REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE -

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :.............................
Série :......................................

MEMOIRE

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Magister
En Mathématiques

THEME

Sur Un problème Mal Posé Pour Une Equation d'Evolution

Option : Analyse

PAR

AGGABI Nora

Devant le jury :

Président :	DENCHE Mohamed	Professeur, Université Mentouri
Rapporteur :	SAIDOUNI Cherif, M.C.A	Université Mentouri
Examinateurs :	MARHOUNE A.Lakhdar	Professeur, Université Mentouri
	HEBBECHE Abdellah, M.C.A	Université Mentouri
	HAMEIDA Ali, M.C.A	Université Mentouri

Table des matières

Remerciements

J’exprime mes remerciements à mon encadreur, l’Enseignant SAIDOUNI Cherif pour son aide et ses conseils au cours de ces années.

Je tiens à remercier les membres du jury d’avoir accepté de participer à la soutenance.

Ensuite je tiens à remercier ma famille pour leur contribution et leur patience.

Un immense merci à Amina, une amie très spéciale, qui m’aura énormément fait encourager, m’aura aidé dans les périodes de doute.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

INTRODUCTION

Le terme "problème mal posé" est connu depuis le 20 ième siècle. La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal posés, les considérant soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate, mais actuellement c'est une autre chose, ils sont appliqués dans de nombreux domaines.

La notion a été introduite par Hadamard qui a defini pour la premiere fois la notion de probléme bien posé s'il satisfait les trois conditions suivantes :

-l'existence d'une solution

-l'unicité de la solution

-la stabilité de la solution (la dépendance continue de la solution par rapport aux données).

Un problème est dit mal posé si une ou plusieurs de ces conditions ne sont pas satisfaites.

Ce travail est composé de trois chapitres et est initié d'une introduction générale.

Le premier chapitre est composé de deux parties :

Dans la première partie nous considérons le problème :

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 & 0 < t < T \\ \|u(T) - f\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

avec $\|u(0)\| \leq E$ où A est un opérateur linéaire, positif, non borné et auto adjoint, $E > \varepsilon > 0$.

Ce problème est régularisé par :

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 & 0 < t < T \\ \alpha u(0) + u(T) = f \end{cases}$$

Dans la deuxième partie, on étudie la méthode de la valeur quasi limite où on montre que le problème approché est bien posé et que sa solution converge si le problème original admet une solution classique.

Le deuxième chapitre est consacré à la régularisation d'un problème mal posé pour une equation differentielle operationnelle du second ordre à coefficient operatoriel A non borné, positif et auto adjoint. Plus exactement on considère le probléme suivant :

$$\begin{cases} u'' + Au = 0 & 0 < t < T \\ u(0) = 0, u(T) = u_0 \end{cases}$$

Au troisiéme chapitre on géneralise l'étude faite au chapitre précedent au cas ou le coefficient opératoriel est à spectre continu.

Chapitre 1

Regularisation d'un probleme parabolique retrograde de premier ordre

1.1 La méthode de la valeur bornée non locale

1.1.1 Introduction

Soit H un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)$ et la norme $\|.\|$. Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur auto adjoint sur H tel que $-A$ est un générateur d'un semi groupe compact de contraction sur H.

Soit $\varepsilon < E$ des nombres positifs.Pour un nombre positif T, on considère le problème de trouver une fonction $u : [0,T] \to H$ telle que

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 & t \in]0,T[\\ \|u(T) - f\| \leq \varepsilon & f \in H \end{cases} \tag{1.1}$$

avec

$$u(0) \leq E \tag{1.2}$$

On suppose que A admet une base propre orthonormale $\{\Phi_i\}_{i\geq 1}$dans H, associée avec les valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$tel que :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...\text{et} \lim_{i\to+\infty} \lambda_i = +\infty$$

Le problème (1.1) est mal posé, pour le régulariser il existe des méthodes : la méthode de quasi-reversibilité, la méthode des equations de Sobolev, la méthode de perturbation de l'equation, la régularisation de Tikhonov. La méthode de la valeur bornée non locale où Clark et Oppenheimer [7] ont régularisé le problème (1.1)-(1.2) par la méthode de la valeur bornée non locale :

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 & t \in]0,T[\\ \alpha u(0) + u(T) = f & \alpha > 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Denche et Bessila approchent le problème par :

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 & t \in]0,T[\\ -\alpha u_t(0) + u(T) = f & \alpha > 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Notation 1

$$\sum_{n\geq 1} \lambda_n^{2\beta} (u(0), \Phi_n)^2 \leq E_1^2 \qquad E_1, \beta > 0 \tag{1.5}$$

$$\sum_{n\geq 1} e^{2\beta\lambda_n} (u(0), \Phi_n)^2 \leq E_2^2 \qquad E_2 > 0 \tag{1.6}$$

Notation 2 *On note la solution de (1.1)-(1.2) par* $u(t)$ *et la solution de (1.3)par* $v(t)$.

Definition 1 *Une fonction*

$$v : [0, T] \to H$$

est appelée une solution classique de (1.3) si $v(t) \in D(A)$ $\forall t \in]0, T[$
et $v \in C^1((0, T), H) \cap C((0, T), H)$, *et satisfaite* $v_t + Av = 0 \quad \forall t \in]0, T[$ *et* $\alpha v(0) + v(T) = f$.

Théorème 3

$$\|v(t) - u(t)\| \leq Q(t, \alpha) \left(\alpha^{\frac{t}{T-1}} \varepsilon + \alpha^{\frac{t}{T}} E\right), \forall t \in [0, T] \tag{1.7}$$

si on choisit $\alpha = \frac{\varepsilon}{E}$, *alors*

$$\|v(t) - u(t)\| \leq 2Q\left(t, \frac{\varepsilon}{E}\right) \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}}, \quad \forall t \in [0, T] \tag{1.8}$$

où

$$Q(t, \alpha) = \min\{H(t, \alpha), K(t)\}, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$H(t, \alpha) = \sqrt{\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{t}{T}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{1-\frac{t}{T}}} \sqrt{2\alpha + 1}^{-\frac{t}{T}} \in (0, 1) \qquad \forall t \in]0, T[$$

$$H(0) = 1, H(T) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha + 1}}$$

$$K(t) := \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{t}{T}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{1-\frac{t}{T}} \in (0, 1) \qquad \forall t \in]0, T[$$

$$K(0) = K(T) = 1$$

Pour démontrer le théorème précédent on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 1 *Si* $v(t)$ *est une solution de (1.3) alors*

$$\|f\|^2 \geq \alpha^2 \|v(0)\|^2 + (2\alpha + 1) \|v(T)\|^2$$

Démonstration. on a

$$f = \alpha v(0) + v(T)$$

$$\|f\|^2 = \|\alpha v(0) + v(T)\|^2$$
$$= \alpha^2 \|v(0)\|^2 + \|v(T)\|^2 + 2\alpha\,(v(0), v(T)) \tag{1.9}$$

soit

$$h\,(t) = (v(t), v(T-t)) \qquad \forall t \in [0, T]$$
$$h'\,(t) = (v'(t), v(T-t)) + (v(t), -v'(T-t))$$
$$= (v'(t), v(T-t)) - (v(t), -Av(T-t))$$
$$= (-Av(t), v(T-t)) + (v(t), Av(T-t))$$
$$= -\,(v(t), Av(T-t)) + (v(t), Av(T-t))$$
$$= 0$$

donc

$$h'\,(t) = 0 \;\forall t \in\,]0, T[$$

on a $]0, T[$ un intervalle convexe dans $\mathbb{R}^2$, alors $h\,(t) = c$, $\forall t \in [0, T]$ donc h est constante.

$$h\,(0) = h\left(\frac{T}{2}\right) \Leftrightarrow (v(0), v(T)) = \left(v(\frac{T}{2}), v(\frac{T}{2})\right)$$

alors

$$(v(0), v(T)) = \left\|v(\frac{T}{2})\right\|^2$$

soit

$$g(t) = \|v(t)\|^2 \Longrightarrow g'(t) = 2\,(v'(t), v(t))$$
$$= -2\,(Av(t), v(t)) \leq 0 \quad \forall t \in\,]0, T[$$

donc g est décroissante .

$$\frac{T}{2} \leq T \Longrightarrow g\left(\frac{T}{2}\right) \geq g\,(T) \Leftrightarrow \left(v(\frac{T}{2}), v(\frac{T}{2})\right) \geq \|v(T)\|^2$$

selon (2.3) on obtient :

$$\|f\|^2 \geq \alpha^2 \|v(0)\|^2 + \|v(T)\|^2 + 2\alpha \|v(T)\|^2$$
$$\geq \alpha^2 \|v(0)\|^2 + (2\alpha + 1) \|v(T)\|^2$$

■

Lemme 2 *Si* $x \geq 0,\ y \geq 0,\ q > 0$

$$x + qy \geq (1+q)\, x^{\frac{1}{1+q}} y^{\frac{q}{1+q}}$$

Lemme 3 *Si* $v(t)$ *une solution de (1.3) , alors*

$$\|v(t)\| \leq H(t,\alpha)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \|f\| \quad \forall t \in [0,T]$$

Démonstration. Par les lemmes précédents et en posant :

$$x = (2\alpha+1) \|v(T)\|^2$$

$$q = \left(1 - \frac{t}{T}\right) / \frac{t}{T}$$

$$y = \frac{\frac{t}{T}}{\left(1-\frac{t}{T}\right) \alpha^2 \|v(0)\|^2}$$

$$\|f\|^2 \geq x + qy \geq (1+q)\, x^{\frac{1}{1+q}} y^{\frac{q}{1+q}}$$

on a

$$1 + q = 1 + \frac{1-\frac{t}{T}}{\frac{t}{T}} \Longrightarrow 1+q = \frac{T}{t}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+q} = \frac{t}{T}, \frac{q}{1+q} = \frac{T-t}{t}$$

$$\|f\|^2 \geq \frac{T}{t} x^{\frac{t}{T}} y^{\frac{T-t}{t}} \geq \frac{T}{t} \left((2\alpha+1)\|v(T)\|^2\right)^{\frac{t}{T}} \left(\frac{t}{T} / \left(1-\frac{t}{T}\right) \alpha^2 \|v(0)\|^2\right)^{\frac{T-t}{t}}$$

$$\|f\|^2 \geq \left(\frac{1}{H(t,\alpha)} \alpha^{1-\frac{t}{T}} \|v(T)\|^{\frac{t}{T}} \|v(0)\|^{1-\frac{t}{T}}\right)^2$$

$$\|f\| \geq \frac{1}{H(t,\alpha)} \alpha^{1-\frac{t}{T}} \|v(T)\|^{\frac{t}{T}} \|v(0)\|^{1-\frac{t}{T}}$$

par la méthode de" log-convexity " on a :

$$\|v(T)\|^{\frac{t}{T}} \|v(0)\|^{1-\frac{t}{T}} \geq \|v(t)\| \qquad \forall t \in [0,T]$$

on trouve :

$$\|f\| \geq \frac{1}{H(t,\alpha)} \alpha^{1-\frac{t}{T}} \|v(t)\|$$

alors

$$\|v(t)\| \leq H(t,\alpha)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \|f\| \quad \forall t \in [0,T]$$

■

Notation 4 *soit w la solution de*

$$\begin{cases} w_t + Aw = 0 & \forall t \in]0, T[\\ \alpha w(0) + w(T) = u(T) \end{cases}$$

Lemme 4

$$\|v(t) - w(t)\| \leq H(t, \alpha)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \varepsilon \qquad \forall t \in [0, T]$$

Démonstration. Soit

$$\Omega(t) = v(t) - w(t) \qquad \forall t \in [0, T]$$

$\Omega(t)$ est la solution de problème :

$$\begin{cases} \Omega_t + A\Omega = 0 & \forall t \in]0, T[\\ \alpha\Omega(0) + \Omega(T) = f - u(T) \end{cases}$$

selon le lemme précédent on a :

$$\|f - u(T)\| \geq \frac{1}{H(t, \alpha)} \alpha^{1-\frac{t}{T}} \|v(t)\|^{\frac{t}{T}} \|v(0)\|^{1-\frac{t}{T}}$$

$$\|\Omega(t)\| \leq H(t, \alpha)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \|f - u(T)\|$$

$$\|v(t) - w(t)\| \leq H(t, \alpha)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \|f - u(T)\|$$

si $\|f - u(T)\| \leq \varepsilon$ donc

$$\|v(t) - w(t)\| \leq H(t, \alpha)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \varepsilon \quad \forall t \in [0, T]$$

■

Lemme 5

$$\|w(t) - u(t)\| \leq H(t, \alpha)\, \alpha^{\frac{t}{T}} E \qquad \forall t \in [0, T]$$

Démonstration. Soit

$$z(t) := u(t) - w(t) \qquad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\alpha z(0) + z(T) = \alpha u(0)$$

car

$$\alpha z(0) + z(T) = \alpha(u(0) - w(0)) + u(T) - w(T)$$

$$= \alpha u(0) + u(T) - (w(0) + w(T))$$
$$= \alpha u(0) + u(T) - u(T)$$
$$= \alpha u(0)$$

$z(t)$ est la solution de problème :

$$\begin{cases} z_t + Az = 0 & \forall t \in]0, T[\\ \alpha z(0) + z(T) = \alpha u(0) \end{cases}$$

En utilisant le lemme (1.7) on obtient :

$$\|z(t)\| \leq H(t, \alpha)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \|\alpha u(0)\|$$
$$\leq H(t, \alpha)\, \alpha^{\frac{t}{T}} E \qquad \forall t \in [0, T]$$

■

Remarque 5 *Sachant que* $\forall t \in [0, T]$

$$u(t) = \sum_{n\geq 1} e^{(T-t)\lambda_n} (u(T), \Phi_n)\, \Phi_n \tag{1.10}$$

$$v(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} (f, \Phi_n)\, \Phi_n \tag{1.11}$$

$$w(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} (u(T), \Phi_n)\, \Phi_n \tag{1.12}$$

Lemme 6 *Si* $v(t)$ *est une solution de (1.3), alors*

$$\|v(t)\| \leq K(t)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \|f\| \qquad \forall t \in [0, T]$$

Démonstration. La représentation (1.11) implique que

$$\|v(0)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|$$

car

$$\|v(0)\| = \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} (f, \Phi_n)\Phi_n \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha} (f, \Phi_n)\, \Phi_n \right\| = \frac{1}{\alpha} \left\| \sum_{n\geq 1} (f, \Phi_n)\, \Phi_n \right\|$$

alors

$$\|v(0)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|$$

$$\|v(T)\| \leq \|f\|$$

car

$$\|v(T)\| = \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n T}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} (f, \Phi_n) \Phi_n \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n T}}{e^{-\lambda_n T}} (f, \Phi_n) \Phi_n \right\| = \left\| \sum_{n \geq 1} (f, \Phi_n) \Phi_n \right\|$$

alors

$$\|v(T)\| \leq \|f\|$$

Maintenant pour $t \in]0, T[$, on applique le deuxième lemme avec

$$x = \alpha^{\frac{t}{T}}$$

$$y = \frac{1 - \frac{t}{T}}{\frac{t}{T}} \alpha^{\frac{t}{T}-1} e^{-\lambda_n T}$$

$$q = \frac{\frac{t}{T}}{1 - \frac{t}{T}} = \frac{t}{T - t}$$

on obtient

$$\alpha^{\frac{t}{T}} + \alpha^{\frac{t}{T}-1} e^{-\lambda_n T} \geq (q+1)\, x^{\frac{1}{1+q}} y^{\frac{q}{1+q}}$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{T}} \right) \left(\frac{1 - \frac{t}{T}}{\frac{t}{T}} \right)^{\frac{t}{T}} e^{-\lambda_n t}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{1 - \frac{t}{T}} \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{t}{T}}} e^{-\lambda_n t}$$

$$= \frac{1}{K(t)} e^{-\lambda_n t}$$

$$\frac{e^{-\lambda_n t}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \leq K(t)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \qquad \forall t \in [0, T]$$

donc

$$\|v(t)\| \leq K(t)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \|f\| \qquad \forall t \in [0, T]$$

■

Lemme 7

$$\|v(t) - w(t)\| \leq K(t)\, \alpha^{\frac{t}{T}-1} \varepsilon \qquad \forall t \in [0, T]$$

Lemme 8

$$\|u(t)-w(t)\| \leq K(t)\,\alpha^{\frac{t}{T}}E \qquad \forall t\in[0,T]$$

Démonstration. On a

$$\|u(t)-w(t)\|^2=\sum_{n\geq 1}\left(e^{\lambda_n(T-t)}-\frac{e^{-\lambda_n t}}{\alpha+e^{-\lambda_n T}}\right)^2 (u(t),\Phi_n)^2$$

$$=\alpha^2\sum_{n\geq 1}\left(\frac{e^{-\lambda_n t}}{\alpha+e^{-\lambda_n T}}\right)^2 e^{2\lambda_n T}(u(t),\Phi_n)^2$$

$$\leq \alpha^2\sum_{n\geq 1}\left(K(t)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\right)^2 e^{2\lambda_n T}(u(t),\Phi_n)^2$$

$$\leq \left(K(t)\,\alpha^{\frac{t}{T}}\right)^2\sum_{n\geq 1}e^{2\lambda_n T}(u(t),\Phi_n)^2$$

$$\leq \left(K(t)\,\alpha^{\frac{t}{T}}\right)^2\|u(0)\|^2 \leq \left(K(t)\,\alpha^{\frac{t}{T}}\,\|u(0)\|\right)^2$$

donc

$$\|u(t)-w(t)\| \leq K(t)\,\alpha^{\frac{t}{T}}E \qquad \forall t\in[0,T]$$

■

Remarque 6

$$2Q(t,\alpha)\in[1\ ,\ 2] \qquad \forall t\in[0,T]$$

$$2Q\left(\frac{T}{2},\alpha\right)\leq 2K\left(\frac{T}{2}\right)=1$$

$$Q(t,\alpha)=\min\{H(t,\alpha),K(t)\} \qquad \forall t\in[0,T]$$

$$Q\left(\frac{T}{2},\alpha\right)=\min_{t\in[0,T]}\left\{H\left(\frac{T}{2},\alpha\right),K\left(\frac{T}{2}\right)\right\}$$

$$2Q\left(\frac{T}{2},\alpha\right)\leq 2H(t,\alpha)\leq 2\frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}<2$$

L'erreur trouvée pour identifier $u(t)$ sous les propositions (1.1)-(1.2) est donnée par :

$$w(t)=\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}$$

Si on choisit $\alpha=\frac{\varepsilon}{E}\frac{1-\frac{t}{T}}{\frac{t}{T}}$, $\forall t\in\,]0,T[$ Le théorème (1) ne donne aucune information sur la stabilité de la solution en $t=0$ et la condition (1.2) est faible. Pour bien comprendre cela on suppose (1.5) ou (1.6).On va voir que par ces conditions, l'estimation de la stabilité de type logarithmique et Hölder en $t=0$ sont respectivement garanties.

Démonstration. On suppose que A admet une base propre orthonormale $\{\Phi_i\}_{i\geq 1}$dans H, associés avec les valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ telles que :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...\text{et} \lim_{i\to+\infty} \lambda_i = +\infty$$

avec $\alpha = \alpha_2 := \frac{\varepsilon}{E} \frac{1-\frac{t}{T}}{\frac{t}{T}}$, on obtient

$$\|v(t) - u(t)\| \leq Q(t, \alpha_2) \left(\alpha_2^{\frac{t}{T}-1} \varepsilon + \alpha_2^{\frac{t}{T}} E \right)$$

$$\leq K(t) \left(\alpha_2^{\frac{t}{T}-1} \varepsilon + \alpha_2^{\frac{t}{T}} E \right)$$

$$= K(t) \left(\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1-\frac{t}{T}}{\frac{t}{T}} \right)^{\frac{t}{T}-1} + \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1-\frac{t}{T}}{\frac{t}{T}} \right)^{\frac{t}{T}} \right)$$

$$= K(t) \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1-\frac{t}{T}}{\frac{t}{T}} \right)^{\frac{t}{T}} \left[\left(\frac{1-\frac{t}{T}}{\frac{t}{T}} \right)^{-1} + 1 \right]$$

$$= K(t) \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1-\frac{t}{T}}{\frac{t}{T}} \right)^{\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{1-\frac{t}{T}} \right)$$

$$= K(t) \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{\frac{t}{T}} \right) \frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{t}{T}}}{1-\frac{t}{T}}$$

$$= K(t) \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \frac{1}{\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{t}{T}} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{1-\frac{t}{T}}}$$

$$\leq K(t) \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \frac{1}{K(t)}$$

alors

$$\|v(t) - u(t)\| \leq \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}}$$

■

Théorème 7 *On suppose que (1.5) est vérifiée, alors* $\forall t \in [0, T]$.

$$\|u(t) - v(t)\| \leq Q(t, \alpha) \alpha^{\frac{t}{T}-1} \varepsilon + \alpha^{\frac{t}{T}} \left(\frac{T}{\ln \left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta(t)} \right)^{\beta(t)} / \alpha \right)} \right)^{\beta} C(t)^{\frac{t}{T}-1} E_1$$

si

$$0<\alpha<\left(\frac{T\lambda_1}{\beta\left(t\right)}\right)^{\beta(t)}$$

et

$$\left\|u\left(t\right)-v\left(t\right)\right\|\leq Q\left(t,\alpha\right)\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon+\alpha\left(\frac{e^{T\lambda_1}}{\lambda_1^{\beta(t)}C\left(t\right)}\right)^{1-\frac{t}{T}}E_1$$

si

$$\alpha\geq\left(\frac{T\lambda_1}{\beta\left(t\right)}\right)^{\beta(t)}$$

où

$$\beta\left(t\right)=\frac{\beta T}{T-t},\forall t\in[0,T)$$

et

$$C\left(t\right)=\begin{cases}1 & si\ 0<\beta\left(t\right)<1\\ 2^{1-\beta(t)} & si\ \beta\left(t\right)\geq1\end{cases}$$

si on choisit $\alpha=\alpha_0:=\frac{\varepsilon^{1-\delta}}{E_1}$ *où* $0<\delta<1$. *Alors* $\forall t\in[0,T)$ *: si* $0<\alpha_0<\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}$

$$\left\|u\left(t\right)-v\left(t\right)\right\|\leq$$

$$\left\{\varepsilon^{\frac{t}{T}}E_1^{1-\frac{t}{T}}\left\{Q(t,\alpha_0)\varepsilon^{\delta(1-\frac{t}{T})}+\varepsilon^{-\delta\frac{t}{T}}\left(\frac{T}{\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}E_1/\varepsilon^{1-\delta}\right)}\right)^{\beta}C\left(t\right)^{\frac{t}{T}-1}\right\}\right. \tag{1.13}$$

si $\alpha_0\geq\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}$

$$\left\|u\left(t\right)-v\left(t\right)\right\|\leq$$

$$\varepsilon^{\frac{t}{T}}E_1^{1-\frac{t}{T}}\left\{Q(t,\alpha_0)\varepsilon^{\delta(1-\frac{t}{T})}+\varepsilon^{1-\delta-\frac{t}{T}}\left(\frac{e^{\lambda,T}}{\lambda_1^{\beta(E)}C\left(t\right)}\right)^{1-\frac{t}{T}}E_1^{\frac{t}{T}-1}\right\} \tag{1.14}$$

Démonstration. Selon les représentations (1.10) et (1.12) on a

$$\left\|u(t)-w(t)\right\|^2=\left\|\sum_{n\geqslant1}(e^{(T-t)\lambda_n}-\frac{e^{-\lambda_n t}}{\alpha+e^{-\lambda_n T}})(u(T),\Phi_n)\Phi_n\right\|^2$$

$$=\left\|\sum_{n\geqslant1}(\frac{\alpha e^{(T-t)\lambda_n}+e^{-\lambda_n T+(T-t)\lambda_n}-e^{-\lambda_n t}}{\alpha+e^{-\lambda_n T}})(u(T),\Phi_n)\Phi_n\right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{\alpha e^{(T-t)\lambda_n} + e^{-\lambda_n t} - e^{-\lambda_n t}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \right) (u(T), \Phi_n) \Phi_n \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n \geqslant 1} \frac{\alpha e^{(T-t)\lambda_n}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} (u(0), \Phi_n) \Phi_n \right\|^2$$

$$= \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{\alpha e^{(T-t)\lambda_n}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \right)^2 |(u(0), \Phi_n)|^2$$

$$= \alpha^{\frac{2t}{T}} \sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{-2\lambda_n t}}{\left(\alpha + e^{-\lambda_n T}\right)^{\frac{2t}{T}}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \right)^{2\left(1 - \frac{t}{T}\right)} |(u(0), \Phi_n)|^2$$

$$\leq \alpha^{\frac{2t}{T}} \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \right)^{2\left(1 - \frac{t}{T}\right)} |(u(0), \Phi_n)|^2$$

$$= \alpha^{\frac{2t}{T}} \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{\alpha}{\alpha \lambda_n^{\frac{\beta T}{T-t}} + \lambda_n^{\frac{\beta T}{T-t}} e^{-\lambda_n T}} \right)^{2\left(1 - \frac{t}{T}\right)} \lambda_n^{2\beta} |(u(0), \Phi_n)|^2 \tag{1.15}$$

si $\beta(t) = \frac{\beta T}{T-t} \geq 1$, on a

$$\alpha \lambda_n^{\beta(t)} + \lambda_n^{\beta(t)} e^{-\lambda_n T} = \left(\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}} \lambda_n \right)^{\beta(t)} + \left(\lambda_1 e^{\frac{-\lambda_n T}{\beta(t)}} \right)^{\beta(t)}$$

$$\geq 2 \left(\frac{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}} \lambda_n + \lambda_1 e^{\frac{-\lambda_n T}{\beta(t)}}}{2} \right)^{\beta(t)}$$

$$= 2^{1-\beta(t)} \left(\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}} \lambda_n + \lambda_1 e^{\frac{-\lambda_n T}{\beta(t)}} \right)^{\beta(t)}$$

si $0 < \beta(t) < 1$

$$\lambda_n^{\beta(t)} + \lambda_n^{\beta(t)} e^{-\lambda_n T} = \left(\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}} \lambda_n \right)^{\beta(t)} + \left(\lambda_1 e^{\frac{-\lambda_n T}{\beta(t)}} \right)^{\beta(t)}$$

$$\geq \lambda_n^{\beta(t)} + \lambda_n^{\beta(t)} e^{-\lambda_n T} = \left(\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}} \lambda_n + \lambda_1 e^{\frac{-\lambda_n T}{\beta(t)}} \right)^{\beta(t)}$$

$$C(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \beta(t) < 1 \\ 2^{1-\beta(t)} & \text{si } \beta(t) = \frac{\beta T}{T-t} \geq 1 \end{cases}$$

on obtient

$$\alpha \lambda_n^{\beta(t)} + \lambda_n^{\beta(t)} e^{-\lambda_n T} \geq C(t) \left(\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}} \lambda_n + \lambda_1 e^{\frac{-\lambda_n T}{\beta(t)}} \right)^{\beta(t)} \tag{1.16}$$

soit

$$g\left(\lambda\right)=\left(\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\lambda+\lambda_{1}e^{\frac{-\lambda_{n}T}{\beta(t)}}\right)^{-1}$$

$$g'\left(\lambda\right)=\frac{-\left(\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\lambda+\lambda_{1}e^{\frac{-\lambda_{n}T}{\beta(t)}}\right)'}{\left(\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\lambda+\lambda_{1}e^{\frac{-\lambda_{n}T}{\beta(t)}}\right)^{2}}$$

$$=\frac{-\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}+\frac{T}{\beta(t)}\lambda_{1}e^{\frac{-\lambda T}{\beta(t)}}}{\left(\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\lambda+\lambda_{1}e^{\frac{-\lambda_{n}T}{\beta(t)}}\right)^{2}}$$

$$g'\left(\lambda\right)=0\Leftrightarrow-\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}+\frac{T}{\beta\left(t\right)}\lambda_{1}e^{\frac{-\lambda T}{\beta(t)}}=0$$

$$\Longrightarrow\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}=\frac{T}{\beta\left(t\right)}\lambda_{1}e^{\frac{-\lambda T}{\beta(t)}}$$

$$\Longrightarrow\frac{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta\left(t\right)}{T\lambda_{1}}=e^{\frac{-\lambda T}{\beta(t)}}$$

$$\Longrightarrow\ln\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta\left(t\right)}{T\lambda_{1}}\right)=\frac{-\lambda T}{\beta\left(t\right)}$$

$$\Longrightarrow\lambda=\frac{-\beta\left(t\right)}{T}\ln\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta\left(t\right)}{T\lambda_{1}}\right)$$

$$\Longrightarrow\lambda=\frac{\beta\left(t\right)}{T}\ln\left(\frac{T\lambda_{1}}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta\left(t\right)}\right)$$

$$\Longrightarrow\lambda=\frac{1}{T}\ln\left(\frac{T\lambda_{1}}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta\left(t\right)}\right)^{\beta(t)}$$

$$\Longrightarrow\lambda=\frac{1}{T}\ln\left[\left(\frac{T\lambda_{1}}{\beta\left(t\right)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]$$

$$\sup_{\lambda\geq\lambda_{1}}g\left(\lambda\right)\leq g\left(\frac{1}{T}\ln\left[\left(\frac{T\lambda_{1}}{\beta\left(t\right)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]\right)$$

$$\sup_{\lambda\geq\lambda_{1}}g\left(\lambda\right)\leq\left[\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\left(\frac{1}{T}\ln\left[\left(\frac{T\lambda_{1}}{\beta\left(t\right)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]\right)+\lambda_{1}e^{\frac{-T\ln\left[\left(\frac{T\lambda_{1}}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]}{T\beta(t)}}\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\left(\frac{1}{T}\ln\left[\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]\right)+\lambda_1 e^{\frac{-T\ln\left[\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]}{T\beta(t)}}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\left(\frac{1}{T}\ln\left[\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]\right)+\lambda_1\left[\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]^{\frac{-1}{\beta(t)}}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\left(\frac{1}{T}\ln\left[\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]\right)+\lambda_1\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{-1}/\alpha^{\frac{-1}{\beta(t)}}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\left(\frac{1}{T}\ln\left[\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]\right)+\lambda_1\frac{\beta(t)}{T\lambda_1}\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\left(\frac{1}{T}\ln\left[\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right]\right)+\frac{\beta(t)}{T}\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\left[\frac{1}{T}\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right)+\frac{\beta(t)}{T}\right]}$$

$$= \frac{T}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\left[\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right)+\beta\left(t\right)\right]}$$

$$= \frac{T}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\left[\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right)+\ln e^{\beta(t)}\right]}$$

$$= \frac{T}{\alpha^{\frac{1}{\beta(t)}}\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right)} \text{ si } 0<\alpha<\left(\frac{T\lambda_1}{\beta\left(t\right)}\right)^{\beta(t)} \tag{1.17}$$

et

$$\sup_{\lambda\geq\lambda_1} g\left(\lambda\right)=g\left(\lambda_1\right)<\left(\lambda_1 e^{-\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}}\right)^{-1}=\frac{e^{\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}}}{\lambda_1} \text{ si } \alpha\geq\left(\frac{T\lambda_1}{\beta\left(t\right)}\right)^{\beta(t)} \tag{1.18}$$

d'après (1.15), (1.17) et (1.18) on obtient :

$$\|u(t)-w(t)\| \leq \begin{cases} \alpha^{\frac{t}{T}} \left(\frac{T}{\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right)} \right)^{\beta(t)\left(1-\frac{t}{T}\right)} C(t)^{\frac{t}{T}-1} E_1 \\ \text{si } 0<\alpha<\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)} \\ \alpha \left(\frac{e^{T\lambda_1}}{\lambda_1^{\beta(t)} C(t)} \right)^{1-\frac{t}{T}} E_1 \text{ si } \alpha \geq \left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)} \end{cases} \tag{1.19}$$

par un lemme précédent et l'equation (1.19) et l'inégalité triangulaire on obtient :

$$\begin{aligned} \|u(t)-v(t)\| &= \|u(t)-w(t)+w(t)-v(t)\| \\ &\leq \|u(t)-w(t)\| + \|w(t)-v(t)\| \end{aligned}$$

$$\leq \alpha^{\frac{t}{T}} \left(\frac{T}{\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right)} \right)^{\beta(t)\left(1-\frac{t}{T}\right)} C(t)^{\frac{t}{T}-1} E_1 \ + H(t,\alpha)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon$$

$$\beta(t) = \frac{\beta T}{T-t} \Rightarrow \beta(t)\left(1-\frac{t}{T}\right) = \frac{\beta T\left(1-\frac{t}{T}\right)}{T-t} = \beta$$

si

$$0<\alpha<\left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}$$

$$\|u(t)-v(t)\| \leq \alpha^{\frac{t}{T}} \left(\frac{T}{\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}/\alpha\right)} \right)^{\beta} C(t)^{\frac{t}{T}-1} E_1 \ + Q(t,\alpha)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon$$

et

$$\alpha \geq \left(\frac{T\lambda_1}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)}$$

$$\|u(t)-v(t)\| \leq \alpha\alpha \left(\frac{e^{T\lambda_1}}{\lambda_1^{\beta(t)} C(t)} \right)^{1-\frac{t}{T}} E_1 \ + Q(t,\alpha)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon$$

et si $\alpha = \alpha_0 = \frac{\varepsilon^{1-\delta}}{E_1}$ on obtient le théorème. ■

Remarque 8

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{E_1}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta(t)}\right)^{\beta(t)} E_1/\varepsilon^{1-\delta}\right)} = \frac{1}{1-\delta}$$

d'après (1.13)-(1.14) avec $\alpha = \alpha_0, \varepsilon > 0, \exists C_1$ *constant positif tel que :*

$$\|u(t) - v(t)\| \leq C_1 e^{(1-\delta)t/T} E_1^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{T} \ln\left(\frac{E_1}{\varepsilon}\right)\right)^{-\beta} \qquad \forall t \in [0, T[$$

et pour (1.13)-(1.14) en $t = 0$*, on a :*

$$\|u(0) - v(0)\| \leq$$

$$\begin{cases} E_1 \left\{\varepsilon^\delta + \left(\frac{T}{\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta}\right)^{\beta(t)} E_1/\varepsilon^{1-\delta}\right)}\right)^{\beta} C(0)^{-1}\right\} \ si \ \ 0 < \alpha_0 < \left(\frac{T\lambda_1}{\beta}\right)^{\beta} \\ E_1 \left\{\varepsilon^\delta + \varepsilon^{1-\delta} \left(\frac{e^{\lambda_1 T}}{\lambda_1^\beta C(0)}\right) E_1^{-1}\right\} \ si \ \ \alpha_0 \geq \left(\frac{T\lambda_1}{\beta}\right)^{\beta} \end{cases}$$

soit $C = \left(\frac{T}{1-\delta}\right)^\beta C(0)^{-1} E_1$ *et on suppose que* $\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta}\right)^\beta E_1 \geq 1$*, alors*

$$\ln\left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta}\right)^{\beta} E_1/\varepsilon^{1-\delta}\right) = \ln\left(\left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta}\right)^{\beta} E_1\right) + \ln\frac{1}{\varepsilon^{1-\delta}}$$

$$\geq \ln\frac{1}{\varepsilon^{1-\delta}} = (1-\delta)\ln\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\|u(0) - v(0)\| \leq \begin{cases} E_1 \varepsilon C \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\beta} & si \ 0 < \alpha_0 < \left(\frac{T\lambda_1}{\beta}\right)^{\beta} \\ E_1 \varepsilon^\delta + \varepsilon^{1-\delta} \frac{e^{T\lambda_1}}{\lambda_1^\beta C(0)} & si \ \alpha_0 \geq \left(\frac{T\lambda_1}{\beta}\right)^{\beta} \end{cases}$$

si $\beta = 1$*, on a l'estimation de l'erreur en* $t = 0$ *comme montré dans Denche et Bessila [9].*

Remarque 9 *si* β *est donnée, on suppose que* $\alpha = \frac{\varepsilon}{E_1}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^\beta$*, alors pour* $\varepsilon > 0$*,il existe* $C_2 > 0$ *tel que :*

$$\|v(t) - u(t)\| \leq C_2 \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_1^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta(T-t)/T} \qquad \forall t \in [0, T[$$

Remarque 10 *Pour identifier* $u(t)$ *sous la proposition (1.1)-(1.5) l'erreur va être d'ordre* $\varepsilon^{\frac{t}{T}} E_1^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta(T-t)/T}(1+o(1))$. *Si on suppose le paramètre de la régularisation* $\alpha = \frac{\varepsilon}{E_1}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{\beta+\delta}$ *pour* $\delta > 0$, *alors*

$$\|u(0) - v(0)\| \leq E_1 \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta}(1+o(1)) \tag{1.20}$$

si $\alpha := \frac{1-\frac{1}{T}}{\frac{1}{T}}\frac{\varepsilon}{E_1}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta}$, *alors*

$$\|v(t) - u(t)\| \leq \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_1^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta(T-t)/T} \quad (1+o(1)) \tag{1.21}$$

Démonstration. si $0 < \beta \leq 1$ en utilisant le théorème (2), on a

$$\|u(0) - v(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} + \left(\frac{T}{\ln\left(\frac{C}{\alpha}\right)}\right)^{\beta} E_1 \tag{1.22}$$

où $C = \left(\frac{T\lambda_1 e}{\beta}\right)^{\beta}$, si on choisit $\alpha = \frac{\varepsilon}{E_1}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{\beta+\delta}$, alors

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = E_1\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\delta} = E_1\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta} o(1) \quad ,\varepsilon \to 0 \tag{1.23}$$

tant que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\delta} = 0$$

$$\varepsilon \to 0, \left(\frac{T}{\ln\left(\frac{C}{\alpha}\right)}\right)^{\beta} E_1 = \left(\frac{T}{\ln\left(C\frac{E_1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-(\beta+\delta)}\right)}\right)^{\beta} E_1$$

$$= E_1\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta}\left(\frac{\ln\frac{E_1}{\varepsilon}}{\ln\frac{E_1}{\varepsilon} + \ln C - (\beta+\delta)\ln\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)}\right)^{\beta}$$

$$= E_1\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta}(1+o(1)) \tag{1.24}$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\frac{\ln\frac{E_1}{\varepsilon}}{\ln\frac{E_1}{\varepsilon} + \ln C - (\beta+\delta)\ln\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)} = 1$$

selon (1.22)-(1.23) et (1.24) on obtient

$$\|u(0)-v(0)\| \le E_1\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta}(1+o(1))$$

si $\beta > 1$

$$\|w(0)-u(0)\|^2 \le \left(\sup_{x>0} g_\alpha(x)\right)^2 \sum_{n\ge 1} \lambda_n^{2\beta}(u(0),\Phi_n)^2$$

$$\le \left(\sup_{x>0} g_\alpha(x)\right)^2 E_1^2 \tag{1.25}$$

où

$$g_\alpha(x) := \frac{\alpha}{\alpha x^\beta + \lambda_1^\beta e^{-xT}} \qquad , x > 0$$

$$g'_\alpha(x) = \frac{-\alpha^2\beta x^{\beta-1} + \alpha T\lambda_1^\beta e^{-xT}}{\left(\alpha x^\beta + \lambda_1^\beta e^{-xT}\right)^2}$$

$$g'_\alpha(x) = 0 \Longrightarrow -\alpha^2\beta x^{\beta-1} + \alpha T\lambda_1^\beta e^{-xT} = 0$$

$$\Longrightarrow e^{-xT} = \frac{\alpha\beta x^{\beta-1}}{T\lambda_1^\beta} \tag{1.26}$$

si $\beta > 1$, il existe une solution unique x_α de (1.26)

$$\sup_{x>0} g_\alpha(x) = g_\alpha(x_\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha x_\alpha^\beta + \lambda_1^\beta e^{-x_\alpha T}} < \left(\frac{1}{x_\alpha}\right)^\beta \tag{1.27}$$

$\beta > 0$, on utilise (1.26) , on trouve que si $\alpha \to 0$,alors $x_\alpha \to +\infty$

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\ln(T/\alpha)}{x_\alpha T} = 1 \tag{1.28}$$

selon le lemme 7 et l'inégalité triangulaire ,(1.25) et(1.27) :

$$\|u(0)-v(0)\| \le \frac{\varepsilon}{\alpha} + \left(\frac{1}{x_\alpha}\right)^\beta E_1$$

$$= \frac{\varepsilon}{\alpha} + \left(\frac{T}{\ln(T/\alpha)}\right)^\beta E_1 \left(\frac{\ln(T/\alpha)}{x_\alpha T}\right)^\beta \tag{1.29}$$

avec $\alpha = \frac{\varepsilon}{E_1}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{\beta+\delta}, \varepsilon \to 0$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = E_1\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\delta}$$

$$= E_1\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta} o(1) \tag{1.30}$$

si on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\delta} = 0$$

on trouve :

$$\left(\frac{T}{\ln(T/\alpha)}\right)^{\beta} E_1\left(\frac{\ln(T/\alpha)}{x_\alpha T}\right)^{\beta} =$$

$$= E_1\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta}\left(\frac{\ln\frac{E_1}{\varepsilon}}{\ln\frac{E_1}{\varepsilon}+\ln T-(\beta+\delta)\ln\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)}\right)^{\beta}\left(\frac{\ln(T/\alpha)}{x_\alpha T}\right)^{\beta}$$

$$= E_1\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{-\beta}(1+o(1)) \tag{1.31}$$

si

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln\frac{E_1}{\varepsilon}}{\ln\frac{E_1}{\varepsilon}+\ln T-(\beta+\delta)\ln\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)} = 1$$

et par (1.28)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln(T/\alpha)}{x_\alpha T} = \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\ln(T/\alpha)}{x_\alpha T} = 1$$

selon (1.29) et (1.30) on obtient(1.20). Maintenant, on va démontrer (1.21) on a :

$$\|u(t)-w(t)\| \le K(t)\,\alpha^{\frac{t}{T}}\left(\frac{T}{\ln\frac{1}{\alpha}}\right)E_1 1+o(1) \tag{1.32}$$

par le lemme 7, l'inégalité triangulaire et (1.32) on obtient :

$$\|u(t)-v(t)\| \le K(t)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon + K(t)\,\alpha^{\frac{t}{T}}\left(\frac{T}{\ln\frac{1}{\alpha}}\right)^{\beta} 1+o(1)\,.$$

En choisissant $\alpha = \frac{\varepsilon}{E}\frac{1-t/T}{t/T}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E_1}{\varepsilon}\right)^{\beta}$, on obtient 1.21. ■

Théorème 11 *On suppose (1.6), alors* $\forall t\in[0,T[$.

$$\|u(t)-v(t)\| \le \begin{cases} Q(t,\alpha)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon+\alpha^{(t+\beta)/T}E_2 & si\ 0<\beta<T-t \\ Q(t,\alpha)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon+\alpha E_2 & si\ \beta\ge T-t \end{cases} \tag{1.33}$$

si $\alpha = \alpha_1 := \frac{\varepsilon^{1-\delta}}{E_2}$ *pour* $0 < \delta < 1$, *alors* $\forall t \in [0, T[$

$$\|u\,(t) - v\,(t)\| \leq \begin{cases} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_2^{1-\frac{t}{T}} \left(Q(t,\alpha_1) \varepsilon^{\delta(1-\frac{t}{T})} + \varepsilon^{(\beta(1-\delta)-\delta t)/T} E_2^{\frac{t}{T}-1} \right) \\ \text{si } 0 < \beta < T - t \\ \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_2^{1-\frac{t}{T}} \left(Q(t,\alpha_1) \varepsilon^{\delta(1-\frac{t}{T})} + \varepsilon^{\left(1-\frac{t}{T}-\delta\right)/T} E_2^{\frac{t}{T}-1} \right) \\ \text{si } \beta \geq T - t \end{cases} \tag{1.34}$$

Démonstration. On a

$$\alpha^{2\frac{t}{T}} \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + e^{-T\lambda_n}} \right)^{2(1-\frac{t}{T})} (u\,(0)\,, \Phi_n)^2 =$$

$$= \alpha^{2\frac{t}{T}} \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + e^{-T\lambda_n}} \right)^{2(1-\frac{t}{T})} (u\,(0)\,, \Phi_n)^2$$

où $p_n(t) = e^{\beta\lambda_n T/(T-t)}, \forall t \in [0, T[$

1/ si $\beta \geq T - t$ alors

$$p_n(t) e^{-\lambda_n T} = e^{\lambda_n T(\frac{\beta}{T-t}-1)} > 1$$

$$\|u(t) - \omega(t)\|^2 \leq \alpha^{\frac{2t}{T}} \sum_{n \geq 1} (\frac{\alpha}{\alpha p_n(t) + 1})^{2(1-\frac{t}{T})} e^{2\beta\lambda_n} (u(0), \varphi_n)^2$$

$$\leq \alpha^{\frac{2t}{T}} \alpha^{2(1-\frac{t}{T})} \sum_{n \geq 1} e^{2\beta\lambda_n} (u(0), \varphi_n)^2$$

$$\leq \alpha^2 . E_2^2$$

donc

$$\|u(t) - \omega(t)\| \leq \alpha E_2$$

2/ si $0 < \beta < T - t$ on applique le lemme 2 avec $x = \alpha p_n(t), q = \frac{\beta}{T-t-\beta}$ et $y = p_n(t) e^{-\lambda_n T(\frac{(T-t-\beta)}{\beta})}$, on obtient

$$x + qy \geq (1+q)\, x^{\frac{1}{1+q}} y^{\frac{q}{1+q}}$$

$$\geq \frac{T-t}{T-t-\beta} \left(\frac{T-t-\beta}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{T-t}} \alpha^{\frac{T-t-\beta}{T-t}}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha p_n(t) + p_n(t) e^{-\lambda_n T}} \right)^{1-\frac{t}{T}} \leq \alpha^{\beta/T} \left(\frac{T-t-\beta}{T-t} \right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\frac{\beta}{T-t-\beta} \right)^{\beta/T}$$

$$\leq \alpha^{\beta/T}\left(\frac{T-t-\beta}{T-t}\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(\frac{T-t}{T-t-\beta}\right)^{\beta/T}\left(\frac{\beta}{T-t}\right)^{\beta/T}$$

$$\leq \alpha^{\beta/T}\left(\frac{T-t-\beta}{T-t}\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(\frac{T-t-\beta}{T-t}\right)^{-\beta/T}\left(\frac{\beta}{T-t}\right)^{\beta/T}$$

$$\leq \alpha^{\beta/T}\left(\frac{T-t-\beta}{T-t}\right)^{\frac{T-t-\beta}{T}}\left(\frac{\beta}{T-t}\right)^{\beta/T} < \alpha^{\beta/T}$$

$$\|u(t)-\omega(t)\|^2 \leq \alpha^{\frac{2t}{T}}\alpha^{2\beta/T}E_2^2$$

$$\leq \alpha^{\frac{2(t+\beta)}{T}}E_2^2$$

$$\|u(t)-\omega(t)\| \leq \alpha^{\frac{t+\beta}{T}}E_2 \tag{1.35}$$

selon les lemmes 4 et 7 avec (1.34) et (1.35) on obtient

$$\|u(t)-v(t)\| \leq \|u(t)-\omega(t)\| + \|\omega(t)-v(t)\|$$

$$\leq \alpha E_2 + Q(t,\alpha)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon \qquad \text{si } \beta \geq T-t$$

$$\|u(t)-v(t)\| \leq Q(t,\alpha)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon + \alpha^{\frac{t+\beta}{T}}E_2 \qquad \text{si } 0<\beta<T-t$$

alors

$$\|u(t)-v(t)\| \leq \begin{cases} Q(t,\alpha)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon + \alpha^{(t+\beta)/T}E_2 & \text{si } 0<\beta<T-t \\ Q(t,\alpha)\,\alpha^{\frac{t}{T}-1}\varepsilon + \alpha E_2 & \text{si } \beta \geq T-t \end{cases}$$

■

1.2 Méthode des valeurs quasi-limites

On va présenter quelques méthodes de régularisation des problèmes mal posés.

Le problème de la valeur finale défini par :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & \forall t \in]0,T[\\ u(T) = f \end{cases} \qquad (PVF)$$

où A est un opérateur positif, auto-adjoint et non borné sur un espace de Hilbert H, le problème (PVF) est mal posé.

Plusieurs auteurs utilisent différentes approximations pour le régulariser, par exemple :

1) Lattes et Lions (1960)[15] ont utilisé la méthode de quasi-réversibilité et ont remplacé le (PVF) par un problème approximatif et ont utilisé les solutions de ce nouveau problème pour construire les solutions approximatives de (PVF).

Dans la méthode originale de quasi-réversibilité, Lattes et Lions[15] ont approché le (PVF) par :

$$\begin{cases} v'_\alpha(t) + Av_\alpha(t) - \alpha A^2 v_\alpha(t) = 0 & \forall t \in]0,T[\\ v_\alpha(T) = f \end{cases}$$

où A est perturbé par $A - \alpha A^2$, ensuite ils ont utilisé la valeur initiale $v_\alpha(0) = u_0$ dans le problème :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0, & \forall t \in]0,T[\\ u_\alpha(0) = v_\alpha(0) \end{cases}$$

Enfin, ils ont démontré que $u_\alpha(T)$ converge vers f si $\alpha \longrightarrow 0$, la méthode ne considère pas $u(t)$ pour $t < T$ et l'opérateur transportant f à $v_\alpha(0)$ a une grande norme pour un petit α (d'ordre de $e^{\frac{c}{\alpha}}$).

2) Showalter[20] a approximé le (PVF) par :

$$\begin{cases} v'_\alpha(t) + \alpha A v'_\alpha(t) + Av_\alpha(t) = 0, & \forall t \in]0,T[\\ v_\alpha(T) = f \end{cases}$$

Et comme ci dessus, pour chaque $\alpha > 0$, il utilise la valeur initiale $v_\alpha(0) = u_0$ dans :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0 & \forall t \in]0,T[\\ u_\alpha(0) = v_\alpha(0) \end{cases}$$

Les solutions u_α calculées pour approximer la solution $u(t)$ de (PVF) au sens où $u_\alpha(T)$ converge vers f quand α tend vers zéro. Ainsi que $u_\alpha(t)$ converge vers la solution $u(t)$ de (PVF) si et seulement si cette solution existe, et l'opérateur transportant f à $v_\alpha(0)$ a aussi une grande norme pour un petit α .

3) Miller [18]aborde le problème de la grande norme par perturbation optimale de l'opérateur A, il indique qu'il est possible de rendre la norme de l'ordre $\frac{c}{\alpha}$ plutôt que $e^{\frac{c}{\alpha}}$ et tire les conditions sur la perturbation $f(A)$ pour obtenir les meilleurs résultats possibles.Comme dans les méthodes ci-dessus, il approche le (PVF) par :

$$\begin{cases} v'(t) + f(A)v(t) = 0, & \forall t \in]0,T[\\ v(T) = f \end{cases}$$

Enfin, Showalter [20]par une autre méthode approche le problème :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0 & \forall t \in]0, T[\\ u(0) = f \end{cases}$$

par :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0 & \forall t \in]0, T[\\ u(0) + \alpha u(T) = f \end{cases}$$

C'est la méthode de la valeur quasi-limite, et il suggère que cette dérnière donne une meilleure approximation que les autres types de régularisation.

Dans ce travail, on va utiliser cette méthode pour régulariser (PVF).

1.2.1 Perturbation des conditions finales.

Definition 2 *On approche le (PVF) par le problème de la valeur quasi-limite (PVQB) :*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & \forall t \in]0, T[\\ \alpha u(0) + u(T) = f \end{cases}$$

où A est un opérateur positif, auto-adjoint et non borné sur un espace de Hilbert H séparable tel que $-A$ générateur d'un semi groupe compact de contraction $S(t)$.

On suppose que 0 *est dans l'ensemble résolvant de A.*

Puisque A^{-1}est compact il existe donc une base orthonormale des vecteurs propres ϕ_n, $n \geq 1$ dans H associés aux valeurs propres λ_n et λ_n^{-1} de A^{-1}et $e^{-t\lambda_n}$ de $S(t)$.

Soit $u = \sum\limits_{i \geq 1} a_i \phi_i$

$$S(T)u = \sum_{i \geq 1} e^{-T\lambda_i} a_i \phi_i$$

et

$$(S(T)u, u) = \sum_{i \geq 1} e^{-T\lambda_i} a_i^2 \geq 0$$

on obtient donc :

$$\| (\alpha I + S(T))^{-1} \| \leq \frac{1}{\alpha}, \ \alpha > 0$$

Le lemme suivant est utile pour montrer l'existence de la solution de (PVF).

Lemme 9 *Si* $f = \sum\limits_{i\geq 1} b_i\phi_i$ *, alors le (PVF) a une solution si et seulement si* $\sum\limits_{i\geq 1} b_i^2 e^{2T\lambda_i}$ *converge*

Démonstration. *Si* $\sum\limits_{i\geq 1} b_i^2 e^{2T\lambda_i} < +\infty$*, alors* $\exists\ u(t) = \sum\limits_{i\geq 1} e^{(T-t)\lambda_i} b_i\phi_i$ *une solution de (PVF).*

Soit u *une solution de (PVF),et* $u(0) \in H$

$$u = \sum_{i\geq 1} a_i\phi_i \tag{1.36}$$

On a

$$S(T)\,u := \sum_{i\geq 1} e^{-T\lambda_i} = f = \sum_{i\geq 1} b_i\phi_i$$

donc $e^{-T\lambda_i} a_i = b_i \quad ,\forall i \geq 1 \Longrightarrow a_i = b_i\ e^{T\lambda_i} \quad ,\forall i \geq 1.$

Comme $u(0) \in H \Longrightarrow \parallel u \parallel^2 = \sum\limits_{i\geq 1} a_i^2 < +\infty$ *d'après (1.36) alors*

$$\sum_{i\geq 1} b_i^2 e^{2T\lambda_i} < +\infty.$$

■

Definition 3 *On définit* $u_\alpha(t) := S(t)\ (\alpha I + S(T))^{-1} f\ ,\ \forall f \in H, \forall \alpha > 0$ *et* $\forall t \in [0, T]$.

Théorème 12 *La fonction* $u_\alpha(t)$ *est la solution unique de (PVQB), et dépend continûment de* f*.*

Démonstration. Si $(\alpha I + S(T))^{-1} f \in D(A)$ alors u_α est une solution classique de l'equation differentielle donnée, et

$$\alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) = f$$

car

$$\begin{aligned}\alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) &= \alpha(\alpha I + S(T))^{-1} f + S(T)(\alpha I + S(T))^{-1} f \\ &= (\alpha I + S(T))(\alpha I + S(T))^{-1} f = f\end{aligned}$$

On va démontrer la stabilité de la solution :

$$\parallel S(t)\ (\alpha I + S(T))^{-1} f_1 - S(t)\ (\alpha I + S(T))^{-1} f_2 \parallel =$$

$$= \ \parallel S(t)\ (\alpha I + S(T))^{-1}(f_1 - f_2) \parallel$$

$$\leq \ \| S(t) \| \| (\alpha I + S(T))^{-1} (f_1 - f_2) \|$$
$$\leq \ \| S(t) \| \| (\alpha I + S(T))^{-1} \| \| (f_1 - f_2) \|$$
$$\leq \frac{1}{\alpha} \| (f_1 - f_2) \| \ \forall f_1, f_2 \in H, \forall \alpha > 0$$

L'unicité découle du fait que toute solution v satisfait $v(0) = (\alpha I + S(T))^{-1} f$ et de l'unicité de la solution du problème direct.

On fait deux observations qui seront utiles plus tard :

1/$\| u_\alpha(t) \| \leq \frac{1}{\alpha} \| f \|$ car

$$\| u_\alpha(t) \| = \| S(t) \ (\alpha I + S(T))^{-1} f \|$$
$$\leq \ \| S(t) \| \| (\alpha I + S(T))^{-1} \| \| f \|$$
$$\leq \frac{1}{\alpha} \| f \|$$

2/ Si $u = \sum_{i \geq 1} a_i \phi_i$, alors

$$(\alpha I + S(T)) u = \sum_{i \geq 1} (\alpha + e^{-T\lambda_i}) a_i \phi_i$$

et

$$(\alpha I + S(T))^{-1} u = \sum_{i \geq 1} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-1} a_i \phi_i$$

■

Théorème 13 *Pour tout* $f \in H$ *et* $t \in [0, T], \alpha > 0$ *on a :*

$$\| u_\alpha(t) \| \leq \alpha^{\frac{t-T}{T}} \| f \|$$

Démonstration. Si $f = \sum_{i \geq 1} b_i \phi_i$,on a

$$\| u_\alpha(t) \|^2 = \| S(t) \ (\alpha I + S(T))^{-1} f \|^2$$
$$= \| \sum_{i \geq 1} e^{-t\lambda_i} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-1} b_i \phi_i \|^2$$
$$= \sum_{i \geq 1} e^{-2t\lambda_i} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-2} b_i^2$$
$$\leq \sum_{i \geq 1} e^{-2t\lambda_i} b_i^2 \left[(\alpha + e^{-T\lambda_i})^{\frac{t}{T}} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{1-\frac{t}{T}} \right]^{-2}$$

$$\leq \sum_{i\geq 1} e^{-2t\lambda_i} b_i^2 e^{2t\lambda_i} \alpha^{-2\left(1-\frac{t}{T}\right)}$$

$$\leq \sum_{i\geq 1} b_i^2 \alpha^{-2\left(1-\frac{t}{T}\right)}$$

$$\leq \alpha^{-2\left(1-\frac{t}{T}\right)} \sum_{i\geq 1} b_i^2$$

$$\leq \alpha^{2\left(\frac{t}{T}-1\right)} \parallel f \parallel^2$$

$$\leq \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}}\right)^2 \parallel f \parallel^2$$

donc

$$\parallel u_\alpha(t) \parallel^2 \leq \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}}\right)^2 \parallel f \parallel^2$$

Alors

$$\parallel u_\alpha(t) \parallel \leq \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}}\right) \parallel f \parallel, \forall f \in H, \alpha > 0$$

■

Théorème 14 *Pour tout f dans H, $\parallel u_\alpha(T) - f \parallel$ tend vers zéro quand α tend vers zéro, c'est-à-dire $u_\alpha(T)$ converge vers f dans H.*

Démonstration. Si $f = \sum_{i\geq 1} b_i \phi_i$, alors

$$\parallel u_\alpha(T) - f \parallel^2 = \parallel u_\alpha(T) - \alpha u_\alpha(0) - u_\alpha(T) \parallel^2 = \parallel \alpha u_\alpha(0) \parallel^2$$

$$= \alpha^2 \parallel u_\alpha(0) \parallel^2$$

$$= \alpha^2 \parallel (\alpha I + S(T))^{-1} f \parallel^2$$

$$= \alpha^2 \parallel \sum_{i\geq 1} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-1} b_i \phi_i \parallel^2$$

$$= \alpha^2 \sum_{i\geq 1} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-2} b_i^2$$

Soit $\varepsilon > 0$, et on choisit N tel que $\sum_{i=N}^{+\infty} b_i^2 < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\parallel u_\alpha(T) - f \parallel^2 = \left\| \alpha^2 \sum_{i\geq 1} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-2} b_i^2 \right\|$$

$$= \alpha^2 \sum_{i=1}^{N-1} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-2} b_i^2 + \alpha^2 \sum_{i=N}^{+\infty} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-2} b_i^2$$

$$= \alpha^2 \sum_{i=1}^{N-1} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-2} b_i^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \alpha^2 \sum_{i=1}^{N-1} \left(e^{-T\lambda_i}\right)^{-2} b_i^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \alpha^2 \sum_{i=1}^{N-1} e^{2T\lambda_i} b_i^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\alpha > 0$ tel que

$$\alpha^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \left[2 \sum_{i=1}^{N-1} e^{2T\lambda_i} b_i^2 \right]^{-1}$$

donc

$$\| u_\alpha (T) - f \|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \left[2 \sum_{i=1}^{N-1} e^{2T\lambda_i} b_i^2 \right]^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} e^{2T\lambda_i} b_i^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Alors

$$\| u_\alpha (T) - f \|^2 < \varepsilon \Longrightarrow u_\alpha (T) \underset{\alpha \to 0}{\to} f$$

■

Théorème 15 *$\forall f \in H$, le (PVF) a une solution si et seulement si la suite $(u_\alpha (0))$ converge dans H,ainsi que $(u_\alpha (t))$ converge uniformement vers $u(t)$ si $\alpha \to o$.*

Démonstration. Est ce qu'il existe une solution de (PVF) ? On considère que $\underset{\alpha \to 0}{lim}\, u_\alpha (0) = u_0$

Soit $u(t) = S(t) u_0$, on a d'après le théorème précédent :

$$\underset{\alpha \to 0}{lim} \| u_\alpha (t) - u(t) \| = \underset{\alpha \to 0}{lim} \| S(t)\ u_0 - u_\alpha (t) \|$$

$$= \underset{\alpha \to 0}{lim} \| S(t)\ u_0 - S(t)\ (\alpha I + S(T))^{-1} f \|$$

$$= \underset{\alpha \to 0}{lim} \| S(t)\ \left(u_0 - \ (\alpha I + S(T))^{-1} f\right) \|$$

$$\leq \underset{\alpha \to 0}{lim} \| u_0 - \ (\alpha I + S(T))^{-1} f \ \|$$

$$= \underset{\alpha \to 0}{lim} \|\ u_0 - u_\alpha (0) \| = 0 \quad \text{car } u_\alpha (0) \to u_0.$$

Donc $\lim\limits_{\alpha\to 0} u_\alpha(t) = u(t)$ et $u(t) = S(t)\,u_0$ est une solution de (PVF). Alors il existe une solution de notre problème (PVF). On considère que $u(t)$ est la solution de(PVF). Soit $\varepsilon > 0$ et $f \;= \sum\limits_{i\geq 1} b_i\phi_i$. Selon le lemme 1 on a $\| u(0) \|^2 = \sum\limits_{i\geq 1} b_i^2 e^{2T\lambda_I}$.On choisit N tel que :

$$\sum_{i=N}^{+\infty} b_i^2 e^{2T\lambda_i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soient $\alpha > 0, \gamma > 0$,et

$$\| u_\alpha(0) - u_\gamma(0) \|^2 = \| (\alpha I + S(T))^{-1} f - (\gamma I + S(T))^{-1} f \|^2$$

$$= \| \sum_{i\geq 1} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-1} b_i\phi_i - \sum_{i\geq 1} (\gamma + e^{-T\lambda_i})^{-1} b_i\phi_i \|^2$$

$$= \| \sum_{i\geq 1} ((\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-1} - (\gamma + e^{-T\lambda_i})^{-1}) b_i\phi_i \|^2$$

$$= \sum_{i\geq 1} ((\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-1} - (\gamma + e^{-T\lambda_i})^{-1})^2 b_i^2$$

$$= \sum_{i\geq 1} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\alpha\gamma + (\alpha+\gamma)\,e^{-T\lambda_i} + e^{2T\lambda_i}}\right)^2 b_i^2$$

$$= \sum_{i\geq 1} (\gamma - \alpha)^2 \left(\alpha\gamma + (\alpha+\gamma)\,e^{-T\lambda_i} + e^{2T\lambda_i}\right)^{-2} b_i^2$$

Soit

$$(\gamma - \alpha)^2 \left(\alpha\gamma + (\alpha+\gamma)\,e^{-T\lambda_i} + e^{2T\lambda_i}\right)^{-2} = (\xi)$$

$$\| u_\alpha(0) - u_\gamma(0) \|^2 = \sum_{i=1}^{N} (\xi) b_i^2 + \sum_{i=N+1}^{+\infty} (\xi) b_i^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} (\gamma - \alpha)^2 \left(e^{-2T\lambda_i}\right)^{-2} b_i^2 + \sum_{i=N+1}^{+\infty} (\gamma - \alpha)^2 \left((\alpha+\gamma)\,e^{-T\lambda_i}\right)^{-2} b_i^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} (\gamma - \alpha)^2 e^{4T\lambda_i} b_i^2 + \sum_{i=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\gamma + \alpha}\right)^2 e^{2T\lambda_i} b_i^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} (\gamma - \alpha)^2 e^{4T\lambda_i} b_i^2 + \sum_{i=N+1}^{+\infty} e^{2T\lambda_i} b_i^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} (\gamma - \alpha)^2 e^{4T\lambda_i} b_i^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

On choisit $\delta \geq 1$ tel que $\delta > \alpha$ et $\delta^2 < \varepsilon \left(2 \sum_{i=1}^{N} e^{4T\lambda_i} b_i^2 \right)^{-1} \Longrightarrow \gamma - \alpha < \delta$ et

$$\| u_\alpha(0) - u_\gamma(0) \|^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \delta^2 e^{4T\lambda_i} b_i^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\leq \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N} 2 e^{4T\lambda_i} b_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} e^{4T\lambda_i} b_i^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Alors $\| u_\alpha(0) - u_\gamma(0) \| \leq \varepsilon \Longrightarrow (u_\alpha(0))$ est de Cauchy dans Hun espace complet $\Longrightarrow (u_\alpha(0))$ est convergente dans H. Selon la première partie où on a trouvé que :

$$\lim_{\alpha \to 0} \| u_\alpha(t) - u(t) \| = \lim_{\alpha \to 0} \| u_0 - u_\alpha(0) \|$$

et $(u_\alpha(0))$ est convergente donc $\lim\limits_{\alpha \to 0} u_\alpha(0) = u_0$ et $\lim\limits_{\alpha \to 0} u_\alpha(0) = u(t)$. La convergence simple de $(u_\alpha(t))$ sur la partie $[0, T]$ qui est une partie compacte donc $(u_\alpha(t))$ converge uniformement sur $[0, T]$. ■

Théorème 16 *Si $f = \sum_{i \geq 1} b_i \phi_i$ est dans H et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{i \geq 1} b_i^2 e^{\varepsilon \lambda_i T}$ est convergente, alors $\| u_\alpha(T) - f \| \underset{\alpha \to 0}{\to} 0$ avec un ordre $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$.*

Démonstration. *Soit $\varepsilon \in]0, 2[$ tel que $\sum_{i \geq 1} b_i^2 e^{\varepsilon \lambda_i T}$ converge, et soient $k \in]0, 2[$ et n un nombre naturel fixe.On définit*

$$g_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n t})^2}$$

On a

$$g_n'(\alpha) = \alpha^{k-1} \frac{(k-2)\alpha + k e^{-\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n t})^3}$$

$$g_n'(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha^{k-1} \left((k-2)\alpha + k e^{-\lambda_n t} \right) = 0$$

$$\Longrightarrow (k-2)\alpha + k e^{-\lambda_n t} = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{ke^{-\lambda_n t}}{2-k},\ k \in \left]0,2\right[$$

On a $g_n(\alpha) > 0, \forall \alpha > 0$ *et* $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} g_n(\alpha) = 0$, $g_n(0) = 0$. *Soit le point critique* $\alpha_0 = \frac{ke^{-\lambda_n T}}{2-k}$

$$g_n(\alpha) \leq g_n(\alpha_0) \Leftrightarrow g_n(\alpha) \leq \frac{\left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-kT\lambda_n}}{\left(\alpha + e^{-\lambda_n T}\right)^2}$$

d'aprés un théorème précédent :

$$\| u_\alpha(T) - f \|^2 = \sum_{n\geq 1} \alpha^2 b_n^2 \left(\alpha + e^{-\lambda_n T}\right)^{-2}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \alpha^{2-k} b_n^2 g_n(\alpha)$$

$$= \alpha^{2-k} \sum_{n\geq 1} b_n^2 g_n(\alpha)$$

$$\leq \alpha^{2-k} \sum_{n\geq 1} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-Tk\lambda_n} \left(\alpha + e^{-\lambda_n T}\right)^{-2}$$

$$\leq \alpha^{2-k} \sum_{n\geq 1} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-Tk\lambda_n} \left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T}\right)$$

$$\leq \alpha^{2-k} \sum_{n\geq 1} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-Tk\lambda_n} \frac{1}{e^{-2\lambda_n T}\left(e^{2\lambda_n T} + 2\alpha_0 e^{\lambda_n T} + e^{4\lambda_n T}\right)}$$

$$\leq \alpha^{2-k} \sum_{n\geq 1} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-Tk\lambda_n} \frac{e^{2\lambda_n T}}{\left(e^{2\lambda_n T} + 2\alpha_0 e^{\lambda_n T} + e^{4\lambda_n T}\right)}$$

$$\leq \alpha^{2-k} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)T\lambda_n} b_n^2$$

$$\leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \sum_{n\geq 1} e^{(2-k)T\lambda_n} b_n^2$$

Si on choisit $k = 2 - \varepsilon$ *on obtient*

$$\| u_\alpha(T) - f \|^2 \leq \alpha^{2-(2-\varepsilon)} \left(\frac{2-\varepsilon}{2-(2-\varepsilon)}\right)^{(2-\varepsilon)} \sum_{n\geq 1} e^{\varepsilon T\lambda_n} b_n^2$$

$$\leq \alpha^{\varepsilon}\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{(2-\varepsilon)}\sum_{n\geq 1} e^{\varepsilon T\lambda_n} b_n^2$$

$$\leq \alpha^{\varepsilon}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{2}\sum_{n\geq 1} e^{\varepsilon T\lambda_n} b_n^2$$

$$= \alpha^{\varepsilon}\left(2^2\sum_{n\geq 1} e^{\varepsilon T\lambda_n} b_n^2\right)\varepsilon^{-2}$$

$$= \alpha^{\varepsilon} c\varepsilon^{-2}$$

où $c = 2^2\sum_{n\geq 1} e^{\varepsilon T\lambda_n} b_n^2$, *donc*

$$\| u_{\alpha}(T) - f \|^2 \leq \alpha^{\varepsilon} c\varepsilon^{-2}$$

Si on considère que $\sum_{n\geq 1} e^{(\varepsilon+2)T\lambda_n} b_n^2 < +\infty$ *on obtient*

$$\| u_{\alpha}(0) - u(0) \|^2 = \alpha^{2-k}\sum_{n\geq 1} b_n^2 g_n(\alpha) e^{2T\lambda_n}$$

$$\| u_{\alpha}(0) - u(0) \|^2 \leq \alpha^{2-k}\sum_{n\geq 1} b_n^2\left(\frac{k}{2-k}\right)^{k} e^{(4-k)T\lambda_n}$$

si $k = 2-\varepsilon$ *on obtient* $\| u_{\alpha}(T) - f \|^2 \leq \alpha^{\varepsilon} c\varepsilon^{-2}$. ■

Corollaire 1 *Si* $f = \sum_{i\geq 1} b_i\phi_i \in H$ *et* $\exists\varepsilon > 0$ *tel que* $\sum_{n\geq 1} e^{(2+\varepsilon)\lambda_i T} < +\infty$, *alors* $\| u_{\alpha}(t) - u(t) \|$ *converge uniformement vers zéro avec un ordre* $\alpha^{\varepsilon}\varepsilon^{-2}$.

Démonstration. Selon les théorèmes 4 et 5, . on a $\sum_{i\geq 1} b_i^2 e^{\varepsilon\lambda_i T} \leq \sum_{i\geq 1} b_i^2 e^{(2+\varepsilon)\lambda_i T}$ si on a $\sum_{i\geq 1} b_i^2 e^{(2+\varepsilon)\lambda_i T} < +\infty$, alors la série $\sum_{i\geq 1} b_i^2 e^{\varepsilon\lambda_i T} < +\infty$.

$(u_{\alpha}(t))$ converge uniformement vers $u(t)$ sur $[0, T]$,et $\| u_{\alpha}(t) - u(t) \|^2 \leq \alpha^{\varepsilon} c\varepsilon^{-2}$. $(u_{\alpha})_{\alpha>0}$ converge uniformement en t vers u. ■

Chapitre 2

Régularisation d'un problème pour une equation differentielle operationnelle du second ordre à coefficient opératoriel à spectre discret

2.1 Stabilisation et la régularisation :

Le problème est de trouver $u : [0,T] \to D(A) \subseteq H$, H un espace de Hilbert tel que :

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + Au = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(T) = u_0 \end{cases} \qquad \text{(BV)}$$

où $A : D(A) \subseteq H \to H$, A est un opérateur linéaire, positif non nul et auto-adjoint avec un inverse compact et A^{-1} admet une suite des vecteurs propres $\{x_n\}_{n\geq 1}$orthonormale et complète tel que : $Ax_n = \lambda_n x_n$.

2.1.1 L'existence et l'unicité de la solution

Théorème 17 *Si A satisfait les hypothèses précédentes, $u_0 \in H$, et*

$$\lambda_n \notin \left\{ \frac{k^2\pi^2}{T^2}, k \in \mathbb{N}_+^* \right\} \tag{2.1}$$

$$\sum_{n\geq 1} \lambda_n^2 \mid \langle u_0, x_n \rangle \mid^2 \left[\sin\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)\right]^{-2} < +\infty \tag{2.2}$$

Alors (BV) possède une solution unique donnée par la formule :

$$u(t) = \sum_{n\geq 1} \langle u_0, x_n \rangle \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} x_n$$

Démonstration. - L'unicité est une conséquence de l'hypothèse (2.1).
- L'existence :
D'après le théorème de Hilbert- Schmidt on a $u(t) = \sum_{n\geq 1} \langle u(t), x_n \rangle x_n$, et

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + Au = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(T) = u_0 \in H \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{n\geq 1} \langle u(t), x_n \rangle x_n \right) + \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle u(t), x_n \rangle x_n = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \left[\langle \frac{d^2}{dt^2} u(t), x_n \rangle + \lambda_n \langle u(t), x_n \rangle \right] x_n = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1}\langle \frac{d^2}{dt^2}u(t)+\lambda_n u(t), x_n\rangle x_n = 0, x_n \in H$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}u(t)+\lambda_n u(t) \in H^{\perp} = \{0\}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}u(t)+\lambda_n u(t) = 0, n \geq 1$$

avec

$$u\left(0\right)=0, \quad u\left(T\right)=u_0 \in H$$

la solution $u(t)$ est donnée par :

$$u(t) = \alpha cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+\beta\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)$$

α et β sont constants.

$$u\left(0\right)=0 \Longleftrightarrow \alpha cos\left(\sqrt{\lambda_n}0\right)+\beta\sin\left(\sqrt{\lambda_n}0\right)=0$$

$$\Longrightarrow \alpha = 0$$

$$u\left(T\right)=u_0 \Longleftrightarrow \alpha cos\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)+\beta\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)=u_0$$

$$\Longrightarrow \beta\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)=u_0 \;\text{ car } \alpha = 0$$

$$\Longrightarrow \beta = \frac{u_0}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}$$

$$u(t)=\beta\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right) \;\Longrightarrow u(t) = \frac{u_0}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)$$

$$\Longrightarrow u(t) = \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}u_0$$

$$\Longrightarrow u(t) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}u_0, x_n\right)x_n$$

$$u(t) = \sum_{n\geq 1}\left(u_0, x_n\right)\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}x_n$$

La solution de notre problème existe et est sous la forme :

$$u(t) = \sum_{n\geq 1}\left(u_0, x_n\right)\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}x_n$$

$u(t) \in D\left(A\right)$ car on a l'hypothèse (2.2). En effet,

$$\sum_{n\geq 1}\lambda_n^2 \left|(u_0,x_n)\right|^2 \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq \sum_{n\geq 1}\lambda_n^2\frac{\left|(u_0,x_n)\right|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} < +\infty.$$

On a la somme partielle

$$u_N(t) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(u_0,x_n)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)x_n$$

et a les propriétés suivantes :

a) $u_N \in C^{\infty}\left(\left(0,T\right),H\right)$

b) $u_N \underset{N\rightarrow+\infty}{\rightarrow} u$ dans $L^2\left(\left(0,T\right),H\right)$

c) $\{u'_N\}$et $\{u"_N\}$sont des suites de Cauchy dans $L^2\left(\left(0,T\right),H\right).$

Tant que $\left(\lambda_k\right)_{k\geq 1}$ une suite croissante, on a pour $M \geq N.$

$$\left\|u'_N - u'_M\right\|_{L^2}^2 + \left\|u^{"}_N - u^{"}_M\right\|_{L^2}^2 = \int_0^T \left\|u'_N\left(t\right) - u'_M\left(t\right)\right\|_H^2 dt+$$

$$+\int_0^T \left\|u^{"}_N\left(t\right) - u^{"}_M\left(t\right)\right\|_H^2 dt$$

$$u'_N\left(t\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(u_0,x_n)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)x_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)\left(u_0,x_n\right)x_n$$

$$\int_0^T \left\|u'_M\left(t\right) - u'_N\left(t\right)\right\|_H^2 dt = \int_0^T \left\|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)\left(u_0,x_n\right)x_n\right\|^2 dt$$

$$\leq \int_0^T \left\|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)\left|(u_0,x_n)\right|^2\right\|^2 dt$$

$$\leq \quad \int_0^T \sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2 dt$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2 t\ \Big|_0^T$$

$$\leq T\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2$$

et on a

$$u_N^{"}(t)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)(u_0,x_n)\,x_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{-\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_n}}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)(u_0,x_n)\,x_n$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{-\lambda_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}(u_0,x_n)\,x_n$$

$$\int_0^T\left\|u_N^{"}(t)-u_M^{"}(t)\right\|_H^2dt=\int_0^T\left\|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{-\lambda_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}(u_0,x_n)\,x_n\right\|^2dt$$

$$=\int_0^T\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2dt$$

$$\leq\int_0^T\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2dt$$

$$\leq T\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2$$

$$\left\|u_N'-u_M'\right\|_{L^2}^2+\left\|u_N^{"}-u_M^{"}\right\|_{L^2}^2\quad\leq T\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2+$$

$$+T\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2$$

$$\leq T\left(\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2+\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2\right)$$

$$\leq T\left(\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n}{\lambda_n}\frac{\lambda_n}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2+\sum_{n=N+1}^{M}\frac{\lambda_n^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2\right)$$

$$\leq T\sum_{n=N+1}^{M}\left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_1\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2+\frac{\lambda_n^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|(u_0,x_n)\right|^2\right)$$

$$\leq T \sum_{n=N+1}^{M} \frac{\lambda_n^2 \left|(u_0, x_n)\right|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right) T \sum_{n=N+1}^{M} \frac{\lambda_n^2 \left|(u_0, x_n)\right|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}$$

alors $\{u'_N\}$ et $\left\{u^{"}_N\right\}$ sont de Cauchy dans L^2 (complet) donc elles sont convergentes. $u \in L^2\left((0,T), H\right)$ et $u^{"} \in L^2\left((0,T), H\right) \Longrightarrow u \in W^2\left((0,T), H\right)$, $u(T) = u_0$ et $Au_N \longrightarrow Au$ dans $L^2\left((0,T), H\right)$. $u_N \longrightarrow u$ et $\{u'_N\}$ et $\left\{u^{"}_N\right\}$ convergent dans L^2 donc $u^{"}_N \longrightarrow u^{"}$ alors u est la solution de (BV). ■

2.1.2 La stabilité :

En général on n'a pas la stabilité.En effet si $\{\lambda_{n_k}\}$ est une sous suite de $\{\lambda_n\}$ et $\{m_k\}$ est une sous suite des entiers positifs non nuls tel que :

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left|\lambda_{n_k} - \frac{\pi^2 m_k^2}{T^2}\right| = 0$$

On considère la donnée finale :

$$u_0^k = \left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} T\right)\right|^{\frac{1}{2}} x_{n_k}$$

et les solutions correspondantes :

$$u^k(t) = \frac{\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} T\right)\right|^{\frac{1}{2}}}{\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} T\right)} \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} t\right) x_{n_k} \tag{2.3}$$

Lorsque $k \longrightarrow +\infty$ on a

$$\left\|u_0^k\right\|_H = \left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} T\right)\right|^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

$$\left\|u^k\right\|_{L^2((0,T),H)} = \left(\int_0^T \left\|u^k(t)\right\|_H^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^T \left\|\frac{\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} T\right)\right|^{\frac{1}{2}}}{\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} T\right)} \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} t\right) x_{n_k}\right\|_H^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^T \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} t\right)}{\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}} T\right)\right|} dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)\right|^{\frac{1}{2}}} \left(\int_0^T \sin^2\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}t\right) dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)\right|^{\frac{1}{2}}} \left[\int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2\sqrt{\lambda_{n_k}}t\right)\right) dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)\right|^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\int_0^T \cos\left(2\sqrt{\lambda_{n_k}}t\right) dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)\right|^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{2}\left(T - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_{n_k}}t\right)}{2\sqrt{\lambda_{n_k}}} \Big|_0^T\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)\right|^{\frac{1}{2}}} \left(T - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)}{2\sqrt{\lambda_{n_k}}}\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow +\infty \text{ si } k \longrightarrow +\infty$$

On peut utiliser le problème par une condition $\left\|\frac{du}{dt}(0)\right\| \leq E$; E est une borne a-priori. Par exemple pour $\left\{u^k(t)\right\}$ précédente on a :

$$\left\|\frac{du^k}{dt}(t)\right\|_H^2 = \left\|\frac{\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)\right|^{\frac{1}{2}}}{\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)}\sqrt{\lambda_{n_k}}\cos\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}t\right) x_{n_k}\right\|_H^2$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)}\lambda_{n_k}\cos^2\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}t\right)$$

$$\left\|\frac{du^k}{dt}(0)\right\|_H^2 = \frac{\lambda_{n_k}}{\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_k}}T\right)}$$

on ne peut pas le borner par $E^{\,2}$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$.

Théorème 18 *Si u est la solution de (BV) satisfaite $\left\|\frac{du}{dt}(0)\right\| \leq E$ et s'il existe c , $\beta > 0$ tel que :*

$$\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right) \geq \frac{1}{c^2\lambda_n^{\beta}}$$

alors

$$\max_{t\,\in[0,T]} \|u(t)\|_H \leq \left(c\,\|u(T)\|\right)^{\frac{1}{1+\beta}}\; E^{\,\frac{\beta}{\beta+1}}$$

Démonstration. on a

$$u(t) = \sum_{n\geq 1} (u_0, x_n) \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} x_n$$

et

$$\left\| \frac{du}{dt}(0) \right\| \leq E$$

donc

$$\|u(t)\|_H^2 = \sum_{n\geq 1} |(u_0, x_n)|^2 \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}$$

et

$$\|u'(t)\|_H^2 = \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{\lambda_n} \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)(u_0, x_n)}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} x_n \right\|^2$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{|(u_0, x_n)|^2 \lambda_n \ \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}$$

$$\|u'(0)\|_H^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n |(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \leq E^2.$$

Soit $\beta > 0, \Phi(x) = x^{1+\beta}$, Φ est une fonction continue et convexe et $\Phi(0) = 0$

1/ $D(\Phi) = [0, +\infty[$

2/ Φ est croissante car $\Phi'(x) = (1+\beta) x^\beta \geq 0$

3/ Φ est convexe car $\Phi''(x) = \beta(1+\beta) x^{\beta-1} \geq 0$

par l'inégalité de Jensen : si Φ est convexe et croissante et $\Phi(0) = 0$ alors

$$\Phi\left(\sum_{n=1}^N \beta_n x_n\right) \leq \sum_{n=1}^N \beta_n \Phi(x_n)$$

et $0 \leq \beta_n \leq 1$.on a $x_n = \frac{1}{\lambda_n}$ et $\Phi(x) = x^{1+\beta}$, $\beta > 0$

$$\beta_n = \frac{\lambda_n |(u_0, x_n)|^2 \sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}{\sum\limits_{n=1}^N \lambda_n |(u_0, x_n)|^2 \sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \leq 1$$

on a

$$\frac{\|u(t)\|_H^2}{\|u'(0)\|_H^2} = \frac{\sum\limits_{n=1}^N |(u_0, x_n)|^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}{\sum\limits_{n=1}^N \lambda_n |(u_0, x_n)|^2 \sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}$$

$$\Phi\left(\frac{\|u(t)\|_H^2}{\|u'(0)\|_H^2}\right)=\lim_{N\longrightarrow+\infty}\Phi\left(\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}|(u_0,x_n)|^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\lambda_n\frac{1}{\lambda_n}}{\sum\limits_{n=1}^{N}\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\right)$$

$$=\lim_{N\longrightarrow+\infty}\Phi\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\sum\limits_{n=1}^{N}\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$\leq\lim_{N\longrightarrow+\infty}\sum_{n=1}^{N}\beta_n\Phi\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$\leq\lim_{N\longrightarrow+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\sum\limits_{n=1}^{N}\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\Phi\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$=\lim_{N\longrightarrow+\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\sum\limits_{n=1}^{N}\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\Phi\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$\leq\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Phi\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|(u_0,x_n)|^2c^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n|(u_0,x_n)|^2\sin^{-2}\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|(u_0,x_n)|^2c^2}{\|u'(0)\|_H^2}$$

$$=\frac{c^2}{\|u'(0)\|_H^2}\sum_{n=1}^{+\infty}|(u_0,x_n)|^2$$

$$\Phi\left(\frac{\|u(t)\|_H^2}{\|u'(0)\|_H^2}\right)\leq\frac{c^2}{\|u'(0)\|_H^2}\|u_0\|^2$$

$$\Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{\|u(t)\|_H^2}{\|u'(0)\|_H^2}\right)\right]=\frac{\|u(t)\|_H^2}{\|u'(0)\|_H^2}\leq\Phi^{-1}\left[\frac{c^2}{\|u'(0)\|_H^2}\|u_0\|^2\right]$$

donc

$$\|u(t)\|_H^2\leq\|u'(0)\|_H^2\,\Phi^{-1}\left[\frac{c^2}{\|u'(0)\|_H^2}\|u_0\|^2\right]$$

$$\|u(t)\|_H\leq\|u'(0)\|_H\left[\Phi^{-1}\left(\frac{c^2}{\|u'(0)\|_H^2}\|u_0\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u(t)\|_H\leq E\left[\Phi^{-1}\left(\frac{c^2}{\|u'(0)\|_H^2}\|u_0\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_H\leq E\left[\Phi^{-1}\left(\frac{c^2\|u_0\|^2}{\|u'(0)\|_H^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

on a

$$\Phi(x)=x^{1+\beta}\implies\Phi^{-1}(x)=x^{\frac{1}{1+\beta}}$$

$$\Phi^{-1}\left(\frac{c^2\|u_0\|^2}{\|u'(0)\|_H^2}\right)=\left(\frac{c^2\|u_0\|^2}{\|u'(0)\|_H^2}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}$$

$$=\left(\frac{c\|u_0\|}{\|u'(0)\|_H}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_H\leq E\left(\frac{c\|u_0\|}{\|u'(0)\|_H}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}=E\left(c\|u_0\|\right)^{\frac{2}{1+\beta}}\left(\|u'(0)\|_H\right)^{\frac{-2}{1+\beta}}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_H\leq E\left(c\|u_0\|\right)^{\frac{2}{1+\beta}}\left(\|u'(0)\|_H\right)^{\frac{-2}{1+\beta}}.$$

■

2.1.3 La régularisation

Est ce que nous pouvons trouver une solution de (1.1)-(1.2) telle que

$$\|u(t)-v\|\leq\varepsilon \tag{2.5}$$

et

$$\left\|\frac{du}{dt}(0)\right\|\leq E \tag{2.6}$$

ε et E sont des constantes ?

Le problème est de trouver une fonction $u(T) = u_T \in H$ telle que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|(u_T, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} < +\infty$$

$$\sum_{n \geq 1} |(u(t) - v, x_n)|^2 \leq \varepsilon^2$$

et

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_n |(u_T, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)} \leq E^2$$

Definition 4 *Soit F une fonctionnelle telle que*

$$F : D(F) \subset H \to [0, +\infty[$$

$$w \mapsto F(w) = \sum_{n \geq 1} |w - (v, x_n)|^2 + \frac{\varepsilon^2}{E^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_n |(w, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \tag{2.7}$$

et soit G un opérateur :

$$G : D(G) \subset H \to H$$

$$w \mapsto Gw = \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_n}{E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}\right) (w, x_n)\, x_n$$

On va démontrer que G est un opérateur régularisant de F.

Remarque 19 *Soit w^* la solution de $Gw = v$ donc*

$$Gw^* = v \in H \Longrightarrow \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_n}{E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}\right) (w^*, x_n)\, x_n = \sum_{n \geq 1} (v, x_n)\, x_n$$

$$(w^*, x_n) = w_n^* = \frac{(v, x_n)}{1 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_n}{E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}}$$

Lemme 10 $\forall v \in H, E$ *et* ε *positifs*

$$\begin{cases} \sum\limits_{n \geq 1} |(u(t) - v, x_n)|^2 \leq \varepsilon^2 \\ \sum\limits_{n \geq 1} \frac{\lambda_n |(u_T, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)} \leq E^2 \end{cases} \tag{2.8}$$

$$2.8 \Leftrightarrow F(u_n^*) \leq \varepsilon^2$$

Démonstration. Supposant que (2.8) est vérifiée, on a

$$F(u_n^*) = \sum_{n\geq 1} \mid u_n^* - (v, x_n)|^2 + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n |u_n^*|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \mid \ (v, x_n)|^2 = F(0) \leq \varepsilon^2$$

donc $F(u_n^*) \leq \varepsilon^2$. On va démontrer (2.8) :

$$F(u_n^*) \leq \varepsilon^2 \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \mid u_n^* - (v, x_n)|^2 + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n |u_n^*|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq \varepsilon^2$$

$$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \mid u_n^* - (v, x_n)|^2 \leq \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2}{E^2}\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n |u_n^*|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq \varepsilon^2$$

et

$$\frac{\varepsilon^2}{E^2}\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n |u_n^*|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq \varepsilon^2 - \sum_{n\geq 1} \mid u_n^* - (v, x_n)|^2$$

alors

$$\frac{\varepsilon^2}{E^2}\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n |u_n^*|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq \varepsilon^2 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n |u_n^*|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq E^2$$

$$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n |(u_T, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq E^2$$

■

Lemme 11

$$F(u_n^*) \leq \varepsilon^2 \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n |(v, x_n)|^2}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq 1$$

Démonstration. On a

$$F(u_n^*) = F\left(\frac{E^2 (v, x_n) \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \left| \frac{E^2 (v, x_n) \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} - (v, x_n)\right|^2 +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{E^2}\sum_{n\geq1}\frac{\lambda_n}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\left|\frac{E^2\left(v,x_n\right)\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\right|^2$$

$$F\left(u_n^*\right)=\sum_{n\geq1}\left|\frac{\varepsilon^2\lambda_n\left(v,x_n\right)}{\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\right|^2+$$

$$+\varepsilon^2\sum_{n\geq1}\frac{\lambda_nE^2\left|\left(v,x_n\right)\right|^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\left|\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\right|^2}$$

$$F\left(u_n^*\right)=\sum_{n\geq1}\frac{\left|\varepsilon^2\lambda_n\left(v,x_n\right)\right|^2+\varepsilon^2\lambda_nE^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\left|\left(v,x_n\right)\right|^2}{\left(\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\right)^2}$$

$$=\sum_{n\geq1}\frac{\varepsilon^2\lambda_n\left|\left(v,x_n\right)\right|^2\left(E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)+\varepsilon^2\lambda_n\right)}{\left(\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\right)^2}$$

$$=\sum_{n\geq1}\frac{\varepsilon^2\lambda_n\left|\left(v,x_n\right)\right|^2}{\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}$$

$$=\varepsilon^2\sum_{n\geq1}\frac{\lambda_n\left|\left(v,x_n\right)\right|^2}{\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}$$

si

$$F\left(u_n^*\right)\leq\varepsilon^2\Longleftrightarrow\varepsilon^2\sum_{n\geq1}\frac{\lambda_n\left|\left(v,x_n\right)\right|^2}{\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\leq\varepsilon^2$$

alors

$$F\left(u_n^*\right)\leq\varepsilon^2\Longleftrightarrow\sum_{n\geq1}\frac{\lambda_n\left|\left(v,x_n\right)\right|^2}{\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\leq1$$

■

Théorème 20 *Si $v\in H,E$ et ε positifs tel que*

$$\sum_{n\geq1}\frac{\lambda_n\left|\left(v,x_n\right)\right|^2}{\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\leq1$$

alors

$$u\left(t\right)=\sum_{n\geq1}\frac{E^2\left(v,x_n\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\varepsilon^2\lambda_n+E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}x_n$$

vérifie '(2.5)-(2.6) et $u\in D\left(A\right),\forall t\in\left]0,T\right[$ et $u\in W^2\left(\left(0,T\right),H\right)$

Démonstration.

$$\|u(t)-v\|^2 = \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{E^2 (v,x_n) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} - (v,x_n) \right\|^2$$

$$\|u(T)-v\|^2 = \left\| \sum_{n\geq 1} \left[\frac{E^2 (v,x_n) \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} - (v,x_n) \right] \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{E^2 (v,x_n) \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right) - E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)(v,x_n) - \varepsilon^2\lambda_n (v,x_n)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon^2\lambda_n (v,x_n)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \right\|^2$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon^4\lambda_n^2 \left|(v,x_n)\right|^2}{\left(\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\right)^2}$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon^2\lambda_n^2}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \frac{\left|(v,x_n)\right|^2}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}$$

$$\leq \varepsilon^2 \sum_{n\geq 1} \frac{\left|(v,x_n)\right|^2}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}$$

car

$$\frac{\varepsilon^2\lambda_n^2}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq 1$$

d'autre part on a :

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|^2 = \left\| \frac{d}{dt} \sum_{n\geq 1} \frac{E^2 (v,x_n) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} x_n \right\|^2$$

$$\left\| \frac{du}{dt}(0) \right\|^2 = \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{\lambda_n} E^2 (v,x_n) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right) \cos\sqrt{\lambda_n}(0)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} x_n \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{\lambda_n} E^2 (v,x_n) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} x_n \right\|^2$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n E^4 \left|(v,x_n)\right|^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}{\left(\varepsilon^2\lambda_n + E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\right)^2}$$

$$\leq \sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_n \left|(v,x_n)\right|^2}{\left(\varepsilon^2\lambda_n + E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\right)^2}$$

car

$$\frac{E^2}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq 1$$

$$\left\|\frac{du}{dt}(0)\right\|^2 \leq E^2 \Longrightarrow \left\|\frac{du}{dt}(0)\right\| \leq E$$

$u(t) \overset{?}{\in} D(A)$. on a $v \in H$ et

$$\|Au\|^2 = \left\|\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_n E^2 (v,x_n)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}x_n\right\|^2$$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_n^2 E^4 \left|(v,x_n)\right|^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\left(\varepsilon^2\lambda_n + E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)\right)^2}$$

$$\leq \sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_n^2 \left|(v,x_n)\right|^2}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}$$

car

$$\frac{E^4}{\varepsilon^2\lambda_n + E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)} \leq 1$$

alors

$$\|Au\|^2 \leq \sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_n^2 \left|(v,x_n)\right|^2}{\varepsilon^2\lambda_n}$$

donc $u(t) \in D(A)$. $u \overset{?}{\in} W^2((0,T),H)$: Il suffit de montrer :

a/ $u_N \to u$ dans $L^2((0,T),H)$

b/ $u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2((0,T),H)$

c/ $\{u'_N\}$et $\{u"_N\}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2((0,T),H)$. on va démontrer que :

$$u_N \underset{N\to+\infty}{\overset{?}{\longrightarrow}} u \Leftrightarrow \|u_N - u\|_{L^2}^2 \to 0$$

$$\|u_N - u\|_{L^2}^2 = \int_0^T \|u_N(t) - u(t)\|_H^2 \; dt$$

$$= \int_0^T \left\|\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(u_0,x_n)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(u_0,x_n)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}T\right)}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)\right)x_n\right\|^2 dt$$

$$= \int_0^T \left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(u_0, x_n)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) \right\|^2 dt$$

$$= \int_0^T \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) dt$$

$$= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \int_0^T \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) dt$$

$$= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos 2\sqrt{\lambda_n} t\right)\right) dt$$

$$= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \int_0^T \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\sqrt{\lambda_n} t\right) dt$$

$$= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \frac{1}{2} \left[T - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_n} t\right)}{2\sqrt{\lambda_n}} \Big|_0^T\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \left(T - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_n} T\right)}{2\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

$$\leq \frac{T}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}$$

car

$$T - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_n} T\right)}{2\sqrt{\lambda_n}} \leq T$$

et

$$\lambda_n \notin \left\{ \frac{k^2 \pi^2}{T^2}, k \in \mathbb{N}_+^* \right\}$$

donc

$$\|u_N - u\|_{L^2}^2 \leq \frac{T}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)}$$

$$\leq \frac{T}{2} E^2 < +\infty$$

alors

$$\|u_N - u\|_{L^2}^2 \to 0$$

maintenant on va démontrer :

$$Au_N \overset{?}{\to} Au$$

$$\|Au_N - Au\|_{L^2}^2 = \int_0^T \|Au_N(t) - Au(t)\|_H^2 \ dt$$

$$= \int_0^T \left\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (u_0, x_n) \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} x_n - \sum_{n\geq 1} \lambda_n (u_0, x_n) \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} x_n \right\|_H^2 \ dt$$

$$= \int_0^T \sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_n |(u_0, x_n)|^2 \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} dt$$

$$= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\lambda_n |(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \int_0^T \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) dt$$

$$\leq \frac{T}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\lambda_n |(u_0, x_n)|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \to 0$$

alors

$$Au_N \to Au$$

■

Chapitre 3

Régularisation d'un problème pour une équation différentielle opérationnelle du second ordre à coefficient opératoriel à spectre continu

3.1 Approximation spectrale :

3.1.1 Introduction

Soit le problème mal posé d'une équation des ondes dans un espace de Hilbert :

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0 & t \in]0, T[\\ u(0) = 0, \quad u(T) = u_0 \in H & \end{cases} \tag{P}$$

où A est un opérateur linéaire, et auto adjoint.

$$A : D(A) \to H$$

On va étudier l'existence, l'unicité et la dépendance continue des données.

3.1.2 Existence,unicité et stabilité :

Supposant que A est positif, A^{-1}est compact.

Théorème 21 *On suppose que A est positif, et auto adjoint avec A^{-1}est compact .Soit $u_0 \in H$ et*

$$\sigma_p(A) \cap \left\{ \frac{k^2\pi^2}{T^2}, k \in \mathbb{N}_+ \right\} = \emptyset$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_n^2 \left| \langle u_0, \Phi_n \rangle \right|^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} < +\infty \tag{3.1}$$

alors la solution de problème est unique et donnée par :

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} \langle u_0, \Phi_n \rangle \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda_n} T\right)} \Phi_n \tag{3.2}$$

Démonstration. voir le cas $\sigma_p(A) = \sigma(A)$. ■

Definition 5 *Supposons que A est positif, et auto adjoint et possède un inverse A^{-1}non compact. Par la décomposition spéctrale :*

$$A = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda$$

avec

$$D(A)=\left\{v\in H;\int_0^{+\infty}\lambda^2 d\ \langle E_\lambda v,v\ \rangle<+\infty\right\}$$

si $\lambda\in[0,+\infty[$ *,généralement* $A=\int_{\sigma(A)}\lambda dE_\lambda$ *, pour chaque opérateur* A *il existe une famille continue à droite des opérateurs orthoprojecteurs*

$$\{E_\lambda\}_{\lambda\in[0,+\infty[}:[0,+\infty[\to B(H)$$

pour un opérateur A *auto adjoint il existe une relation entre les fonctions spectrales généralisées* Φ_λ *et la famille des projections* E_λ*.Habituellement on trouve* Φ_λ *puis* E_λ*.*

a/ si $\sigma_c(A)\neq\emptyset$, on fait la décomposition suivante :

$$E_\lambda=T_\lambda+S_\lambda$$

$$T_\lambda=\sum_{\lambda_j\leq\lambda}\left(E_{\lambda_j}-S_{\lambda_j}\right)$$

où λ_j sont des valeurs propres de A, elles coincident avec les sauts discontinus de E_λ.T_λ est comme une projection de H sur un sous espace engendrée par les vecteurs propres associés desvaleurs propres λ_j tel que $\lambda_j\leq\lambda$.

b/ si $\sigma_p(A)=\emptyset$ donc $T_\lambda=0\Longrightarrow E_\lambda=S_\lambda$.

c/ si $\sigma_c(A)=\emptyset$ donc $S_\lambda=0\Longrightarrow E_\lambda=T_\lambda$.

Pour la construction de S_λ, nous supposons qu'il existe $\varphi_l(x,\lambda)$ des plusieurs solutions telles qu'elles ne sont pas des vecteurs propres de $Au=\lambda u,\forall\lambda\in[0,+\infty[$ avec $\|\varphi_l\|=+\infty,l\geq1$ et elles forment un système fandamental, alors on peut construire les fonctions spectrales

Definition 6 *Soit*

$$\Phi_\lambda^l(x)=\int_0^\lambda\varphi_l(x,\omega)\,d\Lambda_l(\omega)\tag{3.3}$$

tel que $\Lambda_l(\omega)$ sont des fonctions continues pour avoir $\Phi_\lambda^l(x)\in D(A)$, $\Phi_0^l(x)=0,l\geq1$. Les fonctions $\Lambda_l(\omega)$ sont choisies par une méthode que Φ_λ^l soit continue en λ où $\lambda>0$ et

$$\forall l\geq1,A\Phi_\lambda^l=\int_{\lambda_0}^\lambda A\varphi_l(x,\omega)\,d\Lambda_l(\omega)$$

$$=\int_{\lambda_0}^\lambda\omega\varphi_l(x,\omega)\,d\Lambda_l(\omega)$$

$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \omega d\ \Phi_\omega^l \tag{3.4}$$

Les fonctions propres Φ_ω^l sont des fonctions spectrales

$$Au_0 = \int_{\sigma(A)} \lambda dE_\lambda u_0 = \int_{\sigma_p(A)} \lambda dT_\lambda u_0 + \int_{\sigma_c(A)} \lambda dS_\lambda u_0$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle u_0, \Phi_j \rangle \Phi_j + \int_{\sigma_c(A)} \lambda dS_\lambda u_0 \tag{3.5}$$

où $S_\lambda u_0$ est une projection sur un sous espace engendré par les fonctions spectrales $\Phi_\lambda^l, l \geq 1$ données par la construction (2.4) avec $\Phi_{\lambda_0}^l = 0$, et $\mu_{u_0}(\lambda) := \langle E_\lambda u_0, u_0 \rangle = \|E_\lambda u_0\|^2, \forall \lambda \in [0, +\infty[$. μ_{u_0} est une fonction borné, continue à droite et croissante pour u_0 fixe dans H.

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \mu_{u_0}(\lambda) = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \to +\infty} \mu_{u_0}(\lambda) = \|u_0\|^2$$

$$\begin{aligned} \mu_{u_0}(\lambda) &:= \langle E_\lambda u_0, u_0 \rangle = \langle (T_\lambda + S_\lambda) u_0, u_0 \rangle \\ &= \langle T_\lambda u_0 + S_\lambda u_0, u_0 \rangle \\ &= \langle T_\lambda u_0, u_0 \rangle + \langle S_\lambda u_0, u_0 \rangle = \tau_{u_0}(\lambda) + \eta_{u_0}(\lambda) \end{aligned}$$

où

$$\tau_{u_0}(\lambda) := \langle T_\lambda u_0, u_0 \rangle \quad \text{et} \quad \eta_{u_0}(\lambda) := \langle S_\lambda u_0, u_0 \rangle$$

$\eta_{u_0}(\lambda)$ est continue et monotone (croissante). Soit A un opérateur positif et auto adjoint et A^{-1}est non compact et si :

$$\sigma(A) \cap \left\{ \frac{k^2\pi^2}{T^2}, k \in \mathbb{N}_+ \right\} = \emptyset \tag{3.6}$$

alors il existe une solution unique pour (P). on définit

$$S(t) = \int_{\sigma(A)} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda} T\right)} dE_\lambda \tag{3.7}$$

alors

$$u(t) = S(t) u_0$$

est une solution unique pour (P), $\forall u_0 \in H$.

Démonstration. L'equation (3.6) est suffisante pour l'existence de (3.7)

On a

$$u_N(t) = S_N(t) u_0 \tag{3.8}$$

où

$$S_N(t)\,u_0 = \int_0^N \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda u_0$$

u_N vérifie (P) car

$$\frac{d^2 u_N(t)}{dt^2} + A u_N(t) = 0 \qquad \forall t \in \left]0, T\right[$$

et

$$u_N(0) = 0 \quad , \quad u_N(T) = E_N u_0$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{du_N(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} S_N(t)\,u_0 \\
&= \frac{d}{dt}\left(\int_0^N \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda u_0\right) \\
&= \int_0^N \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda u_0\right)
\end{aligned}$$

car $\exists \frac{d}{dt}\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)}$ et $t \longmapsto \left|\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)}\right|$ est bornée.

$$\frac{du_N(t)}{dt} = \int_0^N \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} \cos\left(\sqrt{\lambda}t\right) dE_\lambda u_0$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_N(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^N \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} \cos\left(\sqrt{\lambda}t\right) dE_\lambda u_0\right) \\
&= \int_0^N \frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} \cos\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right) dE_\lambda u_0 \\
&= \int_0^N \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} \left(\sqrt{\lambda}\right)\left(-\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right) dE_\lambda u_0 \\
&= \int_0^N \frac{-\lambda}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} \sin\left(\sqrt{\lambda}t\right) dE_\lambda u_0
\end{aligned}$$

on a

$$Au_N(t) = A(S_N(t)u_0)$$
$$= A\left(\int_0^N \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda u_0\right)$$
$$= \int_0^N \frac{\lambda \sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda u_0$$

alors

$$\frac{d^2u_N(t)}{dt^2} + Au_N(t) = 0 \qquad \forall t \in]0, T\ [$$
$$u_N(0) = S_N(0)u_0 = 0$$
$$u_N(T) = S_N(T)u_0 \Longrightarrow u_N(T) = \int_0^N \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\ \right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\ \right)} dE_\lambda u_0$$
$$= \int_0^N dE_\lambda u_0 = E_N u_0$$

l'equation

$$S_N(t)u_0 = \int_0^{N_+} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda u_0 \tag{3.9}$$

est traitée comme suit : soit Δ_λ^N une partition de $[0, N]$ tel que :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_N = N_+$$
$$\left|\Delta_\lambda^N\right| = \max_{k=\overline{1,N}} |\lambda_k - \lambda_{k-1}|$$

alors pour tout $t \in [0, T\ ]$ et $u_0 \in H$, on a

$$S_N(t)u_0 = \int_{\lambda_0=0}^{\lambda_1} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda u_0 + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda u_0 +$$
$$... + \int_{\lambda_{N-1}}^{\lambda_N = N_+} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda u_0$$

$$= \lim_{\max\limits_{k=\overline{1,N}} |\lambda_k - \lambda_{k-1}|} \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin\left(\sqrt{\mu_k} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\mu_k} T\right)} \left(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}\right) u_0$$

$$= \lim_{\left|\Delta_\lambda^N\right| \to 0} \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin\left(\sqrt{\mu_k} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\mu_k} T\right)} E_{\lambda_k} u_0 - E_{\lambda_{k-1}} u_0 \tag{3.10}$$

où μ_k un point dans l'intervalle $[\lambda_{k-1}, \lambda_k], \forall k = 1, N.$ ■

Théorème 22 *Soit u la solution de (P) vérifie*

$$\|u'(0)\| \leq E$$

où E est une borne a-priori. Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que $\langle Av, v\rangle \geq a\|v\|^2, \forall v \in H$.

Soit Φ une fonction convexe en λ et croissante strictement et $\Phi(0) = 0$ s'il existe un constant $C_a > 0$ tel que :

$$C_a^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right) \geq \lambda \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right), \forall \lambda \in \sigma(A) \tag{3.11}$$

alors

$$\max_{t \in [0,T]} |u(t)| \leq E\left[\Phi^{-1}\left(C_a^2 \frac{\|u_0\|^2}{\|u'(0)\|^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.12}$$

Démonstration.

$$\lambda \in \sigma(A) \Longrightarrow \exists u \neq 0 / Au = \lambda u$$

$$\Longrightarrow \langle Au, u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle \geq a\|u\|^2$$

$$\Longrightarrow \lambda \langle u, u\rangle = \lambda \|u\|^2 \geq a\|u\|^2, u \neq 0$$

$$\Longrightarrow \lambda \geq a$$

$$\Longrightarrow \lambda \in [a, +\infty[$$

alors

$$\sigma(A) \subset [a, +\infty[$$

On note $E_\lambda = 0$ si $\lambda < a$.Selon l'equation (3.7) on obtient :

$$u(t) = S(t) u_0 \Longrightarrow \|u(t)\|^2 = \|S(t) u_0\|^2$$

$$= \left\| \int_{\sigma(A)} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda} T\right)} dE_\lambda u_0 \right\|^2$$

$$= \int_{\sigma(A)} \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} t\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)} d\left\|E_\lambda u_0\right\|^2$$

alors

$$= \int_{\sigma(A)} \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} t\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)} d\mu_{u_0}(\lambda) \tag{3.13}$$

et on a

$$\frac{du}{dt}(t) = u'(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{\sigma(A)} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda} T\right)} dE_\lambda u_0\right)$$

$$= \int_{\sigma(A)} \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda} T\right)} dE_\lambda u_0\right)$$

$$= \int_{\sigma(A)} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin\left(\sqrt{\lambda} T\right)} \cos\left(\sqrt{\lambda} t\right) dE_\lambda u_0$$

$$u'(0) = \int_{\sigma(A)} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin\left(\sqrt{\lambda} T\right)} dE_\lambda u_0 \Longrightarrow \left\|u'(0)\right\|^2 = \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)} d\mu_{u_0}(\lambda)$$

et on a $\|u'(0)\| \leq E$, alors

$$\left\|u'(0)\right\|^2 = \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)} d\mu_{u_0}(\lambda) \leq E^2 \tag{3.14}$$

$$\frac{\|u(t)\|^2}{\|u'(0)\|^2} = \frac{1}{\|u'(0)\|^2} \int_{\sigma(A)} \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} t\right)}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)} d\mu_{u_0}(\lambda)$$

$$\Phi\left(\frac{\|u(t)\|^2}{\|u'(0)\|^2}\right) \leq \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\|u'(0)\|^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)} d\mu_{u_0}(\lambda) \tag{3.15}$$

et selon les equations (3.11) et (3.12) :

$$(3.15) \Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{\|u(t)\|^2}{\|u'(0)\|^2}\right) \leq \int_{\sigma(A)} \frac{C_a^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)}{\|u'(0)\|^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda} T\right)} d\mu_{u_0}(\lambda)$$

$$\Phi\left(\frac{\|u(t)\|^2}{\|u'(0)\|^2}\right) \leq \int_{\sigma(A)} \frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2} d\mu_{u(0)}(\lambda)$$
$$\leq \frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2} \int_{\sigma(A)} d\mu_{u(0)}(\lambda)$$
$$\leq \frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2} \|u_0\|^2$$
$$\begin{cases} \exists \Phi^{-1} :]0,+\infty[\to]0,+\infty[\\ \lambda \mapsto \Phi^{-1}(\lambda) \end{cases} /$$
$$\Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{\|u(t)\|^2}{\|u'(0)\|^2}\right)\right] \leq \Phi^{-1}\left[\frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2}\|u_0\|^2\right]$$

alors

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u'(0)\|^2 \Phi^{-1}\left[\frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2}\|u_0\|^2\right]$$
$$\|u(t)\| \leq \|u'(0)\| \left[\Phi^{-1}\left(\frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2}\|u_0\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\|u(t)\| \leq E \left[\Phi^{-1}\left(\frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2}\|u_0\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\max_{t\, \in [0,T]} |u(t)| \leq E \left[\Phi^{-1}\left(C_a^2 \frac{\|u_0\|^2}{\|u'(0)\|^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

■

Example 1 *Soit* $\Phi(x) = x^{1+\beta}, \beta > 0$

a/ Φ *est strictement croissante sur* D_Φ*? on a*

$$D_\Phi =]0,+\infty[\Longrightarrow \Phi(x) > 0, \forall x \in D_\Phi$$

b/ Φ *est convexe ?*

$$\Phi'(x) = (1+\beta)x^\beta \Longrightarrow \Phi''(x) = \beta(1+\beta)x^{\beta-1} > 0 \qquad car\ \beta > 0\ et\ x > 0$$

c/ $\Phi(0) = 0$

d/ l'inverse de Φ *est donné par*

$$\Phi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{(1+\beta)}}$$

sous les conditions précédentes et selon le théorème on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\left[\Phi^{-1}\left(\frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2}\|u_0\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2}\|u_0\|^2\right]^{\frac{1}{2(1+\beta)}} \\
&= \left[\left(\frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2}\|u_0\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{1+\beta}} \\
&= \left[\frac{C_a}{\|u'(0)\|}\|u_0\|\right]^{\frac{1}{1+\beta}} \\
&= (C_a\|u_0\|)^{\frac{1}{1+\beta}}\frac{1}{(\|u'(0)\|)^{\frac{1}{1+\beta}}}
\end{aligned}$$

donc

$$E\left[\Phi^{-1}\left(\frac{C_a^2}{\|u'(0)\|^2}\|u_0\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = E(C_a\|u_0\|)^{\frac{1}{1+\beta}}\frac{1}{(\|u'(0)\|)^{\frac{1}{1+\beta}}}$$

Corollaire 2 *Si on remplace la condition $u(0)=0$ par $u'(0)=0$ dans (P) on obtient même résultats, mais la condition $\|u'(0)\| \leq E$ sera automatiquement. Le problème*

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0 & \forall t \in]0,T[\\ u'(0) = 0, u(T) = u_0 \in H \end{cases}$$

est un problème mal posé.

$$C_a^2\cos^2\left(\sqrt{\lambda}T\right) \geq \lambda\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right), \forall\lambda \in \sigma(A)$$

$$\langle Au(0), u(0)\rangle \leq E^2$$

et on a besoin au

$$\sigma(A) \cap \left\{\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4T^2}, k \in \mathbb{N}_+\right\} = \emptyset$$

pour obtenir l'estimation (3.12).

3.1.3 Régularisation

On pose $u(T) = u_0$. Est ce que nous pouvons trouver une solution de (P) tel que

$$\|u(t) - v\| \leq \varepsilon \tag{3.16}$$

et

$$\left\|\frac{du}{dt}(0)\right\| \leq E \tag{3.17}$$

ε et E sont des données. Le problème est de trouver une fonction $u(T) = u_T \in H$ tel que

$$u_T \in D(A) \Longleftrightarrow \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{u_T}(\lambda) < +\infty \tag{3.18}$$

et

$$\|u(T) - v\|^2 = \int_{\sigma(A)} d\mu_{(u_T - v)}(\lambda) \leq \varepsilon^2 \tag{3.19}$$

$$\left\|\frac{du}{dt}(0)\right\|^2 = \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{u_T}(\lambda) \leq E^2 \tag{3.20}$$

Definition 7 *Soit F une fonctionnelle telle que*

$$F : D(F) \subset H \to [0, +\infty[$$

$$\omega \mapsto F(\omega) = \int_{\sigma(A)} d\mu_{(\omega - v)}(\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{E^2} \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{\omega}(\lambda) \tag{3.21}$$

et soit G un opérateur :

$$G : D(G) \subset H \to H$$

$$\omega \mapsto G\omega = \int_{\sigma(A)} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \lambda}{E^2 \sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)}\right) dE_{\lambda}\omega \tag{3.22}$$

G dépend de ε.

On va démontrer que G est un opérateur régularisant et F est la fonctionnelle de stabilité.

Théorème 23 *Supposant pour chaque $r < 0$, l'ensemble*

$$Y := \left\{ z \in H; \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_z(\lambda) \leq r \right\} \tag{3.23}$$

est relativement compact dans H. Si $v \in H, \varepsilon, E > 0$ sont des données telles que l'equation opératorielle $Gw = v$ possède une solution $\omega^* \in D(A)$ et pour cette solution

$$F(w^*) \leq \varepsilon^2$$

alors

$$u(t) = \int_{\sigma(A)} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}T\right)} dE_\lambda w^* \tag{3.24}$$

Démonstration. $u(t)$ vérifie (P) et $u(t) \in D(A)$ pour $t \in]0, T[$ et $u(.) \in W^{2.2}((0,T), H)$.

Si $Gw = v$ possède une solution donc

$$w^* \in D(A) \Longleftrightarrow \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda^2}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w^*}(\lambda) < +\infty \tag{3.25}$$

on a

$$\frac{E^4}{\varepsilon^4}\|v\|^2 = \frac{E^4}{\varepsilon^4}\|Gw^*\|^2$$

$$= \frac{E^4}{\varepsilon^4}\left\| \int_{\sigma(A)} \left(1 + \frac{\varepsilon^2\lambda}{E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)}\right) dE_\lambda w^* \right\|^2$$

$$= \frac{E^4}{\varepsilon^4}\int_{\sigma(A)} \left(1 + \frac{\varepsilon^2\lambda}{E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)}\right)^2 d\mu_{w^*}(\lambda)$$

$$\geq \frac{E^4}{\varepsilon^4}\int_{\sigma(A)} \left(\frac{\varepsilon^2\lambda}{E^2\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)}\right)^2 d\mu_{w^*}(\lambda)$$

$$\geq \frac{E^4}{\varepsilon^4}\int_{\sigma(A)} \frac{\varepsilon^4\lambda^2}{E^4\sin^4\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w^*}(\lambda)$$

$$\geq \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda^2}{\sin^4\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w^*}(\lambda)$$

Notre but est de trouver u_T tel que (1.20) et (1.21) sont vérifiées.Pour cela on va démontrer que F possède une fonction minimisante appartenant à $D(A)$. On a F est une fonctionnelle continue de Y dans $\mathbb{R}$ et (1.20) et (1.21) sont automatiquement vérifiées si et seulement si :

$$F(w^*) \leq \varepsilon^2$$

On va démontrer que

$$\text{(3.20) et (3.21) sont vérifiées } \overset{?}{\Leftrightarrow} F(w^*) \leq \varepsilon^2$$

$\overset{?}{\Longrightarrow}$)

$$\|w^* - v\|^2 = \int_{\sigma(A)} d\mu_{(w^*-v)}(\lambda) \leq \varepsilon^2$$

et

$$\left\|\frac{du(0)}{dt}\right\|^2 = \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w^*}(\lambda) \leq E^2, w^* \in D(A)$$

$$\int_{\sigma(A)} d\mu_{(w^*-v)}(\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w^*}(\lambda) = F(w^*)$$

$$\leq \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{E^2}E^2 = \varepsilon^2$$

donc

$$F(w^*) \leq \varepsilon^2$$

$\overset{?}{\Leftarrow}$)

$$F(w^*) = \int_{\sigma(A)} d\mu_{(w^*-v)}(\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w^*}(\lambda) \leq \varepsilon^2 \quad (3.26)$$

$$\int_{\sigma(A)} d\mu_{(w^*-v)}(\lambda) \leq \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2}{E^2}\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w^*}(\lambda)$$

$$\int_{\sigma(A)} d\mu_{(w^*-v)}(\lambda) \leq \varepsilon^2$$

selon l'equation (3.26) :

$$\frac{\varepsilon^2}{E^2}\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w^*}(\lambda) \leq \varepsilon^2 - \int_{\sigma(A)} d\mu_{(w^*-v)}(\lambda) \leq \varepsilon^2$$

donc

$$\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w^*}(\lambda) \leq E^2$$

alors (3.20) et (3.21) sont vérifiées si et seulement si $F(\omega^*) \leq \varepsilon^2$où ω^* est la fonction minimisante de F , la condition pour avoir un minimum est $F'(\omega^*) = 0$ ou $\frac{d}{d\tau} F(\omega + \tau h) \mid_{\tau=0}, \forall h \in H$.On utilise l'equation suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, d\mu_{f\ +\tau q}(\lambda) \mid_{\tau=0} = \int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, d\ \langle E_\lambda f, g\rangle$$

$\forall g$ définie sur $\sigma(A)$ et qu'elle n'a pas les même points de discontinuité que μ, et f , $q \in H$

$$\frac{1}{2}F'(w) = \int_{\sigma(A)} d\ \langle E_\lambda (w-v), h\rangle + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\ \langle E_\lambda w, h\rangle$$

$$\frac{1}{2}F'(w) = \left\langle \int_{\sigma(A)} d\ (E_\lambda w) - v, h\right\rangle + \left\langle \frac{\varepsilon^2}{E^2}\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\ E_\lambda w, h\right\rangle$$

$$= \left\langle \int_{\sigma(A)} d\ (E_\lambda w) - v + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\ E_\lambda w, h\right\rangle$$

$$= \left\langle \int_{\sigma(A)} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)}\right) d\ E_\lambda w - v, h\right\rangle, \forall h \in H.$$

donc

$$\int_{\sigma(A)} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)}\right) d\ E_\lambda w - v \in H.^{\perp} = \{0\}$$

$$\int_{\sigma(A)} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)}\right) d\ E_\lambda w = v \Longrightarrow Gw = v$$

alors la solution minimisante w satisfait $Gw = v$. F atteint leur minimum dans Y ? On sait que la mesure μ_w est positive et croissante $\forall w \in H$, et on a $F(w) \geq 0$, $\forall w \in Y$ car

$$F(w) = \int_{\sigma(A)} d\mu_{(w-v)}(\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{E^2}\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_w(\lambda) \geq 0$$

alors $\inf\limits_{w\in Y} F(w) = F(w_0)$ existe et $\exists \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} F(w_n) = F(w_0)$. On suppose que :

$$\forall n > 1; F(w_n) \leq F(w_1) < +\infty$$

$$w_n = \{w \in H, F(w) \leq F(w_1)\}$$

on va démontrer que

$$w_n \in H, \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w_n}(\lambda) \overset{?}{\leq} r$$

$$w_n \in H, \int_{\sigma(A)} d\mu_{(w_n-v)}(\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{E^2} \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w_n}(\lambda) \leq F(w_1) < +\infty$$

$$\frac{\varepsilon^2}{E^2} \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w_n}(\lambda) \leq F(w_1) - \int_{\sigma(A)} d\mu_{(w_n-v)}(\lambda)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{E^2} \int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w_n}(\lambda) \leq F(w_1)$$

alors

$$\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w_n}(\lambda) \leq \frac{E^2}{\varepsilon^2} F(w_1)$$

on note que :

$$r = \frac{E^2}{\varepsilon^2} F(w_1) > 0$$

alors

$$\int_{\sigma(A)} \frac{\lambda}{\sin^2\left(\sqrt{\lambda}T\right)} d\mu_{w_n}(\lambda) \leq r \Longrightarrow w_n \in Y \Longrightarrow \{w_n\} \subset Y$$

L'ensemble Y est compact dans H, alors $\{w_n\}$ a une sous-suite convergente $\{w_{n_k}\}$ tel que :

$$w_{n_k} \longrightarrow w^* \in Y$$

F est continu donc

$$F(w_{n_k}) \underset{n_k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} F(w^*)$$

on a

$$\inf_{w\in Y} F(w) = F(w^*) \ , \ \inf_{w\in Y} F(w) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} F(w_n)$$

$$\lim_{n_k\longrightarrow+\infty} F(w_{n_k}) = F(w^*) = \inf_{w\in Y} F(w) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} F(w_n)$$

alors la fonction qui minimise F est la fonction régularisante de l'equation $Gw = v$.

$$Y_\varepsilon = Y \cap \left\{ w \in D(A) ; \|Gw - v\|^2 \leq \varepsilon^2 \right\}$$

où $\{\varepsilon_n\}$ est une suite des nombres positifs

$$\varepsilon_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\forall n \geq 0, \varepsilon_n > 0 \;\; \text{l'ensemble } Y_{\varepsilon_n} \text{ est bien définie.}$$

Chaque Y_{ε_n} possède un élément w_n^* qui minimise la fonctionnelle F sur cet ensemble.Correspondant la suite $\{\varepsilon_n\}$ il existe une suite des fonctions $\{w_n^*\} \subset Y$ un ensemble compact dans H.Alors$\{w_n^*\}$ possède une sous suite $\left\{w_{n_k}^*\right\}$ convergente tel que :

$$\lim_{n_k \longrightarrow +\infty} w_{n_k}^* = w^*$$

$$w_n^* \in \; Y_{\varepsilon_n} \Longrightarrow \left\|Gw_{n_k}^* - v_{n_k}\right\|^2 \leq \varepsilon_{n_k}^2$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \lim_{n_k \longrightarrow +\infty} \left\|Gw_{n_k}^* - v_{n_k}\right\|^2 \leq \lim_{n_k \longrightarrow +\infty} \varepsilon_{n_k}^2$$

$$\Longrightarrow \lim_{n_k \longrightarrow +\infty} \left\|Gw_{n_k}^* - v_{n_k}\right\|^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \|Gw^* - v\| = 0$$

$$\Longrightarrow Gw^* = v$$

■

Bibliographie

[1] K.A.Ames, L.E.Payne, Continuous Dependence on Modeling for Some Well-posed Perturbations of the Backward Heat Equation, J.Inequal.Appl, Vol.3, pp.51-64, (1999).

[2] K.A.Ames, G.W.Clark, J.F.Epperson, S.F.Oppenheimer, A comparaison of Regularisations for an Ill-posed Problem,Math.Comput.224, (1998).

[3] J.Baumeister, A.Leitao, On Iterative Methods for Solving Ill-posed Problems Modled by Partial Differential Equations, J.Inv.Ill-Posed Problems, Vol.9, pp.1-17, (2001).

[4] A.Benrabah, F.Rebbani, S.Hamida, A Method of Regularisations for the Ill-posed Cauchy Problem of Second Order, EDP.Analyse Numérique.Vol.1, (2008).

[5] N.Boussetila, F.Rebbani, Optimal Regularization Method for Ill-posed Cauchy Problems, Electron.J.Differential Equations.No.147, pp.1-15,(2006).

[6] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Université Pierre et Marie Curie et Ecole Polytechnique, Masson Paris, (1983).

[7] Clark.G.W, Oppenheimer, Quasireversibility Methods for Non-Well Posed Problems Electronic Journal of Differential Equations,No.8, 1-9, (1994).

[8] J.B.Conway, A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, (1990).

[9] M.Denche, K.Bessila, AModified Quasi-boundary Value Method for Ill-posed Problem, J. Math.Anal.Appl.301, pp.419-426, (2005).

[10] R.D.Dunninger, H.A.Levine, Uniquness Criteria for Solutions of Abstract Boundary Value Problems.J.Diff.Equs.2, 368-378, (1976).

[11] J.Hadamard, Le Problème de Cauchy et les Equations aux Dérivées Partielles Linéaires Hyperboliques, Hermann, Paris, (1932).

[12] J.Hadamard, Sur les Problèmes aux Dérivées Partielles et leur Signification Physique, Princeton University Bulletin, 49-52, (1902).

[13] Y.Huang.Z.Quan, Regularisation for a Class of Ill-Posed Cauchy Problem, Proc. Amer. Math. Soc.133, 3005-3012, (2005).

[14] A.Kolmogrov, S.Fomine, Elements de la Théorie de Fonctions et de L'analyse Fonctionnelle, Traduit de russe par Michel Dragnev, Edition Mir, (1967).

[15] R.Lattes, J. Lions, Méthode de Quasi-reversibilité et Applications, Dunod, Paris, (1967).

[16] H.A.Levine, Ames, S.Vessella, Stabilisation and Regularisation for Solutions of an Ill posed Problem for the Wave Equation, Math.App.7, 202-209, (1985).

[17] I.V.Mel'nikova, Regularisation of Ill Posed Differential Problems, Siberian Math.J.33, 289-298, (1992).

[18] K.Miller, Stabilized Quasireversibility and Other Nearly Best Possible Methods for Non-Well-Posed Problems , "Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity", Lecture Notes in Mathematics, Vol.316, Springer-Verlag, Berlin, 1-30, (1973).

[19] Nguyen Huy Tuan, Regularization for a Class of Backward Parabolic Problems, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Vol.2, 18-26, (2010).

[20] R.E.Showalter, The Final Value Problem for Evolution Equations, J.Math.Anal.Appl.47, 563-572, (1974).

[21] A.Tikhonov. V.Arsénine, Méthode de Résolution de Problèmes mal posés, Traduit du russe par Vladimir Kotliar, (1976).

[22] V.Trenoguine, Analyse Fonctionnelle, Traduction française, Edition Mir Mouscou, (1985).

[23] K.Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, (1980).

Sur un problème mal posé pour une équation d’évolution

Résumé

Si le problème a une solution unique mais n’est pas continue par rapport aux faibles variations des données ce problème est mal posé. Les méthodes utilisées pour stabiliser les problèmes mal posés sont connues par la régularisation.

Le but de ce papier est de présenter quelques méthodes de la régularisation appliquées pour résoudre un problème mal posé associé à un opérateur non borné linéaire dans un espace de Hilbert.

حول مسألة غير مطروحة جيدا من أجل معادلة تطور

ملخص.

إذا وجد حل وحيد **لمسألة** لكن هذا الحل ليس مستمرا بالنسبة لتغيرات صغيرة **على** المعطيات فإن هذه المسألة غير مطروحة جيدا.

الطرق المستخدمة من أجل جعل هذه المسائل مستقرة تعرف باسم التعديل.

الهدف من هذا العمل هو عرض بعض الطرق المعدلة المستعملة لحل المسائل غير المطروحة جيدا **المقترنة** بمؤثر خطي غير محدود في فضاء هلبرت.

On an ill-posed problem for an equation of evolution

Abstract.

If a problem has a unique solution, but this solution is not continuous with respect to small variations of data this problem is ill posed. The methods used to stabilize ill-posed problems are known to stabilize.

The purpose of this paper is to present some methods of regularization applied to solve an ill-posed problem associated with a linear unbounded operator in a Hilbert space.