 + \left( \frac{s}{w_u} \right)^\alpha} \quad (\text{IV.10})$$

et

$$H_R(s) = \left[ \frac{S(s)}{P(s)} \right]_{E(s)=0} = \frac{1}{1+T(s)} = \frac{\left( \frac{s}{w_u} \right)^\alpha}{1 + \left( \frac{s}{w_u} \right)^\alpha} \quad (\text{IV.11})$$

Dans l'objectif de déduire analytiquement le comportement en boucle ouverte (pour le procédé nominal) qui prend en compte à la fois les spécifications de précision aux basses fréquences, le gabarit vertical au voisinage de la fréquence  $w_u$  et le comportement du procédé aux hautes fréquences conformément aux spécifications sur la sensibilité de l'entrée à ces fréquences, la transmittance en boucle ouverte peut être fondée sur l'intégration d'ordre fractionnaire bornée en fréquence, soit :

$$T(s) = \left( k_b \left( \frac{w_b}{s} + 1 \right) \right)^{n_b} \left( \frac{1 + \frac{s}{w_h}}{\frac{w_u}{w_b} \frac{1 + \frac{s}{w_b}}{1 + \frac{s}{w_h}}} \right)^\alpha \left( \frac{k_h}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^{n_h} \quad (\text{IV.12})$$

où  $n_b, n_h \in \mathbb{N}$ ,  $k_b = \left( 1 + \left( \frac{w_b}{w_u} \right)^2 \right)^{-1/2}$ ,  $k_h = \left( 1 + \left( \frac{w_u}{w_h} \right)^2 \right)^{1/2}$

Si  $n_{pb}$  représente l'ordre du comportement asymptotique du procédé en basses fréquences ( $w < w_b$ ), l'ordre  $n_b$  du proportionnel-intégrateur est défini par :

$$n_b \geq 1 \text{ si } n_{pb} = 0 \text{ et } n_b \geq n_{pb} \text{ si } n_{pb} \geq 1 \quad (\text{IV.13})$$

Si  $n_{ph}$  représente l'ordre du comportement asymptotique du procédé en hautes fréquences ( $w > w_h$ ), l'ordre  $n_h$  du filtre passe-bas est défini par :

$$n_h \geq n_{ph} \quad (\text{IV.14})$$

Les fréquences transitionnelles basse et haute,  $w_b$  et  $w_h$  sont réparties symétriquement par rapport aux fréquences extrémales  $w_A$  et  $w_B$  du gabarit vertical. Dans le cas où elles sont suffisamment dispersées pour permettre d'écrire :

$$w_b = \frac{w_A}{10} \text{ et } w_h = 10w_B \quad (\text{IV.15})$$

on a  $w_u \gg w_b$  et  $w_u \ll w_h$ .

Dans le cas où la fréquence  $w_u$  appartient à un comportement quelconque du procédé et où la différence de phase entre le gabarit vertical et le procédé varie alors avec la fréquence, le régulateur placé en cascade avec le procédé doit présenter une phase variable sur l'étendu du gabarit.

Le régulateur est défini par une transmittance non entière  $C_{ne}(s)$ , déduite du rapport :

$$C_{ne}(s) = \frac{T(s)}{G_0(s)} \quad (\text{IV.16})$$

où  $T(s)$  est donné par la relation (IV.12) et  $G_0(s)$  désigne la transmittance nominale du procédé.

La synthèse de la transmittance entière d'ordre réduit du régulateur  $C_{en}(s)$ , consiste à réaliser l'identification par modèle rationnel entier de la réponse en fréquence  $C_{ne}(jw)$ . La synthèse revient alors à adapter les paramètres d'une transmittance de structure prédéfinie à la réponse en fréquence  $C_{ne}(jw)$ . Le modèle rationnel entier sur lequel est fondée l'estimation paramétrique est de la forme :

$$C_{en}(s) = \frac{\sum_{k=0}^n b_k s^k}{\sum_{k=0}^d a_k s^k} \quad (\text{IV.17})$$

L'objectif est d'estimer le vecteur des paramètres,  $v$ , donné par :

$$v = [a_0, a_1, \dots, a_d, b_0, b_1, \dots, b_n]^T \quad (\text{IV.18})$$

qui annule l'écart entre la réponse en fréquence approchée  $C_{en}(jw)$  et la réponse en fréquence à identifier  $C_{ne}(jw)$ , soit :

$$\varepsilon(jw) = C_{en}(jw) - C_{ne}(jw) \quad (\text{IV.19})$$

sur  $M$  fréquences  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) définies par le concepteur.

### IV.2.3 Commande CRONE de troisième génération

Lorsque la seconde condition ne peut être vérifiée, il n'y a aucune raison pour que le gabarit vertical assure au mieux la robustesse de la commande. Il convient alors de le généraliser conformément à deux niveaux de généralisation. Le premier niveau consiste à considérer un gabarit, toujours défini comme un segment de droite pour l'état paramétrique nominal du procédé, mais de direction quelconque, appelé gabarit généralisé. Le gabarit ainsi défini est décrit par une transmittance fondée sur celle d'un intégrateur d'ordre complexe, dont sa fonction de transfert d'ordre complexe  $n = a + ib$  est définie sur deux plans complexes indépendants,  $C_i$  (pour l'ordre complexe  $n$ ) et  $C_j$  (pour la variable  $s$ ), de la forme :

$$T(s) = \left( \coth \left( b \frac{\pi}{2} \right) \right)^{\text{sign}(b)} \left( \frac{W_u}{s} \right)^a \left( \left[ \frac{W_u}{s} \right]_{C_j}^{ib} \right)^{\text{sign}(b)} \quad (\text{IV.20})$$

La partie réelle  $a$  de l'ordre complexe  $n$  détermine le placement en phase du gabarit et la partie imaginaire  $b$  détermine ensuite son inclinaison par rapport à la verticale. Dans le cadre de cette généralisation, la recherche d'un gabarit optimal au sens de la minimisation d'un critère quadratique (sous contraintes) portant sur les variations du facteur de résonance en asservissement ou du facteur d'amortissement en asservissement et en régulation, définit la stratégie optimale qu'utilise la version initiale de la commande CRONE de troisième génération. Le deuxième niveau consiste à substituer au gabarit généralisé un ensemble de gabarits du même type, appelé *multi-gabarit*. Sa description par un produit de transmittances d'ordre complexes bornées en fréquence, définit un gabarit curviligne qui étend le gabarit rectiligne que forme le gabarit vertical ou généralisé. La recherche d'un gabarit curviligne optimal, au sens de la minimisation, du critère précédent, définit la stratégie optimale la plus évoluée qu'utilise la commande CRONE de troisième génération.

## IV.3 Performances caractéristiques d'un système de commande élémentaire d'ordre fractionnaire

Dans ce paragraphe nous allons présenter les principales caractéristiques des actions dérivée et intégrale d'ordre fractionnaire réel dans un système de commande à retour. En suite, nous allons étudier les performances caractéristiques d'un système de commande élémentaire à routeur unitaire dont la boucle ouverte est définie par la fonction de transfert idéale de Bode.

### IV.3.1 Actions des commandes élémentaires d'ordre fractionnaire

À partir du diagramme de commande de la figure (IV.4), on va examiner l'effet des commandes élémentaires de type  $Ks^\mu$  pour  $\mu \in [-1, 1]$ , les commandes de base traditionnelles sont des cas particuliers de ce cas général, soit,

- $\mu = 0$  : action proportionnelle ;
- $\mu = -1$  : action intégrale ;
- $\mu = 1$  : action dérivée ;

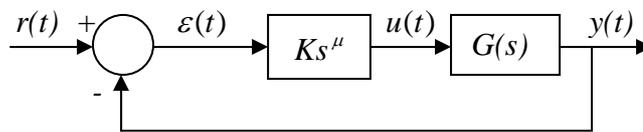


Figure IV.4 Diagramme d'un système à retour avec action de commande élémentaire d'ordre fractionnaire

#### IV.3.1.1 Action intégrale d'ordre fractionnaire

Comme il est connu, l'effet principale de l'action intégrale est de ralentir le système, diminué sa stabilité relative et élimine son erreur statique pour les entrées avec les quelles le système a une erreur finie.

Ces effets peuvent être observés dans les différents domaines. Dans le domaine temporel elles consistent à diminuer le temps de montée et augmenter le temps de réponse et le dépassement. Dans le domaine fréquentiel, cet effet donne une courbe d'amplitude de pente  $-20 \text{ dB/dec}$  et un déphasage de  $-\pi/2$ .

Dans le cas de l'action intégrale d'ordre fractionnaire, où  $-1 < \mu < 0$ , la sélection d'une valeur de  $\mu$ , entraîne une pondération de tous les effets cités précédemment. Dans le domaine temporel, ces effets peuvent être étudiés en considérant l'action intégrale fractionnaire à travers un signal d'erreur carré.

Si le signal d'erreur est de la forme :

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^N (-1)^k u_0(t - kT) \quad (\text{IV.21})$$

où  $u_0(t)$  est l'échelon unitaire. Sa transformée de Laplace est donné par :

$$\widehat{\mathcal{E}}(s) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{e^{-kTs}}{s} \quad (\text{IV.22})$$

Alors, l'action de commande, comme il est montré dans diagramme de la figure (IV.4), peut être donnée par :

$$u(t) = \ell^{-1}(U(s)) = \ell^{-1} \left\{ K \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{e^{-kTs}}{s^{1-\mu}} \right\} = K \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{\Gamma(1-\mu)} (t-kT)^{-\mu} u_0(t-kT) \quad (\text{IV.23})$$

La figure (IV.5) représente la commande  $u(t)$  pour les valeurs  $\mu = 0, -0.2, -0.5, -1$ ;  $T = 30$  et  $N = 4$ . Comme il est montré, l'effet de l'action de commande varie entre l'effet de l'action proportionnelle ( $\mu = 0$ , signal carré) et l'effet de l'action intégral ordinaire ( $\mu = -1$ , courbe de lignes droites en zigzag). Pour des valeurs intermédiaires de l'ordre  $\mu$ , l'action de commande augmente lorsqu'il y a une erreur constante, ce qui élimine l'erreur stationnaire, et décroît lorsque l'erreur est nulle, ce qui rend le système plus stable.

Dans le domaine fréquentielle l'amplitude de la chaîne directe est donné par :

$$20 \log |Ks^\mu G(jw)| = 20 \log |KG(jw)| + 20\mu \log w \quad (\text{IV.24})$$

et la phase par l'expression :

$$\arg[s^\mu G(jw)] = \arg[G(jw)] + \mu \frac{\pi}{2} \quad (\text{IV.25})$$

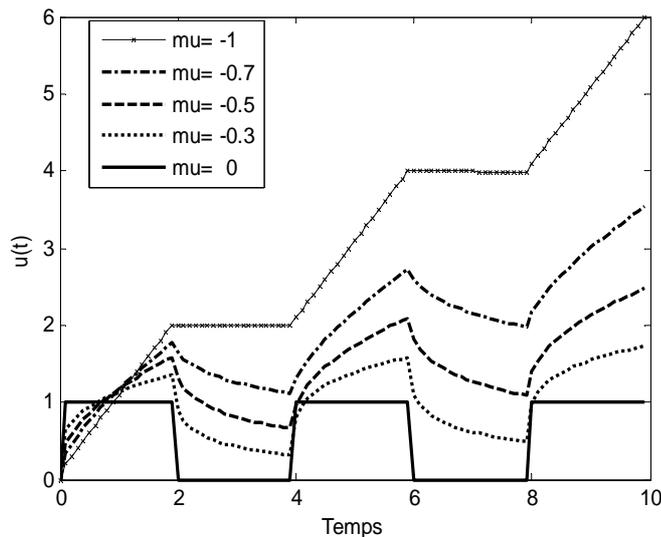


Figure IV.5 Action intégrale dans le cas d'un signal d'erreur carré et  $\mu = 0, -0.2, -0.5, -1$

Comme il peut être observé, en variant  $\mu$  entre -1 et 0, il est possible :

- D'introduire une augmentation constante de la pente de la courbe d'amplitude qui varie entre -20 dB/dec et 0 dB/dec ;
- D'introduire un retard constant de la phase qui varie entre  $-\pi/2$  et 0.

#### IV.3.1.2 Action dérivée d'ordre fractionnaire

L'action dérivée augmente la stabilité du système. Dans le domaine temporelle cette action est observée dans la diminution du dépassement et du temps de réponse. Dans le domaine fréquentielle, elle donne une phase constante de valeur  $\pi/2$  et une pente de 20 dB/dec de la courbe d'amplitude.

Tous les effets précédents peuvent être pondérés en introduisant la notion de dérivée fractionnaire d'ordre  $\mu$  tel que  $0 < \mu < 1$ .

Dans le domaine temporel, la pondération de l'effet de l'action dérivée dans un système de commande peut être observée en étudiant comment cette action affecte un signal d'erreur trapézoïdal de la forme :

$$\varepsilon(t) = tu_0(t) - (t-T)u_0(t-T) - (t-2T)u_0(t-2T) + (t-3T)u_0(t-3T) \quad (\text{IV.26})$$

La transformée de Laplace de (IV.26) est donnée par :

$$\widehat{\varepsilon}(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-Ts}}{s^2} - \frac{e^{-2Ts}}{s^2} + \frac{e^{-3Ts}}{s^2} \quad (\text{IV.27})$$

Suivant le diagramme de la figure (IV.4), l'action de commande est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} u(t) &= \ell^{-1} \left\{ K \left( \frac{1}{s^{2-\mu}} - \frac{e^{-Ts}}{s^{2-\mu}} - \frac{e^{-2Ts}}{s^{2-\mu}} + \frac{e^{-3Ts}}{s^{2-\mu}} \right) \right\} \\ &= K \left( \frac{1}{\Gamma(2-\mu)} t^{1-\mu} u_0(t) - \frac{1}{\Gamma(2-\mu)} (t-T)^{1-\mu} u_0(t-T) \right) - \frac{1}{\Gamma(2-\mu)} (t-2T)^{1-\mu} u_0(t-2T) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(2-\mu)} (t-3T)^{1-\mu} u_0(t-3T) \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

La figure (IV.6) présente la commande  $u(t)$  pour les valeurs  $\mu = 0, 0.2, 0.5, 1$ . Comme il est montré, l'effet de l'action dérivée varie entre l'effet de l'action proportionnelle ( $\mu = 0$ , signal trapézoïdal) et l'effet de l'action dérivée ordinaire ( $\mu = 1$ , signal carré). Pour des

valeurs intermédiaires de l'ordre  $\mu$ , l'action de commande présente des courbes intermédiaires. Il peut être remarqué que l'action dérivée n'est pas nulle lorsque l'erreur est constante. Aussi, la croissance de la commande est plus amortie lorsque le signal d'erreur varie, ce qui donne des bonnes performances avec les signaux de perturbation à fréquences élevées.

Dans le domaine fréquentielle l'amplitude et la phase de la chaîne directe sont données respectivement par les équations (IV.24) et (IV.25) avec  $\mu \in [0, 1]$ .

En variant  $\mu$  entre 0 et 1, il est possible :

- D'introduire une augmentation constante de la pente de la courbe d'amplitude qui varie entre 0 dB/de cet 20 dB/dec ;
- D'introduire une avance constante de la phase qui varie entre 0 et  $\pi/2$ .

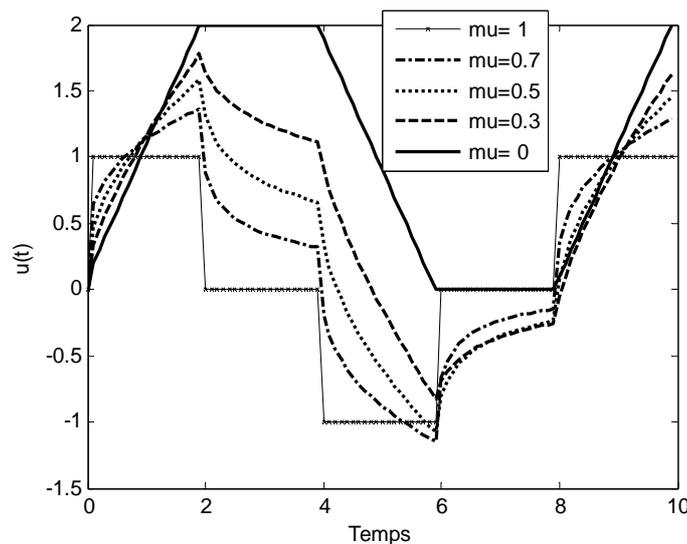


Figure IV.6 Action dérivée dans le cas d'un signal d'erreur trapézoïdal et  $\mu = 0, 0.2, 0.5, 1$

### IV.3.2 La fonction de transfert idéale de Bode

La fonction de transfert idéale de Bode a été proposée pour la première fois par Bode dans son travail sur la conception des amplificateurs à retour en 1945 [BOD45]. Le diagramme d'un tel amplificateur à retour unitaire est donné par la figure (IV.7), dont la fonction de transfert en boucle ouverte est définie par un intégrateur d'ordre fractionnaire de la forme :

$$T(s) = \frac{A}{s^\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{IV.29})$$

où  $\alpha$  est la pente de la caractéristique idéale du gain.

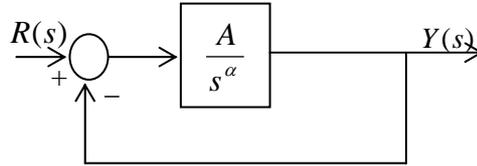


Figure IV.7 Diagramme de la boucle idéale de Bode

Ce système de commande est caractérisé par :

a) *En boucle ouverte :*

- La courbe d'amplitude a une pente constante de  $-\alpha 20 \text{dB} / \text{dec}$  ;
- La fréquence de coupure dépend de  $A$  ;
- La courbe de phase est une ligne horizontale d'ordonnée  $-\alpha\pi/2$  ;

b) *En boucle fermée avec retour unitaire*

- La marge du gain est infinie ;
- La marge de phase est constante égale à  $\phi_m = \pi(1 - \frac{\alpha}{2})$ , elle dépend seulement de  $\alpha$  ;
- Sa réponse indicielle est de la forme :

$$y(t) = At^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-At^\alpha) \quad (\text{IV.30})$$

où  $E$  est la fonction de Mittag-Leffler (cf. chapitre II ; section II.4.1.2).

#### IV.3.2.1 Caractéristiques temporelles

La fonction de transfert en boucle fermée de la boucle idéale de Bode est de la forme :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{A}{s^\alpha + A} \quad (\text{IV.31})$$

Les figures (IV.8) et (IV.9) représentent respectivement les réponses indicielles du système  $H(s)$  pour  $A=1$  avec différentes valeurs de  $\alpha$  et pour  $\alpha=1.5$  avec différentes valeurs de  $A$ .

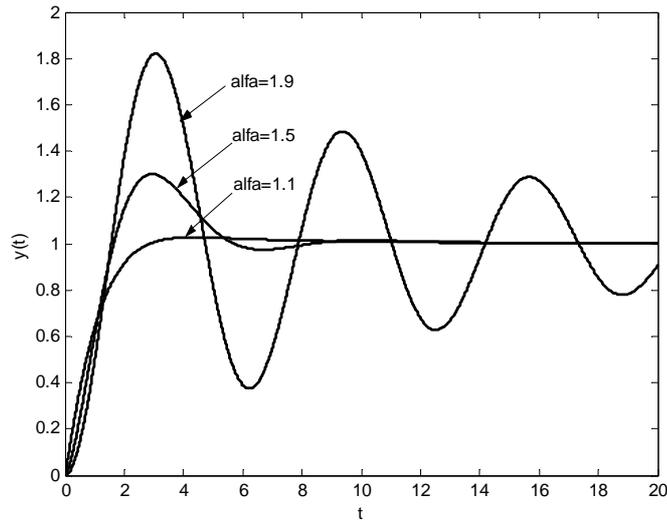


Figure IV.8 Réponse indicielle du système  $H(s)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ , avec  $A = 1$ .

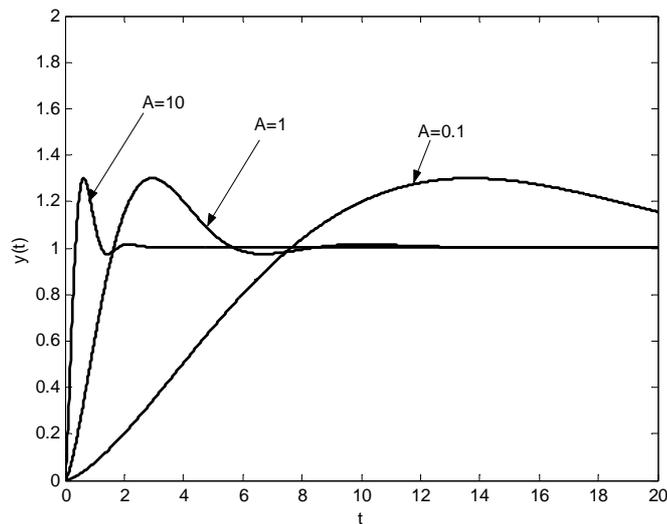


Figure IV.9 Réponse indicielle du système  $H(s)$  pour différentes valeurs de  $A$ , avec  $\alpha = 1.5$ .

Ces réponses correspondent au coefficient d'amortissement et au pulsation naturelle obtenus à partir des racines du dénominateur de  $H(s)$  données par :

$$s_{1,2} = A^{\frac{1}{\alpha}} e^{j\frac{\pi}{\alpha}} = A^{\frac{1}{\alpha}} \left( \cos \frac{\pi}{\alpha} + j \sin \frac{\pi}{\alpha} \right) \tag{IV.32}$$

soit,

$$w_n = |s_{1,2}| ; \quad \delta w_n = \text{real}(s_{1,2}) ; \quad w_p = w_n \sqrt{1 - \delta^2} \tag{IV.33}$$

Alors, la pulsation naturelle  $w_n$ , le facteur d'amortissement  $\delta$  et la fréquence propre  $w_p$  peuvent être données par les formules suivantes :

$$\delta = -\cos \frac{\pi}{\alpha} ; \quad w_n = A^{\frac{1}{\alpha}} ; \quad w_p = A^{\frac{1}{\alpha}} \sin \frac{\pi}{\alpha} \quad (\text{IV.34})$$

Le dépassement maximal (Figure IV.10) peut être exprimé en fonction de l'ordre  $\alpha$  par [BAR03] :

$$M_p = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} \approx 0.8(\alpha - 1)(\alpha - 0.75) (\%) , \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{IV.35})$$

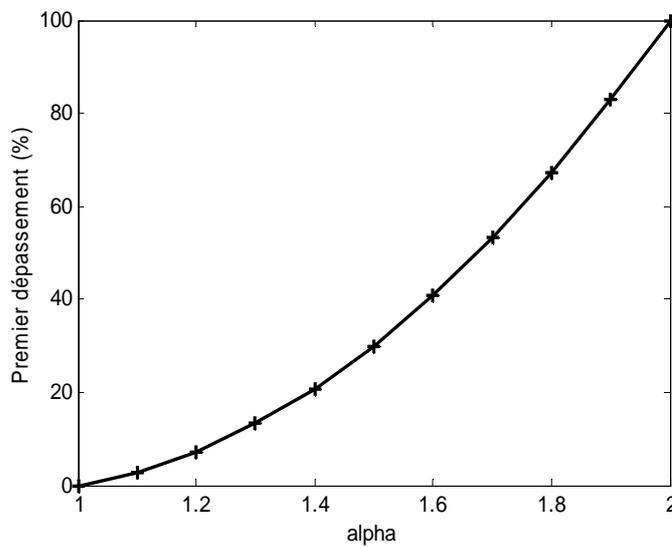


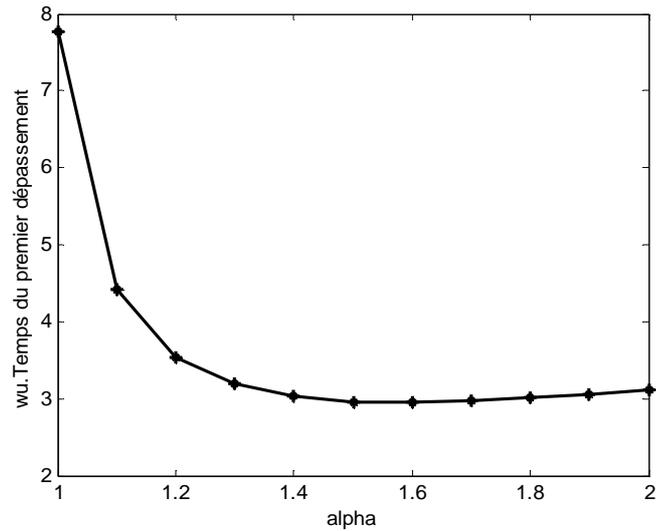
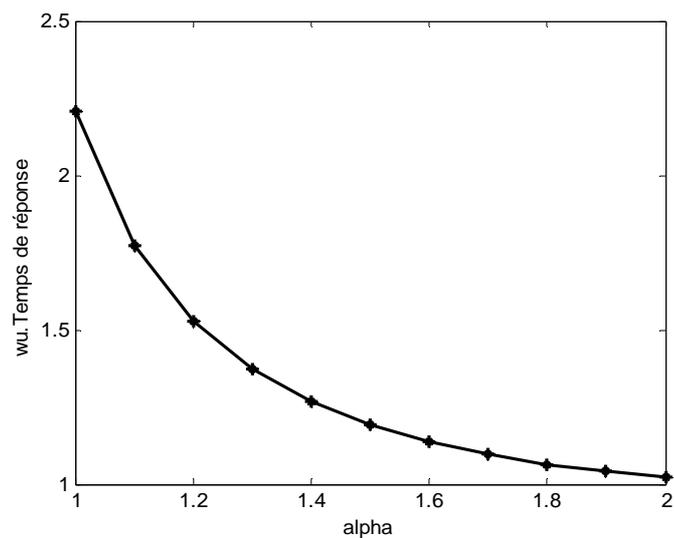
Figure IV.10 Variation du premier dépassement en fonction de  $\alpha$

Le temps du premier dépassement (Figure IV.11) et le temps de montée (2% à 90%) (Figure IV.12) peuvent être donnés d'une façon approximative par les formules [BAR03]:

$$w_u t_d \approx \frac{1.106(\alpha - 0.255)^2}{(\alpha - 0.921)}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{IV.36})$$

$$w_u t_m \approx \frac{0.131(\alpha + 1.157)^2}{(\alpha - 0.724)}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (\text{IV.37})$$

où  $w_u$  est la fréquence au gain unité.

Figure IV.11 Variation du temps de premier dépassement en fonction de  $\alpha$ Figure IV.12 Variation du temps de montée en fonction de  $\alpha$ 

#### IV.3.2.2 Caractéristiques fréquentielles

Le diagramme de Bode de la chaîne directe de la boucle idéale de Bode est donné par la figure (IV.13). La réponse en fréquence est caractérisée par une pente de  $-20\alpha \text{ dB/dec}$  et une phase constante de  $-\alpha\pi/2$ . Ainsi, la marge de phase en boucle fermée est indépendante du gain  $A$  et égale à  $\phi_m = (1 - \frac{\alpha}{2})\pi$ .

gain  $A$  et égale à  $\phi_m = (1 - \frac{\alpha}{2})\pi$ .



## IV.4 Conception d'une commande d'ordre fractionnaire basée sur la fonction de transfert idéale de Bode

Sachant que le comportement d'un système dynamique en boucle ouverte, autour de la fréquence au gain unité, est lié à son comportement en boucle fermée ; donc, la motivation de la commande proposée dans ce contexte vient d'une considération basée sur l'utilisation de l'idée de « la phase constante » autour de la fréquence transitionnelle  $w_u$ , ainsi, le système en boucle fermée est robuste par rapport au variation du gain, et sa réponse indicielle présente une propriété d'iso amortissement. Pour avoir un tel comportement fréquentiel dans une bande de fréquence donnée, autour de la fréquence transitionnelle au gain unité  $w_u$ , nous proposons une nouvelle technique dont l'objectif est d'obtenir une commande qui garantie que la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système de commande à retour unitaire soit équivalente à la fonction de transfert idéale de Bode.

### IV.4.1 Méthode de conception de la commande

Soit le système de commande à retour unitaire de la figure (IV.14).

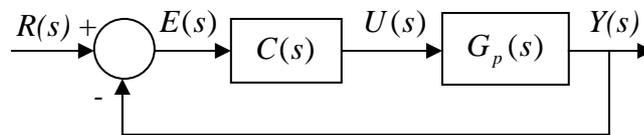


Figure IV.14 Système de commande à retour unitaire

La fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s)$  de ce système est donnée par :

$$G(s) = C(s) G_p(s) \quad (\text{IV.42})$$

où  $C(s)$  est la fonction de transfert de la commande et  $G_p(s)$  est la fonction de transfert du procédé.

Dans ce contexte, le procédé est supposé stable et à phase minimum dont la fonction de transfert est donnée par :

$$G_p(s) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^k (1 + s/z_{p_i})}{\prod_{i=1}^n (1 + s/p_{p_i})} \quad (\text{IV.43})$$

où tous les pôles et tous les zéros de  $G_p(s)$  sont réels,  $K_0$  est une constante et  $k < n$ .

Pour une fréquence transitionnelle  $w_u$  donnée au gain unité et pour une bande fréquentielle  $[w_b, w_h]$  fixée suivant un intérêt pratique autour de  $w_u$ , la fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  peut être décomposée en deux parties comme suit:

$$G_p(s) = G_{p1}(s) G_{p2}(s) = \left[ \begin{array}{c} \prod_{i=1}^{k_1} (1 + s/z_{p1_i}) \\ K_{01} \frac{\prod_{i=1}^{n_1} (1 + s/p_{p1_i})}{\prod_{i=1}^{n_1} (1 + s/p_{p1_i})} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \prod_{i=1}^{k_2} (1 + s/z_{p2_i}) \\ K_{02} \frac{\prod_{i=1}^{n_2} (1 + s/p_{p2_i})}{\prod_{i=1}^{n_2} (1 + s/p_{p2_i})} \end{array} \right] \quad (\text{IV.44})$$

où  $(k_1 + k_2) = k$ ,  $(n_1 + n_2) = n$ ,  $K_{01} K_{02} = K_0$

La fonction de transfert  $G_{p2}(s)$  est composée d'un ensemble de pôles et zéros de  $G_p(s)$  qui n'appartient pas à l'intervalle fréquentielle  $[w_b, w_h]$ , loin de la fréquence au gain unité  $w_u$ . Son diagramme de Bode présente alors un gain dont la courbe est une droite de pentes 0dB/dec, -20dB/dec, -40dB/dec, ..., et une phase constante de 0,  $-\pi/2$ ,  $-\pi$ , ..., respectivement. Ce qui permet de l'exprimer dans la bande fréquentielle  $[w_b, w_h]$  sous la forme:

$$G_{p2}(s) = K_{02} \frac{\prod_{i=1}^{k_2} (1 + s/z_{p2_i})}{\prod_{i=1}^{n_2} (1 + s/p_{p2_i})} \approx \frac{1}{\left( \frac{s}{w_u} \right)^m} \quad (\text{IV.45})$$

où  $m$  est un nombre entier tel que  $m = 0, 1, 2, \dots$

La fonction  $G_{p1}(s)$  est composée de l'ensemble des pôles et zéros de  $G_p(s)$  qui se trouvent à l'intérieur de la bande fréquentielle  $[w_b, w_h]$ . Alors, la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s)$  peut être donnée sous la forme:

$$G(s) = C(s) G_{p1}(s) G_{p2}(s) \quad (\text{IV.46})$$

et dans la bande fréquentielle  $[w_b, w_h]$ ,  $G(s)$  devienne:

$$G(s) = C(s) G_{p1}(s) G_{p2}(s) \approx C(s) G_{p1}(s) \frac{1}{\left( s/w_u \right)^m} \quad (\text{IV.47})$$

Maintenant, pour garantir que la fonction de transfert en boucle ouverte du système de commande de la figure (IV.14) soit équivalent à la fonction idéale de Bode, dans la bande de fréquence  $[w_b, w_h]$  autour de  $w_u$ , la fonction de transfert  $G(s)$  doit être tel que :

$$G(s) \approx C(s) G_{p1}(s) \frac{1}{(s/w_u)^m} \approx \frac{1}{(s/w_u)^\alpha} \quad (\text{IV.48})$$

où  $\alpha$  est un nombre réel tel que  $1 < \alpha < 2$ , fixé suivant les performances désirées de la commande.

Alors, la fonction de transfert de la commande  $C(s)$  doit être tel que :

$$C(s) G_{p1}(s) \approx \frac{1}{(s/w_u)^{(\alpha-m)}} \approx \frac{K_F}{(1+s/w_c)^{(\alpha-m)}} \quad (\text{IV.49})$$

avec  $w_c = 0.1w_b$  ( $w_c \ll w_u$ ) et  $K_F = (w_u/w_c)^{(\alpha-m)}$ .

A partir de la condition  $1 < \alpha < 2$ , le nombre réel  $\alpha$  peut être donné par :  $\alpha = \beta + 1$ , avec  $0 < \beta < 1$ . Alors, l'équation (IV.49) peut être réécrite sous la forme :

$$C(s) G_{p1}(s) \approx \frac{1}{(1+s/w_c)^{(1-m)}} \frac{K_F}{(1+s/w_c)^\beta} \quad (\text{IV.50})$$

L'approximation de  $C(s)G_{p1}(s)$  dans une bande fréquentielle  $w_{\max}$  tel que  $w_{\max} = 10w_h$ , avec une erreur donnée  $\gamma$  dB (cf. section I.7) donne :

$$\frac{1}{(1+s/w_c)^{(1-m)}} \frac{K_F}{(1+s/w_c)^\beta} \approx \frac{K_F}{(1+s/w_c)^{(1-m)}} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1+s/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1+s/p_i)} = G_a(s) \quad (\text{IV.51})$$

où les pôles  $p_i$  et les zéros  $z_i$  sont donnés par :

$$z_i = z_0 (ab)^i, \quad p_i = p_0 (ab)^i, \quad (\text{IV.52})$$

avec

$$a = 10^{\left[ \frac{\gamma}{10(1-\beta)} \right]}, \quad b = 10^{\left[ \frac{\gamma}{10\beta} \right]}, \quad p_0 = w_c 10^{\left[ \frac{\gamma}{20\beta} \right]}, \quad z_0 = ap_0 \quad \text{et} \quad N = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{w_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right\rceil + 1 \quad (\text{IV.53})$$

La nouvelle méthode de conception est basée sur l'idée de remplacer un ensemble de pôles et un ensemble de zéros de la fonction d'approximation rationnelle  $G_a(s)$  par les pôles et les zéros du procédé  $G_{p1}(s)$ . En d'autre termes, remplacer par chaque pôle  $p_{p1_i}$  (respectivement par chaque zéro  $z_{p1_i}$ ) de  $G_{p1}(s)$ , le pôle le plus proche (respectivement le zéro le plus proche) de  $G_a(s)$ . Ce qui donne une nouvelle fonction d'approximation  $G'_a(s)$  dont les paramètres  $a$  et  $b$  seront ajustés en minimisant un critère d'erreur entre  $|G'_a(jw)|$  et  $|G_a(jw)|$ .

Alors, la fonction  $G'_a(s)$  peut être décomposée sous forme d'un produit de deux termes, un premier terme contiens tous les pôles et tous les zéros de  $G_{p1}(s)$  et l'autre contiens le reste des pôles et zéros, soit :

$$G'_a(s) = \left[ \frac{K_c}{(1+s/w_c)^{(1-m)}} \frac{\prod_{i=0}^{N-(k_1+1)} (1+s/z_{ci})}{\prod_{i=0}^{N-n_1} (1+s/p_{ci})} \right] \left[ K_{01} \frac{\prod_{i=1}^{k_1} (1+s/z_{p1_i})}{\prod_{i=1}^{n_1} (1+s/p_{p1_i})} \right] \quad (\text{IV.54})$$

où  $K_c K_{01} = K_F$ .

Le problème d'optimisation ainsi posé est non linéaire par rapport aux paramètres  $a$  et  $b$ . Alors, une technique telle que la méthode *minmax* peut être utilisée, soit :

$$(a, b) = \arg \min \left( \max_{w \in [w_c, w_{\max}]} \left\| \left| G_a(jw) \right| - \frac{K_c G_{p1}(jw)}{(1 + \frac{jw}{w_c})^{(1-m)}} \frac{\prod_{i=0}^{N-(k_1+1)} \left( 1 + \frac{s}{z_{ci}(a, b)} \right)}{\prod_{i=0}^{N-n_1} \left( 1 + \frac{s}{z_{ci}(a, b)} \right)} \right\| \right) \quad (\text{IV.55})$$

avec  $a > 1$ ,  $b > 1$ ,  $p_0(ab)^N < w_{\max}$  et  $p_0 a(ab)^{N-1} < w_{\max}$ , soit :

$$1 < a, b < \left( \frac{w_{\max}}{p_0} \right)^{1/N} \quad (\text{IV.56})$$

La fonction de transfert de la commande  $C(s)$  sera donc obtenue sous la forme :

$$C(s) = \frac{K_c}{(1 + s/w_c)^{(1-m)}} \frac{\prod_{i=0}^{N-(k_1+1)} (1 + s/z_{ci})}{\prod_{i=0}^{N-n_1} (1 + s/p_{ci})} \quad (\text{IV.57})$$

Alors, on peut écrire :

$$C(s)G_{p1}(s) = \left[ \frac{K_c}{(1 + s/w_c)^{(1-m)}} \frac{\prod_{i=0}^{N-(k_1+1)} (1 + s/z_{ci})}{\prod_{i=0}^{N-n_1} (1 + s/p_{ci})} \right] G_{p1}(s) \approx \frac{1}{(s/w_u)^{(\alpha-m)}} \quad (\text{IV.58})$$

En d'autres termes, la combinaison des pôles et zéros de  $C(s)$  et  $G_{p1}(s)$  donne la fonction rationnelle d'approximation de l'intégrateur ou du dérivateur d'ordre fractionnaire. Ainsi, pour une bande fréquentielle  $[w_b, w_h]$  donnée autour de la fréquence au gain unité  $w_u$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s)$  peut être donnée par :

$$G(s) = C(s) G_p(s) = [C(s) G_{p1}(s)] G_{p2}(s) \approx \frac{1}{(s/w_u)^{(\alpha-m)}} \frac{1}{(s/w_u)^m} = \frac{1}{(s/w_u)^\alpha} \quad (\text{IV.59})$$

qui est bien la fonction de transfert idéale de Bode.

Dans cette nouvelle méthode,  $C(s)$  doit être causale. Alors, supposons que  $N_R = n_1 + m - k_1 - 2$  est le degré relative entre le degré du dénominateur et le degré du numérateur de la fonction  $C(s)$ . Si  $N_R \leq 0$  alors,  $C(s)$  est causale et il est donnée par l'équation (IV.57). Si  $N_R > 0$  alors,  $C(s)$  n'est pas causale et nous devons ajouter au moins  $N_R$  pôles à  $C(s)$  pour garantir sa causalité, d'où,  $C(s)$  peut être exprimée par une nouvelle formule donnée par:

$$C(s) = \frac{K_c}{(1 + s/w_c)^{(1-m)}} \frac{\prod_{i=0}^{N-(k_1+1)} (1 + s/z_{ci})}{\prod_{i=0}^{N-n_1} (1 + s/p_{ci})} \frac{1}{\prod_{i=0}^{N_R-1} (1 + s/p_{c2_i})} \quad (\text{IV.60})$$

où les pôles  $p_{c2_i}$  ( $i = 0, 1, \dots, N_R - 1$ ), sont données par :

$$p_{c2_i} = p_0 (ab)^{(N+i+1)} \quad (\text{IV.61})$$

#### IV.4.2 Exemples illustratifs

Dans un premier exemple, on considère un système de commande à retour unitaire dont le procédé  $G_p(s)$  est donné par la fonction de transfert:

$$G_p(s) = \frac{K_0}{s(1+\tau s)} = \frac{0.25}{s(1+s)} \quad (\text{IV.62})$$

avec les spécifications suivantes :

- fréquence du gain unité  $w_u = 1.0$  rad/s ;
- marge de phase  $\phi_m = 48.5^\circ$ .

Pour assurer une marge de phase de  $48.5^\circ$  avec une fréquence au gain unité  $w_u = 1.0$  rad/s dans une bande de fréquence  $[w_b, w_h] = [0.1w_u, 10w_u] = [0.1 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s}]$  autour de  $w_u$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s) = C(s)G_p(s)$  doit être telle que :

$$G(s) = \frac{1}{(s/w_u)^\alpha} \quad (\text{IV.63})$$

$$\text{où } \alpha = 2 \left( 1 - \frac{\phi_m}{\pi} \right) = 1.461.$$

La fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  est décomposée comme suit :

$$G_p(s) = G_{p1}(s) G_{p2}(s) = \left[ \frac{K_{01}}{1+s} \right] \left[ \frac{K_{02}}{s} \right] \quad (\text{IV.64})$$

avec :

$$G_{p1}(s) = \frac{K_{01}}{1+s} \quad \text{et} \quad G_{p2}(s) = \frac{K_{02}}{s} = \frac{1}{(s/w_u)^m} \quad (\text{IV.65})$$

où  $m = 1$ ,  $K_{02} = w_u = 1.0$  et  $K_{01} = (0.25/K_{02}) = 0.25$ .

La fonction de transfert de la commande  $C(s)$  doit être tel que:

$$C(s) G_{p1}(s) = C(s) \frac{K_{01}}{1+s} = \frac{1}{s^{(1.461-1)}} = \frac{1}{s^{0.461}} \quad (\text{IV.66})$$

L'approximation de  $C(s) G_{p1}(s)$  dans une bande fréquentielle  $w_{\max} = 10w_h$ , avec une erreur d'approximation  $\gamma = 1.5200$ , donne:

$$\frac{1}{s^{0.461}} = \frac{K_F}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^{0.461}} = K_F \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{IV.67})$$

avec

$$w_c = 0.1w_b = 0.01 \text{ rad/s}, \quad K_F = (w_u / w_c)^{0.461} = 8.3560, \quad ab = 4.0900, \quad p_0 = 0.0146, \\ z_0 = 0.0280, \text{ et } N = 7.$$

Ainsi, les pôles  $p_i$  et les zéros  $z_i$  peuvent être donnés par les équations suivantes :

$$p_i = p_0(ab)^i = 0.0146(4.0900)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,7.$$

$$z_i = z_0(ab)^i = 0.0280(4.0900)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,6.$$

On remarque que  $p_3=0.0146 (4.0900)^3 =0.9989$  est le pôle le plus proche au pôle  $p_{p_1} = 1$  de  $G_{p1}(s)$ , alors on remplace  $p_3 = 0.9989$  par  $p_{p_1} = 1$ , et on recalcule les paramètres  $a$  et  $b$  en utilisant la méthode d'optimisation proposée dans la section précédente, soit :

$$(a,b) = \arg \min \left( \max_{w \in [w_b, w_h]} \left\| \frac{1}{(jw)^{0.461}} - 33.424 \frac{0.25}{1+jw} \frac{\prod_{i=0}^6 \left(1 + \frac{jw}{ap_{c0}(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^2 \left(1 + \frac{jw}{p_{c0}(ab)^i}\right) \prod_{i=4}^7 \left(1 + \frac{jw}{p_{c0}(ab)^i}\right)} \right\| \right) \quad (\text{IV.68})$$

ce qui donne :  $ab= 4.1065$  et  $a=1.9100$ .

Alors, on peut déduire la fonction de transfert de la commande  $C(s)$ , soit :

$$C(s) = 33.424 \frac{\prod_{i=0}^6 \left(1 + \frac{s}{0.0280(4.1065)^i}\right)}{\prod_{i=0}^2 \left(1 + \frac{s}{0.0147(4.1065)^i}\right) \prod_{i=4}^7 \left(1 + \frac{s}{0.0147(4.1065)^i}\right)} \quad (\text{IV.69})$$

Les figures (IV.15) et (IV.16) représentent les diagrammes de Bode de la fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  et de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s)$ . A partir de la figure (IV.15) on peut voir que la fréquence transitionnelle au gain unité de  $G(s)$  est bien  $w_u = 1 \text{ rad/sec}$  et, dans la plage de fréquence  $[0.1, 10] \text{ rad/s}$ , la pente de sa courbe

d'amplitude est environ  $-20(1.461) = -29.22$  dB/dec. A partir de la figure (IV.16), on peut remarquer aussi que, dans la plage de fréquence  $[0.1, 10]$  rad/s, la phase  $G(s)$  est presque égale  $-(1.461)90^\circ = -131.50^\circ$ ; d'où la marge de phase est environ  $48.50^\circ$ . La figure (IV.17) représente la réponse indicielle du système en boucle fermée pour différentes valeurs du gain  $K_0$ . On remarque que la réponse indicielle en boucle fermée présente une propriété d'iso amortissement à cause de la phase constant de la boucle ouverte dans la bande de fréquence  $[0.1, 10]$  rad/s autour de  $\omega_u = 1$  rad/sec.

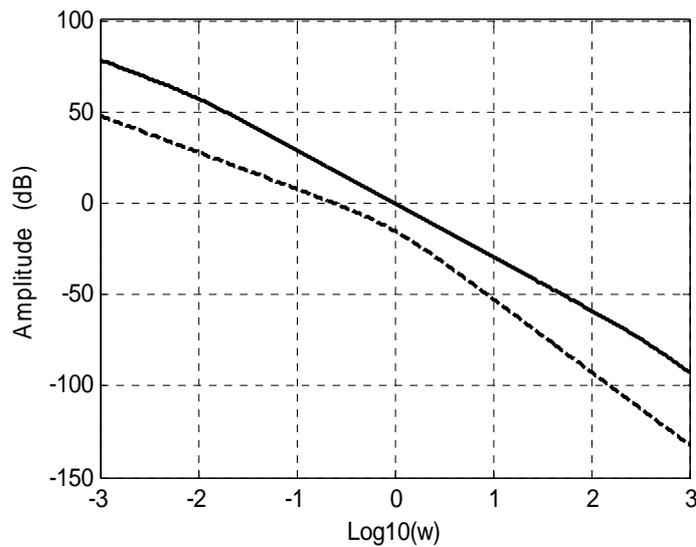


Figure IV.15 Tracé de Bode de l'amplitude de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s)$  (line continue) et de la fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  (ligne discontinue)

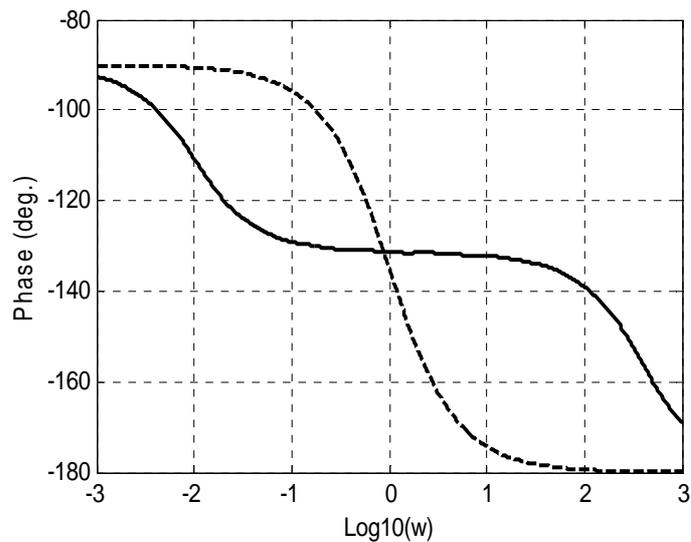


Figure IV.16 Tracé de Bode de la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s)$  (line continue) et de la fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  (ligne discontinue)

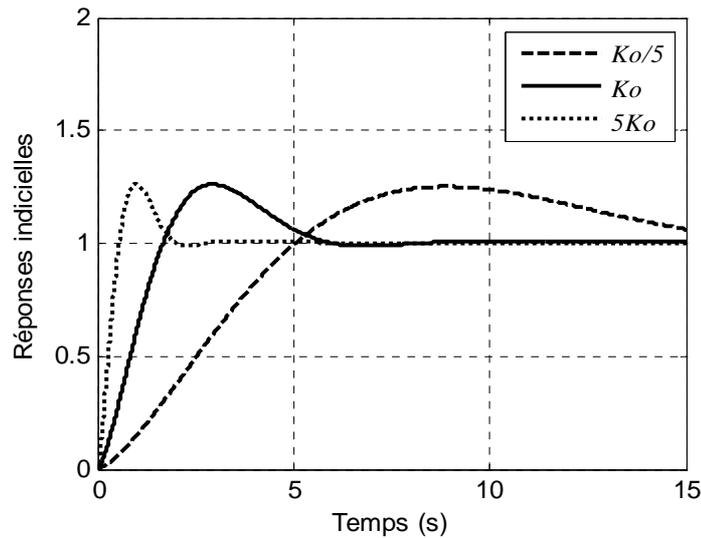


Figure IV.17 Réponse indicielle de système de commande en boucle fermée pour différentes valeurs du gain  $K_0$

Comme un deuxième exemple, considérons le système de commande à retour unitaire dont la fonction de transfert du procédé est donnée par :

$$G_p(s) = \frac{K_0}{s^2(1+\tau s)} = \frac{1}{s^2(1+2s)} \quad (\text{IV.70})$$

avec les spécifications suivantes :

- Dépassement  $< 10\%$  ;
- Temps de montée  $< 0.8$  sec.

Ces spécifications entraîne une marge de phase  $\phi_m$  de l'ordre de  $65.5^\circ$  et une fréquence transitionnelle au gain unité  $w_u = 2$  rad/s. Pour assurer ces spécifications dans une bande de fréquence  $[w_b, w_h] = [0.1w_u, 10w_u] \approx [0.2, 20]$  rad/s autour de  $w_u$ , la fonction de transfert en boucle ouverte doit être de la forme :

$$G(s) = \frac{1}{(s/w_u)^\alpha}, \quad \text{avec } \alpha = 1.25 \text{ et } w_u = 2. \quad (\text{IV.71})$$

La fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  est décomposée comme suit :

$$G_p(s) = G_{p1}(s) G_{p2}(s) = \left[ \frac{K_{01}}{1+2s} \right] \left[ \frac{K_{02}}{s^2} \right] \quad (\text{IV.72})$$

avec

$$G_{p1}(s) = \frac{K_{01}}{1+2s} \quad \text{et} \quad G_{p2}(s) = \frac{K_{02}}{s^2} = \frac{1}{(s/w_u)^m} \quad (\text{IV.73})$$

où  $m = 2$ ,  $K_{02} = (w_u)^m = 4$  et  $K_{01} = (1/K_{02}) = 0.25$ .

La fonction de transfert de la commande  $C(s)$  doit être tel que :

$$C(s) G_{p1}(s) = C(s) \frac{K_{01}}{1+2s} \approx \frac{1}{(s/w_u)^{(\alpha-m)}} = \frac{1}{(s/2)^{(1.25-2)}} = \frac{1}{(s/2)^{(0.25-1)}} \quad (\text{IV.74})$$

L'approximation de  $C(s) G_{p1}(s)$  dans une bande fréquentielle  $w_{\max} = 10w_h$ , avec une erreur d'approximation  $\gamma = 0.858$ , donne:

$$\frac{1}{(s/2)^{(0.25-1)}} \approx (1+s/w_c) \frac{K_F}{(1+s/w_c)^{0.25}} \approx K_F (1+s/w_c) \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{IV.75})$$

avec  $w_c = 0.1w_b = 0.02$  rad/s,  $K_F = (w_c/w_u)^{0.75} = 0.0316$ ,  $ab=2.8681$ ,  $z_0=0.0386$ ,

$$p_0 = 0.0297, N=9.$$

Alors, les zéros  $z_i$  et les pôles  $p_i$  sont :

$$z_i = z_0(ab)^i = 0.0386(2.8681)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,8$$

$$p_i = p_0(ab)^i = 0.0297(2.8681)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,9$$

On remarque que  $p_3 = 0.0297(2.8681)^3 = 0.7007$  est le pôle le plus proche au pôle  $p_{p1} = 0.5000$  de  $G_{p1}(s)$ , alors on remplace  $p_3$  par  $p_{p1}$ , et on recalcule les paramètres d'approximation  $a$  et  $b$  en utilisant la méthode d'optimisation proposée dans le paragraphe précédent, ce qui donne  $ab = 2.6334$  et  $a = 1.2600$ .

La fonction de transfert de la commande  $C(s)$  peut être obtenue ensuite, soit :

$$C(s) = \frac{K_c}{(1 + \frac{s}{w_c})^{(1-m)}} \frac{\prod_{i=0}^8 \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^2 \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right) \prod_{i=4}^9 \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right) \prod_{i=0}^{N_R-1} (1 + s/p_{c2_i})} \quad (\text{IV.76})$$

où  $w_c = 0.1w_b = 0.02 \text{ rad/s}$ ,  $m = 2$ ,  $K_c = 0.1265$ ,  $p_0 = 0.0289$ ,  $z_0 = 0.0364$ ,  $ab = 2.6334$ ,  $N_R = 1$  et  $p_{c2i} = p_0(ab)^{(10+i)}$  pour  $i = 0, \dots, N_R - 1$ .

Les figures (IV.18) et (IV.19) représentent les tracés de Bode de la fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  et de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s)$ . À partir de la figure (IV.18), on peut voir que la fréquence transitionnelle au gain unité de  $G(s)$  est bien  $w_u \approx 2 \text{ rad/s}$  et, dans la bande fréquentielle  $[0.2, 20] \text{ rad/s}$ , sa pente est de l'ordre de  $-20(1.25) = -25 \text{ dB/dec}$ . À partir de la figure (IV.19), on peut voir aussi que, dans la bande fréquentielle  $[0.2, 20] \text{ rad/s}$  la phase de  $G(s)$  est de l'ordre de  $-(1.25)90^\circ = -112,5^\circ$ ; d'où, la marge de phase est de l'ordre de  $65.50^\circ$ . La figure (IV.20) représente la réponse indicielle du système en boucle fermée pour différentes valeurs du gain  $K_0$ , on remarque que la réponse indicielle présente une propriété d'iso-amortissement à cause de la phase constante de la boucle ouverte dans la bande fréquentielle  $[0.2, 20] \text{ rad/s}$  autour de  $w_u = 2 \text{ rad/s}$ .

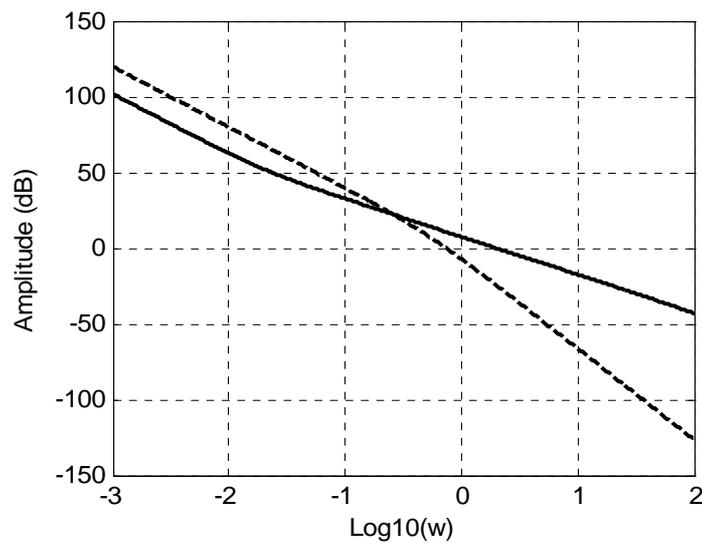


Figure IV.18 Tracé de Bode de l'amplitude de la fonction de transfert en BO  $G(s)$  (ligne continue) et la fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  (ligne discontinue)

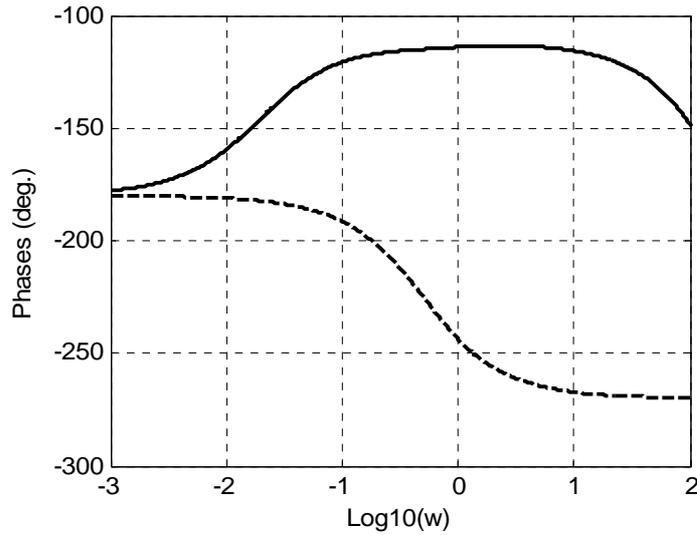


Figure IV.19 Tracé de Bode de la phase de la fonction de transfert en BO  $G(s)$  (ligne continue) et la fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  (ligne discontinue)

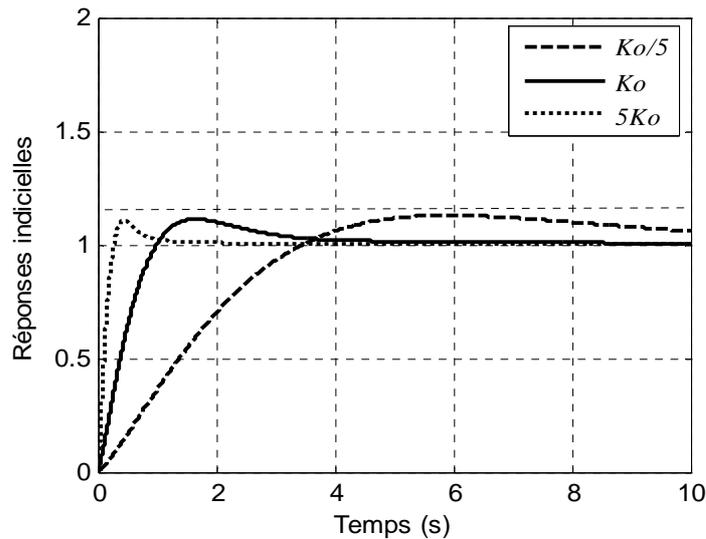


Figure IV.20 Réponse indicielle du système de commande en boucle fermée pour différentes valeurs de gain  $K_0$

Dans l'objectif de faire une étude comparative de la commande d'ordre fractionnaire (COF) proposée dans la section précédente avec les commandes CRONE et PID classique, on considère la commande à retour unitaire d'un moteur à courant continu dont la fonction de transfert est donnée par [OUS91] :

$$G_p(s) = \frac{1}{\frac{s}{w_n} \left(1 + \frac{s}{w_0}\right)} = \frac{1}{16.98 \left(1 + \frac{s}{50}\right)} \quad (\text{IV.78})$$

avec les spécifications suivantes :

- marge de phase  $\phi_m = 45^\circ$ ,
- fréquence transitionnelle au gain unité  $w_u = 500$  rad/s.

En utilisant la méthode de conception proposée dans la section (IV.4.1), la fonction de transfert de la commande  $C_{COF}(s)$ , calculée pour assurer les spécifications précédentes, est donnée par :

$$C_{COF}(s) = K_c \frac{\prod_{i=0}^4 \left( 1 + \frac{s}{z_0(ab)^i} \right)}{\left( 1 + \frac{s}{p_0} \right) \prod_{i=2}^5 \left( 1 + \frac{s}{p_0(ab)^i} \right)} \quad (\text{IV.79})$$

avec  $K_c = 312.5000$ ,  $ab = 5.9989$ ,  $p_0 = 7.7298$ , et  $z_0 = 19.4018$ .

Les fonctions de transfert des commandes CRONE et PID classique, calculées pour assurer les mêmes spécifications, sont données respectivement par les deux équations suivantes [OUS91] :

$$c_{CRONE}(s) = c_0 \frac{(1 + s/z_1)(1 + s/z_2)(1 + s/z_3)(1 + s/z_4)(1 + s/z_5)}{(1 + s/p_1)(1 + s/p_2)(1 + s/p_3)(1 + s/p_4)(1 + s/p_5)} \quad (\text{IV.80})$$

avec:

$c_0 = 4.84$ ;  $z_1 = 0.5595$  rd/s;  $z_2 = 2.747$  rd/s;  $z_3 = 13.738$  rd/s ;  $z_4 = 68.692$  rd/s ;  
 $z_5 = 343.46$  rd/s ;  $p_1 = 1.9234$  rd/s;  $p_2 = 6.144$  rd/s ;  $p_3 = 30.72$  rd/s ;  $p_4 = 153.6$  rd/s ;  
 $p_5 = 1202.1$  rd/s.

$$c_{PID}(s) = c_0 \frac{(1 + s/z_1)(1 + s/z_2)}{(1 + s/p_1)(1 + s/p_2)} \quad (\text{IV.81})$$

avec

$c_0 = 728.7$  ;  $z_1 = 4.0824$  rd/s;  $z_2 = 204.12$  rd/s;  $p_1 = 0.6804$  rd/s et  $p_2 = 1224.72$  rd/s.

La figure (IV.21) représente les diagrammes de phase en boucle ouverte des commandes COF, CRONE et PID. Elle montre que ces commandes assurent à la même commande une marge de phase d'une cinquantaine de degrés à la même fréquence  $w_u = 500$  rd/s, lui conférant ainsi la même dynamique (même fréquence propre et même amortissement). Elle montre aussi que le blocage de phase autour de  $w_u$ , dans le cas de la commande COF, est bien meilleur que celui des commandes CRONE et PID. Un tel

placement améliore considérablement les performances de la commande en qualité de robustesse vis-à-vis les variations paramétriques du procédé.

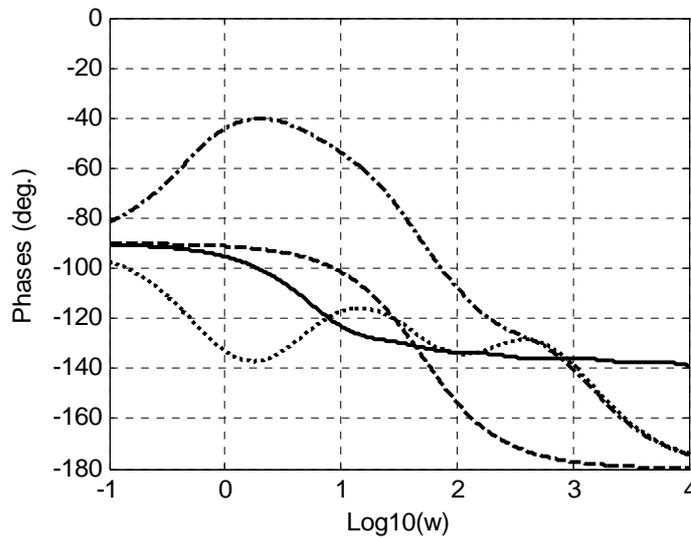


Figure IV.21 Tracé de Bode des phases des fonctions de transfert en BO :  $C_{COF}(s)G_P(s)$  ( — ),  $C_{PID}(s)G_P(s)$  ( ..... ),  $C_{CRONE}(s)G_P(s)$  ( \_ \_ \_ ) et la fonction de transfert du procédé  $G_P(s)$  ( \_ \_ \_ )

Les figures (IV.22), (IV.23) et (IV.24) représentent respectivement les réponses indicielles des commandes COF, CRONE et PID pour différentes valeurs du paramètre  $w_n$ . Ces réponses montrent clairement que ces trois commandes ont la même dynamique pour l'état paramétrique nominale ( $w_n = 16,98$ ). En ce qui concerne les performances de robustesse face au variation de  $w_n$ , elles révèlent clairement que la robustesse est bien meilleur dans le cas du régulateur COF.

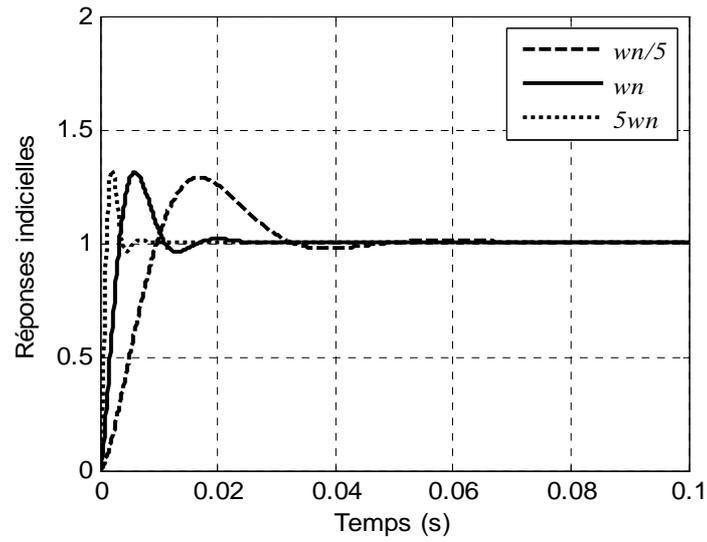


Figure IV.22 Réponse indicielle du système de commande COF en boucle fermée pour différentes valeurs de  $w_n$

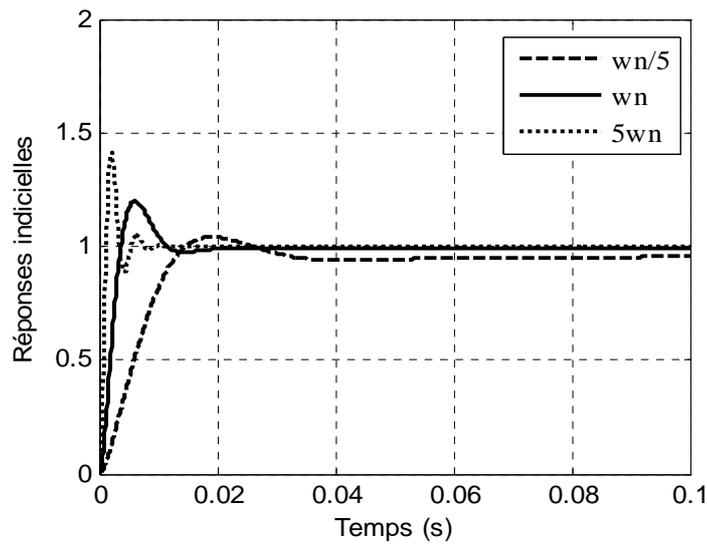


Figure IV.23 Réponse indicielle du système de commande CRONE en boucle fermée pour différentes valeurs de  $w_n$

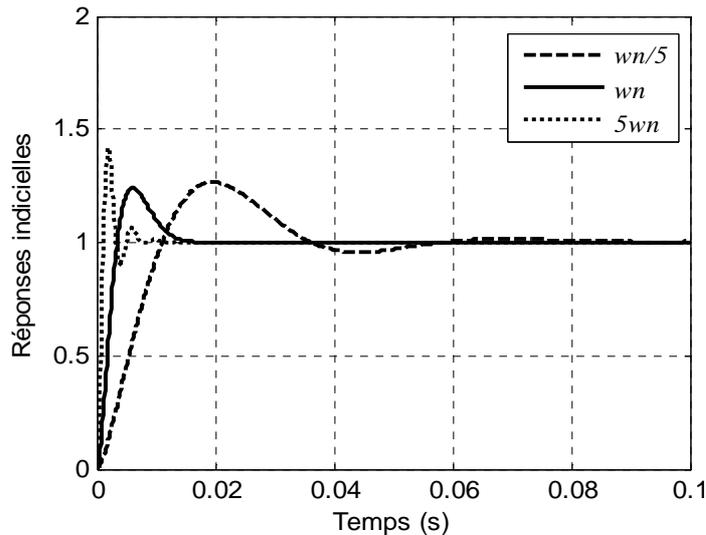


Figure IV.24 Réponse indicielle du système de commande  $PID$  en boucle fermée pour différentes valeurs de  $w_n$

#### IV.5 Conception d'une commande $PI^\alpha D^\beta$ d'ordre fractionnaire réel

La commande PID est la technique la plus utilisée actuellement dans la commande des processus industriels. Sa fonction de transfert est bien connue sous la forme :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (\text{IV.82})$$

où  $E(s)$  représente l'erreur et  $U(s)$  la commande.

Podlubny [POD99b] avait proposé une généralisation de cette commande, appelée commande  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire définie par sa fonction de transfert donnée sous la forme:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s^\alpha} + K_d s^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \quad (\text{IV.83})$$

L'équation différentielle correspondant à cette fonction de transfert, est donnée par :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i D^{-\alpha} e(t) + K_d D^\beta e(t) \quad (\text{IV.84})$$

Comme il est montré sur la figure (IV.25), le  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire généralise le PID conventionnel et l'étend du point au plan. Cette extension donne plus de flexibilité dans la conception des commandes  $PID$ .

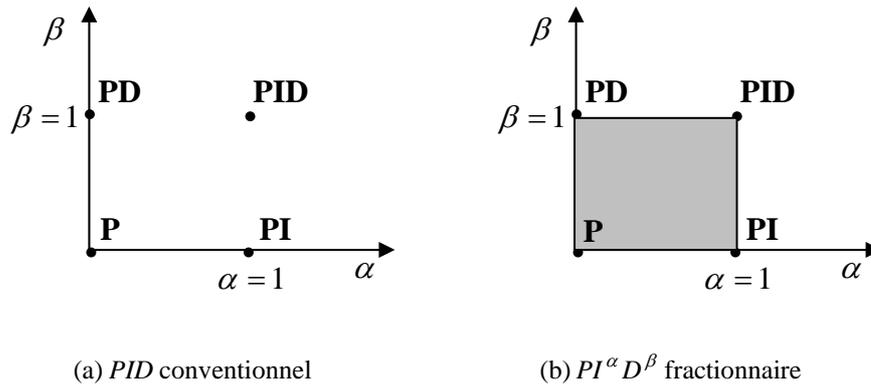


Figure IV. 25 Commande PID à partir d'un point (a) jusqu'au plan (b)

Plusieurs méthodes ont été proposées pour la conception de ce type de commande [POD99b] ; [JUN05] ; [PET98]. Motivé par les performances caractéristiques remarquables en qualité de robustesse de la boucle idéale de Bode, nous proposons dans ce paragraphe la conception d'une commande  $PI^\alpha D^\beta$  qui assure le même comportement fréquentielles et temporelles de celui-ci en boucle fermée.

Après avoir fixé les ordres fractionnaires  $\alpha$  et  $\beta$  à partir du comportement fréquentielle du système de commande en boucle ouverte, qui doit être équivalent à celui de la fonction de transfert idéale de Bode, l'estimation des paramètres  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_p$  se fait ensuite, d'une manière récursive dans le domaine temporelle en utilisation l'algorithme des moindres carrés récursifs étendus aux ordres fractionnaires (cf. section III.3). Les données d'identification sont obtenues par simulation temporelle de la boucle idéale de Bode, excitée par un Signal Binaire Pseudo Aléatoire (SBPA).

### IV.5.1 Calcul des ordres de dérivation et de l'intégration

Considérons le système de commande  $PI^\alpha D^\beta$  à retour unitaire donné par la figure (IV.26) dont la fonction de transfert du procédé  $G_p(s)$  est donnée par :

$$G_p(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}, \quad m, n \in \mathbb{N}^+ \text{ et } m < n \quad (\text{IV.85})$$

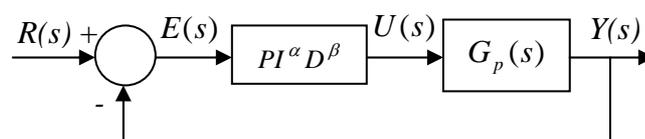


Figure IV.26 Système de commande  $PI^\alpha D^\beta$  à retour unitaire

La fonction de transfert en boucle ouverte est donc donnée par :

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{(k_i + k_p s^\alpha + k_d s^{\beta+\alpha})B(s)}{s^\alpha A(s)} \quad (\text{IV.86})$$

La fonction de transfert idéale de Bode est donnée sous la forme :

$$T(s) = \frac{1}{(s/w_u)^\mu}, \quad 1 < \mu < 2 \quad (\text{IV.87})$$

où les paramètres  $w_u$  et  $\mu$  sont calculés en fonction des performances désirées.

Si  $n_b$  et  $n_h$  représente respectivement les ordres de comportement asymptotique du procédé en basses et hautes fréquences, alors, pour que le comportement fréquentielle en hautes et basses fréquences de la boucle ouverte du système de commande soit équivalent à celui de la fonction de transfert idéale de Bode (comportement asymptotique d'ordre compris entre 1 et 2), les ordres  $\alpha$  et  $\beta$  de  $PI^\alpha D^\beta$  doivent être tels que :

$$\beta = n_h - \mu \quad (\text{IV.88})$$

$$\alpha = \mu - n_b \quad (\text{IV.89})$$

#### IV.5.2 Identification récursive des paramètres $k_p$ , $k_i$ et $k_d$

La fonction de transfert en boucle fermée du système de commande est donnée par :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(k_i + k_p s^\alpha + k_d s^{\beta+\alpha})B(s)}{s^\alpha A(s) + (k_i + k_p s^\alpha + k_d s^{\beta+\alpha})B(s)} \quad (\text{IV.90})$$

L'équation différentielle d'ordre fractionnaire correspondant à (IV.90) peut être donnée sous la forme :

$$\sum_{l=0}^n a_l \frac{d^{l+\alpha} y(t)}{dt^{l+\alpha}} = k_i \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j (r(t) - y(t))}{dt^j} + k_p \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{j+\alpha} (r(t) - y(t))}{dt^{j+\alpha}} + k_d \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{j+\alpha+\beta} (r(t) - y(t))}{dt^{j+\alpha+\beta}} \quad (\text{IV.91})$$

Après avoir fixé les ordres  $\alpha$  et  $\beta$ , les paramètres  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$  de (IV.91) sont estimés à partir des données entrées/sorties issues de la simulation en boucle fermée de la fonction de transfert idéale de Bode. Pour cela, on considère une régression continue définie par :

$$\hat{Y}(t, \hat{\theta}) = \sum_{l=0}^n a_l \frac{d^{l+\alpha} \hat{y}(t)}{dt^{l+\alpha}} = \hat{\theta}(t) \phi^T(t) \quad (\text{IV.92})$$

où  $\hat{\theta}(t) = [\hat{k}_i(t), \hat{k}_p(t), \hat{k}_d(t)]$  (IV.93)

et

$$\phi(t) = \left[ \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j (r(t) - y(t))}{dt^j}, \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{j+\alpha} (r(t) - y(t))}{dt^{j+\alpha}}, \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{j+\alpha+\beta} (r(t) - y(t))}{dt^{j+\alpha+\beta}} \right] \quad (\text{IV.94})$$

L'estimation paramétrique est obtenue en utilisant l'algorithme des moindres carrés récurrents, étendue aux ordres fractionnaires (cf. chapitre III), en minimisant le critère quadratique des moindres carrés basé sur l'erreur d'équation, définie par:

$$J_t(\hat{\theta}) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^K [Y(kh) - \hat{Y}(kh, \theta(t))]^2, \quad t = Kh \quad (\text{IV.95})$$

où  $Y(t) = \sum_{l=0}^n a_l \frac{d^{l+\alpha} y(t)}{dt^{l+\alpha}}$ ,  $y(t)$  est la sortie temporelle de la boucle idéale de Bode (BIB) à

l'instant  $t$  excitée par une entrée SBPA,  $h$  est le pas d'échantillonnage choisi de tel sorte qu'il soit faible devant la constante du temps du système BIB, et  $K$  est le nombre d'échantillons entrées/sorties.

Le principe de cette technique est présenté par le schéma de la figure (IV.27), dont le bloc BIB représente la boucle idéale de Bode et le bloc AAP représente l'algorithme d'adaptation paramétrique.

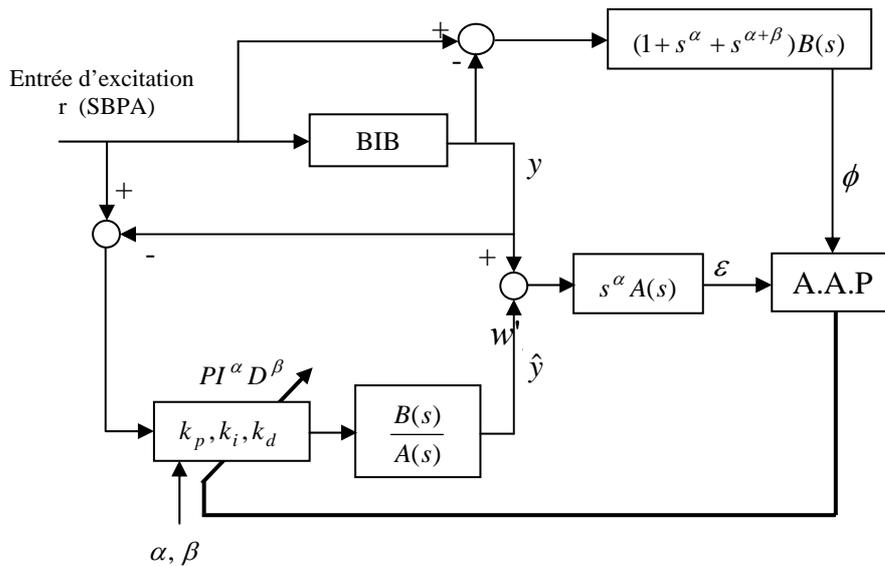


Figure IV. 27 Principe de l'identification récursive des paramètres d'un  $PI^\alpha D^\beta$

L'utilisation de l'approximation de Grünwald-Letnikov avec un pas d'échantillonnage  $h$  permet d'obtenir une évaluation numérique du vecteur d'observation  $\phi(t)$  et de mesure  $Y(t)$  à un instant  $K$ , soit :

$$\phi(K) = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{h^j} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{j}{k} [r(K-k) - y(K-k)]; & \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{h^{j+\alpha}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{j+\alpha}{k} [r(K-k) - y(K-k)]; \\ \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{h^{j+\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{j+\alpha+\beta}{k} [r(K-k) - y(K-k)] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.96})$$

$$Y(K) = \sum_{l=0}^n \frac{a_l}{h^{l+\alpha}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{l+\alpha}{k} y(K-k) \quad (\text{IV.97})$$

Ainsi, par analogie au développement présenté dans le chapitre III (cf. section III.3.2.2.2 et annexe B) le vecteur de paramètres  $\hat{\theta}(K)$  estimé à l'instant  $t = Kh$  peut être donné par :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(K) = \hat{\theta}(K-1) + \frac{F(K-1)\phi(K)}{1 + \phi^T(K)F(K-1)\phi(K)} \left( Y(K) - [\hat{\theta}^T(K-1)\phi(K)] \right) \\ F(K) = F(K-1) - \frac{F(K-1)\phi(K)\phi(K)^T F(K-1)}{1 + \phi^T(K)F(K-1)\phi(K)} \end{cases} \quad (\text{IV.98})$$

avec une initialisation donnée par :  $F(0) = \frac{1}{0.001} I$  et  $\hat{\theta}(0) = [\hat{k}_p(0), \hat{k}_i(0), \hat{k}_d(0)] = [0, 0, 0]$ .

### IV.5.3 Exemples d'application

Ce paragraphe présente un exemple illustratif de calcul des paramètres d'une commande  $PI^\alpha D^\beta$  à retour unitaire par la méthode proposée dans la section précédente, ainsi qu'une analyse comparatif de robustesse obtenue par cette commande avec celle obtenue par un  $PID$  classique calculé pour assurer les même spécifications.

Considérons le système de commande à retour unitaire de la figure (IV.26) dont le procédé est un système de deuxième ordre défini par une fonction de transfert de la forme [OUS91] :

$$G(s) = \frac{g_0}{\frac{s^2}{w_0^2} + 2\varepsilon \frac{s}{w_0} + 1} \quad (\text{IV.97})$$

Les valeurs nominales des paramètres  $g_0$ ,  $w_0$  et  $\varepsilon$  sont :

$$g_0 = 10, w_0 = 33.33 \text{ rd/s et } \varepsilon = 0.01.$$

Les spécifications temporelles de la commande sont données par :

- Dépassement  $< 30\%$  ;
- Temps de montée  $< 0.0025 \text{ sec.}$

Ces spécifications signifient une marge de phase de l'ordre de  $45^\circ$  et une fréquence transitionnelle au gain unité  $w_u = 500 \text{ rad/s}$ . Pour assurer ces spécifications autour de  $w_u$ , la fonction de transfert idéale de Bode (fonction de transfert en boucle ouverte du modèle) doit être tel que:

$$T(s) = \frac{1}{(s/w_u)^\mu} = \frac{1}{(s/500)^{1.5}} \quad (98)$$

A partir de l'ordre de la fonction de transfert idéale de Bode  $\mu = 1.5$  et du comportement asymptotique du procédé en basse fréquence  $n_b = 0$  et en haute fréquence  $n_h = 2$  on peut déduire l'ordre de dérivation  $\beta$  et l'ordre d'intégration  $\alpha$  de la commande  $PI^\alpha D^\beta$ , soit :

$$\beta = 0.5 \text{ et } \alpha = 1.5$$

Les paramètres  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$  sont ensuite calculés en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursifs proposée dans la section précédente avec une initialisation donnée par :

$$F = \frac{1}{0.001} I \text{ et } \hat{\theta}(0) = [\hat{k}_p(0), \hat{k}_i(0), \hat{k}_d(0)] = [0, 0, 0] \quad (IV.99)$$

La figure (IV.28) montre l'évolution de l'estimation des paramètres  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$ . Les valeurs établies sont  $k_p = 0.0260$ ,  $k_i = 1267.2$  et  $k_d = 1.0061$ .

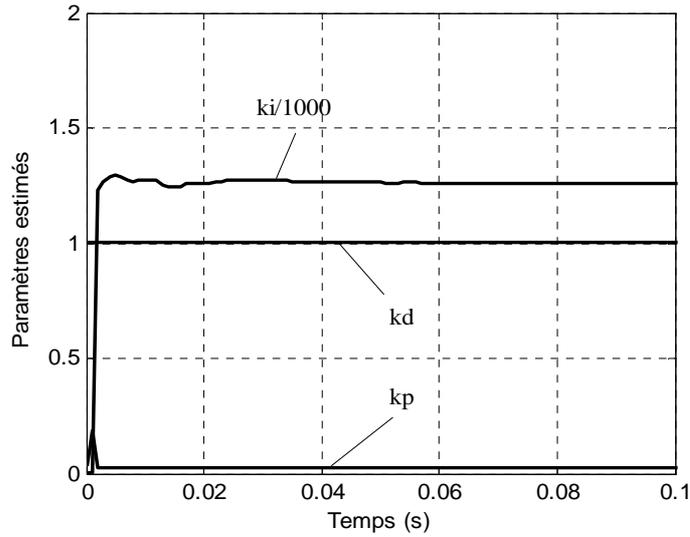


Figure IV.28 Evolution de l'estimation paramétrique en fonction du temps

Ainsi, la fonction de transfert de la commande  $PI^\alpha D^\beta$  est donnée par :

$$C(s) = 0.0260 + \frac{1267.2}{s^{1.5}} + 1.0061s^{0.5} \quad (\text{IV.100})$$

Les fonctions de transfert des commandes CRONE et PID classique, calculées pour assurer les mêmes spécifications, sont données respectivement par les deux équations suivantes [OUS91] :

$$c_{PID}(s) = c_0 \frac{(1 + s/z_1)(1 + s/z_2)}{(1 + s/p_1)(1 + s/p_2)} \quad (101)$$

avec :

$$c_0 = 50.797 ; z_1 = 3.7796 \text{ rd/s} ; z_2 = 188.982 \text{ rd/s} ; p_1 = 0.6299 \text{ rd/s} ; p_2 = 1322.90 \text{ rd/s}.$$

$$c_{CRONE}(s) = c_0 \frac{(1 + s/z_1)(1 + s/z_2)(1 + s/z_3)(1 + s/z_4)}{(1 + s/p_1)(1 + s/p_2)(1 + s/p_3)(1 + s/p_4)} \quad (\text{IV.102})$$

avec:

$$c_0 = 3.1615 ; z_1 = 17.572 \text{ rd/s} ; z_2 = 123 \text{ rd/s} ; z_3 = 861.07 \text{ rd/s} ; z_4 = 6027.5 \text{ rd/s} \\ p_1 = 48.325 \text{ rd/s} ; p_2 = 325.453 \text{ rd/s} ; p_3 = 2278.17 \text{ rd/s} ; p_4 = 16575.5 \text{ rd/s}.$$

Les figures (IV.29), (IV.30) et (IV.31) représentent respectivement les réponses indicielles des commandes  $PI^\alpha D^\beta$ , PID classique et CRONE pour la valeur nominale et les valeurs extrémales du gain  $g_0$ . A l'observation des réponses ainsi enregistrées, il apparaît que

la robustesse du premier dépassement est nettement en faveur du  $PI^\alpha D^\beta$ , traduisant ainsi, la propriété d'iso-amortissement de la boucle idéale de Bode.

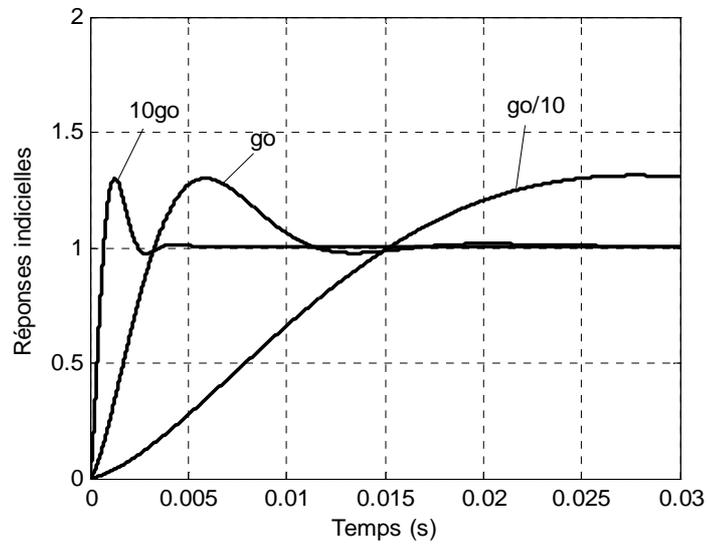


Figure IV. 29 Réponse indicielle du système de commande  $PI^\alpha D^\beta$  pour différentes valeur du gain  $g_0$ .

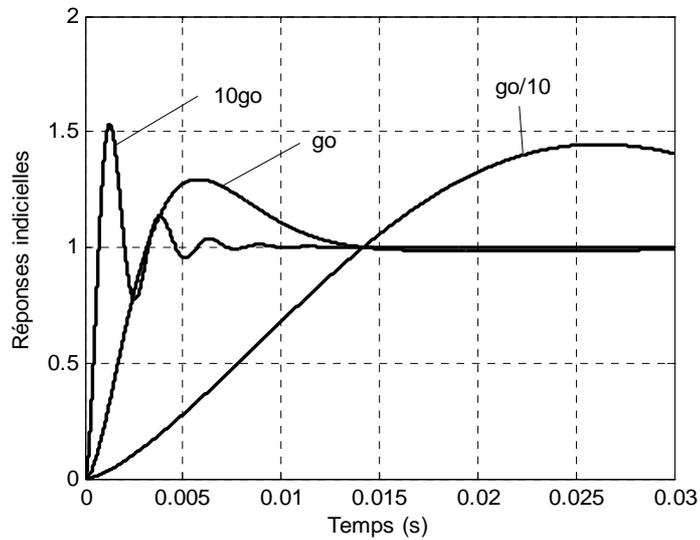


Figure IV. 30 Réponse indicielle du système de commande  $PID$  classique pour différentes valeurs du gain  $g_0$ .

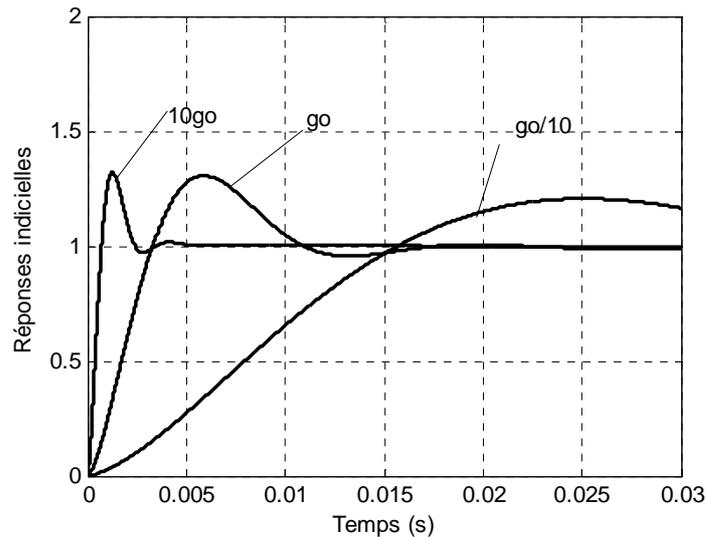


Figure IV. 31 Réponse indiciaire du système de commande CRONE pour différentes valeurs du gain  $g_0$ .

## IV.5 Conclusion

La commande robuste d'ordre fractionnaire est devenue de plus en plus intéressante, la motivation d'une telle commande vient de la considération d'utiliser l'idée de « phase constante » de la fonction de transfert en boucle ouverte autour de la fréquence transitionnelle au gain unité, alors, le système de commande en boucle fermée est robuste vis-à-vis la variation du gain et la réponse indiciaire présente une propriété d'iso-amortissement.

Après avoir rappelé les principes de base de la commande CRONE et les performances caractéristiques remarquables de la boucle idéale de Bode, nous avons proposé deux nouvelles techniques pour la conception de commandes robustes d'ordre fractionnaire :

- Le principe de la première technique est basé sur l'utilisation de la fonction de transfert idéale de Bode (définie par un intégrateur d'ordre fractionnaire compris entre 1 et 2) comme modèle de référence de la boucle ouverte du système de commande. La synthèse de la commande est effectuée dans le domaine fréquentiel en utilisant une approximation de cet opérateur par une fonction rationnelle, cette dernière est ensuite manipulée afin d'obtenir la largeur et la position de la phase constante qui assure les performances désirées. L'analyse des résultats de simulation obtenus en utilisant quelques exemples de commande, nous a montré que les performances caractéristiques en terme de robustesse vis-à-vis la variation du gain du procédé est

largement satisfaisante. Elle a montré aussi que ces performances sont clairement meilleures que celles obtenues par les commandes *PID* classique et CRONE.

- La deuxième technique concerne le calcul des paramètres d'un  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire qui permet d'avoir un système de commande dont les performances sont celles de la boucle idéale de Bode. Les ordres fractionnaires  $\alpha$  et  $\beta$  sont calculés après avoir considéré que le comportement asymptotique en boucle ouverte du système de commande est analogue à celui de la fonction de transfert idéale de Bode. En profitant des performances caractéristiques de la technique d'identification développées dans le troisième chapitre, les paramètres  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$  sont ensuite estimés en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursifs en minimisant le critère quadratique de moindres carrés basé sur l'erreur entre la réponse temporelle de la boucle idéale de Bode et celle du système de commande  $PI^\alpha D^\beta$  en boucle fermée. Nous avons montré, par des exemples de simulation, que les performances de la commande  $PI^\alpha D^\beta$  calculée par cette technique, sont clairement meilleures que celles obtenues par les commandes *PID* classique et CRONE.



## Conclusion générale

Ce travail porte essentiellement sur l'approximation et l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire, ainsi que sur la commande robuste d'ordre fractionnaire. En effet de nouvelles techniques sont proposées dans ce sens, tout en montrant leurs avantages en les appliquant aux différents procédés.

Nous avons présenté plusieurs contributions relatives à l'approximation, à la simulation et à l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire, ainsi qu'à la commande robuste d'ordre fractionnaire pour certains types de systèmes dynamiques.

Notre première contribution concerne une approximation optimale en utilisant la fonction de distribution des temps de relaxation d'une classe de modèles de type  $K. K. K.$  largement utilisée pour la modélisation des systèmes dynamiques présentant un comportement d'ordre fractionnaire, notamment les systèmes diffusifs. Une étude comparative avec les méthodes déjà existantes nous a montré que cette nouvelle technique donne des résultats remarquables, dans le sens qu'elle réalise une approximation par modèles rationnels avec un nombre réduit de paramètres et avec une erreur d'approximation faible, facilitant ainsi son identification et son implémentation physique.

La deuxième contribution concerne une extension de la méthode d'identification paramétrique des moindres carrés linéaires et celle des variables instrumentales récursives aux ordres fractionnaires. Après un développement théorique, nous avons montré avec des exemples de simulation que cette nouvelle technique permet de résoudre certains problèmes rencontrés en utilisant les autres méthodes déjà existantes tels que : la sensibilité au bruit et les problèmes de calcul numérique posés par les inversions matricielles. Le caractère récursif de cette approche permet aussi de faire l'identification paramétrique des systèmes fractionnaires non stationnaires et d'envisager une estimation paramétrique en temps réel. L'analyse par simulation numérique des résultats obtenus par cette technique en utilisant

quelques exemples de modèles typiques nous a montré que ses performances caractéristiques sont meilleures par rapport à celles obtenues en utilisant la méthode des moindres carrés linéaires non récurrents. Ces performances sont considérablement améliorées en introduisant des variables instrumentales avec un modèle auxiliaire d'ordre fractionnaire.

La troisième contribution concerne la commande robuste d'ordre fractionnaire. Après avoir rappelé les principes de base de la commande CRONE et les performances caractéristiques remarquables de la boucle idéale de Bode, nous avons proposé deux nouvelles techniques pour la conception de commandes robustes d'ordre fractionnaire :

- Le principe de la première technique est basé sur l'utilisation de la fonction de transfert idéale de Bode (définie par un intégrateur d'ordre fractionnaire compris entre 1 et 2) comme modèle de référence de la boucle ouverte du système de commande. La synthèse de la commande est effectuée dans le domaine fréquentiel en utilisant une approximation de cet opérateur par une fonction rationnelle, cette dernière est ensuite manipulée afin d'obtenir la largeur et la position de la phase plate qui assure les performances désirées. L'analyse des résultats de simulation obtenus en utilisant quelques exemples de commande, nous a montré que les performances caractéristiques en terme de robustesse vis-à-vis de la variation du gain du procédé est largement satisfaisante.
- La deuxième technique concerne le calcul des paramètres d'un  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire qui permet d'avoir un système de commande dont les performances sont celles de la boucle idéale de Bode. Les ordres fractionnaires  $\alpha$  et  $\beta$  sont calculés après avoir considéré que le comportement asymptotique en boucle ouverte du système de commande est analogue à celui de la fonction de transfert idéale de Bode. En profitant des performances caractéristiques des techniques d'identification développées dans le troisième chapitre, les paramètres  $k_p, k_i$  et  $k_d$  sont ensuite estimés en utilisant l'algorithme des moindres carrés récurrents minimisant un critère quadratique basé sur l'erreur entre la réponse temporelle de la boucle idéale de Bode et celle du système de commande  $PI^\alpha D^\beta$  en boucle fermée. Nous avons montré, par des exemples de simulation, que les performances obtenues par un système de commande  $PI^\alpha D^\beta$  calculé par cette technique, sont clairement meilleures que celles obtenues par les commandes  $PID$  classique et CRONE.

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a permis de réaliser plusieurs publications, notamment (cf. annexes C).

Parmi les perspectives que l'on peut envisager, au moyen terme, selon les axes principaux de recherche développée dans cette thèse, nous pouvons citer :

- *Dans l'identification de systèmes d'ordre fractionnaire :*

- 1) Amélioration des performances des techniques d'identification proposées dans ce travail en présence de bruit par introduction de filtres d'ordre fractionnaire.
- 2) Etude des conditions de stabilité et de convergence de ces techniques.

- *Dans la commande robuste d'ordre fractionnaire :*

- 1) Synthèse d'une commande encore plus robuste en mariant les techniques d'identifications que nous avons proposé et la correction prédictive.
- 2) Développement d'outils permettant de réaliser un réglage automatique de cette commande pour contribuer à une valorisation industrielle plus large.

### **Mots clés:**

Identification de systèmes d'ordre fractionnaire, commande d'ordre fractionnaire, calcul fractionnaire, commande robuste.



## **Annexes**



## Annexes A

### Calcul de la transformée de Laplace inverse en utilisant la fonction de Mittag-Leffler

La transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert (II.27) peut être calculée en utilisant l'équation (II.31), de la manière suivante:

soit  $\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_0 > 0$ , alors, la fonction de transfert  $G(s)$  du système donné par l'équation différentielle (II.26) peut être approximée par une fonction  $G_n(s)$  donnée par :

$$\begin{aligned}
 G_n(s) &= \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}}} \frac{1}{1 + \frac{\sum_{k=0}^{n-2} a_k s^{\beta_k}}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}}}} = \frac{a_n^{-1} s^{-\beta_{n-1}}}{s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}} \frac{1}{1 + \frac{a_n^{-1} s^{-\beta_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} a_k s^{\beta_k}}{s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}}} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n^{-1} s^{-\beta_{n-1}}}{\left( s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{m+1}} \left( \sum_{k=0}^{n-2} \left( \frac{a_k}{a_n} \right) s^{\beta_k - \beta_{n-1}} \right)^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n^{-1} s^{-\beta_{n-1}}}{\left( s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{m+1}} \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0, \dots, k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} s^{(\beta_i - \beta_{n-1}) k_i} \\
 &= \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0, \dots, k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \frac{s^{-\beta_{n-1}} + \sum_{j=0}^{n-2} s^{(\beta_j - \beta_{n-1}) k_j}}{\left( s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{m+1}}
 \end{aligned}$$

(A.1)

où  $(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2})$  sont les coefficients multinomiaux [ABR64].

L'inversion terme à terme, basée sur le théorème de l'expansion générale [DOE56] en utilisant la relation (II.31), donne la transformée de Laplace inverse de  $g(t)$ , soit :

$$g_{ind}(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_{n-2}=m \\ k_0 \geq 0; \dots, k_{n-2} \geq 0}} (m; k_1, k_2, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \varepsilon_m \left( \begin{matrix} t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \\ \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j + 1 \end{matrix} \right), \quad (\text{A.2})$$

## Annexes B

### La forme récursive de l'estimation paramétrique des moindres carrés

L'équation (III.68) donne la solution du problème d'identification paramétrique, au sens des moindres carrés, d'un système d'ordre fractionnaire défini par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de type (III.30).

Dans l'objectif d'avoir une forme récursive de l'estimation paramétrique, il est important d'exprimer (III.68) sous une forme récursive en terme de  $\hat{\theta}(t)$ , soit :

si  $\sum_{k=1}^K \phi(k)\phi^T(k)$  est une matrice inversible, alors, on peut considérer une fonction  $F(K)$  tel que :

$$F(K) = \left[ \sum_{k=1}^K \phi(k)\phi^T(k) \right]^{-1} \quad (\text{B.1})$$

La matrice inverse  $F^{-1}(K)$  de  $F(K)$  est donc donnée par :

$$F^{-1}(K) = F^{-1}(K-1) + \phi(K)\phi^T(K) \quad (\text{B.2})$$

A partir des équations (III.68) et (B.1) on peut écrire:

$$\hat{\theta}(K) = F(K) \left[ \sum_{k=1}^{K-1} \phi(k)[y(k) + Y_0(k)] + \phi(K)[y(K) + Y_0(K)] \right] \quad (\text{B.3})$$

et:

$$\sum_{k=1}^{K-1} \phi(k)[y(k) + Y_0(k)] = F^{-1}(K-1)\hat{\theta}(K-1) = [F^{-1}(K) - \phi(K)\phi^T(K)]\hat{\theta}(K-1) \quad (\text{B.4})$$

Substituant (B.4) dans (B.3), on aura :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(K) &= \hat{\theta}(K-1) - F(K)\phi(K)\phi^T(K)\hat{\theta}(K-1) + F(K)\phi(K)(y(K) + Y_0(K)) \\ &= \hat{\theta}(K-1) + F(K)\phi(K)[y(K) + Y_0(K) - \phi^T(K)\hat{\theta}(K-1)] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

à partir de (B.2) on peut écrire:

$$F(K) = [F^{-1}(K-1) + \phi(K)\phi^T(K)]^{-1} \quad (\text{B.6})$$

Introduisons le lemme de l'inversion matricielle :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{B.7})$$

avec  $A = F^{-1}(K-1)$ ,  $B = \phi(K)$ ,  $C = I$  et  $D = \phi^T(K)$ , on obtient l'algorithme des moindres carrés récurrents, soit:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(K) = \hat{\theta}(K-1) + \frac{F(K-1)\phi(K)}{1 + \phi^T(K)F(K-1)\phi(K)} \left( y(K) - [\hat{\theta}^T(K-1)\phi(K) - Y_0(K)] \right) \\ F(K) = F(K-1) - \frac{F(K-1)\phi(K)\phi(K)^T F(K-1)}{1 + \phi^T(K)F(K-1)\phi(K)} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

## Annexes C

### Publications réalisées dans le cadre de cette thèse

#### Revue internationale :

1. A. Djouambi, A. Charef and A. V. Besançon, *Optimal Approximation, Simulation and Analog Realization of the Fundamental Fractional Order Transfer Function*, International Journal of Applied Mathematics and Computer science, Vol. 17, No. 4, pp. 455-462, 2007.
2. A. Djouambi, A. Charef and T. Bouktir, *Fractional Order Robust Control and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Controllers* WSEAS TRANSACTIONS on CIRCUITS and SYSTEMS, Issue 8, Volume 4, pp. 850-857, 2005.

#### Communications Internationales:

1. A. Djouambi, A. V. Besançon and A. Charef, *Fractional System Identification Using Recursive Algorithms Approach*, In: Proc. of the European Control Conference ECC'07, Kos, pp. 1436-1441, Greece, 2007.
2. A. Djouambi, A. V. Besançon and A. Charef, *Identification Réursive des Systèmes à Dérivée Non Entière*, In : CD-ROM of Journées Identification et Modélisation Expérimentale JIME'2006, N° Th-AE-2\_1FDA06026 , Poitiers, France, 2006.
3. A. Djouambi, A. Charef and A. V. Besançon, *Approximation and Synthesis of Non Integer Order Systems*, In: Proc. of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications FDA'06, pp. 331-334, Porto, Portugal, 2006.
4. Pavel Petránek, A. Djouambi and Alina Voda Bsançon, *Using Genetic Algorithm for Fractional Systems Identification*, In: Proc. of the International Workshop Control & Information Technology IWCIT'06, pp. 156-161, Gliwice, 21-22 September 2006.
5. A. Charef, A. Djouambi and H. Sun, *Fractional Order Feedback Control Systems*, In: Proc. of the 4<sup>th</sup> Jordanian International Electrical & Electronic Engineering Conference JIEEEEC'01, Jordan, 2001.

**Communications Nationales:**

1. A. Djouambi et A. Charef, *Approximation optimale d'un modèle d'ordre fractionnaire*, PCSE'05 The First International Conference on Electrical Systems 2005, pp. 370-374, Oum El Bouaghi Algérie, 2005.

## Bibliographie

- [ABR64] Abramowitz A. and Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Appl. Math. Nat. Bureau of Standards (Russian translation: Nauka, Moscow, 1979), 1964.
- [AGA53] Agarwal R.P. *A propos d'une note de m. pierre humbert*. C.R. Séances Acad. Sci., 236 (21) : 2031-2032, 1953.
- [ALA94] Al-Alaoui, M.A, *Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I. Fundamental Theory and Applications, 41 (2), 186-187, 1994.
- [AST95] Aström, K. and Hägglund T., *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, Instrument Society of America, North Carolina, 1995.
- [BAR03] Barbosa R.S, Tenreiro Machado J. A. and Ferreira I. M., *A Fractional Calculus Perspective of PID Tuning*, Proceedings of DETC. 03ASME 2003, Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA, September 2-6, 2003
- [BLA65] Black R. P. Hurst H. E. and Sinaika Y. M., *Long term storage in reservoirs, an experimental study.*, 1965.
- [BOD45] Bode, H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, New York, 1945.
- [CAR64] Carlson G. E. and Halijak C. A., *Approximation of fractional capacitors  $(1/s)^{1/n}$  by a regular Newton process*, IRE Transactions on Circuit Theory, CT-11, No. 2, 210-213, 1964.
- [CHA92] Charef A., et al., *Fractional System as represented by singularity function*, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 37, n° 9, 1992.

- [CHA01] Charef A., Djouambi A., and Sun H., *Fractional order feedback control systems*, Proceedings of the 4th J.I.E.E.C, Jordanie, Avril, 2001.
- [CHE03a] Chen Y. Q., *Fractional order calculus, Fractional filter and fractional-order control: An overview & some recent developments*, Disponible sur Internet: <http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/>, USU Industrial math seminar, Nov 6, 2003
- [CHE03b] Chen Y.Q. and Vinagre B.M., *A new IIR-type digital fractional order differentiator*, Signal Processing, 83: 2359-2365, 2003.
- [CHE02] Chen Y.Q. and Kevin L. Moore, *Discretization Schemes for Fractional-Order Differentiators and Integrators*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 49(3): 363-367, March 2002.
- [COL41] Cole, K. S. and Cole, R. H., *Dispersion and absorption in dielectrics, alternation current characterization*, Journal of Chem. Physics 9, 1941.
- [CLE84] Clerc, J.P., Tremblay, A.-M. S., Albinet, G., and Mitescu, C.D., *a. c. response of fractal networks*, Le Journal de Physique-Lettres, Tome 45, No.19, October, 1984.
- [DAV51] Davidson, D.W. and Cole, R.H., *Dielectric relaxation in glycerol, propylene glycol and n-propanol*, Journal of Chemical Physics, 19(12), pp. 1484-1490, 1951.
- [DIE97] Diethelm K., *An Algorithm for the Numerical Solution of Differential Equations of Fractional Order*. Electronic Trans. On Numerical Analysis, 5 :1-6, 1997.
- [DOE56] Doetsch G., *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation*, Oldenbourg, München, Germany, 1956.
- [ERD55] Erdélyi A. et al., *Higher transcendental functions*, volume 3. Mc Graw-Hill, New York, 1955.
- [FUR41] Fuross, R. M. and Kirkwood J.K., *Electrical Properties of Solids VIII-Dipole Moments in polyvinyl Chloride Biphenyl Systems*, J. Am. Chem. Soc., 63, pp 385-394, 1941.
- [ICH71] Ichise M., Nagayanagi Y. and Kojima T., *An analog simulation of non integer order transfer functions for analysis of electrode processes*, Journal of electro-analytical chemistry, 33:253-265, 1971.

- [GOR97] Gorenflo R. and Mainardi F., *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, pp 223-276. Wien and New York, 1997.
- [GYÜ70] Gyürki J., *Acta tech. Hung.*, 68.145, 1970.
- [HAR98] Hartley T.T., Lorenzo C. F., *A solution to the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation*, NASA/TP, 1998.
- [HAR99] Hartley T.T., *Fractional System Identification: An Approach Using Continuous Order-Distributions, n*, NASA/TP, 1999.
- [JON74] Jong Shanmugan K. S., *Determination of a transfer function amplitude frequency response data*, *Int. J. Control*, vol. 25, n°6, 1974.
- [JUN05] Jun Y. C., Jin L. and Bing G. C. , *Optimization of fractional order PID controllers based on genetic algorithms*, *Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Guangzhou, 18-21 August 2005
- [KES82] Keshner, M. S., *1/f Noise*, *Proceedings of IEEE*, Vol. 70, pp. 212-218, Mar. 1982.
- [LAN98] Landau I. D., Lozano R. et M'Saad M., *Adaptive control*, Springer, London, England, 1998.
- [LAY98] L. Le Lay, *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*, Thèse de Doctorat, 1998.
- [LEV59] Levy E.C., *Complex Curve fitting*, *IRE Trans. Autom. Control*, vol.4,p.37-43, 1959.
- [LEV04] Levron F., *Système à dérivée non entière implicite*, Note interne, LAPS, Université Bordeaux I, Talence, France, 2004.
- [LEL95] Leland W.E. Wilson V. Wilinger W., Taqqu M.S., *Self-similarity in high-speed packed traffic: analysis and modelling of Ethernet traffic measurements*, *Statistical Science*, 10 :676–685, 1995.
- [LIO32] Liouville J., *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques*, *Ecole Polytech.* 13, section 21, 71-162, 1832.
- [LOR01] Lorenzo C. F., Hartley T. T., *Initialization in fractional order systems*, In *proceedings of ECC'2001, 6<sup>th</sup> European Control Conference*, Porto, Portugal, 3-5 September, 2001.

- [MAR63] Marquardt, D.W., *An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters*, Journal of Society Industrial Applied Mathematics 11(2), 431–441, 1963.
- [MAK91] Makris, N. and Constantinou, M.C., *Fractional-Derivative Maxwell Model for Viscous Dampers*, Journal of Structural Engineering, Vol.117, No. 9, 2708-2724, Sep. 1991.
- [MAT93] Matsuda K. and Fuji H.,  *$H_\infty$  optimized wave-absorbing control: Analytical and experimental results*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 16, No. 6, 1146-1153, 1993.
- [MAT96] Matignon D., *Stability results for fractional differential equation with application to control processing*, Proc. CESA'96, Symp. On Control, Optimisation and Supervision, p. 963-968, Lille, France, 1996.
- [MIL93] Miller K.S., Ross B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley and Sons, 1993.
- [MOM05] Momani S. and Al-Khaled K., *Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method*. Applied Mathematics and Computation, 162 :1351-1365, 2005.
- [OGA97] Ogata K., *Modern control engineering*, 3<sup>a</sup> ed. London: Prentice Hall International, 1997.
- [OLD74] Oldham K.B., Spanier J., *The fractional calculus*, Academic Press, New York et Londres, 1974.
- [OLI02] Olivier Cois, *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier application en thermique*, Thèse de Doctorat, 2002.
- [OUS75] Oustaloup, A., *Etude et réalisation d'un système d'asservissement d'ordre 3/2 de la fréquence d'un laser à colorant continu*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, France, 1975.
- [OUS83] Oustaloup A., *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*, Masson. Paris, 1983.
- [OUS91] Oustaloup, A., *La commande CRONE*, Paris: Hermès, 1991.

- [OUS94a] Oustaloup A., Mathieu B. et Lanausse P., *Une mise au point sur le concept de distance au point critique : validation de contours d'isodépassement et construction de contours d'isoamortissement fondés sur la dérivation non entière complexe et sa synthèse*, GR Automatique, Grenoble, 10 et 11 fév. 1994.
- [OUS94b] Oustaloup A., *La robustesse*, Hermès, Paris, 1994.
- [OUS95] Oustaloup A., *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Hermès, Paris, 1995.
- [OUS00] Oustaloup A. et al., *frequency-band complex non integer differentiator: characterization and synthesis*, IEEE transaction on Circuit and Systems 2000.
- [OUS05] Oustaloup A. et al., *Représentation et identification par modèle non entier*, LAVOISIER, 2005.
- [PAY70] Payne P.A., *An improved technique for transfer function synthesis from frequency response data*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-15, p. 480-483, 1970.
- [PET98] Petráš I., Dorčák L. and Košťál I., *Control quality enhancement by fractional order controllers*, Acta Montanistica Slovaca Ročník 3, 2, 143-148, 1998.
- [PET01] Petras, I., Podlubny, I., O'Leary P., Dorcak, L., *Analogue fractional-order controllers: Realization, tuning and implementation*, Proceedings of the ICC'2001, pp.9 - 14, Krynica, Poland, 2001.
- [POD99a] Podlubny I., *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, San Diego: Academic Press, 1999.
- [POD99b] Podlubny, I., *Fractional-order systems and  $PI^\alpha D^\mu$  controllers*, IEEE Transactions on Automatic Control 44(1), 1999, 208–213.
- [POD94a] Podlubny I., *Fractional-order Systems and fractional-Order Controllers*, Technical report UEF-03-94, Inst. Exp. Phys. Slovak Academy of Sciences. Kosice, Slovak Republic, November 1994.
- [POD94b] Podlubny I., *The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order*, Technical Report UEF-02-94, Inst. Exp. Phys. Slovak Academy of Sciences. Kosice, Slovak Republic, 1994.

- [TRI99] Trigeassou J.-C., T. Pointot, J. Lin, A. Oustaloup, F. Levron (1999), *Modelling and identification of a non integer order system*, In: *Proc ECC'99, European Control Conference*. Karlsruhe, Germany.
- [RIE92] Riemann B., *Gesammelte Werke*, 1892.
- [RIC71] Richalet, J., Rault, A., and Pouliquen, R., *Identification des Processus par la Méthode du Modèle*, Gordon and Breach, Paris, 1971.
- [SAM93] Samko S.G., Kilbas A.A., and Marichev O.I., *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [SAN63] Sanathanan C.K. and Koerner J., *Transfer function synthesis as ration of two complex polynomials*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-8, p.56-58, 1963.
- [SUN92] Sun, H. H. et al., *Analysis of Polarization Dynamics by Singularity Decomposition Method*, Annals of Biomedical Engineering 20, 1992.
- [SUN90] Sun H. and Charef A., *Fractal System-A time domain Approach*. Annals of Biomedical Engineering, 18 :597-621, 1990.
- [SUN84a] Sun H. and Onaral B., *A unified approach to represent metal electrode interface*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-31, 1984.
- [SUN84b] Sun H., Abdelwahab A. A., and Onaral B., *Linear Approximation of Transfer Function with a Pole of Fractional Power*. IEEE Trans. Automatic Control, 29 (5), pp. 441- 444, Mai 1984.
- [SCO95] Scotti A. Meneveau S.G., *Fractal dimension of velocity signals in high-reynolds-numbers hydrodynamic turbulence*, Physical Review, 51:5594–5608, 1995.
- [TRI99] Trigeassou et al., *Modelling and identification of non integer order system*, Proc ECC'99, European Control Conference, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [VIN00] Vinagre B., et al., *Some approximations of fractional operators used in control theory and applications*, Fractional calculus and App. Anal. Vol. 3, no 3, pp 231-248, 2000.
- [VAN50] VanDerZiel A., *On the noise spectra of semiconductor noise and of flicker effects*, Physica, 16 :359-372, 1950.
- [VAN88] Van Der Ziel, *Unified presentation of 1/f noise in electronic devices: fundamental 1/f noise sources*, volume 76, pages 233–258, 1988.

- 
- [VAL05] Valério D., *Fractional Robust System Control*, PhD thesis, Universidade Técnica de Lisboa, 2005.
- [VIN01] Vinagre B. M. , *Modelado y control de sistemas dinámicos caracterizados por ecuaciones integro-diferenciales de orden fractional*, PHD thesis, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, 2001.
- [YOU81] Young P. C., *Parameter estimation for continuous-time models- a survey*, *Automatica*, 17(1), p. 23-29, 1981.



# Abstract

This thesis deals with fractional order system identification and fractional order robust control. Its objectives are to validate and enlarge results in the area of identification and control, and then to show their usefulness by applying them to plants.

The state of the art of fractional order system approximation, fractional order identification and fractional order system control is presented with definitions of the most important notions of fractional calculus.

New material in this thesis includes fractional order approximation techniques, fractional version of the least square identification method, tuning rules for fractional order robust control and applications of these techniques to approximate, identify and control of several benchmark plants. The main contribution of this work comports:

- Optimal approximation and simulation of a class of fractional order systems using the distribution of relaxation time function.
- Extending the classical recursive least squares identification method to fractional order systems.
- Extending the classical recursive instrumental variable technique based least squares identification method for fractional order systems.
- New tuning techniques of fractional order robust controllers based on Bode's ideal transfer function.

By comparing results obtained by these techniques with classical ones, we show an important performance improvement. This observation is illustrated by numerical simulations using several examples.

## Key words:

Fractional order system identification, fractional order control, robust control, fractional calculus.

## ملخص

يتناول هذا العمل أساسا مجالات البحث المتعلقة بتقريب الأنظمة ذات الدرجة الجزئية والتعرف عليها و بأنظمة التحكم الجزئية. فقد تم اقتراح طرق جديدة في هذا المجال, مع تبيان معظم مزاياها باستعمال بعض الأمثلة التطبيقية.

لقد قدمت لمحة شاملة حول محاور البحث هذه، مع التعريف بأهم مبادئ الحساب الجزئي. تتعلق التدخلات الأساسية لهذا العمل بـ :

- طرح طريقة جديدة لتقريب الأنظمة ذات الدرجة الجزئية باستعمال دالة توزيع أزمنة الاسترخاء.
- توسيع مجال تطبيق طريقة المربعات المتبقية للتعرف على الأنظمة ذات الدرجات الجزئية.
- طريقة جديدة لحساب التحكم ذو الدرجة الجزئية باستعمال حلقة بود المثالية أو دالة بود المثالية.

هذه الطرق الجديدة لم تسمح فقط بحل بعض الصعوبات الحسابية المطروحة مع الأنظمة الجزئية في مجال التعرف على الأنظمة بل سمحت أيضا بتحسين دقة التعرف، إمكانية التعرف على لأنظمة المتغيرة مع الزمن، تقريب الأنظمة ذات الدرجة الجزئية باستعمال عدد قليل من العوامل، تحسين واضح في كفاءات التحكم (زمن الاستجابة، زمن الصعود، المتانة,...)، مع تبسيط في طريقة حساب هذه الأنظمة.

## كلمات المفاتيح

. الأنظمة ذات الدرجة الجزئية، أنظمة التحكم الجزئية، التعرف على الأنظمة الجزئية, الحساب الجزئي