

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique



Université des frères Mentouri, Constantine -1

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



THÈSE

N° d'ordre :.....

Série :.....

Présentée pour l'obtention du diplôme de doctorat en sciences

**Spécialité : Mathématiques Appliquées et systèmes
dynamiques**

Présenté par : **Djaout Assia**

**Analyse et application des systèmes discrets à
Dynamiques chaotiques**

Soutenue le : 19 /07 /2022

Devant le Jury :

Mr DALAH Mohamed	prof	Univ. Frère Mentouri. Constantine 1	Président
Mr HAMAIAZIA Tayeb	Prof	Univ. Frère Mentouri. Constantine 1	Rapporteur
Mme KHARFOUCHI Soumia	Prof	Université Constantine 3	Examineur
Mr FERNANE Khaireddine	Prof	Université 8 mai 1945 Guelma	Examineur

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes parents, mes frères et mes soeurs surtout ma soeur Latifa. à mon marie et mes enfants Maria, Mouhamed, Rasha et Abdlerahmene.

Remerciements

En premier lieu, Je remercie ALLAH, le tout puissant de m'avoires donné le courage et la volonté de mener à ce terme ce présent travail.

Je remercie mon encadreur Prof. Hamaizia Tayeb. Merci pour vos scientifiques, vos conseils. Merci pour votre soutien scientifique et humain. Je tiens également à exprimer également mes remerciements aux membres du jury, au professeur Dalah Mohamed, au professeur Kharfouchi Soumia, au professeur Fernane Khairredine pour leur volonté de lire et d'examiner ma thèse et pour leur aide pendant la réalisation de ce travail.

Toute ma gratitude et mes sincères remerciements à mes chers parents qui sont très crédités d'avoir atteint ce résultat.

Enfin, J'adresserais mes vifs remerciements à mon marie, mes enfants, tous mes frères, mes sÅurs, mes amis et mes collègues des études pour leur sympathie et leur encouragement, surtout dans les moments difficile.

Table des matières

1	Système dynamique et chaos	11
1.1	Introduction	11
1.2	Systèmes dynamiques	11
1.2.1	Systèmes dynamiques continus	16
1.2.2	Systèmes dynamiques discrets	19
1.2.3	La suite Logistique	39
1.3	Théorie du chaos	47
1.3.1	Définition et compréhension	47
1.3.2	Chaos déterministe	48
1.3.3	Propriétés caractéristiques du chaos	48
1.3.4	Exposants de Lyapunov	52
1.3.5	Routes vers le chaos	56
1.3.6	L'attracteur de Hénon	57
1.4	Conclusion	61
2	Les différentes méthodes et approches d'optimisation	63
2.1	Introduction	63
2.2	Définition de l'optimisation	64
2.3	Classification des problèmes d'optimisation	65
2.4	Ordre d'une méthode de résolution	66
2.5	Opérateurs de recherche fondamentaux	67
2.6	Optimum local et optimum global	67

2.6.1	Les méthodes d'optimisation locale	68
2.6.2	Les méthodes d'optimisation globale	74
2.7	Sensibilité et robustesse d'une méthode d'optimisation	84
2.8	Les algorithmes de recherche chaotiques.	84
2.8.1	Principes et étapes du COA basée sur 2-D modèle.	85
2.9	Conclusion	88
3	Application de l'algorithme COLM basée sur les modèles chaotiques 2 – D	89
3.1	Introduction	89
3.2	Modèles en deux dimensions	90
3.2.1	Modèle de Hénon	90
3.2.2	Modèle de Lozi	91
3.2.3	Modèle de Duffing	91
3.2.4	Modèle de Gingerbreadman	92
3.2.5	Modèle de Zeraoulia	93
3.3	Recherche d'optimisation chaotique	93
3.4	Résultats de la simulation	97

Introduction générale

Les systèmes dynamiques jouent un rôle important dans l'histoire des sciences. A l'origine, c'était une branche de la physique et c'est ainsi que le physicien Newton fut le premier à l'étudier. Par la suite, des générations de mathématiciens et de physiciens ont essayé d'étendre la portée des méthodes analytiques de Newton pour faciliter le problème des trois corps (tels que le soleil, la terre et la lune)[1]. Cela a également été évoqué par le scientifique russe Lyapunov, jusqu'à ce qu'en 1963, le météorologue Edward Lorenz, essayant de déterminer les conditions météorologiques futures à partir de données brutes sur son ordinateur, découvre qu'un petit changement dans les données brutes conduit à des résultats radicalement différents [2]. Les systèmes dynamiques sont la transformation de phénomènes physiques dont l'état change avec le temps en systèmes mathématiques avec des équations différentielles qui évoluent avec le temps. Les systèmes dynamiques sont divisés en deux parties, à savoir, discrets et continus. Cette thèse s'intéresse à l'application des systèmes dynamiques discrets à l'optimisation. Le chaos est une sorte de caractéristique de ces systèmes dans le cas non linéaire qui étudie leur comportement lorsqu'ils suivent des lois déterministes mais qui apparaissent aléatoires et imprévisibles. La théorie du chaos est définie comme l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires complexes qui s'expriment par des récurrences et des algorithmes mathématiques dynamiques (non-constants) et non périodiques. Elle inclut l'étude qualitative et quantitative d'un comportement instable non périodique et aléatoire des systèmes. Depuis son évolution, elle a trouvé des applications dans divers do-

maines importants tels que l'ingénierie, la médecine, la biologie, l'économie et bien d'autres domaines. L'application de la stratégie de recherche chaotique en ingénierie a connu son apogée de popularité pendant les dernières années en raison de plusieurs caractéristiques dynamiques importantes du chaos, à savoir : la sensibilité aux conditions initiales, ergodicité, le pseudo-aléatoire et attracteur étrange avec une dimension fractale[1]. Revenons au mot optimisation qui est le deuxième axe de cette thèse. L'un des algorithmes d'optimisation modernes est l'optimisation basée sur le chaos.

Cette thèse s'articule autour de la résolution des problèmes d'optimisation nécessitant en premier lieu une définition des paramètres, des variables, de l'espace de recherche ainsi que des fonctions à optimiser. Une fois le problème modélisé et bien formulé, une méthode adaptée pour la résolution du problème posé sera choisie. C'est ainsi que la conception optimale, appelée aussi optimisation de formes devient un outil indispensable dans presque tout les domaines. L'optimisation chaotique en tant que nouvelle méthode d'optimisation globale a attiré beaucoup d'attention dans les domaines non linéaires. L'algorithme d'optimisation chaotique COA est un outil efficace pour résoudre les problèmes d'optimisation d'une fonction multimodale non linéaire avec contraintes de frontière. Du fait de la non-répétition du chaos, il peut effectuer des recherches globales à des vitesses plus élevées que les recherches stochastiques, qui dépendent des probabilités. L'application de séquences chaotiques au lieu de séquences aléatoires dans le COA est une stratégie puissante pour améliorer les performances de COA en empêchant la convergence prématurée vers les minima locaux.

Dans cette thèse, un algorithme robuste d'optimisation chaotique est appliqué pour résoudre efficacement le problème d'optimisation d'une fonction multimodale non linéaire. Dans la plupart des algorithmes d'optimisation chaotique, les variables chaotiques sont générées par des applications logistiques, seulement, la distribution uniforme affaiblira l'ergodicité des variables chaotique.

A ce niveau, différents modèles peuvent être choisies et utilisées pour obtenir des solutions optimales. Pour surmonter ce problème, nous choisissons 5 modèles bidimensionnelles différentes et remplaçons le générateur de variables chaotiques dans l'un des COA existants par ces derniers, puis nous faisons une étude comparative découvrir le générateur le plus efficace. La suite de cette thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre est une présentation théorique des systèmes dynamiques chaotiques.

Le deuxième chapitre est consacré à l'optimisation et les méthodes d'optimisations locaux et globales. Il aborde aussi les définitions générales des méthodes d'optimisation qui se divisent en deux volets déterministes et non déterministes. Les modèles des algorithmes d'optimisation chaotiques sont aussi présentés.

Le chapitre trois présente un algorithme d'optimisation chaotique efficace basé sur les 5 modèles choisis. Les expériences et les résultats de simulation y sont aussi présentés. Nous y donnons enfin un état de l'art sur les différentes techniques de COA en utilisant le chaos. Enfin, la conclusion présente le bilan du travail réalisé.

Chapitre 1

Systeme dynamique et chaos

1.1 Introduction

La théorie du chaos a commencé à se former dans la seconde moitié du XXe siècle et a été utilisée dans de nombreuses applications et sciences telles que le mathématique, physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie et la robotique [2]. La théorie du chaos est basée sur la théorie des systèmes dynamiques. En 1963, Edward Lorenz a étudié le comportement d'un système dynamique non linéaire et a souligné que dans les systèmes non linéaires, de légères différences dans les conditions initiales génèrent à long terme complètement différents systèmes, ou en d'autres termes, des systèmes chaotiques.

Dans ce chapitre, nous introduisons les principaux éléments d'une compréhension simple de la théorie des systèmes dynamique et de la théorie du chaos, par une méthode plus simple que possible.[1, 3, 4]

1.2 Systèmes dynamiques

la majeure partie de la thèse portera sur les systèmes dynamiques discrets, c'est-à-dire les modèles traités, mais nous commencerons par examiner les systèmes dynamiques au temps continu, les équations différentielles ordinaires

(EDO).

Définition 1. *un système dynamique au temps continu sur \mathbb{R}^2 (premier ordre) est défini par :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$f_1; f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on peut définir les vecteurs sur \mathbb{R}^2 . i.e on propose un vecteur $\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$ à chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 2. *(L'orbite(trajectoire))*

Résoudre une EDO avec la condition initiale $(x(0), y(0))$ alors il suffit de trouver un chemin $(x(t), y(t))$ avec $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ et qui a

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

à chaque point du chemin c'est-à-dire il a $\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$ comme vecteur tangent en chaque point.

Le chemin s'appelle **l'orbite(trajectoire)** de point initial (x_0, y_0) .

Définition 3. *(Point d'équilibre)*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

, si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ a une propriété qui $f(x_0, y_0) = (0, 0)$ donc $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0.$$

On appelle (x_0, y_0) **un point d'équilibre**

Exemple 1. *i) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

le point d'équilibre est $(0,0)$

ce qu'il se passe quand $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$?

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ y_0 e^t \end{pmatrix}$$

Théorème 1. *existence et unicité des solution des équations différentielles.*

soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et x_0 tel que

i) f est différentiable en x et $\frac{df}{dx}$ est continue en $x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $f(x_0) \neq 0$.

Alors l'équation $\dot{x} = f(x)$ a une solution unique $x(t)$ avec condition initiale x_0

sur un certain intervalle $t \in [0, T], T > 0$

Exemple 2. *ii) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(A) = -2$$

$$\text{Det}(A) = 1$$

$$\text{Tel que } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le point d'équilibre est $(0,0)$ voir figure 1.1

iii) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

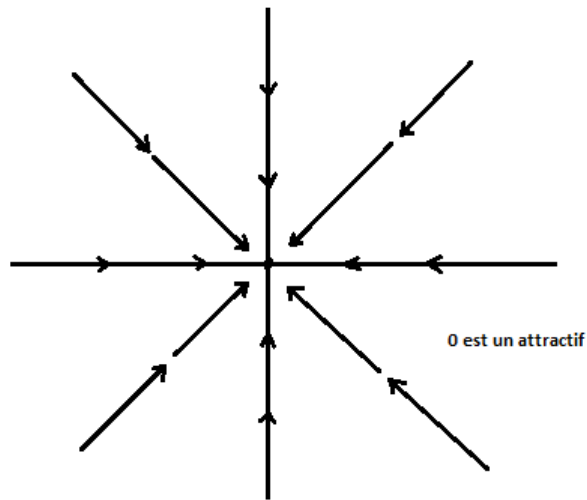


FIGURE 1.1 – 0 est point attractif

$Tr(A)=0$ et $Det(A)=1$
 tel que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tel que si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

, $Tr = a + d$ et $D = ad - bc$

le point d'équilibre est $(0,0)$

iv) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Tr(A) = 0$, $Det(A) = -1$ tel que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

les valeurs propres sont :

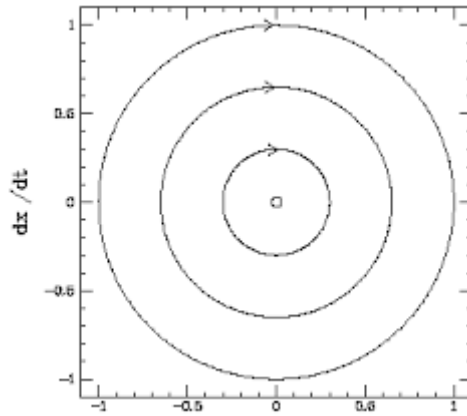


FIGURE 1.2 – le centre d'équilibre neutre

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = v_2 (\lambda = 1), v_1 = -v_2 (\lambda = -1)$$

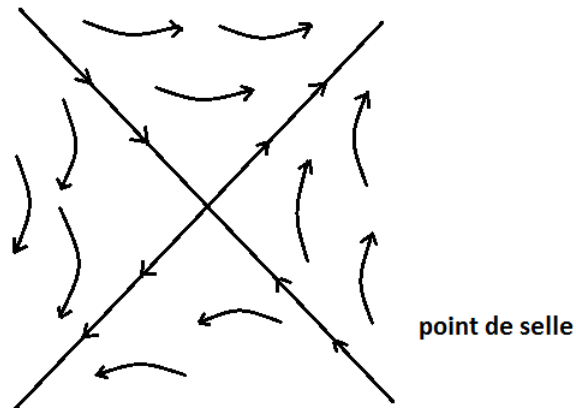


FIGURE 1.3 – Point de selle

Autres possibilités On peut résumer tout les cas dans cette figure :

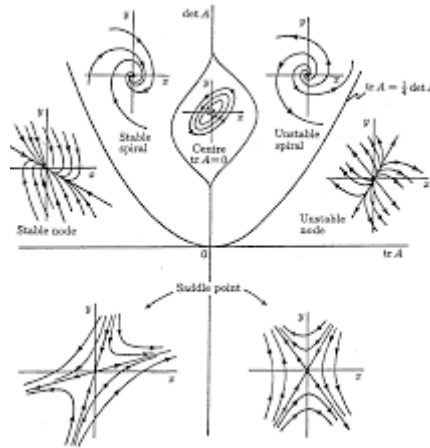


FIGURE 1.4 – Autres possibilités

1.2.1 Systèmes dynamiques continus

un système dynamique au temps continu sur \mathbb{R} est une équation différentielle ordinaire

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.3)$$

si f est différentiable avec dérivée continue ($f \in C'$) alors pour chaque point initial x_0 (tel que $f(x_0) \neq 0$) il existe une solution unique pour un certain intervalle de temps (théorème d'existence et d'unicité).

Exemple 3. Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\dot{x} = qx \quad (q > 0)$$

solution

$$\text{On a } \frac{dx}{dt} = qx \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int q dt$$

$$\Rightarrow \ln x = qt + c$$

$$\Rightarrow x = e^c e^{qt} = k e^{qt}$$

$$t = 0, x = x_0 x(0) = x_0 \Rightarrow k e^{q \cdot 0} = x_0 \Rightarrow k = x_0$$

Donc $x(t) = x_0 e^{qt}$

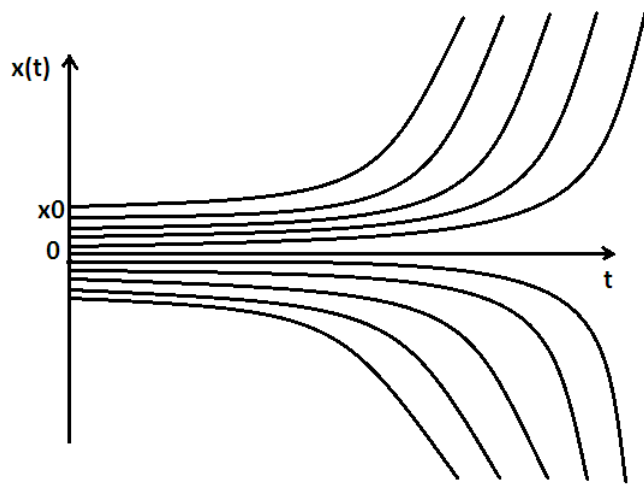


FIGURE 1.5 – Le point 0 est répulsif

Exemple 4. Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\dot{x} = x(1 - x)$$

0 est un répulsif

1 est un attractif

Solution

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{dx}{dt} = x(1 - x) &\Rightarrow \int \frac{1}{x(1-x)} dx = \int dt \\ &\Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \int dt \\ &\Rightarrow \ln x - \ln(1-x) = t + c \\ &\Rightarrow e^{\ln x - \ln(1-x)} = e^c e^t \\ &\Rightarrow \frac{x}{1-x} = e^c e^t \end{aligned}$$

$$\text{conditions initiales : } t = 0, x(0) = x_0 \Rightarrow \frac{x_0}{1-x_0} = e^c$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc : } \frac{x}{1-x} &= \frac{x_0}{1-x_0} e^t &\Rightarrow x(1-x_0) &= (1-x)x_0 e^t \\
&&\Rightarrow x(1-x_0) &= x_0 e^t - x x_0 e^t \\
&&\Rightarrow x(1-x_0) + x(x_0 e^t) &= x_0 e^t \\
&&\Rightarrow x(1-x_0 + x_0 e^t) &= x_0 e^t \\
&&\Rightarrow x(t) &= \frac{x_0 e^t}{x_0 e^t + 1 - x_0}
\end{aligned}$$

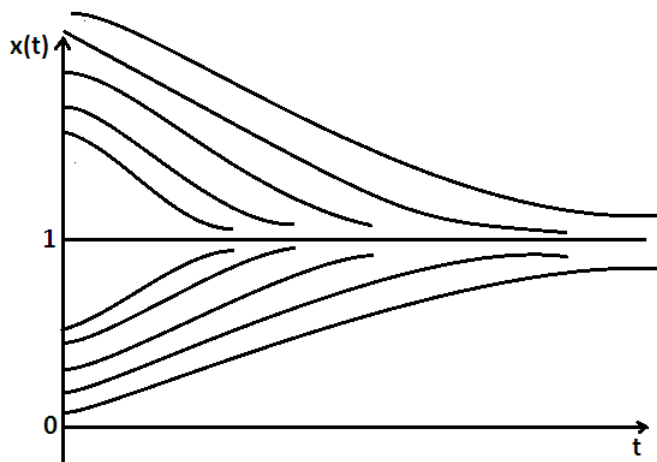


FIGURE 1.6 – Le point 1 est attractif et le point 0 est répulsif

en général, étant donné une EDO bien qu'il existe une solution, il n'y aura pas de formule explicite mais on peut dessiner le portrait de phase et servir les caractéristiques quantitatives du système

Remarque 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\dot{x} = f(x)$$

point d'équilibre où $f(x) = 0$

flèche à droite où $f(x) > 0$

flèche à gauche où $f(x) < 0$

Donc il y a deux types de flèches et quatre types d'équilibres.

Nous allons trouver un comportement plus compliqué avec des systèmes dynamiques discrets sur \mathbb{R} .

Définition 4. un système dynamique est constitué d'un ensemble d'états (point dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2) et d'une règle d'évolution dans le temps. pour le temps discret, $t \in \mathbb{Z}$ ou $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la règle d'évolution a la forme

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{1.4}$$

(en fait on écrit normalement $x_{n+1} = f(x_n)$).

Pour le temps continu, $t \in \mathbb{R}$ ou $t \in \mathbb{R}$ la règle d'évolution a la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

.

1.2.2 Systèmes dynamiques discrets

Comme on l'a présenté dans la définition précédente, le système dynamique discret est donné par :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1.5}$$

avec $x \leq 1$.

Exemple 5. On a : $f(x) = x^2$ i.e. $x_{n+1} = x_n^2$.

Donc $x_0 \rightarrow x_1 = f(x_0) = x_0^2 \rightarrow x_2 = f(x_1) = x_1^2 = x_0^4$.

les point fixes $f(x) = x \implies x^2 = x \implies x = 0, x = 1$

• $x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 0 = x_1 \rightarrow x_2 = 0$

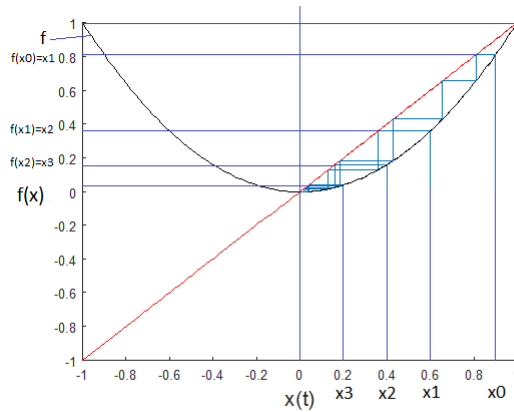


FIGURE 1.7 – La courbe de la fonction $f(x) = x^2$ et son points fixes

$$x_0 = 1 \longrightarrow x_1 = f(1) = 1, x_2 = 1$$

0 est un point fixe.

1 est un point fixe.

$$\bullet x_0 = 0.9 \longrightarrow x_1 = f(x_0) = 0.81 \longrightarrow x_2 = f(x_1) = 0.6561 \longrightarrow x_3 = f(x_2) = 0.43\dots, x_4 = 0.185\dots, x_5 = 0.034\dots$$

$$x_n \text{ tend vers } 0. \quad x_0 = 2 \longrightarrow x_1 = f(x_0) = 4, x_2 = 16, \dots$$

x_n tend vers l'infini

0 est un point fixe attractif.

- si $|x_0| < 1$ donc l'orbite de x_0 tend vers le point fixe 0 . 1 est un point fixe répulsif.

- si $|x_0| > 1$ donc l'orbite de x_0 tend vers l'infini.

0 est un point fixe.

Tout les points initiales $x_0 \in [0, 1]$ ont orbites tend vers le point fixe.

l'une des familles d'exemples que nous allons examiner est de modèle logistique $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ pour différentes valeurs du paramètre μ .

Exemple 6. On définit la suite logistique de $\mu = 1$ par

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$$

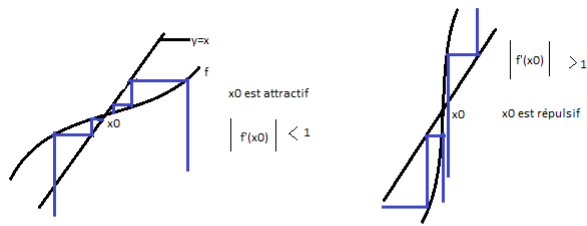


FIGURE 1.8 – les orbites de point x_0

i.e. $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f(x) = x(1 - x)$.

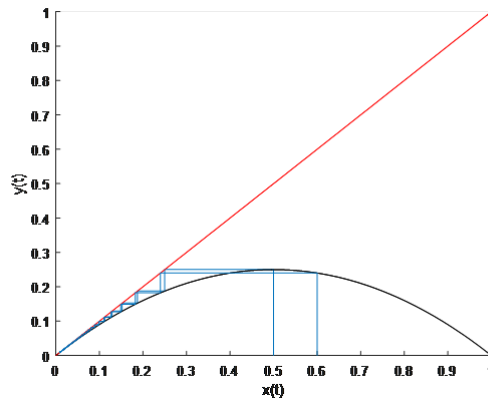


FIGURE 1.9 – La courbe de la suite logistique avec $\mu = 1$

$f(x) = x \Rightarrow 2x - 2x^2 = x \Rightarrow 2x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{2}$ Pour quel point initial $x_0 \in [0, 1]$ les orbites tend vers le point fixe attractif $\frac{1}{2}$.

Exemple 7. On définit la suite logistique avec $\mu = 2$ par

$$x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$$

i.e. $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f(x) = 2x(1 - x)$.

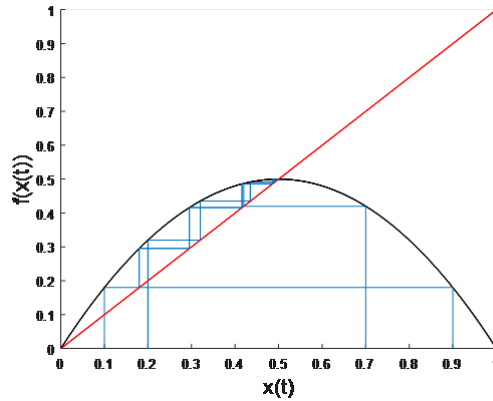


FIGURE 1.10 – La courbe de la suite logistique avec $\mu = 2$

Notation 1. *l'orbite positive de x_0 est :*

$$O^+(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\} \quad (1.6)$$

où $f^n(x_0)$ dénote $f(f(f\dots f(x_0)\dots))$.

si f est inversible, l'orbite négative de x_0 est :

$$O^-(x_0) = \{x_0, f^{-1}(x_0), f^{-2}(x_0), f^{-3}(x_0), \dots\} \quad (1.7)$$

Définition 5. *(Le point fixe et le point périodique)*

Un point x_0 est dit **fixe** si

$$f(x_0) = x_0 \quad (1.8)$$

Un point x_0 est dit **périodique** avec la période n si

$$f^n(x_0) = x_0 \quad (1.9)$$

Exemple 8. Soit la fonction $f(x) = -x^3$

on a : $x_0 = 1 \longrightarrow x_1 = -1 \longrightarrow x_2 = 1 \longrightarrow x_3 = -1$

Définition 6. soit m le plus petit entier possible avec $f^m(x_0) = x_0$. alors m est appelé la période minimal de x_0 .

Remarque 2. Dans l'exemple $x_0 = -1$ a une période minimal (mais a des périodes 2, 4, 6, 8, ...etc).

$$f^4(-1) = f^2(f^2(-1)) = f^2(-1) = -1$$

$$\text{Soit } \text{Fix}(f) = \{x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = x_0\}$$

$$\text{Per}_n(f) = \{x_0 \in \mathbb{R} : f_n(x_0) = x_0\} = \text{Fix}(f^n)$$

On note que $\text{Fix}(f) \subseteq \text{Per}^n(f)$ pour tout n .

Lemme 1. étant donné $x \in \text{Per}_n(f)$ et x a une période minimal k alors k/n :

Preuve 1. étant donné n et k , par algorithme de division, il existe q et r avec $0 \leq r < k$ tel que : $n = qk + r$

On a

$$x \in \text{Per}_n(f) \Rightarrow f_n(x) = x \Rightarrow f_{qk+r}(x) = x \Rightarrow f_r(f_k \circ f_k \circ \dots \circ f_k)(x) = x \Rightarrow f_r(x) = x \Rightarrow r = 0$$

(puisque k est l'entier le moins positif t.q. $f_k(x) = x$) Donc k/n comme demandé.

Par conséquent $\text{Per}_n(f) = \cup \{\text{point de } f \text{ de la période minimal } k\}$.

Exemple 9. Soit le fonction

$$f(x) = -x_2$$

l'orbite d'un point de la période minimal k est appelé un k -cycle.

Définition 7. Soit : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- x_0 est un point fixé pour f si $f(x_0) = x_0$.
- x_0 est un point périodique pour f si $f_n(x_0) = x_0$.

L'orbite d'un point de la période minimal k est appelé un k -cycle.

Il est également possible que le point x_0 ne soit pas périodique moins que son orbite atteint finalement sur un cycle.

Définition 8. nous disons que l'orbite de x_0 est finalement périodique ou que x_0 est pré-périodique de la période n si $\exists K > 0$ tel que : $\forall k \geq K$,

$$f^{n+K}(x_0) = f^K(x_0) \tag{1.10}$$

Lemme 2. *si f est inversible, alors chaque point pré-périodique est réellement périodique.*

Preuve 2. *si x_0 est un point pré-périodique pour f , alors $\exists k, n$ tel que $x_{k+n} = x_k$ pour certains $k \geq K$, pour chaque $K > 0$ i.e.*

$$f^{k+n}(x_0) = f^k(x_0)$$

. En appliquant f^{-1} des deux cotés, k -fois, nous déduisons

$$(f^{-1})^k f^{k+n}(x_0) = (f^{-1})^k f^k(x_0) \implies f^n(x_0) = x_0$$

. Donc x_0 est périodique. Nous serons intéressés par les orbites de f qui bien que non périodique, tendent à des points périodiques.

Définition 9. *soit p un point fixe de f . La bassin d'attraction, ou ensemble stable de p , est l'ensemble des points*

$$W^s(p) = \{x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) = p\} \quad (1.11)$$

Nous disons aussi que $O^+(x_0)$ est asymptotique à p .

Plus généralement, soit p une période minimale k sous f .

Le bassin d'attraction, ou ensemble stable du k -cycle $\{p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$ est l'ensemble des points

$$W^s(p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)) = \cup_{r=0}^{k-1} \{x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) = f^r(p), g = f^r\} = \{x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nk}(x_0) = f^r(p), \text{ pour certains } 0 \leq r \leq k\}.$$

Exemple 10. *i) Soit $f(x) = x^2$*

Le point fixe $f(x) = x \implies x^2 = x \implies x = 0, x = 1$

Le point $x = -1$ est pré-périodique si $x > 1$ ou $x < -1$ alors $O^+(x)$ tend vers $+\infty$

si $-1 < x < 1$ alors $x \in W^s(0)$.

ii) $f(x) = x^2 - 1, f'(x) = 2x$

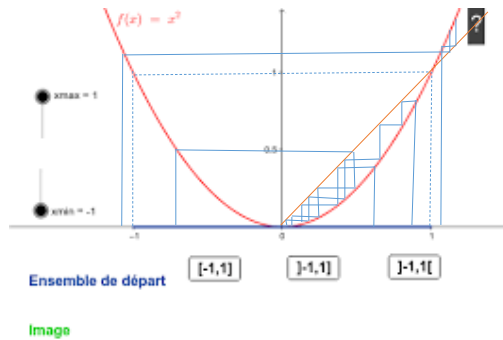


FIGURE 1.11 – La courbe de la fonction $f(x) = x^2$ avec les point fixe $x = 1$ et $x = 0$

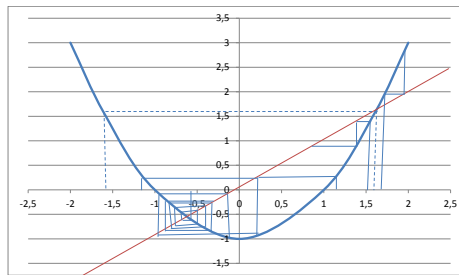


FIGURE 1.12 – la courbe de fonction $f(x) = x^2 - 1$ avec les points fixes $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Le point fixe :

$$f(x) = x \implies x^2 - 1 = x \implies x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

• $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est un point répulsif car $\|f'(\frac{1 + \sqrt{5}}{2})\| = 1 + \sqrt{5} > 1$.

• $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ est un point répulsif car $\|f'(\frac{1 - \sqrt{5}}{2})\| = 1 - \sqrt{5} > 1$.

$$f^2(x) = x \implies f(f(x)) = x \implies (x^2 - 1)^2 - 1 = x \implies x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x \implies x(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x = 0 \longrightarrow f(0) = -1$$

$$x^3 - 2x - 1 = 0 \implies x^3 + x^2 - x^2 - 2x - 1 = 0 \implies x^2(x+1) - (x+1)^2 = 0 \implies (x+1)(x^2 - x - 1) = 0$$

l'orbite positive de tout $x \in (-1, 0)$ est asymptotique au 2-cycle.

Exemple 11. $f(x) = x^2 + c$

Les points fixes répulsifs $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ Le bassin d'attraction de $(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ les points dans $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ ont des orbites asymptotiques à $+\infty$.

Remarque 3. *le comportement de la fonction $f(x) = x^2 + c$ devient plus compliqué lorsque c diminue. Par exemple quand $c = -2$; nous obtenons (chaos) (plus tard dans la thèse).*

• Calcul topologique

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée bijective s'il est injective et surjective (un à un, et sure). Si f est bijective alors f est inversible. Nous définissons $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}$.

3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée un homéomorphisme si son bijective et les deux f et f^{-1} sont continues.

si f et f^{-1} sont tous deux de classe C^r (c'est-à-dire r -fois différentiables, avec dérivée r^{eme} continue), alors f est appelé un C^r -difféomorphisme (donc un homéomorphisme est un (C^0 -difféomorphisme)).

Exemple 12. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est un homéomorphisme mais n'est pas un C^1 -difféomorphisme f^{-1} n'est pas différentiable à 0.

4) Soit $S \subset \mathbb{R}$ nous disons qu'un point $x \in \mathbb{R}$ est une limite de x , si \exists une séquence $x_n \in S$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

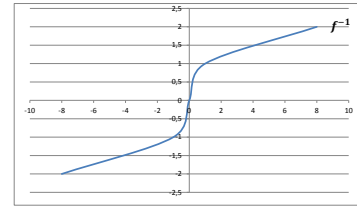
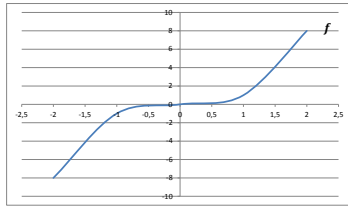


FIGURE 1.13 – Les graphes de fonctions $f(x) = x^3$ et f^{-1}

Exemple 13. $x = 1$ est un point limite de l'intervalle ouvert $(0, 1)$.

5) $S \subset \mathbb{R}$ est appelé fermé si a contient tous ses points limites.

Exemple 14. $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$ est fermé. $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 1\}$ n'est pas fermé. $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1\}$ n'est pas fermé.

6) $S \subset \mathbb{R}$ est appelé ouvert si pour chaque point $x \in S$, \exists un intervalle d'open I_x avec $I_x \subset S$.

7) Si $S \subset \mathbb{R}$ est fermé, alors $\mathbb{R} \setminus S$ est ouvert.

8) Si $S \subset \mathbb{R}$ alors l'intérieur de s est le plus grand ensemble ouvert contenu dans S . dénote par $int(S)$.

Exemple 15. L'intérieur de $[0, 1)$ est $(0, 1)$. la fermeture de S , est le plus petit ensemble fermé contient S . dénote par $d(S)$.

Exemple 16. $[0, 1)$ est $[0, 1]$. La limite de S consiste en tous les les points de la fermeture de S qui ne sont pas à l'intérieur de s . Dénote par $\partial S = cl(S) - int(S)$.

9) A un ensemble S est dense en F si $cl(S) = F$.

Exemple 17. i) L'ensemble du nombre rationnel \mathbb{Q} est dense en \mathbb{R} .

L'ensemble des entiers \mathbb{Z} n'est pas dense en \mathbb{R} .

ii) Soit f map $f(x) = x^2$ sur le cercle unité S dans le plan complexe \mathbb{C} . Alors le point périodique de S est dense en S .

10) La composition $g \circ f$ de la fonction est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ et pour que cela soit défini, il faut que l'image de f soit contenue dans le domaine de g .

11) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ règle de la chaîne. $(f^2)'(x) = (f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$ si $x = x_0$

$$(f^2)'(x_0) = f'(x_1) \cdot f'(x_0)$$

$$(f^3)'(x_0) = f'(x_2) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0)$$

$$(f^n)'(x_0) = f'(x_{n-1}) \cdot f'(x_{n-2}) \dots f'(x_1) \cdot f'(x_0)$$

Ainsi, en particulier, pour un cycle, la dérivée de la fonction composite autour du cycle n'est que le produit des dérivées aux points du cycle.

12) Théorème de la valeur moyenne

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de C^1 , $\exists c \in (a, b)$ avec

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

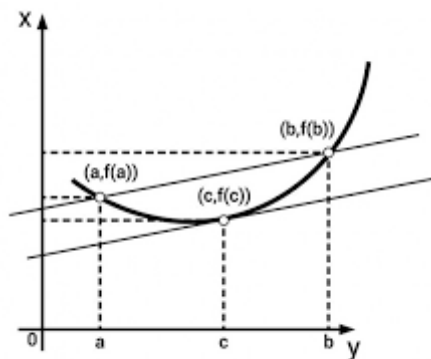


FIGURE 1.14 – Théorème de la valeur moyenne

13) Théorème de la valeur intermédiaire

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue $f(a) = u$, $f(b) = v$, $u < v$ alors $w \in (u, v)$, $\exists c \in (a, b)$ avec $f(c) = w$.

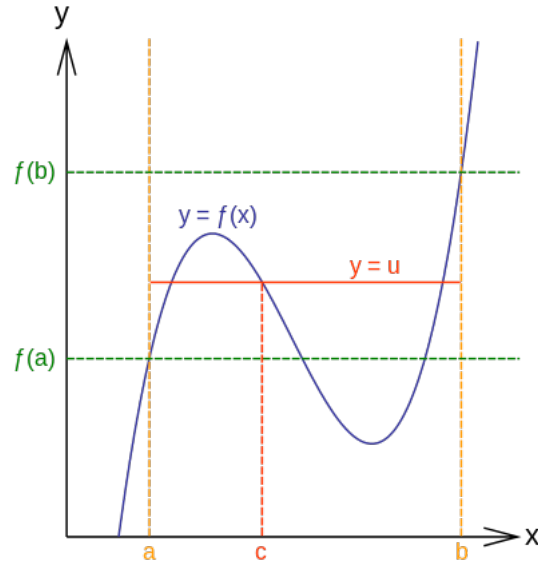


FIGURE 1.15 – Théorème de la valeur intermédiaire

Lemme 3. $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow I$ soient continus. Alors f a un point fixe.

Preuve 3. $f(x_0) = x_0$

On considère $g(x) = f(x) - x$. Donc g est continue alors $g(a) = f(a) - a \geq 0$ puisque $f(a) \in [a, b]$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ puisque $f(b) \in [a, b]$.

Donc par l'TVI, $\exists c \in (a, b)$ avec $g(c) = 0 \implies f(c) = c$.

14) L'image d'un intervalle fermé sous une map continue est un intervalle fermé.

- les points fixes attractifs et répulsifs

Définition 10. Soit p un point fixe de la fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- p est appelé **point attractif** s'il existe un intervalle centré à p (i.e. $I = (p - \delta, p + \delta)$, pour chaque $\delta > 0$) tel que $I \subset W^s(p)$. i.e. pour $x \in I$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p \quad (1.12)$$

- p est appelé **point répulsif** s'il existe un intervalle centré sur p (i.e. $I = (p - \delta, p + \delta)$, pour chaque $\delta > 0$) tel que $\forall x \in I - p$ il existe un nombre entier

$k > 0$ avec $f^k(x) \notin I$.

Il existe des définitions analogues d'attirer et de repousser pour les points périodiques.

Exemple 18. i) $f(x) = a.x$, a est constant $\neq \pm 1$, 0 alors 0 est le point fixe unique de f . C'est un attracteur si $|a| < 1$.

ii) $f(x) = ax + b$ i.e. f est affine, a est constant $\neq \pm 1$.

Alors $x = \frac{b}{1-a}$ est le point fixe unique pour f , c'est un attractif si $|a| < 1$ et répulsif si $|a| > 1$.

Définition 11. si f est un C^1 -difféomorphisme $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous disons qu'un point fixe p est hyperbolique si $|f'(p)| \neq 1$.

Théorème 2. Si p est un point fixe hyperbolique d'un C^1 -difféomorphisme $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors p est un attractif si $|f'(p)| < 1$, et un répulsif si $|f'(p)| > 1$.

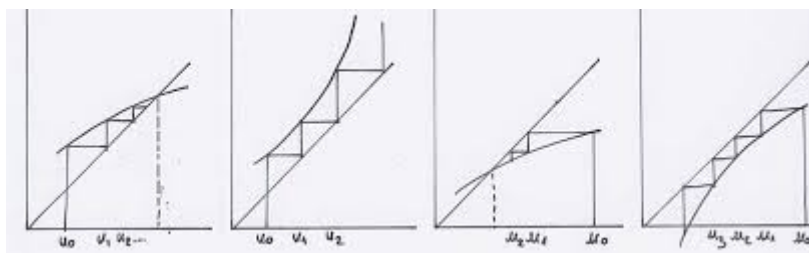


FIGURE 1.16 – Les points attractifs et répulsifs

Preuve 4. par le théorème de la valeur moyenne, pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) - f(p) = f'(\xi)(x - p) \quad (1.13)$$

$$\text{pour certains } \xi \in \begin{cases} (p, x) & \text{si } x > p \\ (x, p) & \text{si } x < p \end{cases}$$

i) $|f'(p)| < 1$

nous montrerons que p attire, c'est-à-dire que $\exists \xi$ centré sur p tel que $\forall x \in$

$I, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$

$\exists k < 1$ tel que $|f'(p)| < k < 1$ comme f' est continue, il existe un intervalle

$I = (p - \delta, p + \delta)$ tel que $|f'(x)| < k \forall x \in I$.

Donc pour $x_0 \in I$,

par (1.2)

$$|f(x_0) - f(p)| < k|x_0 - p| \implies |x_1 - p| < k|x_0 - p| < |x_0 - p|$$

Donc x_1 est aussi dans I .

$$|f(x_1) - f(p)| < k|x_1 - p| \implies |x_2 - p| < k|x_1 - p| < k^2|x_0 - p|$$

répétant le même raisonnement, nous déduisons que pour tout n , nous avons

$|x_n - p| < k^n|x_0 - p|$ mais $k < 1$ nous savons que $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$$

ii) Si $|f'(p)| > 1$

$\exists k > 1$ tel que $|f'(p)| > k > 1$, et par la continuité de f' , \exists un intervalle I centré en p (i.e. $I = (p - \delta, p + \delta)$, pour certains $\delta > 0$) tel que

$$\forall x \in I, |f'(x)| > k > 1$$

Donc, pour tout $x_0 \in I$, en appliquant (1.2), comme ci-dessus, nous avons cela

$$|f(x_0) - f(p)| > k|x_0 - p| \implies |x_1 - p| > k|x_0 - p| > |x_0 - p|$$

Maintenant soit $x_1 \notin I$, ou $x_1 \in I$ et nous pouvons appliquer le même argument

à x_1 pour déduire que

$$|f(x_1) - f(p)| > k|x_1 - p| \implies |x_2 - p| > k|x_1 - p| > k^2|x_0 - p|$$

Nous pouvons répéter le même argument et si $x_{n-1} \in I$, nous déduisons que

$$|x_n - p| < k^n|x_0 - p|$$

$k < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ donc finalement x_0 doit se trouver à l'extérieur de I .

Définition 12. si p est une orbite périodique de la période minimal n pour la fonction $C^1 f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que l'orbite de p est hyperbolique si

$$|(f^n)'(p)| \neq 1$$

Nous appelons

$$(f^n)'(p_0) = f'(p_0) \cdot f'(p_1) \dots f'(p_{n-1}) \quad (1.14)$$

Le multiplication du n -cycle p_0, p_1, \dots, p_{n-1} .

Corollaire 1. un cycle périodique est attractif si son multiplicateur a un module inférieur à 1 et répulsif si son multiplicateur a un module supérieur à 1.

Preuve 5. appliquer le théorème à f^k , ou k est le période principale de cycle.

Exemple 19. $f(x) = x^2 - 1$

Le cycle $0, -1$ attire, depuis son multiplicateur $|f'(0) \cdot f'(-1)| = 0 \times 2 = 0 < 1$

Théorème 3. Si p est un point fixe hyperbolique d'une C^1 -fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors p est un attractif si $|f'(p)| < 1$ et un répulsif si $|f'(p)| > 1$.

Multiplicateur d'un k -cycle $\{p_0, p_1, \dots, p_{k-1}\}$

$$(f^k)'(p_0) = f'(p_0) \cdot f'(p_1) \dots f'(p_{k-1}) \quad (1.15)$$

Une généralisation évidente du théorème montre que p_0, p_1, \dots, p_{k-1} est un k -cycle attractif si $|(f^k)'(p_0)| < 1$ et un k -cycle répulsif si

$$|(f^k)'(p_0)| < 1$$

Exemple 20. $f(x) = x^2 - 1$ point fixe $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. $|f'(\frac{1+\sqrt{5}}{2})| = 1 + \sqrt{5} > 1$ donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est répulsif.

$|f'(\frac{1-\sqrt{5}}{2})| = \sqrt{5} - 1 > 1$ donc $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est attractif.

$\{-1, 0\}$ est un 2-cycle.

$|(f^2)'(0)| = f'(-1) \cdot f'(0) = 0 < 1$ de sorte que le $-1, 0$ 2-cycle attractif.

Point fixes et cycle non-hyperboliques

Quand un point fixe a un multiplicateur de module 1, nous devons examiner des termes plus élevés dans l'extension Taylor de f pour déterminer le comportement du point fixe.

Exemple 21. a) $f(x) = x + x^2$

b) $f(x) = x + x^3$

c) $f(x) = x - x^5$

Toutes ces fonctions ont $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ ils sont donc tous les points fixe non-hyperboliques.

Difféomorphismes sur \mathbb{R}

par difféomorphisme, nous voulons dire '**c-difféomorphisme**' c'est-à-dire $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et à la fois f et f^{-1} sont dérivables et le premier dériver continu.

L'inverse g d'un difféomorphisme $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par $g(y) = x$ ou, $f(x) = y$ donc $g(f(x)) = x$.

Différenciation

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \implies g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, où $y = f(x)$. Donc si f est un difféomorphisme (et que g est différentiable) alors $f'(x)$ n'est jamais nul. Donc soit $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ou $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lemme 4. Si f est un difféomorphisme de \mathbb{R} , alors soit f est l'ordre préservant ($x < x' \implies f(x) < f(x')$) ou f est l'inversion de l'ordre ($x < x' \implies f(x) > f(x')$).

Preuve 6. Si $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, alors f est l'ordre préservant par le théorème de la valeur moyenne.

Si $f'(x) < 0$ alors f est l'inversion de l'ordre par le théorème de la valeur moyenne.

Notation 2. Ce lemme est également vrai pour l'homéomorphisme de \mathbb{R} .

Les points fixes de difféomorphisme de \mathbb{R} .

Proposition 1. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un ordre inversant difféo, alors f a exactement un point fixe.*

Preuve 7. *f est bijective et l'ordre inversant ainsi.*

Supposons maintenant que c et d sont des points fixes avec $c < d$, alors, puisque f est l'ordre inverse $f(c) > f(d)$ mais, $f(c) = c, f(d) = d$. Donc cela donne $c > d$ qui est une contradiction. donc le point fixe est unique.

Si f est un ordre conservant le difféomorphisme de \mathbb{R} , alors f ne peut avoir aucun point fixe, ni aucun nombre de points fixes.

Tout ce que nous pouvons dire sur les points fixes d'un ordre conservant difféomorphisme de \mathbb{R} , c'est qu'il y a 4 types

Exemple 22. $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin(x)$

f est une difféo de \mathbb{R}

f est différentiable, avec $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, donc par T.V.M

$$x_2 > x_1 \longrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

(en particulier f est injective). Donc f est surjective. Tout C^1 -bijective avec f' nombre zéro, a automatiquement f^{-1} aussi C^1 .

Les points fixes :

$$x + \frac{1}{2}\sin(x) = x \longrightarrow \sin(x) = 0 \longrightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$f'(n\pi) = 1 + \frac{1}{2}\cos(n\pi) =$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} n \text{ même} \longrightarrow \text{point fixe est répulsif} \\ \frac{1}{2} n \text{ ajouter} \longrightarrow \text{point fixe est attractif} \end{cases}$$

Les points de n période de difféomorphisme sur \mathbb{R} .

Proposition 2. *Si f est un ordre préservant le difféomorphisme de \mathbb{R} alors il n'a pas de point de période primaire n avec $n > 1$.*

Preuve 8. Soit x_1 désigne $f(x_0)$, x_2 désigne $f^2(x_0)$, etc. si x_0 n'est pas un point fixe, alors

i) $x_0 < x_1$ nous avons cela, $f(x_0) < f(x_1) \implies x_1 < x_2$

De même $f(x_1) < f(x_2) \implies x_2 < x_3$

Par conséquent $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

Donc pour tout $n > 1$, nous avons $x_n \neq x_0$.

ii) Par le même raisonnement que dans le cas (i), nous obtenons cela $x_0 > x_1, x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ Donc pour tout $n > 1$, nous avons $x_n \neq x_0$.

Quelle le point de période n pouvons-nous avoir dans l'ordre inverse ? nous pouvons avoir n (importe quel l'orbite de la période minimale 2).

Proposition 3. si f est un difféomorphisme de orbite de orbite inversant de \mathbb{R} et $n < 2$, il n'y a pas d'orbites de période minimale n .

Preuve 9. f est un difféomorphisme avec $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. f^2 est aussi un difféomorphisme avec $(f^2)'(x) = f'(f(x)).f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies f^2$ n'a pas de point m minimale pour $m > 1 \implies [\exists \in \mathbb{R}, (f^2)^m(x) = x, m > 1] \implies f$ n'a pas point des orbites de période $2m$ avec $m > 1$.

f n'a pas point de orbites de période n avec $n > 2$.

Pour n -ajouter : f est un difféo avec $f'(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$, donc f^n est un difféomorphisme avec, $(f^n)'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies f^n$ a un point fixe unique (puisque f^n est un orbite inversé difféo) $\implies \exists$ un point unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f^n(x) = x$. mais f est un difféomorphisme de orbite inversant, donc il a précisément un point fixe, qui satisfait aussi $f^n(x) = x$. ainsi, le seul point fixe de f^n est en fait le point fixe de $f \implies$ il n'y a pas orbites de période principale n pour $f, n > 2$.

Sommaire 1. Pour un difféomorphisme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, nous avons :

La situation n'est pas compliqués pour un modèle non réversible $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (même si on augmente la dimension $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$).

par conséquent, des cycles périodiques de toutes tailles peuvent se produire. un théorème remarquable qui indique la complexité de la situation est

le suivant :

• **Théorème de Sharkovskii**

Ordonner les entiers positifs par :

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright 2.3 \triangleright 2.5 \triangleright 2.7 \triangleright \dots \triangleright 2^2.3 \triangleright 2^2.5 \triangleright 2^2.7 \triangleright \dots \triangleright 2^n.3 \triangleright 2^n.5 \triangleright 2^n.7 \triangleright \dots \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Si $f : I \rightarrow I$, $I \subseteq \mathbb{R}$ est continue et a une orbite de période principal m , alors elle a une orbite de période principal n , pour tout n avec $m \triangleright n$.

un inverse au théorème de sharkouskii dit que si $m \triangleright n$ est l'ordre, alors on peut trouver une fonction continue f qui a un point de période principal n , mais qui -n'a pas de points de période principal m .

Exemple 23. *i) supposons que f a une orbite de période de période 4 alors, il est garanti que f a aussi une orbite de période 2 et un point fixe.*

ii) supposons que f a une orbite de période de premier 10 alors f a une orbite de période m de premier pour tout m la même, un point drow-éventuellement 6. les choses $m = 6$ et m impair ne sont pas impliqués par sharkovskii sont donc indécis.

iii) $f(x) = 4x(1 - x)$

$$f(0) = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 1, f(1) = 0.$$

Le théorème de sharkovskii implique que puisque f a une orbite de période 3, alors il a une orbite de période m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

L'équation logistique

$$f(x) = 4x(1 - x)$$

f a 2 orbites de période de point 3 $\implies f(x) = 4x(1 - x)$ a k -cycle pour tous $k \in \mathbb{N}$.

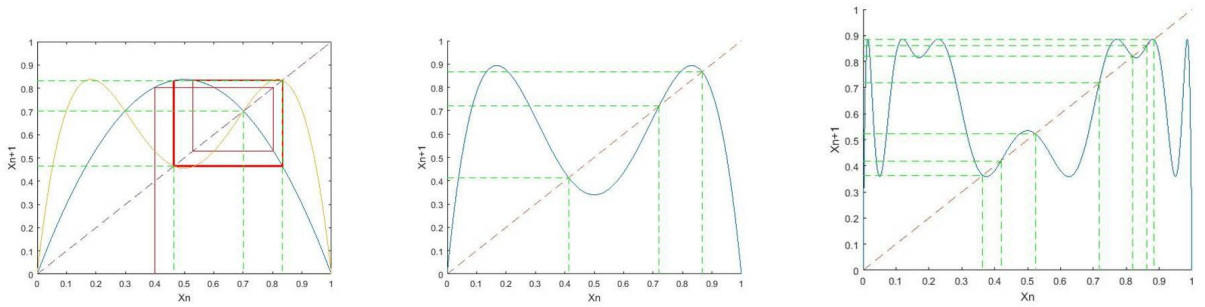


FIGURE 1.17 – Le bifurcation de la suite logistique

est une équation continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Avant que ce résultat soit connu, une version plus simple a été découverte indépendamment par Li et Yorke ("la période trois implique le chaos", l'amérique avec le mois), nous allons démontrer le théorème de Li et Yorke.

Proposition 4. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et possède une orbite de la période 2, puis il a un point fixe.*

Preuve 10. *soit $\{a, b\}$ un orbite de période 2, avec $a < b$.*

$f(a) = b$ et $f(b) = a$. Soit $g(x) = f(x) - x$ alors

$g(a) = f(a) - a = b - a > 0$.

$g(b) = f(b) - b = a - b < 0$.

par le T.V.I $\exists c \in (a, b)$ avec $g(c) = 0$.i.e $f(c) = c$.

pour le théorème de Li et Yorke, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 5. *Soit $I = [a, b]$, $J = [c, d]$*

depuis $f(I) \supseteq J$, \exists des points r et $s \in I$ tel que $f(r) = c$ et $f(s) = d$ par le T.V.I

Preuve 11. *$I' \subseteq I$, $f(I') = J$.*

Parmi les possibles r et s choisissent alors qu'il n'y a pas d'autre candidat entre eux. supposons $r < s$ (le cas $r > s$ est traité de la même façon), puis $I' = [r, s]$. ce I' et $f(I') = J$.

Lemme 6. si f est continue et I est un intervalle fermé tel que $f(I) \supseteq I$, alors f a un point fixe dans I .

Preuve 12. soit $I = [a, b]$. Puisque $f(I) \supseteq I$ il existe deux points $c, d \in I$ avec $f(c) = a$ et $f(d) = b$ (par le T.V.I) soit $g(x) = f(x) - x$ alors

$$g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$$

$$g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0$$

par le T.V.I. $\exists x$ entre c et d tel que $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$

• **Théorème (Li et Yorke)**

si $f : R \rightarrow R$ est continu et qu'il a une orbite de période 3, alors il a des orbites de période n pour tous les entiers positifs n . soit l'orbite de la période 3 soit $a < b < c$ avec $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ (la seule autre possibilité est $a < b < c$ avec $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ et la preuve est similaire)

soit $J_0 = [b, c]$ soit $n \geq 4$ nous avons que $f(J_0) \supseteq [a, c] \supseteq J_0$.

donc par le lemme 5, $\exists J_1 \subseteq J_0$ tel que $f(J_1) = J_0 \supseteq J_1$.

maintenant $f(J_1) \supseteq J_1$ donc par le lemme 5, $\exists J_2 \subseteq J_1$ tel que $f(J_2) = J_1$.

répéter le même raisonnement $\exists J_3 \subseteq J_2$ tel que $f(J_3) = J_2$

inductive-ment, cela nous donne des intervalles

$$J_{n-2} \subseteq J_{n-3} \subseteq \dots \subseteq J_2 \subseteq J_1 \subseteq J_0 = [a, b]$$

$$f^2(J_2) = f(J_1) = J_0$$

$$f^{n-2}(J_{n-2}) = f^{n-3}(f(J_{n-2})) = f^{n-3}(J_{n-3}) = \dots = f^2(J_2) = f(J_1) = J_0 = [b, c]$$

c'est-à-dire

$$f^{n-2}(J_{n-2}) = J_0 = [b, c]$$

appliquer

$$f f^{n-1}(J_{n-2}) = f(J_0) \supseteq [a, c] \supseteq [a, b]$$

appliquer lemme 5 (à f^{n-1})

$\exists J_{n-1} \subseteq J_{n-2}$ tel que

$$f^{n-1}(J_{n-1}) = [a, b]$$

appliquer

$$f f^n(J_{n-1}) = f([a, b]) \supseteq [b, c] = J_0$$

mais $J_0 \supseteq J_{n-1}$

Alors par lemme 6 applique que $f^n; \exists x_0 \in J_{n-1}$ tel que

$$f^n(x_0) = x_0$$

c-à- dire il existe un point n périodique pour f .

où se trouve l'orbite x_0, x_1, \dots, x_{n-1} ?

$$x_0 \in J_{n-1} \quad \subseteq J_{n-2}$$

$$x_1 = f(x_0) \quad \in f(J_{n-2}) = J_{n-3}$$

$$x_2 = f(x_1) \quad \in f(J_{n-3}) = J_{n-4}$$

\vdots

$$x_{n-2} = f(x_{n-3}) \quad \in f(J_1) = J_0 = [b, c]$$

$$\text{alors } x_0, x_1, \dots, x_{n-2} \in [b, c]$$

nous avons montré $f^{n-1}(J_{n-1}) = [a, b]$ mais $x_0 \in J_{n-1}$ alors

$$f^{n-1}(x_0) \in [a, b] x_{n-1} \in [a, b]$$

donc n est en effet la période minimal de x .

1.2.3 La suite Logistique

La première fois à utiliser le terme logistique par François Verhulst en 1845 dans son livre, l'a appelé la courbe qui prend en compte le calcul de la population finie, où François Verhulst suppose que l'augmentation de la population x à la quantité $x(M - x)$. Le modèle logistique de François Verhulst demeure à ce jour. Le biologiste Robert May a généralisé en 1976 la chronologie des comportements pouvant découler d'une simple relation non linéaire la perfection

des preuves pour la logistique.

R.May intéressés aux fluctuations du système discrétisé de population d'insectes d'un E.D.O. qui est utilisé pour modéliser la population et ce qui se passe quand la population devient trop grande pour être soutenue par l'environnement.[1, 2]

En mathématique une suite logistique est une suite simple, mais dont la récurrence n'est pas linéaire. Sa relation de récurrence est

$$f_{\mu}(x) = \mu x(1 - x)$$

Les dérivé de f sont

$$f'_{\mu}(x) = \mu - 2\mu x$$

,

$$f''_{\mu}(x) = -2\mu (\leq 0)$$

—> observer que f a un maximum à

$$f'_{\mu}(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

et la valeur max est

$$f_{\mu}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}$$

le graphique de la suite logistique f_{μ} est somme-trique sur la voie $x = \frac{1}{2}$ depuis

$$f_{\mu}(x) = f_{\mu}(1 - x)$$

donc si $\mu \in [0, 4]$, la fonction f_{μ} est appliqué l'intervalle fermé $[0, 1]$ en lui-même, c'est-à-dire $f_{\mu}([0, 1]) \subseteq [0, 1]$. Bien que la suite logistique semble simple au premier abord, elle peut, suivant les valeurs de μ , avoir un comportement très étrange, et même mener au chaos.

Les points fixes

Les points fixes de f_{μ} sont donnés par $f_{\mu}(x) = x \Rightarrow \mu x(1 - x) = x \Rightarrow x = 0$ ou $\mu - \mu x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^* = \frac{\mu-1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$

$$\begin{aligned}
x^* \in [0, 1] &\Rightarrow 0 \leq x^* \leq 1 \\
&\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{\mu} \leq 1 \\
&\Rightarrow \mu \geq 1.
\end{aligned}$$

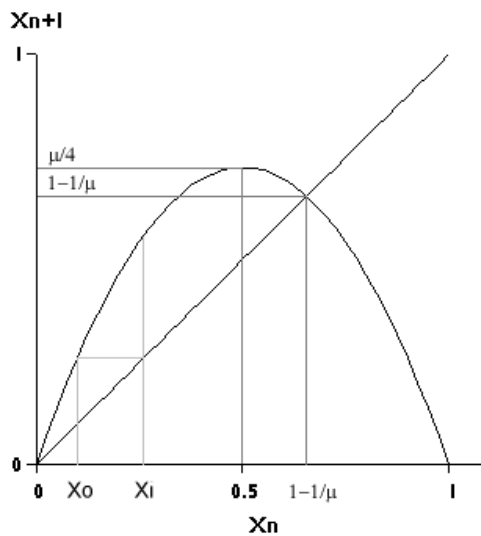


FIGURE 1.18 – la courbe de la suite logistique et ses points fixes

Stabilité des points fixes

Soit $(f'_\mu(x) = \mu - 2\mu x)$

En suite, nous calculons la dérivée de f_μ aux points fixes $f'_\mu(0) = \mu$, 0 attractif

$\mu \leq 1$ et répulsif $\mu > 1$

$$f'_\mu(x^*) = f'_\mu\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = \mu - 2\mu\frac{\mu-1}{\mu} = 2 - \mu.$$

donc $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ est un attractif lorsque $|f'_\mu(x^*)| < 1 \Rightarrow |2 - \mu| < 1, -1 < 2 - \mu <$

$1 \Rightarrow 1 < \mu < 3$ et un répulsif lorsque $f'_\mu(x^*) > 1 \Rightarrow |2 - \mu| < 1 \Rightarrow \mu > 3$

chaque point de $[0, 1]$ est dans le bassin d'attraction du point fixe $x = 0$ (pas d'autres orbites périodiques d'une période quelconque)

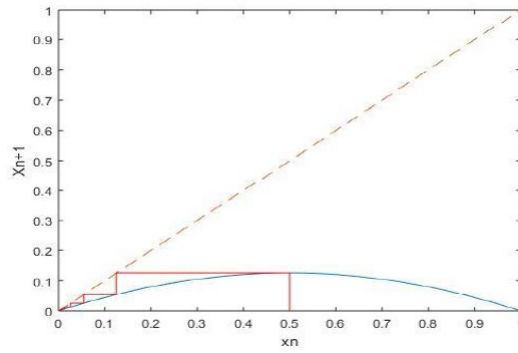


FIGURE 1.19 – La courbe de la suite logistique $0 \leq \mu \leq 1$

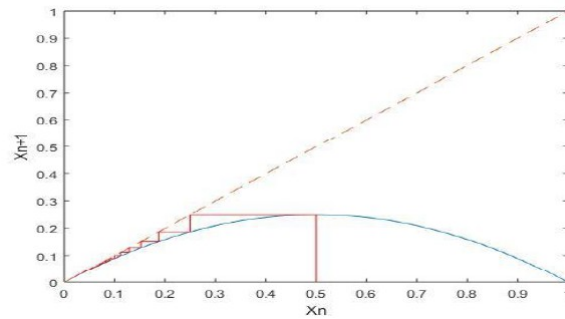


FIGURE 1.20 – La courbe de la suite logistique $1 \leq \mu \leq 3$

on peut montrer que chaque point de $[0, 1]$ se trouve dans le bassin d'attraction de $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$

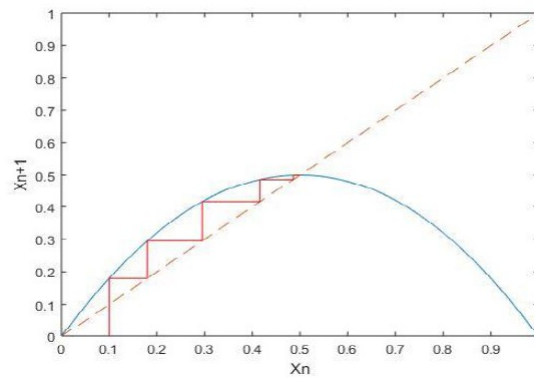


FIGURE 1.21 – La courbe de la suite logistique $1 \leq \mu \leq 3$

donc pour $0 \leq \mu \leq 3$, il ne peut y avoir de points périodiques de période principale > 1 .

La périodicité

En faisant varier le paramètre μ , plusieurs comportements sont possibles :

◊ $0 \leq \mu \leq 1$,

La suite (x_n) est décroissante et converge vers 0. La population d'éteint.

◊ $1 < \mu \leq 3$,

La suite (x_n) est converge vers $\frac{\mu-1}{\mu}$. La population finit par se stabiliser. On peut distinguer deux cas

a) $1 < \mu \leq 2$. La suite est monotone et majorée à partir du rang 1. Elle converge rapidement.

b) $2 \leq \mu \leq 3$. La suite n'est plus monotone et oscille autour de sa limite. La convergence est de plus en plus lente, elle devient extrêmement faible pour $\mu = 3$.

◊ $3 < \mu \leq 3,57$,

La suite ne converge plus. Cependant les termes d'ordre pair x_{2n} tendent vers une certaine limite, ceux d'ordre impair x_{2n+1} vers une autre. On dit qu'on a un cycle d'ordre 2. Puis si μ augmente encore, les termes convergent vers 4 valeurs distinctes. On a désormais un cycle d'ordre 4. Lorsque μ croît encore un peu, on voit apparaître des cycles d'ordre 8 . . . et ainsi de suite. La suite oscille donc entre 2 puis 4, puis 8, . . . (puissance de 2) points attracteurs. La population oscille entre 2, 4, 8, ... valeurs.

Ce passage d'un cycle de longueur 2 à un cycle de longueur 4, puis d'un cycle de longueur 4 à un cycle de longueur 8, etc. porte le nom de bifurcation.

a) $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3,449490$, cycle d'ordre 2

b) $3,449490 < \mu \leq 3,544090$, cycle d'ordre 4

c) $3,544090 < \mu \leq 3,564407$, cycle d'ordre 8

d) $3,564007 < \mu \leq 3,568750$, cycle d'ordre 16

e) . . .

◇ $3,57 < k64$.

Lorsque μ s'approche de 4, plus rien n'est prévisible, la suite admet tantôt des cycles d'ordre qui semblent arbitraires, tantôt pas de cycles du tout ! C'est le chaos .

Un diagramme de bifurcation permet de résumer graphiquement les différents cas :

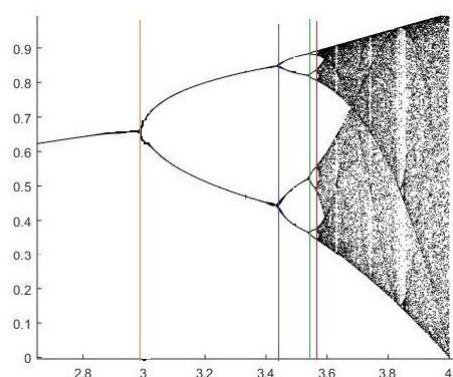


FIGURE 1.22 – Diagramme de bifurcation pour la famille de suite logistique

Bifurcation

Dans le paragraphe précédent, la formule de récurrence de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ a permis d'obtenir les premiers attracteurs en cherchant une limite éventuelle conforme à l'équation $x = f(x)$.

Lorsque μ devient supérieur à 3, il faut chercher une solution à l'équation $x = f(f(x))$. Cela conduit à une équation du quatrième degré qui possède naturellement les racines déjà connues $0, 1 - \frac{1}{\mu}$ à mais ce ne sont plus des attracteurs à et la paire de nouvelles racines

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \mu}{\mu} \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3} \right) \quad (1.16)$$

Il n'y a plus de convergence : un cycle-limite apparaît. Le résultat de l'itération bascule alternativement de l'une des deux dernières racines à l'autre : $x_{n+1} = x_{n-1}$ tandis que $x_{n+2} = x_n$. Pour $\mu = 3.4$, les valeurs approchées successives 0.84, 0.45, 0.84, 0.45, 0.84... apparaissent. Au-delà de la limite de stabilité de ce cycle, $\sqrt{6} + 1$, deux nouvelles bifurcations se produisent, qui dépendent des solutions de $x = f(f(f(f(x))))$. Pour $\mu = 3.47$, les valeurs successives sont de l'ordre de 0.47, 0.86, 0.40, 0.84, 0.47...

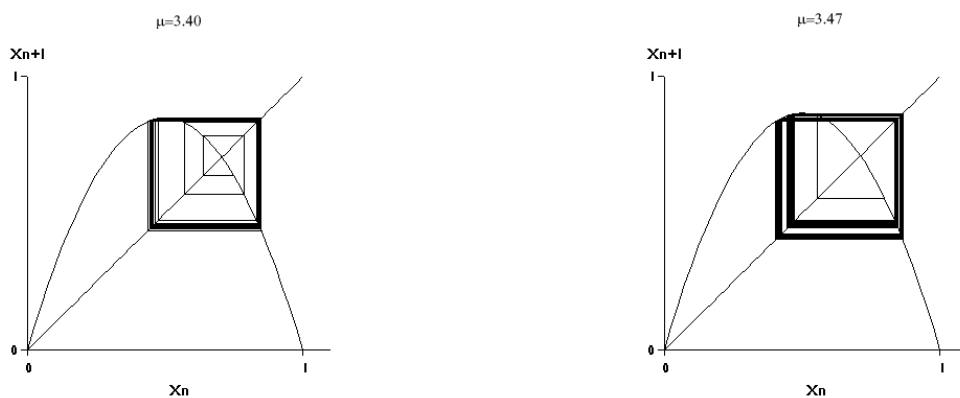


FIGURE 1.23 – Les courbes de la suite logistique $x_0 = 3.40$ et $x_0 = 3.47$

Taux de Feigenbaum.

dans les années 1980, une " théorie de la renormalisation " a été développée expliquant l'existence de cette constante, et les conjectures de Feigenbaum ont été prouvées en utilisant des méthodes assistées par ordinateur. À la fin des années 1980, D. Sullivan a produit une preuve mathématique pure, en utilisant des idées issues d'une analyse complexe et d'une géométrie hyperbolique. d'autres preuves ont été développées par McMullen et par Lyubich dans les années 1990.

le chaos

De bifurcation en bifurcation, les évolutions deviennent de plus en plus complexes. Le processus aboutit, pour $\mu > 3.57$ environ, à des systèmes qui ne présentent généralement plus d'attracteurs visibles. Les graphiques représentent alors une évolution "chaotique" au sens usuel du terme.

Définition 13. *Comportement chaotique*

La suite est attirée par un attracteur étrange géométriquement très complexe (objet fractal) et l'évolution de la suite vers cet attracteur a un comportement erratique imprévisible. De plus, l'évolution est très sensible à la condition initiale : d'infime modification de x_0 provoque une évolution très différente de la suite vers l'attracteur. On dit que le comportement de la suite est chaotique. Ce chaos qui reflète le manque d'information sur l'attracteur et sur l'évolution de la suite est néanmoins déterministe puisque engendré par une suite parfaitement connue. On appelle parfois ce phénomène l'effet papillon.

Exemple 24. *Cependant, dans le langage des mathématiciens, le mot chaos représente une forte sensibilité aux conditions initiales. Les deux graphiques correspondant à $\mu = 3.9$ avec des valeurs initiales $x_0 = 0.100$ et 0.101 montrent que les trajectoires s'éloignent l'une de l'autre jusqu'à devenir rapidement distinctes. Dans un problème concret les conditions initiales ne sont jamais connues exactement : au bout d'un certain temps, un phénomène chaotique est devenu imprévisible alors même que la loi qui le définit est parfaitement déterministe.*

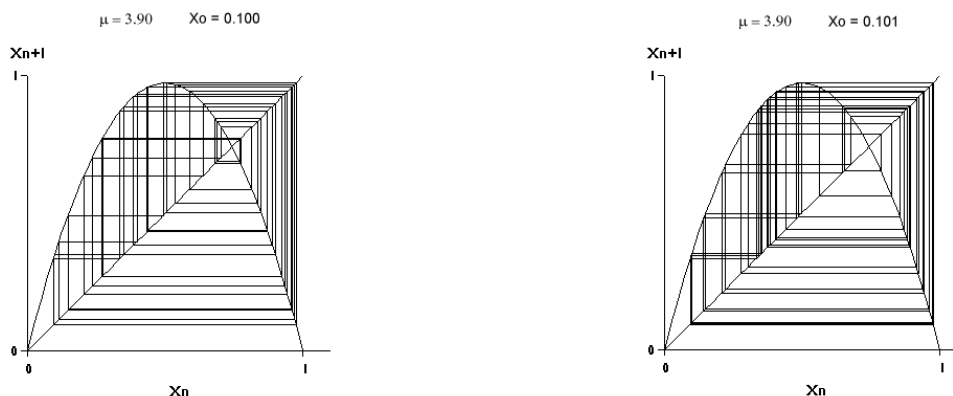


FIGURE 1.24 – Les courbes de la suite logistique tel que $x_0 = 3.90$

1.3 Théorie du chaos

1.3.1 Définition et compréhension

De nombreux chercheurs ont longuement discuté du système chaotique, mais jusqu'à présent, il n'y a pas de définition de ce qu'est ce système. Il est basé sur des systèmes non linéaires et étudie leur comportement par leur extrême sensibilité aux conditions initiales, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales, sans aucun élément aléatoire obtenue. Le système chaotique est un système déterministe, mais avec des résultats imprévisibles.

Définition 14. Soit E un ensemble. L'application $f : E \rightarrow E$ est dite chaotique sur E si

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales,
2. f est topologiquement transitive,
3. les points périodiques sont denses dans E .

Définition 15. $f : J \rightarrow J$ est dite topologiquement transitive si pour toute paire d'ensembles ouverts $F, E \subset J$ il existe $k > 0$ tel que $f^k(F) \cap E \neq \emptyset$.

Définition 16. $f : J \rightarrow J$ a une sensibilité aux conditions initiales s'il existe

$\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in J$ et tout voisinage N_x de x , il existe $y \in N_x$ et $n > 0$ tels que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

1.3.2 Chaos déterministe

On dit qu'un système est chaotique lorsque son évolution dans le temps est très sensible aux conditions initiales que l'on ne peut prédire exactement dans quel état il va se trouver si l'on attend trop longtemps.

Une solution chaotique est un comportement asymptotique borné qui n'est ni un point d'équilibre, ni une solution périodique ou quasi - périodique, ni une solution s'échappant vers un infini (c'est - à - dire on reste dans un borne). Le chaos peut donc être défini par défaut des autres types de solutions sachant qu'il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos déterministe. Pratiquement, une dynamique chaotique déterministe peut être identifiée, en première analyse, par la reconnaissance de propriétés caractéristiques : trajectoires typiques, attracteurs étranges, spectres, sensibilité aux conditions initiales.

1.3.3 Propriétés caractéristiques du chaos

- **Sensibilité aux conditions initiales**

L'une des caractéristiques les plus importantes de la théorie du chaos est la sensibilité aux conditions initiales, également appelées "papillon", ce qui signifie que deux conditions initiales arbitrairement proches évoluent selon des chemins (trajectoire) différents et significativement différents, et sur cette base, l'évolution ne peut pas être prévu à long terme.

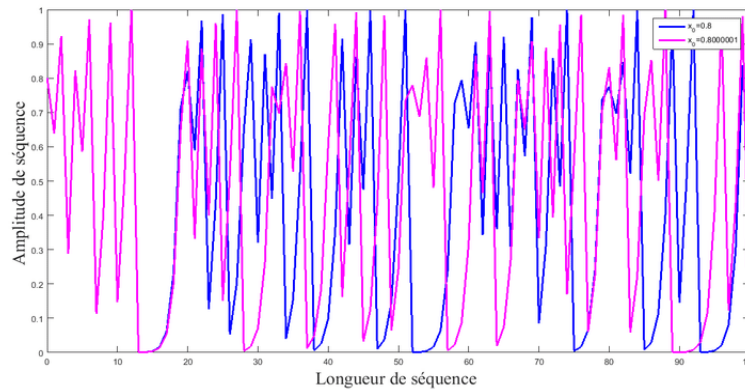


FIGURE 1.25 – Sensibilité a la condition initiale SCI de la logistique pour deux condition

Non périodicité

Un système présentant un comportement chaotique évolue dans une orbite qui ne se répète jamais sur elle-même. C'est à dire, les orbites ne sont jamais périodiques.[3]

- **La non-linéarité**

Un système linéaire admet toujours des solutions, les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous-ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il perd ses propriétés. Mais un système non-linéaire, n'est pas en général soluble, plus on tente de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

- **La structure fractale**

Le comportement d'un système chaotique se reproduit de manière auto-similaire à des échelles différentes. Plus on le regarde de près, plus on découvre

de nouveaux détails comparables à ceux qu'on observait aux échelles supérieures. Sa représentation géométrique ne s'intègre pas dans un espace de dimension entière, mais de dimension fractionnaire (une courbe, n'est plus tout à fait une courbe, mais elle n'est pas devenue une surface).

• **L'attracteur étrange**

On détermine l'attracteur par la définition suivante :

Définition 17. Soit $U \supset \mathbb{R}^q$ un ouvert et soit l'application $f : U \rightarrow U$. Un ensemble fermé et borné $A \subset U$ est un attracteur si $f(A) = A$ et s'il existe $r > 0$ tel que $d(x_0, A) < r$ implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, A) = 0$.

Les attracteur jouent un rôle fondamental dans l'étude du comportement à long terme d'un système dynamique. L'attracteur étrange est un type d'attracteur plus important dans le théorie du chaos que l'orbite périodique (un ensemble fini des points), point fixe et tout autre types d'attracteur.

Définition 18. Étant donné un attracteur A , nous appelons le bassin d'attraction de A l'ensemble de toutes les conditions initiales x_0 , telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, A) = 0$.

L'attracteur étrange est caractérisé par[2] :

- La dimension d de l'attracteur est fractale.
- L'attracteur a un volume nul sur un espace de phase.
- une séparation exponentiellement rapide de trajectoires initialement proches (Sensibilités aux conditions initiales) :

On a deux types exemplaire d'un attracteur étrange, le premier est de système continu par exemple système de Lorenz et l'autre de système discret par exemple système de Fold.[1, 3]

Le système de Lorenz est décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2(t)x_1(t)) \\ \dot{x}_2 = x_1(t)(\rho x_3(t))x_2(t) \\ \dot{x}_3 = x_1(t)x_2(t)\beta x_3(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

Où $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur d'état du système et σ , ρ et β sont les paramètres du système.

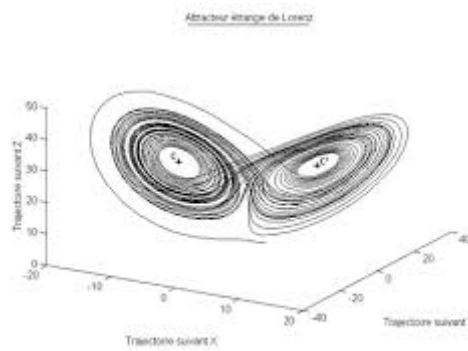


FIGURE 1.26 – L'attracteur étrange de Lorenz

La figure (1.27) présente l'attracteur de système de Lozi défini par :

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a|(y_1(k-1))| + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases} \quad (1.18)$$

Où $[x_1 x_2]^T \in R^2$ est le vecteur d'état et a, b sont deux paramètres constants. Pour les valeurs $\sigma = 10, \rho = 28$ et $\beta = \frac{8}{3}$, le système de Lorenz présente un comportement chaotique. La figure 1.3 illustre l'attracteur chaotique étrange obtenu en plan de phase des états x_1 et x_3 en considérant les conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$. Le système discret de Lozi tel que $a = 1.7, b = 0.5$.

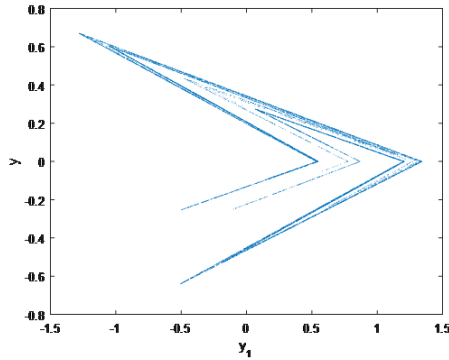


FIGURE 1.27 – Attracteur de Lozi

1.3.4 Exposants de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée " exposant de Lyapunov " qui est souvent utilisée pour déterminer si un système est chaotique ou non. Pour deux états initiaux légèrement différents x_0 et $x_0 + \epsilon$, leur divergence après n itérations peut-être caractérisée comme suit :

$$|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| = \epsilon e^{n\delta(x_0)}$$

d'où

$$\log \frac{|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|}{\epsilon} = n\delta(x_0),$$

En faisant ϵ tendre vers zéro, on trouve :

$$\delta(x_0) = \log \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right|$$

Finalement, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{d}{dx} f^n(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$$

on obtient :

$$\delta(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)| \quad (1.19)$$

δ est appelé exposant de Lyapunov. Par sa définition, l'exposant de Lyapunov caractérise la stabilité d'une orbite $O(x_0)$. Si $\delta > 0$ l'orbite $O(x_0)$ est instable. Si

$\delta < 0$, elle est stable. La figure donne l'exposant de Lyapunov de l'application logistique pour $3 < \mu \leq 4$.

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n). \quad (1.20)$$

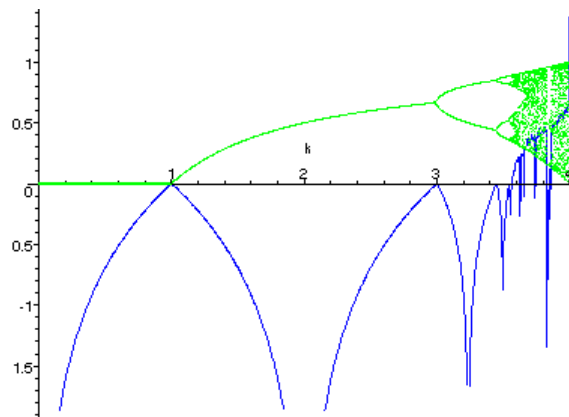


FIGURE 1.28 – Exposants de Lyapunov de la fonction logistique

Les conditions suivantes sont nécessaires pour l'apparition du chaos dans un système dynamique.

- Au moins l'un des exposants de Lyapunov est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.
- Au moins l'un des exposants de Lyapunov est négatif pour justifier le repliement des trajectoires.
- La somme de tous les exposants est négative pour indiquer qu'un système chaotique est dissipatif, c'est-à-dire qu'il perd en énergie.

Cas d'une application continue multidimensionnelle

Pour un système différentiel de dimension n défini par f tel que :
 $x' = f(x(t))$ tel que: $t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}^n$ L'exposant de Lyapunov dans la direction i est donné par :[2]

$$\delta_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left\| \frac{x_i(t) - x'_i(t)}{x_i(0) - x'_i(0)} \right\| \quad (1.21)$$

Exposants de Lyapunov pour différents attracteurs

Attracteur	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	$0 > \delta_1 \geq \dots \geq \delta_n$
Cycle limite	$\delta_1 = 0, 0 > \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$
Tore d'ordre 2	$2\delta_1 = \delta_2 = 0, 0 > \delta_3 \geq \dots \geq \delta_n$
Tore d'ordre k	$k\delta_1 = \dots = \delta_k = 0, 0 > \delta_{k+1} \geq \dots \geq \delta_n$
Attracteur chaotique	$\delta_1 > 0, \sum_{i=1}^n \delta_i < 0$
Attracteur hyper-chaotique	$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \sum_{i=1}^n \delta_i < 0$

L'algorithme de Wolf

Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement, et ce au sein d'un attracteur, les étapes de l'algorithme sont :

- **Étape 1** : Changement du paramètre de contrôle.
- **Étape 2** : Choix aléatoire d'une condition initiale.
- **Étape 3** : Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation.
- **Étape 4** : Evolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires.
- **Étape 5** : Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédent le calcul d'une moyenne de la divergence.
- **Étape 6** : Retour a étape 5 effectué selon un nombre donné.
- **Étape 7** : Retour au étape 1.

- **Étape 8** : Représentation du plus grand exposant de Lyapunov en fonction du paramètre de contrôle donné.

Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange. Les différents types d'attracteurs d'un système de dimension n en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont représentés dans le tableau ci-dessous.

Utilisation des exposants de Lyapunov au calcul de dimension de l'attracteur. Le terme de dimension est souvent implicitement associé à celui de coordonnée, c'est à dire de variable nécessaire pour décrire la position d'un élément d'un ensemble.

- La dimension par définition est un nombre entier.
- le point est une attracteur de dimension 0.
- la dimension d'une courbe fermé ou une ligne est 1.

Il y a un lien, entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur, si tous les exposants sont positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'il sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

(a) Dimension de Mori.

Soit m_0 le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, λ_+ la moyenne des exposants positifs et λ_- celle des exposants négatifs. La dimension de mori est donnée par la relation suivante :

(b) Dimension de Kaplan et Yorke.

Soit j_0 un entier positif tel que : La dimension de Kaplan et Yorke est donnée par la relation suivante : Il existe aussi d'autres dimensions fractales comme la dimension de Lyapunov, la dimension de Hausdorff, la dimension de corré-

lation.

1.3.5 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle "bifurcations". Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

- **L'intermittence vers le chaos**

un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

- **Le doublement de période**

qui est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

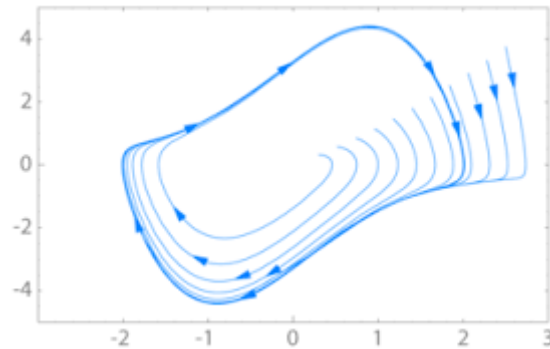


FIGURE 1.29 – Les trajectoires qui partent de différents points devient orbite périodique rapproche

- **La quasi-périodicité**

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens (1971) illustré par exemple sur le modèle de Lorenz (1963). Ce scénario a été confirmé par de nombreuses expériences dont les plus célèbres se trouvent en thermo-hydrodynamique - convection de Rayleigh-Bénard dans une petite boîte -et en chimie - réaction de Bélousov-Zabotinsky - entre autres. cette route vers le chaos résulte de la "concurrence" de différentes fréquences dans le système dynamique. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle, le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Dans ce cas, les trajectoires couvrent la superficie d'un tore Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos.

1.3.6 L'attracteur de Hénon

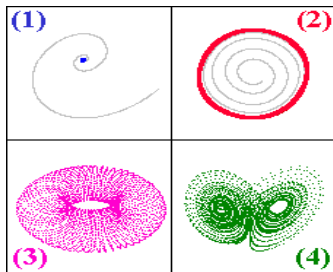
Michel Hénon est astronome a l'observatoire de Nice. Pendant de longues années, notamment dans les années soixante, il a étudié la dynamique des étoiles se déplaçant autour des galaxies, s'aidant des ordinateurs pour comprendre la

stabilité de leur mouvement.

La propriété principale de ces systèmes est la constance de l'énergie de leur mouvement. En conséquence de quoi leurs mouvements chaotiques ne sont pas décrits par de simple attracteurs mais par des objets plus difficiles a analyser et visualiser, existant sur des surfaces "d'énergie" en trois ou plus dimension. Il a découvert en 1970 une surface construite à l'aide d'une simple chaine d'itération qui révèle un attracteur chaotique et qui lui permet de faire un lien direct entre le chaos déterministe et les fractals. Il porte son nom.

Les différentes sortes d'attracteurs

Il en existe de 4 sortes, le type est explicite , l'attracteur de Hénon se trouvant dans la catégorie 4 (étrange attracteur).



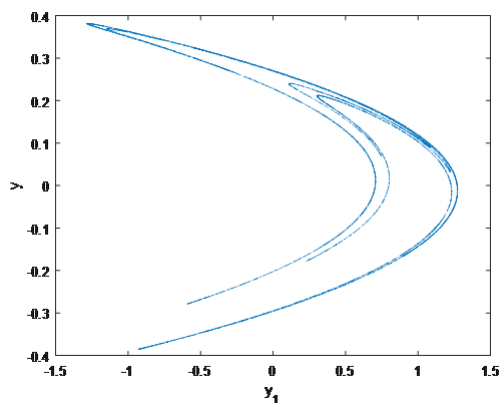
L'attracteur de Hénon : présentation

L'attracteur de Hénon est un exemple de système simple qui révèle un étrange comportement. L'orbite décrite à une forme de banane. Les equations générant ces étranges phénomènes sont

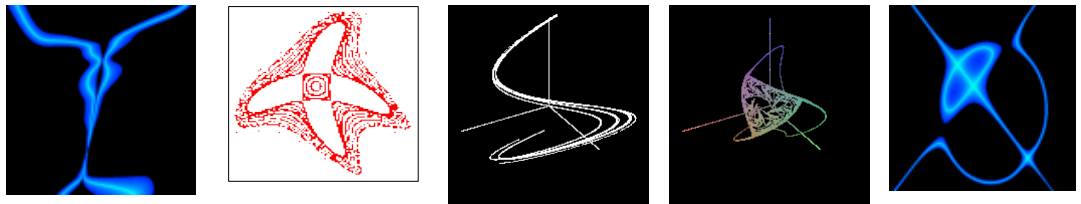
$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a(y_1(k-1))^2 + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases} \quad (1.22)$$

ou a et b sont des constantes initialement a 1.4 et 0.3 Pour toute valeur initiale, les points issus de l'itération sont attirés par la banane.

Quand on le dessine, il semble se matérialiser de nulle part. La forme ne se construit pas de manière continue, toutes les valeurs qui converge vers cette structure le font d'une manière différente. L'attracteur de Hénon montre aussi une infinité de fines structures, a mesure que on effectue des grossissements successifs. La forme la plus classique : En faisant varier les paramètres a et b



on obtient d'autres formes intéressantes :



Équilibre

L'étude de l'équilibre étant complexe, nous nous sommes limités au cas $b = 1$, qui conditionne la conservation de l'aire du système et on recherche les

points fixes. Notre but principal est de montrer mathématiquement la cascade de bifurcations (période doubling) qui se produit. Après une transformation du système d'équation, et on recherche les points fixes de l'application et de sa composée sur elle-même pour faire apparaitre des point attracteurs de période deux , ayant un critère de convergence différent et traduisant le début du phénomène de "period doubling".

Stabilité des points fixes

Certains sont stables, d'autres non. On a pu montre notamment la stabilité des points fixes pour $a < 4$, concernant les attracteurs de période 1. L'étude trouvée dans la littérature est reproduite ci-dessous.

Visualisation

On a pu se rendre compte que les conditions initiales influaient sur la façon dont se forme la banane, mais pas sur la forme finale.

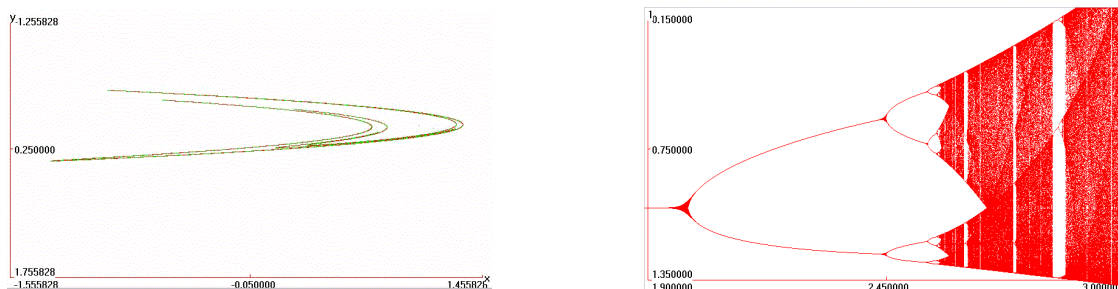
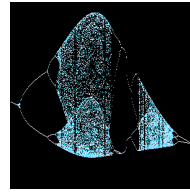
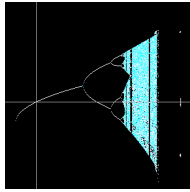


FIGURE 1.30 – Attracteur et bifurcation de Hénon

Autres bifurcations



1.4 Conclusion

Ce chapitre nous y répertorions quelques notions essentielles sur les systèmes dynamiques. Ensuite, Nous avons présenté un état de l'art sur la théorie du chaos, nous avons donné quelques exemples de système chaotique et dans le dernier chapitre, nous proposons 5 modèles chaotiques pour utiliser dans le COA.

Chapitre 2

Les différentes méthodes et approches d'optimisation

2.1 Introduction

Le problème d'optimisation occupent à notre époque une place prépondérante : l'optimisation étant nécessaire dans différents domaines de production, du transport, de la logistique, etc.

La résolution de tels problèmes a fait l'objet de nombreux travaux en utilisant diverses méthodes d'optimisation. De nos jours l'optimisation est devenue un domaine indispensable pour résoudre plusieurs problèmes que se soit dans l'industrie ou d'autres secteurs. Les algorithmes d'optimisation utilisés dans le filtrage adaptatif présentent plusieurs difficultés liées aux besoins de l'utilisateur (recherche d'une solution globale, fiabilité et précision de la solution, temps de calculs disponible,...), aux caractéristiques du problème traité (non linéarité, interférence, bruit,...) et aux temps de calculs importants. Nous aborderons dans ce chapitre les définitions générales des méthodes d'optimisation qui se divisent en deux grandes classes : les méthodes déterministes et les méthodes non déterministes.

2.2 Définition de l'optimisation

Les premières méthodes d'optimisation ont été inspirées à l'origine par les travaux de Lagrange et Hamilton sur plusieurs méthodes de calcul itératives, étudiées à l'époque par Newton et Gauss. En est fait, nous avons assisté ces dernières années à une croissance très rapide du travail utilisant des méthodes d'optimisation, alors qu'est-ce que l'optimisation ? L'optimisation est un terme fréquemment et largement utilisé pour décrire et gérer les processus de conception pour développer des produits. Il s'agit d'améliorer la conception en termes d'un ou plusieurs aspects. Mathématiquement, l'optimisation est une partie des mathématiques qui concerne l'identification d'une solution globale parmi un ensemble des solutions candidates qui constituent l'espace de recherche d'un problème étudié[6]. L'optimisation a été utilisée dans de nombreux domaines scientifiques dans le cadre de la conception optimale de dispositifs d'ingénierie, etc. A travers ce qui précède, le but de l'optimisation est d'atteindre la solution optimale à un problème spécifique appelé fonction objective linéaire ou non linéaire. L'optimisation peut être définie comme le processus de recherche des conditions donnant la valeur maximale ou minimale d'une fonction. Un problème d'optimisation peut être énoncé comme suit.

$$\text{Trouver } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \text{ qui minimise } f(X),$$

sous réserve des contraintes

$$g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$$

$$l_k(X) = 0, k = 1, 2, \dots, p$$

où X est un vecteur à n dimension appelée vecteur de conception, $f(X)$ est appelée fonction objective et $g_j(X)$ et $l_k(X)$ sont respectivement contraintes d'inégalité et d'égalité. Certains problèmes d'optimisation n'imposent aucune contrainte et peuvent être définis comme suit :

$$\text{Trouver } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \text{ qui minimise } f(X),$$

Ce genre de problèmes sont appelés problèmes d'optimisation sans contrainte. Nous nous intéressons dans ce qui suit aux problèmes d'optimisation sans contrainte.

2.3 Classification des problèmes d'optimisation

On peut conclure que la difficulté d'un problème d'optimisation peut s'avère plus ou moins compliquée selon la nature des éléments suivants :

- la nature des variables (discrètes ou continus),
- la nature des contraintes (linéaires ou non-linéaires),
- la nature de la fonction de coût (linéaire, quadratique, convexe, etc ...), le nombre de fonctions objectives à optimiser (mono objective, multi objectives).

En fonction de la nature du problème, on distingue deux types d'optimisation.

1. L'optimisation statique pour laquelle la fonction objective ne dépend que des valeurs des variables a un instant donne.
2. L'optimisation dynamique pour laquelle la fonction objective dépend des décisions prises antérieurement aussi bien que de l'état actuel du système électrique et qui est a réaliser sur un intervalle de temps donne.

En revanche des méthodes conventionnelles, les Méta-heuristiques ne besoin pas des informations mathématiques de la fonction traitée, elles sont encore capable de résoudre les problèmes non linaires ou encore les problèmes dénommes difficiles, les méthodes classiques restent incapables de traiter les problèmes discontinus et certains problèmes non convexes, elles s'adaptent uniquement pour les problèmes linaires et continus convexes qui se caractérisent par un seul optimum local et qui est global, contrairement au problèmes non convexes ces derniers se trouvent piéger dans un des minimums locaux, on peut regrouper les méthodes conventionnelles dans 04 sous groupes principaux suivants et qui dépendent de la nature des contraintes et des objectifs a optimiser :

- La programmation linéaire (Linear Programming) qui traite une fonction objective linéaire et des contraintes linéaires.

- La programmation linéaire en nombres entiers mixtes (Mixed-Integer Programming) pour laquelle toutes les variables prennent des valeurs entières.
- La programmation quadratique (Quadratic Programming) dont la fonction objective comporte des termes quadratiques, et les contraintes restant linéaires.
- La programmation non linéaire (Non-linear Programming) qui considère des termes non-linéaires dans l'objectif ou les contraintes.

Cependant les méthodes globales sont basées sur un aspect de recherche stochastique aléatoire commençant par une population de solution de taille fixe aux cours des générations en quête de la solution optimale globale et qui ne donne pas importance ni a la nature de la fonction a optimisée ni a ses contraintes a respecter, on peut palper maintenant clairement l'avantage qu'elles nous offrent en matière d'optimisation des problèmes marquant par une difficulté grandissante.

2.4 Ordre d'une méthode de résolution

Les méthodes de résolution peuvent être classées à partir de leur ordre selon qu'elles nécessitent ou non le calcul des dérivées de la fonction objectif et des fonctions contraintes par rapport aux paramètres. Une méthode est dite d'ordre zéro si elle utilise uniquement la connaissance de la fonction elle-même. Elle est d'ordre un si elle requiert le calcul des dérivées première et d'ordre deux s'il lui faut aussi accéder aux dérivées secondes.

Les méthodes d'ordre zéro sont en général peu précises et convergent plus lentement vers l'optimum. En revanche, elles offrent l'avantage d'éviter le calcul du gradient, ce qui est intéressant lorsque la fonction n'est pas différentiable ou que le calcul de son gradient représente un coût important.

Les méthodes d'ordre un permettent d'accélérer la localisation de l'optimum, puisque le gradient donne l'information sur la direction de l'amélioration. Par contre elles sont applicables seulement aux problèmes où les fonctions objectif sont continument différentiables.

2.5 Opérateurs de recherche fondamentaux

La recherche de l'optimum d'une fonction est généralement réalisée à l'aide de deux opérateurs fondamentaux : l'exploration et l'exploitation.

- L'exploration est la capacité de l'algorithme à explorer le domaine des variables pour rechercher la meilleure vallée, c'est-à-dire celle qui contient l'optimum global.

- L'exploitation est la capacité de l'algorithme à converger rapidement vers le minimum d'une vallée donnée à partir d'un point de départ.

Le succès et l'efficacité d'une technique de résolution dépendent la plupart du temps d'un compromis entre l'exploration et l'exploitation.

Tout algorithme d'optimisation doit utiliser ces deux stratégies pour trouver l'optimum global : l'exploration pour la recherche de régions inexplorées de l'espace de recherche et l'exploitation pour exploiter la connaissance acquise aux points déjà visités et ainsi trouver des points meilleurs. Ces deux exigences peuvent paraître contradictoires mais un bon algorithme de recherche doit trouver le bon compromis entre les deux. Une recherche purement aléatoire est bonne pour l'exploration mais pas pour l'exploitation alors que la recherche dans le voisinage est une bonne méthode d'exploitation mais pas d'exploration.

Certaines méthodes toutefois n'utilisent qu'un seul de ces opérateurs pour parvenir à l'optimum. Ainsi, les méthodes déterministes, exploitant les dérivées de la fonction objectif pour atteindre rapidement et précisément le minimum local le plus proche du point de départ, privilégient l'exploitation au détriment de l'exploration.

2.6 Optimum local et optimum global

Lorsque l'on veut résoudre un problème d'optimisation, on recherche la meilleure solution possible à ce problème, c'est-à-dire l'optimum global. Ce-

pendant, il peut exister des solutions intermédiaires, qui sont également des optimums, mais uniquement pour un sous-espace restreint de l'espace de recherche : on parle alors d'optimums locaux. Cette notion est illustrée dans la figure 2.1 . Soit un problème d'optimisation, avec C l'ensemble des solutions admissibles du problème :

Si l'on peut prouver que , $\forall x \in C, f(x_g) < f(x)$ alors on dira que x_g est l'optimum (minimum) global du problème ; - S'il existe un ensemble $V \subset C$, contenant , x_l tel que , $\forall x \in V, f(x_l) < f(x)$ avec , $x \neq x_l$ alors on dira que x_l est un optimum (minimum) local du problème.

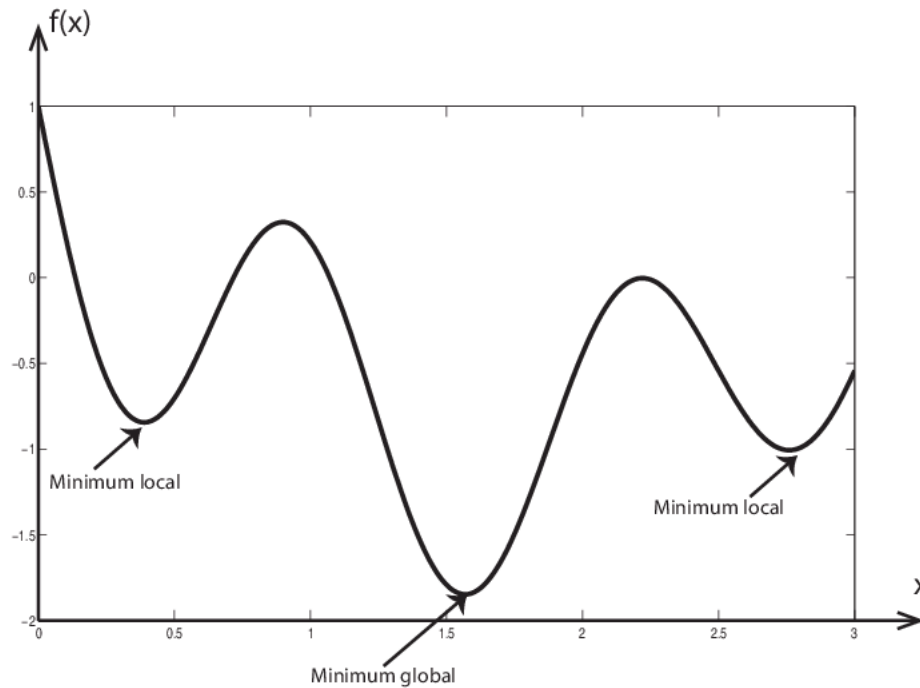


FIGURE 2.1 – Différence entre un optimum global et des optima locaux

2.6.1 Les méthodes d'optimisation locale

la recherche locale est une méthode utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation difficiles. La recherche locale peut être utilisée sur des problèmes

de recherche d'une solution maximisant un critère parmi un ensemble de solutions candidates. Les algorithmes de recherche locale passent d'une solution à une autre dans l'espace des solutions candidates (l'espace de recherche) jusqu'à ce qu'une solution considérée comme optimale soit trouvée ou que le temps imparti soit dépassé. En revanche optimiser localement, c'est chercher une solution à un problème qui soit proche d'une solution de départ (optimisation locale), mais qui soit meilleure en terme de coût (fonction objectif). Pour cela, nous recherchons une meilleure solution par itérations successives, cette classe de méthodes peut être déterministe ou non-déterministe.

Optimisation déterministe[5]

Lorsque l'évolution de la méthode de résolution est prévisible et ne laisse aucune place au hasard, celle-ci est qualifiée de déterministe.

Bien que l'optimisation locale ne soit pas le thème essentiel de notre travail. Nous en présentons les grandes lignes. En effet, comme nous le verrons plus loin beaucoup d'algorithmes d'optimisation globale utilisent des codes d'optimisation locale comme sous-programmes. Donc l'efficacité de ces derniers affecte celle des premiers.

1- Rappels sur l'optimisation locale déterministe

Cadre général

-Position du problème

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, la formulation du problème d'optimisation locale s'écrit :

$$(P_{loc}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver}(x_{loc}, f_{loc}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, of_{loc} = f(x_{loc}), \\ \text{telque} \\ \forall x \in V, f(x_{loc}) \leq f(x) \\ \text{où } V \text{ est un voisinage de } x_{loc} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Nous nous intéressons ici à l'aspect numérique de la résolution de Ploc. Pour ce faire, on va construire itérativement une suite $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de façon à trouver un point $xloc$ solution de (Ploc).

La valeur $xloc$ qui minimise $f(x)$ peut ainsi être caractérisée de 2 manières :

i) $\forall x \neq xloc f(x) \geq f(xloc)$

ii) $\nabla f(xloc) = 0$ et $H(f(x))/_{x=xloc}$ est une matrice définie positive

La condition (i) a donné naissance à deux familles de méthodes dites **d'interpolation** et de **recherche directe** :[5]

Les méthodes d'interpolation : elles sont utiles lorsque la fonction objectif est non définie en certains points de l'espace. Cette famille est composée de méthodes tentant de construire un modèle de la fonction à optimiser. Ce modèle est souvent un polynôme interpolant f , construit à partir d'un échantillonnage de points où f a déjà été évaluée. Le modèle est ensuite lui-même optimisé. Les méthodes sans dérivées, ou "sampling methods". Dans cette famille, il existe des méthodes qui tentent d'approcher les gradients de f , et d'utiliser cette information afin de déterminer quels sont les points prometteurs où f est évaluée.

Les méthodes de recherche directe (direct search) : Le terme de recherche directe est utilisé pour décrire une méthode de recherche utilisant différents essais de solution possible en comparant chaque essai au meilleur résultat obtenu jusqu'à présent, combine à une stratégie permettant de déterminer quelle est la prochaine solution à tester.

Cette famille de méthodes ne tente pas d'approcher les gradients ni de construire un modèle de f , des approximations de gradients sont utilisées pour ordonner les directions de recherche, elle se base principalement sur le calcul de la fonction objectif. Des extensions de cet algorithme ont été proposées par Nelder et Mead, plusieurs variantes existent en ajoutant d'autres mouvements : en plus de la réflexion, ils proposent la contraction, la réduction et l'étirement. Il y a aussi l'algorithme de Hooke et Jeeves, l'algorithme DIRECT la recherche par

coordonnées, etc.

L'algorithme général des méthodes de recherche directe est le suivant :

Algorithme général des méthodes de recherche directe

Étape 1 : Initialisation

x_0 ,

Étape 2 : Affectation

$x_{opt} \leftarrow x_0$,

Étape 3 : Itération

Tant que test d'arrêt n'est pas vérifié faire

 Mise à jour de x_k

 Si $f(x_k) < f(x_{opt})$

$x_{opt} \leftarrow x_k$,

 Fin Si

Fin du Tant que

En principe la mise à jour se fait selon une direction de recherche d_k par le processus itératif suivant

$$x_{k+1} = x_k + \lambda d_k \tag{2.2}$$

avec λ est un pas de déplacement et x_{k+1} est l'approximation de x_{loc} à l'itération $k + 1$.

Parmi les méthodes directes, ils existent des méthodes dont les algorithmes n'obéissent pas vraiment au schéma de l'algorithme général, c'est-à-dire dont les directions de recherche ne sont pas choisies de la façon définie ci-dessus. En effet, dans la recherche de Fibonacci l'algorithme commence par un intervalle contenant x_{loc} , puis cet intervalle est réduit successivement en se basant seulement sur les évaluations de la fonction en ces bornes jusqu'à obtenir un intervalle suffisamment petit, ainsi, le *minimum* de la fonction peut être obtenu au centre de cette intervalle. Aussi, le "polytope mouvant" de Nelder et Mead où partant de $N + 1$ points (pour le cas N - dimensionnel), nous effectuons des

opérations géométriques sur ces points et nous remplaçons au fur et à mesure les points inutiles (points de très grande valeur), jusqu'à la convergence. Cette liste n'est pas exhaustive et elle n'a pas pour objectif de l'être mais plutôt de mettre en évidence les caractéristiques de chaque famille.

La condition (ii) donne naissance à une famille de méthodes dite de type **gradients** :

Les méthodes de type gradients : Elles utilisent les gradients et/ou les Hessiens de f (ou leurs approximations) pour choisir des d_k et λ appropriées, de façon que la direction choisie soit une direction de descente, elles sont appelées aussi **méthodes géométriques**.

direction de descente

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continûment différentiable, et x un vecteur de \mathbb{R}^n . Le vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est appelé direction de descente de f en x ssi $\nabla f(x)^T d < 0$.

Le principe général est le suivant : x_1 donné, nous construisons un processus x_k satisfaisant

$$f(x_{k+1}) < f(x_k)$$

avec $x_{k+1} = x_k + \lambda d_k$ où d_k est une direction de descente et λ_k minimise $f(x_{k+1})$ dans la direction d_k .

Finalement l'algorithme général qui sert à résoudre le problème Ploc peut s'écrire comme suit :

Algorithme général des méthodes de descente.

Initialisation

x_0, λ_0, d_0

Itération

Tant que test d'arrêt n'est pas vérifié faire

$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$

Fin du tant que

Pour calculer d_k et λ_k , l'algorithme peut utiliser des informations sur les va-

leurs du gradient (voire du Hessien) de f au point x_k courant. Le choix de la direction de descente conduit à attacher à l'algorithme général des noms particuliers, tels qu'on le verra juste après.

Optimisation stochastique

L'optimisation stochastique est une méthode qui génère et utilise des variables aléatoires. Ces variables aléatoires apparaissent dans la formulation du problème d'optimisation lui-même, qui impliquent des fonctions objectif aléatoires ou des contraintes aléatoires, par exemple. Certaines méthodes d'optimisation stochastiques aléatoires itérées sont utilisées pour résoudre des problèmes stochastiques, en combinant les deux significations de l'optimisation stochastique. En effet les méthodes d'optimisation stochastique généralisent les méthodes déterministes pour les problèmes déterministes. De plus, une demande croissante existe pour la résolution de problèmes d'optimisation issus du monde réel, pour lesquels les données ou les fonctions objectif sont souvent incertaines, et où il s'avère parfois nécessaire de trouver des solutions robustes à des modifications ultérieures susceptibles de survenir sur les variables de décision. C'est la prise en compte de ces incertitudes dans le processus d'optimisation qui a donné naissance à l'optimisation stochastique.

Autrement dit, l'optimisation stochastique est un domaine de la programmation mathématique classique qui tient compte de l'incertitude du problème. La notion d'incertitude dans la programmation mathématique est apparue pour la première fois dans les années cinquante. Elle a rencontré depuis un développement rapide.

Les avancées récentes ont ouvert de nouvelles perspectives qui devraient être fructueuses tant d'un point de vue théorique que pratique.

L'optimisation stochastique n'est pas une famille de problèmes, de modèles et d'outils différents des autres domaines d'optimisation (programmation linéaire, non-linéaire, dynamique); au contraire, elle constitue un complément de ces familles lorsque la notion d'incertitude intervient. Dans ce cas nous parlerons

de programmation stochastique linéaire, non-linéaire ou bien de programmation stochastique dynamique. En effet, le but qui se fixe dans un problème d'optimisation stochastique est de prendre la meilleure décision vis à vis des situations qui comportent de l'incertitude.

Les limites des méthodes d'optimisation locale

Dans la catégorie de problèmes que nous avons présentés en haut, les méthodes cherchent le minimum d'une fonction en se basant sur la connaissance d'une direction de recherche. Bien sûr, ces méthodes seront toujours applicables et même recommandées lorsque la solution cherchée est réputée proche de la solution connue (point de départ) ou si la fonction objectif est convexe, en particulier, si le calcul n'est pas coûteux.

Toutefois, elles ne sont pas indiquées pour les problèmes multimodale où le risque de rester bloqué dans un optimum local est fort probable, cela suffit pour illustrer l'enjeu des problèmes d'autres types : L'optimisation globale. Quand un utilisateur se rend compte qu'il trouve des minimums locaux différents en exécutant son code d'optimisation (locale), il est tout à fait légitime qu'il songe à un code qui serait capable d'en tenir compte et de donner le meilleur de tous.

C'est ce genre de problèmes que **l'optimisation globale** propose de résoudre, ci après, un état de l'art des méthodes d'optimisation globale.

2.6.2 Les méthodes d'optimisation globale

Durant ces dernières années, l'optimisation globale a fait l'objet de plusieurs études grâce à des résultats théoriques nouveaux, une forte demande dans plusieurs domaines incluant des applications industrielles, et au développement des moyens de calcul.

Contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire, l'optimisation globale numérique n'a pas hérité (du moins pas systématiquement 3) des facilités des

techniques numériques d'optimisation locale. En effet, ces dernières utilisent pour la plupart des directions de descentes (conditionnées par des calculs de gradients ou de leurs approximations) comme nous avons vu, ce qui permet de converger naturellement vers un point de minimum local. Or, justement, l'optimisation globale évite de rester en de tels points. Il lui faudrait, au contraire, en échapper.

C'est pourquoi beaucoup d'approches ont été utilisées dans la tentative de résoudre le problème. Il s'agit, de trouver un état de minimum et de ne s'arrêter que s'il est le meilleur (l'optimum global). Pour illustration de cette diversité, nous citons dans la suite les méthodes les plus utilisées d'entre elles ainsi que les différents principes sur lesquels elles se basent.

En dépit de l'abondance des méthodes proposées, nous pouvons leur trouver des traits caractéristiques suivant leurs approches. Ainsi nous donnons la classification suivante : On distingue deux types d'approches selon qu'elles incluent ou non des processus probabilistes : Les méthodes déterministes et les méthodes non-déterministes. **Les méthodes déterministes**

Ces méthodes ont tout d'abord été introduites pour résoudre de manière exacte des problèmes particuliers comme par exemple les problèmes continus et linéaires sous contraintes linéaires (algorithme du simplexe de Dantzig) ; ces méthodes ont aussi été élargies aux cas discrets et mixtes mais uniquement dans le cas linéaire.

La principale qualité des méthodes globales déterministes est qu'elles ne nécessitent pas de point de départ. Ces méthodes permettent de bien gérer les contraintes, contrairement aux méthodes stochastiques et peuvent s'appliquer aux problèmes mixtes (variables réelles, entières et de catégories). Elles garantissent l'obtention de la solution globale du problème. Cependant, il faut savoir que les méthodes déterministes globales restent utilisables tant que le nombre de variables ne devient pas trop important. Au delà d'une vingtaine de variables, elles atteignent leurs limites.

Ces méthodes permettent d'obtenir, à la convergence, la solution exacte du problème d'optimisation considéré avec une garantie absolue : en utilisant l'arithmétique d'intervalles arrondie. Aucune erreur numérique insidieuse ne peut écarter de tels algorithmes de la solution optimale, il sera dans le pire des cas seulement ralenti. Ces algorithmes sont appelés : algorithmes de Branch-and-Bound par intervalles . Les plus intéressantes d'entre elles sont :

- Méthodes à Recherche par Quadrillage (Grid Search Methods) .
- Méthodes des Trajectoires (Trajectory Methods) ;
- Méthodes de séparation-évaluation (Branch-and-Bound).

Les méthodes Evolutionnaires et les méthodes non déterministes

Ces méthodes non-déterministes font appel à des tirages de nombres aléatoires. Elles permettent d'explorer l'espace de recherche plus efficacement. Dans la suite on s'intéressera plus particulièrement aux métaheuristiques.

Le mot méta heuristique est dérivé de la composition de deux mots grecs :

- heuristique qui vient du verbe heuriskein (euriskein) et qui signifie trouver ;
- méta qui est un suffixe signifiant au-delà, dans un niveau supérieur.

Les premières méta heuristiques datent des années 1980. Elles sont utilisées généralement quand les méthodes classiques échouent. Le terme méta heuristique est utilisé par opposition aux heuristiques. En effet, les méta heuristiques peuvent être utilisées pour plusieurs types de problèmes, tandis qu'une heuristique est adaptée à un problème donné. Les méta heuristiques ont comme caractéristiques communes de part leurs caractères stochastiques, c.à.d. qu'une partie de la recherche est conduite de façon aléatoire, elles sont inspirées d'analogies avec la réalité : physique (recuit simulé,...), biologie (algorithmes évolutionnaires, recherche tabou,...) ou éthologie (colonies de fourmis,...). En plus de cette base stochastique, les méta heuristiques sont généralement itératives, c-à-d qu'un même schéma de recherche est appliqué plusieurs fois au cours de l'optimisation, et directes, c-à-d qu'elles n'utilisent pas l'information du gradient de la fonction objectif. Elles tirent en particulier leur intérêt de leur

capacité à éviter les optima locaux, soit en acceptant une dégradation de la fonction objectif au cours de leur progression, soit en utilisant une population de points comme méthode de recherche. Du fait du foisonnement de la recherche dans ce domaine, un grand nombre de méthodes de ce type existent. Dans la suite, nous verrons comment plusieurs concepts théoriques, notamment d'inspiration biologique, peuvent aider à la conception de nouvelles méta heuristiques.

- **Les méthodes inspirées des principes physiques**

Le recuit simulé : l'origine de cette méthode vient de l'analogie avec la métallurgie, elle consiste à monter la température du solide à des valeurs élevées pour atteindre des états de basse énergie d'un solide. Lorsque le solide est à une forte température, chaque particule possède une très grande énergie et peut effectuer de grands déplacements aléatoires dans la matière. Au fur et à mesure que la température est abaissée, chaque particule perd de l'énergie et sa capacité de déplacement se réduit. Les différents états transitoires de refroidissement permettent d'obtenir des matériaux très homogènes et de bonne qualité. Ce processus est appelé recuit.

L'idée de base est la suivante : à des paliers de températures décroissantes, l'algorithme utilise la procédure itérative, pour atteindre un état de quasiéquilibre thermodynamique. Cette procédure permet de sortir des *minima* locaux avec une probabilité d'autant plus grande que la température est élevée. Quand l'algorithme atteint les très basses températures, les états les plus probables constituent en principe d'excellentes solutions au problème d'optimisation.

Algorithme général de recuit simulé

Initialisation

Affectation

Tant que le critère d'arrêt de la température n'est pas satisfait faire

 Tant que (Répétition $<$ Palier_{de}température) faire

 Choisir s_n dans le Voisinage de s

 Calculer $DF \leftarrow F(s_n) - F(s)$

 Si $DF < 0$ alors

$s_n \leftarrow s$

 Si $F(s_n) < F(s_{opt})$ alors

$s_{opt} \leftarrow s_n$

$F_{opt} \leftarrow F(s_n)$

 Fin Si

 Sinon

$s \leftarrow s_n$ avec une probabilité de $P(T, s, s_{new})$

 Fin Si

 Fin du tant que

Mis à jour de la température T

Fin du tant que

Au début du processus on initialise l'algorithme à une température élevée puis des mouvements aléatoires (voisinage) sont réalisées pour chaque paramètre d'optimisation. Pour chacun de ces mouvements, la fonction objectif est évaluée et comparée avec la valeur antérieure. S'il y a un gain, les valeurs courantes des paramètres sont acceptées. Sinon, ils peuvent l'être quand même, avec une certaine probabilité dite de Boltzmann $P(T, s, s_{new}) = \exp(-\Delta E/k_B T)$, où ΔE est la différence entre les valeurs courantes et précédentes de la fonction objectif et T est le paramètre qui simule la température. Pour la suite on utilisera la loi classique c.à.d $T_k = \alpha T_{k-1}$, tel que α est appelé coefficient de refroidissement. Ce processus est répété pendant un nombre fixé Palier-de-température,

puis la température est réactualisée. La séquence des points générés converge normalement vers le *minimum* global.

En général, on choisit une température initiale suffisamment élevée qui donne une plus grande liberté pour l'exploration de l'espace de recherche. Puis, petit à petit, la température décroît jusqu'à atteindre une valeur proche de 0, ce qui signifie que la méthode n'acceptera plus de détériorer la solution.

• Les méthodes inspirées par des comportements biologiques

Les méthodes évolutionnaires ont un point commun puisque leurs itérations tendent à l'amélioration d'une solution unique. En effet, à partir d'une première solution, les approches décrites tentent de l'améliorer en fonction des contraintes du problème. Les méthodes auxquelles nous nous intéressons désormais considèrent la solution comme étant une population formée de plusieurs individus capables de répondre au problème.

a) L'algorithme de colonie de fourmis

Le premier algorithme d'optimisation par colonies de fourmis (Ant colony optimization, ACO) a été proposé par Dorigo vers le début des années quatre vingt dix. Aussi appelé Ant System (AS), a été développé spécialement pour résoudre le problème du voyageur de commerce. Depuis, cette approche a connu des variantes importantes et le nombre de travaux publiés augmente d'une année à l'autre.

Le principe de la méthode provient analogiquement avec les comportements collectifs des insectes, les algorithmes de colonies de fourmis sont nés d'une constatation simple : les insectes sociaux, et en particulier les fourmis, résolvent naturellement des problèmes complexes. Un tel comportement est possible car les fourmis communiquent entre elles de manière indirecte par le dépôt de substances chimiques, appelées phéromones, sur le sol et le suivi de pistes observés dans les colonies de fourmis et construisent ainsi une solution à un problème en tenant compte de leur expérience collective. Au fait, elles adoptent pour la recherche de la solution la notion du plus court chemin.

D'une manière simplifiée, les fourmis commencent par se déplacer au hasard. Puis, lorsqu'elles trouvent de la nourriture, elles retournent vers leur colonie, en marquant leur chemin à l'aide de phéromone. Si d'autres fourmis rencontrent ce chemin, il y a de fortes chances qu'elles arrêtent leurs déplacements aléatoires et qu'elles rejoignent le chemin marqué, en renforçant le marquage à leur retour, s'il mène bien vers la nourriture. Par conséquent, le chemin le plus court sera davantage parcouru, et donc plus renforcé et plus attractif. Par conséquent, le nombre de fourmis suivant cette trajectoire augmente. Au fil du temps, la quantité de phéromones déposée sur le plus long chemin diminue et finit par disparaître. Toutes les fourmis suivent alors le chemin le plus court. L'algorithme de colonies de fourmis a été principalement utilisé pour produire des solutions quasi-optimales au problème du voyageur de commerce, puis, plus généralement, aux problèmes d'optimisation combinatoire. Récemment, son emploi se généralise à plusieurs domaines, depuis l'optimisation continue jusqu'à la classification, ou encore le traitement d'image.

Algorithme général de colonie de fourmis

Étape 1 : Initialisation

Initialiser les pistes de phéromone

Étape 2 : Construction de la solution

Pour chaque fourmi répéter

Construction de la solution en utilisant les pistes de phéromone

Étape 3 : Mise à jour des pistes de phéromone

Jusqu'à atteindre la condition d'arrêt

b) Les algorithmes génétiques

Le concept d'**algorithme génétique** (de façon plus générale : algorithmes d'évolution) a été proposé par Holland en 1975 pour décrire les systèmes adaptatifs.

Les algorithmes génétiques, également appelés algorithmes évolutionnaires, sont inspirés du concept de sélection naturelle proposée par Charles Darwin. Le vocabulaire employé est directement calqué sur celui de la théorie de l'évolution

et de la génétique. Nous parlerons donc ici d'individus (solutions potentielles), de populations, de gènes (variables), de chromosomes, de parents, de descendants, de reproductions, etc. Les points de l'espace de recherche sont alors les individus d'une population et la fonction à optimiser correspond à leur adaptation. Ces algorithmes font évoluer une population de manière itérative.

Certains individus se reproduisent, d'autres mutent ou encore disparaissent et seuls les individus les mieux adaptés sont supposés survivre. L'héritage génétique des générations doit permettre à la population d'être de mieux en mieux adapté et donc de mieux répondre au critère d'optimisation.

Les principales étapes d'un algorithme génétique sont :

Les différentes étapes des algorithmes génétiques

Étape 1 : Génération de la population initiale

Étape 2 : Constitution d'une nouvelle population

- Mesure de l'adaptation de chacun des individus
- Reproduction des individus en fonction de leur adaptation.

Les plus performantes se reproduisent en priorité.

- Croisement de paires de séquences choisies aléatoirement
- Mutation de séquences tirées de manière aléatoire.

Étape 3 : Critère d'arrêt

- Il peut être défini en fonction du nombre de

En vue de sa généralisation et de son utilité dans plusieurs domaines industriels.

c) La méthode des essais particuliers

L'optimisation par essaim particulier (OEP) est une méta-heuristique d'optimisation née en 1995 aux États-Unis sous le nom de "Particle Swarm Optimization (PSO)". Elle a été inventée par Russel Eberhart (ingénieur en électricité) et James Kennedy (socio-psychologue). Initialement, ces deux concepteurs, cherchaient à modéliser des interactions sociales entre des "agents" devant atteindre un objectif donné dans un espace de recherche commun, chaque agent ayant une certaine capacité de mémorisation et de traitement de l'information.

La règle de base était qu'il ne devait y avoir aucun chef d'orchestre, ni même aucune connaissance par les agents de l'ensemble des informations, seulement des connaissances locales. Un modèle simple fut alors élaboré.

Des les premières simulations, le comportement collectif de ces agents évoquait celui d'un essaim d'êtres vivants convergeant parfois en plusieurs sous-essaims vers des sites intéressants. Ce comportement se retrouve dans bien d'autres modèles, explicitement inspirés des systèmes naturels. Ici, la métaphore la plus pertinente est probablement celle de l'essaim d'abeilles, particulièrement du fait qu'une abeille ayant trouvé un site prometteur sait en informer certaines de ses consœurs et que celles-ci vont tenir compte de cette information pour leur prochain déplacement. Finalement, le modèle s'est révélé être trop simple pour vraiment simuler un comportement social, mais par contre très efficace en tant qu'outil d'optimisation.

Les différentes étapes de l'algorithme sont présentées ci dessous :

Les différentes étapes de la méthode des essaims particulières

- 1 - Initialiser la population de particules avec des positions et vitesses aléatoires.
- 2 - Évaluer la fonction objectif pour chaque particule et calculer g .
- 3 - Pour chaque individu i , L_i est initialisée à P_i .
- 4 - Répéter jusqu'au critère d'arrêt
 - 4.1 - Mettre à jour les vitesses et les positions des particules.
 - 4.2 - Évaluer la fonction objectif pour chaque individu.
 - 4.3 - Calculer les nouveaux L_i et g .
- 5 - Afficher le meilleur état rencontré au cours de la recherche.

L'algorithme commence avec une initialisation aléatoire de l'essaim de particules dans l'espace de recherche. Chaque particule est modélisée par sa position dans l'espace de recherche et par sa vitesse. A chaque instant, toutes les particules ajustent leurs positions et vitesses, donc leurs trajectoires, par rapport à leurs meilleures positions, à la particule ayant la meilleure position dans l'essaim et à leur position actuelle. En réalité, chaque particule est influencée, non seulement par sa propre expérience, mais aussi par celle des autres parti-

cules. La position et la vitesse d'une particule dans un espace de recherche à N dimensions sont définies par : $P_i = (p_i, 1, \dots, p_i, N)$ et $V_i = (v_i, 1, \dots, v_i, N)$, respectivement. Chaque particule est caractérisée par sa meilleure position $L_i = (l_i, 1, \dots, l_i, N)$ à l'itération t . La meilleure position qu'atteint l'essaim est sauvegardée dans le vecteur $G = (g_1, \dots, g_N)$. La vitesse de chaque particule est mise à jour selon l'expression suivante :

$$v_{ij}(t+1) = K[w.v_{ij}(t) + c_1.r_1.(l_{ij}v_{ij}(t)) + c_2.r_2.(g_jv - ij(t))]$$

et

$$K = \frac{2}{|2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}|}$$

où $\varphi = c_1 + c_2$ et $\varphi > 4$.

les auteurs suggèrent les valeurs suivantes $j = 1, \dots, N$, w est une constante appelée facteur d'inertie, c_1 et c_2 sont des constantes appelées coefficients d'accélération, r_1 et r_2 sont des nombres aléatoires uniformément distribués dans l'intervalle $[0,1]$.

Si la vitesse calculée fait sortir une particule de l'espace de recherche, sa fitness n'est pas calculée. Compte tenu de la nouvelle vitesse, obtenue à partir de (a) et (b), la position à l'itération $t + 1$ est alors calculée :

$$p_{ij}(t+1) = p_{ij}(t) + v_{ij}(t+1), j = 1, \dots, N.$$

Les limites des méthodes d'optimisation globale Les algorithmes d'optimisation globale sont particulièrement efficaces lorsque la fonction est multimodale. Leur gros désavantage est que leur coût augmente, dans le pire des cas, exponentiellement avec la complexité du problème. Bellman a décrit ce concept en tant que malédiction dimensionnelle *curse of dimensionality*.

Bellman nous indique que si l'on veut trouver le minimum global d'une fonction de n_α variables avec une erreur relative sur les variables inférieure à ξ , alors il faudra effectuer $n_{eval} = O((\frac{1}{\xi})^{n_\alpha})$ évaluations.

Par exemple, sur un problème de dimension $n_\alpha = 10$, si l'on veut localiser à

10% près les variables optimales, il faut $n_{eval} = (\frac{1}{0.1})^{10}$ évaluations. Même pour une fonction évaluée en seulement 0.1 seconde, il faut plus de 10000 jours pour obtenir la solution.

2.7 Sensibilité et robustesse d'une méthode d'optimisation

L'efficacité d'une méthode d'optimisation est liée à la sensibilité et à la robustesse par rapport aux paramètres de contrôle et aux conditions initiales (valeur initiales des variables de conception, valeur initiales des paramètres de contrôle). Lorsque les variables de conception doivent prendre une valeur bien précise pour que la méthode de résolution converge vers l'optimum d'une fonction donnée, la méthode est dite sensible aux conditions initiales. Une méthode d'optimisation est robuste si pour une même valeur des paramètres de contrôle et des conditions initiales, elle est capable de trouver l'optimum de fonctions très différentes.

Une méthode parfaite devrait être totalement insensible aux conditions initiales et aux variables de conception et converger vers l'optimum quelles que soient la fonction objectif et les contraintes.

2.8 Les algorithmes de recherche chaotiques.

On a traité dans la section précédente une classe des approches probabilistes basées sur l'observation. Parmi ces méthodes, l'algorithme de recherche aléatoire est probablement le plus robuste, le plus simple et n'est pas limité par le dimensionnement de l'espace de recherche, ce pendant il est probablement le moins efficace. Les algorithmes de recherche aléatoire peuvent être utilisés d'une manière intelligente, de manière à ce que leur efficacité puisse être améliorée et leurs avantages restent valables en même temps. L'idée principale est

de construire des algorithmes de recherche chaotique qui explorent l'espace de recherche d'une manière chaotique. Les algorithmes d'optimisation chaotiques comme une méthode émergente de l'optimisation globale ont attiré beaucoup d'attention dans les applications d'ingénierie. Leurs bonnes performances ont été soulignées. Dans le cadre d'algorithmes évolutionnaires, l'utilisation de séquences chaotiques au lieu de celles é a été introduite par Caponetto et al. [7, 8]. Depuis leur travail original, la littérature sur l'optimisation chaotique est florissante. Ils sont utilisés dans le cadre de la méthode de réglage pour déterminer les paramètres du PID d'un régulateur de tension automatique, ou également pour l'optimisation de la conception technique et dans beaucoup d'autres problèmes physiques, économiques et biologiques.

2.8.1 Principes et étapes du COA basée sur 2-D modèle.

Beaucoup de problèmes d'optimisation sans contrainte avec des variables continues peuvent être formulés comme des problèmes d'optimisation de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_X f(x), \\ \text{telque} \\ X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ x_i \in [L_i, U_i], i = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

La f est appelée fonction objectif, X représente le vecteur des variables d'optimisation la procédure de recherche chaotique basée sur le modèle 2-D (Lozi) peut être illustrée comme suit[9] :

Entrées :

M_g :le nombre maximal d'itérations de la recherche globale chaotiques.

M_l :le nombre maximum d'itérations de la recherche locale chaotiques.

$M_l + M_g$: le critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ : le pas de la recherche locale chaotique.

Sorties : X : la meilleure solution d'exécution en cours de recherche chaotique.

f : la meilleure fonction objectif.

Le processus de base de COA comporte généralement deux phases principales définir un générateur de séquences chaotiques basées sur une application chaotique (ici 2 – D chaotique map).

puis on génère un point candidat xc dans la région de recherche $[L, U]$; l'optimum x , est le point candidat ayant obtenu la plus petite valeur de $f(xc)$.

Le processus est schématisé par l'algorithme de la page suivante, les points xc sont générés dans le domaine $[L, U]$ au moyen du vecteur chaotique z . Dans cet algorithme, nous supposons que les composantes de z sont restreintes à l'intervalle $[0, 1]$.

A chaque itération, un nouveau vecteur de séquences chaotiques est généré en utilisant le modèle chaotique.

Algorithm : COLM

1 -**Step 1** : Initialize the number M_g, M_l of chaotic search and initialization of variables and initial conditions Set $k = 1, y(0), y_1(0), a = 1.7$ and $b = 0.5$ of Lozi map.

Set the initial best objective function $\bar{f} = +\infty$

2 -**Step 2** : **algorithm of chaotic global search** :

while $k \leq M_g$ do $x_i(k) = L_i + z_i(k).(U_i - L_i)$

if $f(X(k)) < \bar{f}$ then

$\bar{X} = X(k); \bar{f} = f(x(k))$

end if

$k = k + 1$

end while

Step 3 : **algorithm of chaotic local search** :

while $k \leq (M_g + M_l)$ do

if $r \leq 0.5$ then

$x_i(k) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k).(U_i - L_i)$

else

$x_i(k) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k).(U_i - L_i)$

end if

if $f(X(k)) < \bar{f}$ then

$\bar{X} = X(k); \bar{f} = f(x(k))$

end if

$k = k + 1$

end while

On obtient un nouvel optimum local x . L'étape deux de cet algorithme de la recherche chaotique globale est similaire à la technique d'optimisation de Monte-Carlo qui converge lentement et obtient l'optimum global avec une faible probabilité. La première étape de cet algorithme est utilisée pour obtenir un bon optimum pour l'étape de raffinage où la recherche chaotique locale. z est toujours le modèle chaotique et λ est un paramètre scalaire lié au rayon de la

recherche autour de x . Les optima locaux sont mis à jour chaque fois qu'un point est trouvé de mieux telle que la procédure se poursuit pour la recherche au voisinage du nouveau point optimal.

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fourni une définition générale de l'optimisation et abordé quelques méthodes d'optimisation, où nous nous sommes concentrés sur l'optimisation globale et locale à la fois déterministe et stochastique. Parmi les méthodes déterministes, les méthodes de recouvrement qui ont la réputation d'être efficaces en dimension 1. Contrairement aux méthodes déterministes, les méthodes stochastiques ont l'avantage d'être facilement exécutables sur machine. Cependant, ces méthodes ne sont pas efficaces mais elles sont utilisées lorsqu'il n'est pas possible de résoudre le problème avec une méthode déterministe. Dans ce chapitre aussi, nous avons également fourni un exemple des algorithmes d'optimisation chaotique, dont nous présenterons une application sur ces algorithmes dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

Application de l'algorithme COLM basée sur les modèles chaotiques 2 – D

3.1 Introduction

Les systèmes non linéaires avec dynamique complexe ont récemment fait l'objet d'intenses recherches et exploration, conduit à la naissance de la théorie du chaos. Les systèmes chaotiques sont des systèmes déterministes qui présentent un comportement irrégulier et une dépendance sensible aux conditions initiales. La théorie du chaos étudie le comportement de systèmes qui suivent des lois déterministes mais qui semblent aléatoires et imprévisibles, c'est-à-dire des systèmes dynamiques. Les variables chaotiques peuvent passer par tous les états dans certaines gammes selon leur propre régularité sans répétition. Dans ce chapitre nous propose cinq modèles chaotique et nous avons utilisé pour compare l'algorithme d'optimisation chaotique. Par la suite, nous concluons le générateur le plus efficace.

3.2 Modèles en deux dimensions

Un modèle chaotique est un modèle qui présente un certain type de comportement chaotique. Dans ce travail, nous avons appliqué cinq modèles chaotiques différentes qui sont courantes dans la littérature, à savoir : le modèle de Hénon, le modèle de Lozi, le modèle de Gengebreadman et le modèle Zeraoulia. La forme mathématique d'un modèle bidimensionnelle chaotique lequel le modèle de carré de l'unité est $I \times I$, où $I = [0, 1]$ sur lui-même. Plus tard, nous utiliserons ces modèles dans les recherches chaotiques.

3.2.1 Modèle de Hénon

L'application Hénon est un système dynamique au temps discret [10]. C'est l'un des exemples les plus étudiés de systèmes dynamiques qui présentent un comportement chaotique.

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a(y_1(k-1))^2 + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où k est le numéro d'itération.

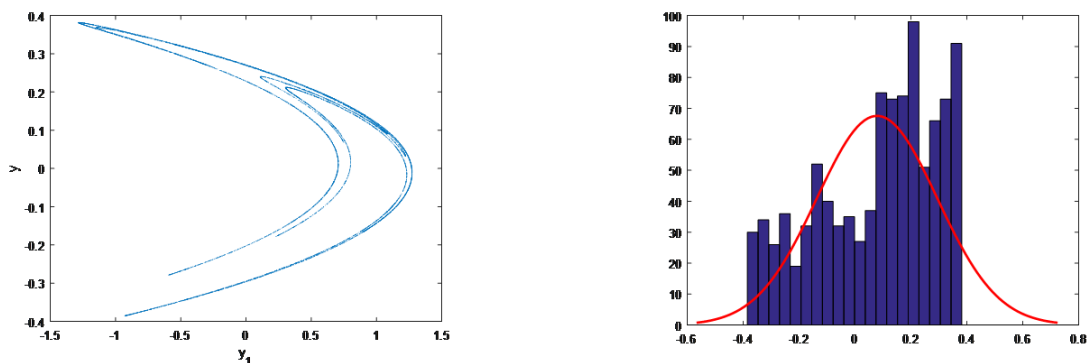


FIGURE 3.1 – Attracteur Hénon et histogramme de distribution des séquences chaotiques générées par le modèle de Hénon

3.2.2 Modèle de Lozi

Modèle de Lozi [11, 12] qui est une simplification linéaire par morceaux de modèle de Hénon et qui admet des attracteurs étranges. Il est donné par

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a|(y_1(k-1))| + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases} \quad (3.2)$$

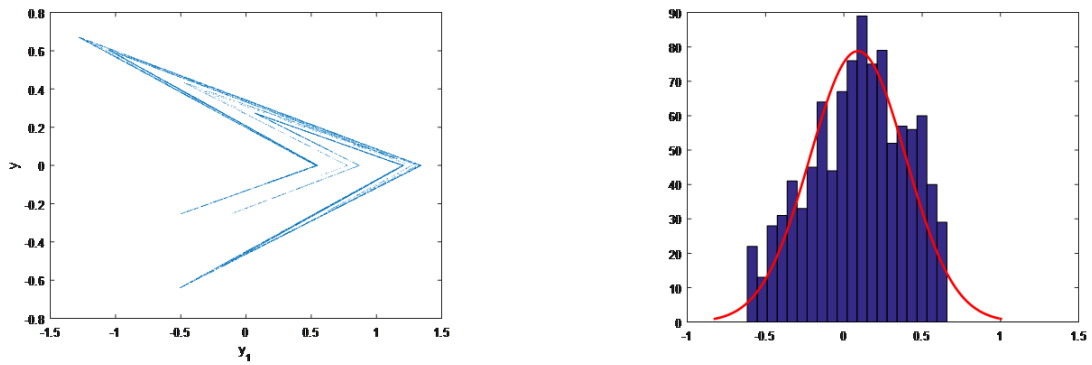


FIGURE 3.2 – Attracteur de Lozi et histogramme de distribution des séquences chaotiques générées par le modèle de Lozi

3.2.3 Modèle de Duffing

(aussi appelé 'Holmes map') [13] est un système dynamique en temps discret. C'est un exemple de système dynamique qui présente un comportement chaotique. Le modèle de Duffing est donné par :

$$\begin{cases} y_1(k) = y(k-1) \\ y(k) = -by_1(k-1) + ay(k-1) - y(k-1)^3 \end{cases} \quad (3.3)$$

Le modèle dépend des deux constantes a et b . Ceux-ci sont généralement définis sur $a = 2,75$ et $b = 0,2$ pour produire un comportement chaotique. C'est une version discrète de l'équation de Duffing.

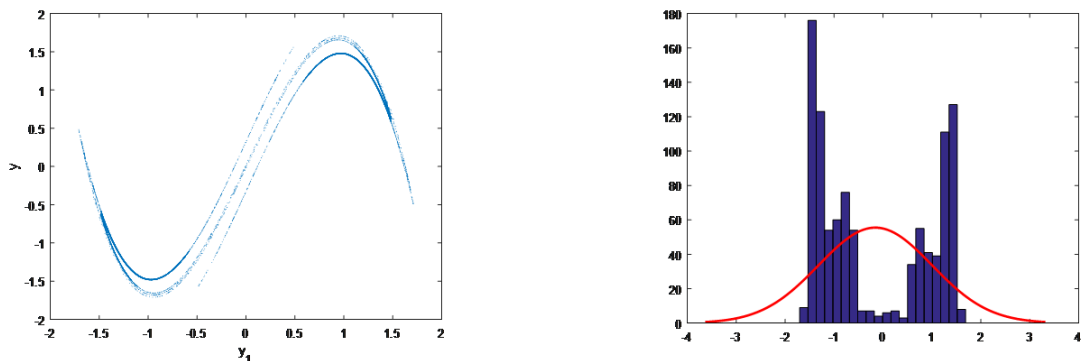


FIGURE 3.3 – Attracteur de Duffing et histogramme de distribution des séquences chaotiques générées par le modèle de Duffing

3.2.4 Modèle de Gingerbreadman

Dans la théorie des systèmes dynamiques, le modèle de Gingerbreadman [14] est un modèle bidimensionnelle chaotique. Elle est donnée par la transformation linéaire par morceaux

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - y(k-1) + |y_1(k-1)| \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases} \quad (3.4)$$

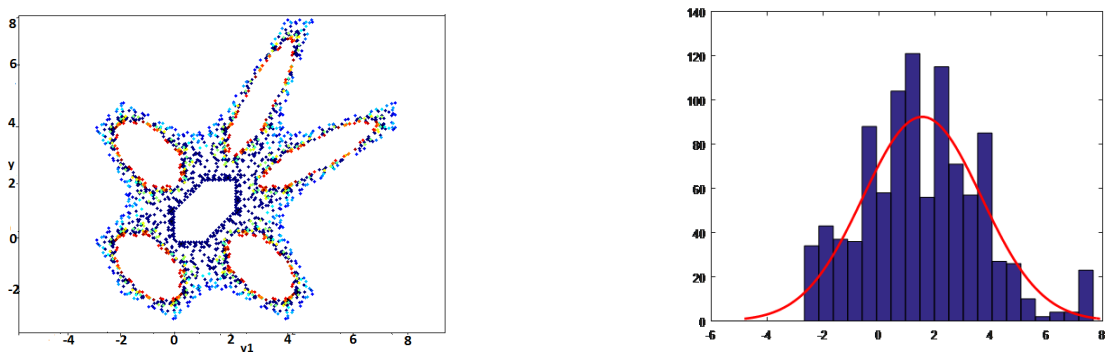


FIGURE 3.4 – Attracteur Gingerbreaman et histogramme de distribution des séquences chaotiques générées par le modèle Gingerbreaman

3.2.5 Modèle de Zeraoulia

En théorie des systèmes dynamiques, l'application de Zeraoulia [15] est une application chaotique à deux dimensions. Elle est donnée par la transformation linéaire par morceaux :

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a \sin(y_1(k-1)) + y_1(k-1) \\ y(k) = by_1(k-1) \end{cases} \quad (3.5)$$

Le choix du terme $\sin(x)$ a un rôle important en ce qu'il borne les solutions pour les valeurs de b telles que $|b| \leq 1$, et toutes les valeurs de a , tant qu'elles sont illimité pour $|b| > 1$. Les valeurs des paramètres choisis sont $a = 4$ et $b = 0,9$ comme suggéré dans [15]. Pour cela valorise l'attracteur observé.

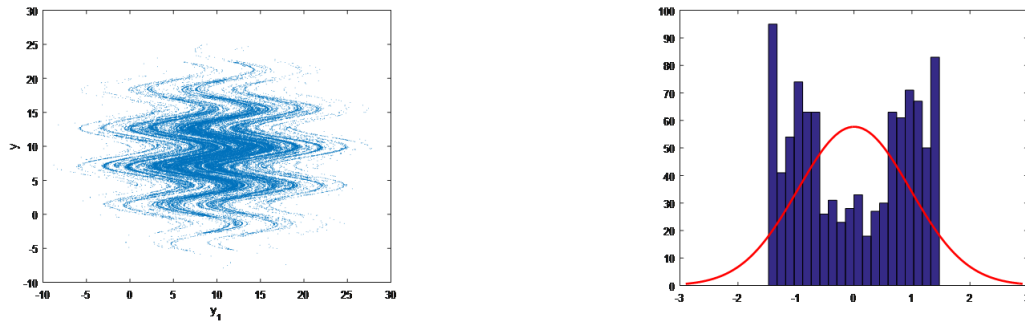


FIGURE 3.5 – Attracteur de Zeraoulia et histogramme de distribution des séquences chaotiques générées par le modèle de Zeraoulia.

3.3 Recherche d'optimisation chaotique

L'étude du chaos s'est rapidement développée et a attiré une grande attention en raison d'une variété d'applications scientifiques et technologiques, par ex. optimisation globale basée sur le chaos. Les systèmes chaotiques peuvent également être classés en systèmes de haute et basse dimensions. Les systèmes

chaotiques de faible dimension ont une efficacité élevée et une faible consommation de ressources. Les systèmes de faible dimension les plus couramment utilisés sont le modèle logistique [16, 17]. Le comportement chaotique de ces systèmes est fortement dégénéré. Il est difficile de s'assurer que la séquence de sortie a une grande période. En revanche, les systèmes chaotiques de grande dimension ont un comportement dynamique non linéaire plus complexe.

La périodicité de la séquence de sortie d'un modèle chaotique numérique bidimensionnelle est évidemment plus grande que celle de la séquence de sortie d'un modèle chaotique numérique unidimensionnelle, et son caractère aléatoire est également meilleur. L'algorithme d'optimisation chaotique COA est l'un des sujets brûlants au cours des dernières années. COA est une méthode efficace pour résoudre le problème d'optimisation d'une fonction multimodale non linéaire avec contrainte aux limites. Les algorithmes d'optimisation chaotique (COA) utilisent généralement différents modèles unidimensionnels (logistique, tente, Chebyshev, Circle, ...) comme générateur de variables chaotiques dans les problèmes d'optimisation non linéaire. Le principal défaut de cette méthode est que la distribution des séquences chaotiques produites par les modèles choisis est non uniforme et leur densité peu élevée au voisinage du point optimal global conduisant à la constringence lente. Cela a donné naissance à l'idée sur laquelle nous travaillons ; Qui stipule que nous recherchons et choisissons les modèles qui ont un bon comportement chaotique et une densité adéquate en élevant la dimension des modèles utilisées dans l'algorithme d'optimisation à la dimension 2. De nombreuses stratégies chaotiques dans COA comprennent généralement deux étapes principales [18, 19, 20] : la phase globale et la phase locale. Tout d'abord, pendant la phase globale, des points chaotiques sont extraits du domaine de recherche $[L, U]$ selon un certain modèle chaotique 2-D. Ensuite, la fonction objectif est évaluée en ces points et choisit le point avec la fonction objectif minimale comme optimum actuel. Deuxièmement, pendant la phase locale, l'optimum courant est supposé être proche de l'optimum global

après certaines itérations et il est considéré comme le centre avec une petite perturbation chaotique et l'optimum global est obtenu par la recherche fine.

Considérons le problème d'optimisation suivant sur le minimum de fonctions, si la fonction cible $f(x_i)$ est continue et différentiable, le problème objet à optimiser est présenté dans : Trouver x_i à minimiser $f(x_i); x_i \in [L_i, U_i]; i = 1, 2, \dots, n$.

Les principales procédures de cet algorithme sont présentées comme suit :

Entrées :

M_g : nombre maximum d'itérations de la recherche globale.

M_l : nombre maximal d'itérations de la recherche locale.

$M_l + M_g$: critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique en itérations

λ : taille de pas dans la recherche locale chaotique

Sorties :

X^* : meilleure solution de l'exécution actuelle de la recherche chaotique.

f^* : meilleure fonction objectif (problème de minimisation).

— **Étape 1 :** *initialisation* des nombres M_g, M_l d'étapes de recherche chaotique et initialisation des paramètres λ et conditions initiales. Soient $k = 1, y(0), y_1(0), a = 1.4$ et $b = 0.3$ de modèle de Hénon, $a = 1.7$ et $b = 0.5$ de modèle de Lozi, $a = 2.75$ et $b = 0.2$ de modèle de Duffing, $a = 4$ et $b = 0.9$ de modèle de Zeraoulia. Définit la fonction initiale du meilleur objectif $f^* = \text{infini}$.

— **Étape 2 :** *algorithme de recherche globale chaotique :*

soient les variables chaotiques $z_i(k) = \frac{(x_i(k) - L_i)}{(U_i - L_i)}$ dans les variables d'optimisation $x_i(k)$ par l'équation suivante dans la fonction de modèle chaotique :

$$x_i(k) = L_i + (U_i - L_i)z_i(k)$$

Où $i = 1, 2, \dots, n$.

Il est déterminé par la phase des séquences chaotiques générées par chaque modèle chaotique pour sélectionner quelle équation. Comme les séquences chaotiques générées par les modèles chaotiques sont l'intervalle $(0, 1)$, elles peuvent appliquer $(0, 1)$ dans l'intervalle (L, U) pour les variables d'optimisation.

- **Étape 3** : calculez la valeur de la fonction $f(x(k))$. Si $f(x(k)) < f^*$ alors $f^* = f(x(k))$ et la solution optimale $x^* = x(k)$
- **Étape 4** : utilise une fonction de modèle chaotique pour générer les prochaines variables chaotiques $z_i(k + 1)$.
- **Étape 5** : $k = k + 1$. Si $k \leq M_g$ passez à l'étape 2, sinon terminez la première étape de recherche.
- **Étape 6** : *algorithme de recherche locale chaotique* :
Si $r < 0.5$ alors (où r est un aléatoire uniformément distribué)
Appliquer les variables chaotiques $z_i(k)$ dans les variables d'optimisation $x_i(k)$ par l'une des équations suivantes de la fonction de modèle chaotique :

$$x_i(k + 1) = x_i^* + \lambda \cdot z_i(k) \cdot |U_i - L_i^*|$$

$$x_i(k + 1) = x_i^* - \lambda \cdot z_i(k) \cdot |U_i - L_i^*|$$

Où $i = 1, 2, \dots, n$.

- **Étape 7** : On calcule la valeur de la fonction $f(x(k_1)), f(x(k_2))$. Prenez la valeur minimale dans les deux comme $f(x(k))$. Si $f(x(k_1)) < f(x(k_2))$ alors $x(k) = x(k_1), f(x(k)) = f(x(k_1))$; sinon $x(k) = x(k_2), f(x(k)) = f(x(k_2))$. Comparez $f(x(k_1))$ avec la valeur optimale jusqu'ici f^* . Si

$f(x(k)) < f^*$ alors $f^* = f(x(k))$ et la solution optimale $x^* = x(k)$.

- **Étape 8** : utilise une fonction de modèle chaotique pour générer les prochaines variables chaotiques $z_i(k + 1)$.
- **Étape 9** : $k = k + 1$. Si $k \leq M_g + M_l$ passez à l'étape 6, sinon terminez la deuxième étape de recherche.

3.4 Résultats de la simulation

En mathématiques appliquées, les fonctions de test sont utiles pour évaluer les caractéristiques des algorithmes d'optimisation. La nature, la complexité et les autres propriétés de ces fonctions de référence peuvent être facilement obtenues à partir de leurs définitions. Les niveaux de difficulté de la plupart des fonctions de référence sont réglables en définissant leurs paramètres. À partir de l'ensemble standard de problèmes de référence disponibles dans la littérature, deux fonctions importantes (une contenant de nombreux optima locaux, mais un seul optimal global) sont considérées pour tester l'efficacité de l'algorithme proposé. Le tableau I Figure (6, 7) montre les principales propriétés des fonctions de référence choisissées utilisées dans les expériences, où Opt représente l'optimum réel. . Tous les programmes ont été exécutés sur un processeur Pentium IV 2 GHz avec 2 Go de mémoire vive dans le MATLAB.

L'algorithme utilisé pour la comparaison est un algorithme d'optimisation chaotique en deux étapes avec cinq modèle chaotiques. L'algorithme a été exécuté avec 50 exécutions ; $M_g=1000$, $M_l=400$. Et différentes valeurs pour la taille de pas λ (telles que $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.001$ et $\lambda \in]0.001, 0.01[$). Les tableaux (2,3,4) montrent la meilleure solution, la moyenne de la solution et l'écart type. D'après le tableau 2.3.4, toutes les meilleures solutions sont exactement égales à la solution exacte de la fonction 2.

D'après le tableau 3.4, le modèle de Hénon et le modèle de Zeraoulia ont les

meilleures solutions pour $\lambda = 0.001$ et $\lambda \in]0.001, 0.01[$ de la fonction 1 que les autres modèles. Le modèle Hénon, le modèle de Zeraoulia et le modèle Gingerbreadman ont les meilleures solutions pour $\lambda = 0.001$ et $\lambda \in]0.001, 0.01[$ de la fonction 2 que les autres modèles .

TABLE 3.1 – Propriétés des fonctions de référence

Function name	Expression	bounds	Opt	Modality
The Scheffer	$F_1(x_1, x_2) = -0.5 \frac{(\sin(\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}) - 0.5)}{(1 + 0.001(x_1^2 + x_2^2)^2)}$	$[-100, 100]$	-1	Multimodal
The Easom	$F_2(x_1, x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2)\exp(-(x_1 - \pi)^2 - (x_2 - \pi)^2)$	$[-20, 20]$	-1	unimodal

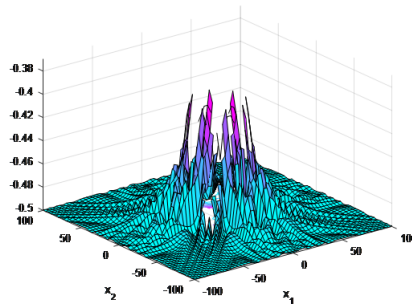


FIGURE 3.6 – Plot of F_1

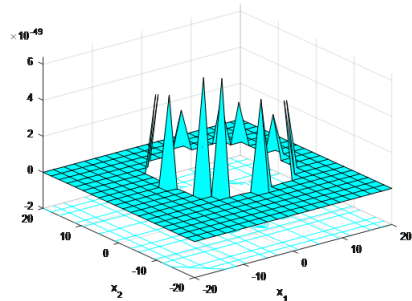


FIGURE 3.7 – Plot of F_2

TABLE 3.2 – COA a basé sur les cinq recherches chaotiques de sorte que $M_g = 1000$, $M_l = 400$, pour 50 itérations

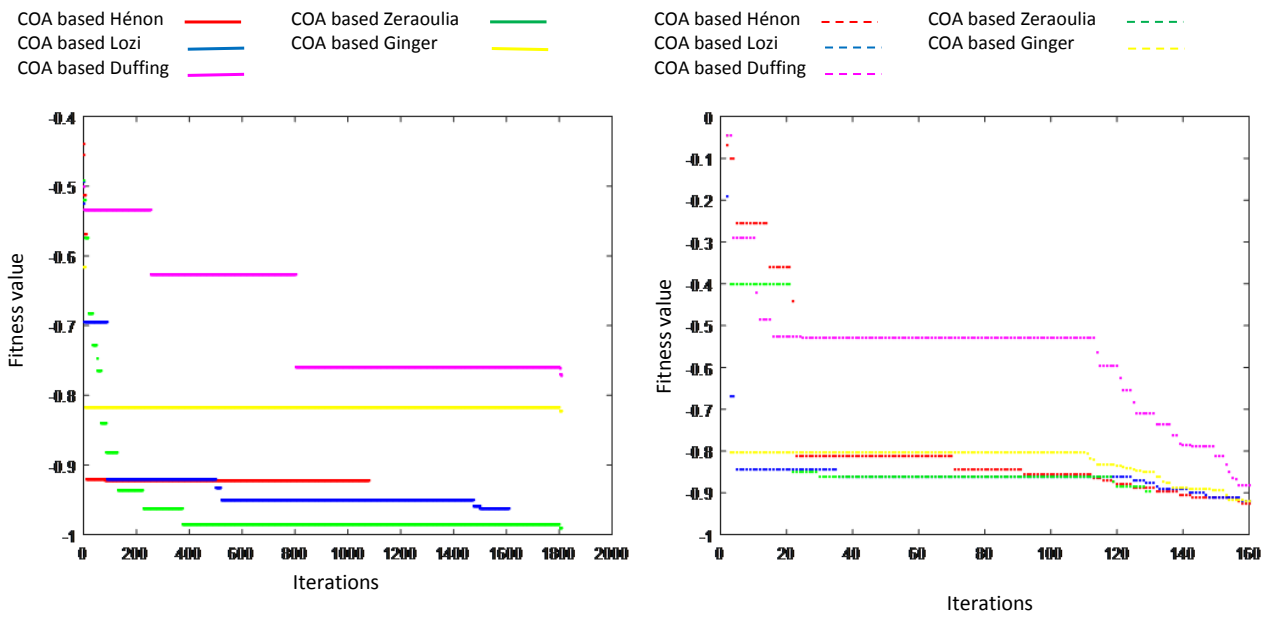
$\lambda=0.01$					
Function	Maps	Best fit	(Xbest,Ybest)	Mean fit	standard fit(%)
F_1	Hénon	-0.9897	(3.1331,0.4282)	-0.9897	$1.0e-15 \times 11.21$
	Lozi	-0.8304	(5.7743,10.8775)	-0.8304	$1.0e-14 \times 10.09$
	Duffing	-0.9398	(0.4017,-6.1062)	-0.9398	$1.0e-14 \times 2.24$
	Gingerbreadman	-0.8217	(-11.7448,-11.7448)	-0.8217	0.0000
	Zeraoulia	-0.9870	(3.1432,-0.5825)	-0.9870	$1.0e-15 \times 67.29$
F_2	Hénon	-0.9961	(3.1739 ,3.1812)	-0.9961	$1.0e-03 \times 4.52$
	Lozi	-0.9859	(3.0529,3.1054)	-0.9818	0.21
	Duffing	-0.9963	(3.1819,3.1128)	-0.9961	0.02
	Gingerbreadman	-0.9918	(3.0893,3.0893)	-0.9918	$1.0e-15 \times 44.86$
	Zeraoulia	-0.9961	(3.1006,3.1736)	-0.9960	$1.0e-03 \times 7.18$

TABLE 3.3 – COA a basé sur les cinq recherches chaotiques de sorte que $M_g = 1000$, $M_l = 400$, pour 50 itérations

$\lambda=0.001$					
Function	Maps	Best fit	(Xbest,Ybest)	Mean fit	standard fit(%)
F_1	Hénon	-0.9899	(3.1432,0.4698)	-0.9899	$1.0e-14 \times 3.36$
	Lozi	-0.8727	(5.4511 ,11.0601)	-0.8726	0.01
	Duffing	-0.9628	(0.2366,-6.2706)	-0.9627	0.01
	Gingerbreadman	-0.8218	(-11.4213,-11.4217)	-0.8214	0.04
	Zeraoulia	-0.9903	(3.0870,-0.6231)	-0.9902	0.01
F_2	Hénon	-1	(3.0706,3.0244)	-0.9983	0.53
	Lozi	-0.9999	(3.1335,3.1428)	-0.9999	0.1
	Duffing	-1	(3.1393,3.1363)	-1	0.0000
	Gingerbreadman	-1	(3.0303,3.030)	-0.9971	0.72
	Zeraoulia	-1	(3.1421,3.1388)	-1	$1.0e-03 \times 0.20$

TABLE 3.4 – COA a basé sur les cinq recherches chaotiques de sorte que $M_g = 1000$, $M_l = 400$, pour 50 itérations

λ between 0.01 and 0.001					
Function	Maps	Best fit	(Xbest,Ybest)	Mean fit	standard fit(%)
F_1	Hénon	-0.9899	(3.0829,0.4698)	-0.9899	$1.0e-14 \times 3.36$
	Lozi	-0.8727	(5.4511 ,11.0601)	-0.8726	0.01
	Duffing	-0.9628	(0.2366,-6.2706)	-0.9627	0.01
	Gingerbreadman	-0.8218	(-11.4213,-11.4217)	-0.8214	0.04
	Zeraoulia	-0.9903	(3.0870,-0.6231)	-0.9902	0.01
F_2	Hénon	-1	(3.0706,3.0244)	-0.9984	0.53
	Lozi	-0.9999	(3.1303,3.1385)	-0.9999	0.01
	Duffing	-1	(3.1399,3.1363)	-1	0.0000
	Gingerbreadman	-1	(2.9741,2.9741)	-0.9931	1.79
	Zeraoulia	-1	(3.1424,3.1388)	-1	$1.0e-03 \times 0.20$



(a)

FIGURE 3.8 – Comparaison des performances sur la fonction F_1 Schaffer et la fonction F_2 Easom.

Conclusion

L'objectif de ce travail est comparé des performances de l'algorithme d'optimisation basé sur certains modèles chaotiques. Nous avons proposé des modèles bidimensionnelles qui peuvent être utilisées comme générateur de recherche dans l'algorithme d'optimisation chaotique. Nous utilisons cinq modèles de recherches chaotiques. Notre conclusion principale est que comparer différentes recherches de générateur basées sur les résultats de simulation numérique. Nous avons exposé les séquences chaotiques générées et les meilleures séquences chaotiques obtenues. L'étude permet de conclure que l'utilisation des algorithmes chaotiques avec l'approche proposée, représente une technique d'optimisation globale efficace.

Cependant, des recherches supplémentaires sont nécessaires pour gagner en confiance et mieux comprendre la méthodologie proposée. Il est nécessaire d'évaluer l'algorithme proposé pour un grand nombre de fonctions de test de grande dimension ; analyser le comportement de notre approche lorsqu'elle est appliquée à des problèmes du monde réel et prouver l'algorithme avec d'autres types des modèles chaotiques de grande dimension.

Annexes

COA : Algorithme d'optimisation chaotique.

EDO : Équation différentielle ordinaire.

$\text{Tr}(A)$: la trace d'une matrice carrée A .

$\text{Det}(A)$: déterminant de d'une matrice carrée A .

Best fit : la meilleure solution de 50 itérations.

$(X_{\text{best}}, Y_{\text{best}})$: la meilleure point de 50 itération.

Mean fit : la moyenne solution de 50 itération.

Standard fit : erreur standard ou erreur quadratique moyenne height

Bibliographie

- [1] R. Bououden, *Système dynamique chaotique : Application à l'optimisation*, Thèse de doctorat 2019.
- [2] N. Madjeralli, *La borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système hyper-chaotique de Pan*, diplôme de mastère 2019.
- [3] O. Megherbi, *Synchronisation des systèmes chaotiques discrets d'ordre fractionnaire pour la sureté de communication à base d'observations impulsifs*, Thèse de doctorat 2018.
- [4] P. Djondiné, *Étude des comportements chaotiques dans les convertisseurs statique*, Thèse de doctorat 2015.
- [5] H. Hachimi, *Hybridations d'algorithmes métaheuristiques en optimisation globale et leurs applications*, Thèse de doctorat 2013.
- [6] K. Ferhaoui, *Optimisation globale basée sur l'analyse d'intervalle : Application et comparaisons*, Mémoire mastère.
- [7] M. Bucolo, R. Caponetto, L. Fortuna, M. Frasca, A. Rizzo, *Does chaos work better than noise? IEEE Circuits and Systems*, Magazine 2 (3) (2002) 4-19.
- [8] R. Caponetto, L. Fortuna, S. Fazzino, M.G. Xibilia, *Chaotic sequences to improve the performance of evolutionary algorithms*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation 7 (3) (2003) 289 - 304.
- [9] T.Hamaizia, *Systèmes dynamiques et chaos : Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique*, Thèse de doctorat 2013.

- [10] M. Hénon, *A two dimensional mapping with a strange attractor*, Commun. Math. Phys. 1976 ; 50(1) :69-77.
- [11] R. Lozi, *Un attracteur étrange ? du type attracteur de Hénon*, J. Phys. 39(C5), 1978, 9-10.
- [12] A. Aziz-Alaoui, C. Robert, C. Grebogi, *Dynamics of a Hénon-Lozi map*, Chaos, Solitons Fractals 12 (11) (2001) 2323-2341.
- [13] G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei Vernderlicher Eigenfrequenz*, F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918.
- [14] Devaney, R. L., 1989, *A piecewise linear model for the zones of instability of an area-preserving map*, Physica D 10, 387-93.
- [15] E. Zeraoulia, J.C. Sprott, *A two-dimensional discrete mapping with C1-multifold chaotic attractors*, Electronic Journal of Theoretical Physics 5 (17)(2008) 107-120.
- [16] M.S. Tavazoei and M. Haeri, *Comparison of Dierent One-Dimensional Maps as Chaotic Search Pattern in Chaos Optimization Algorithms*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 187, No. 2, pp. 1076-1085, 2007.
- [17] Jahani R, Chahkandi Nejad H, *Comparison of chaotic optimization algorithm and other evolutionary techniques for optimal unit commitment of power system*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences 2011 ; 5 : 923-929.
- [18] L. S. Coelho, *Tuning of PID controller for an automatic regulator voltage system using chaotic optimization approach*, Chaos, Solitons and Fractals, 39, 2009, 1504-1514
- [19] H. Shayeghi, S. Jalilzadeh, H.A. Shayanfar, A. Safari, *Robust PSS design using chaotic optimization algorithm for a multimachine power system*, in : ECTICON 2009, Pattaya, Thailand, 2009, 4043.

- [20] J. Gleick, *Chaos : Making a New Science*, New York, NY, USA : Viking, 1987.
- [21] X.X. Wu, Z. Chen, *Introduction of Chaos Theory*, Shanghai Science and Technology, Bibliographic Publishing House, 1996.
- [22] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke *Chaos : "an introduction to dynamical systems*, London, UK : Springer ; 1996.
- [23] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, 82 , 1975, 985-992.
- [24] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos*, Massachussets : Perseus Publishing, 2000.
- [25] J.C. Sprott, *Chaos and Times-Series Analysis*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2003.
- [26] Arora JS, Elwakeil OA, Chahande AI, Hsieh CC. *Global optimization methods for engineering application : a review*, Struct Optimization 1995 ; 9 : 137-159.
- [27] Li LX, Yang YX, Peng H, Wang XD, *An optimization method inspired by chaotic ant behavior*, Int J Bifurcat Chaos 2006 ; 16 : 2351-2364.
- [28] B. Li, W.S. Jiang, *Chaos optimization method and its application*, Journal of Control Theory and Application 14 (4) (1997) 613615.
- [29] B. Li, W.S. Jiang, *Optimizing complex function by chaos search*, Cybernetics and Systems 29 (4) (1998) 409419.
- [30] D. X. Yang, G. Li, G. D. Cheng, *On the efficiency of chaos optimization algorithms for global optimization*, Chaos, Soli. Fract, vol. 34, no. 4, pp. 1366-1375, 2007.
- [31] J.A. Koupaei, S.M.M. Hosseini , F.M. Maalek Ghaini . *A new optimization algorithm based on chaotic maps and golden section search method*. Engineering Applications of Artificial Intelligence 50 (2016) 201â214.

- [32] H. Shayeghi, H.A. Shayanfar, S. Jalilzade, A. Safari, *A PSO based unified powerow controller for damping of power system oscillations*, Energy Conversion and Management 50 (10) (2009) 2583-2592.
- [33] T. Hamaizia, R. Lozi, *An improved chaotic optimization algorithm using a new global locally averaged strategy*, Journal of Nonlinear Systems and Applications 3 (2) (2012) 5863.
- [34] SK Mishra, *Some New Test Functions For Global Optimization And Performance of Repulsive Particle Swarm Method*, 23 August 2006 ,Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/2718/>MPRA Paper No. 2718, posted 13 Apr 2007 UTC
- [35] Marcin Molga, Czesaw Smutnicki, *Test functions for optimization needs*, 3 kwietnia 2005.
- [36] Assarzadeh Z, Naghsh-Nilchi AR. *Chaotic particle swarm optimization with mutation for classification*. Journal of Medical Signals and Sensors. 2015 ;5(1) :12
- [37] Saremi S, Mirjalili S, Lewis A. *Biogeography-based optimisation with chaos*. Neural Computing and Applications. 2015 ;25(5) :1077-1097.
- [38] Dixiong Yang, Zhenjun Liu, Jilei Zhou .*Chaos optimization algorithms based on chaotic maps with different probability distribution and search speed for global optimization*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 2014 ;19(4) : 1229-1246.
- [39] A. Djaout , T. Hamaizia and F. Derouiche , *Performance Comparison of Some Two-Dimensional Chaotic Maps for Global Optimization*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 22 (2) (2022) 144â154.
- [40] M.Nouiri, *Implémentation d'une méta-heuristique embarquée pour résoudre le problème d'ordonnancement dans un atelier flexible de production*, Thèse de Doctorat 2017.

- [41] K.Khettab, *Techniques avancées pour la systèmes et l'amélioration des performances des systèmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour les processus incertains*, Thèse de Doctorat 2016.
- [42] M. Hamed, *Contribution à l'optimisation multi objective dynamique du coût et l'émission de gaz considérant les contraintes pratiques et de sécurité*, Thèse de Doctorat 2019.
- [43] A. Bensaad, *Contribution a l'analyse des bifurcations des systèmes non linéaire : Application au système proie-prédateur*, Thèse de Doctorat 2019.

Abstract

In this work we presented the performances of a new class of evolutionary algorithms called chaotic optimization algorithm (COA). Proposed to solve nonlinear optimization problems with bounded variables by Caponetto et al. Chaotic optimization is a new stochastic optimization algorithm, which directly uses chaotic variables to find the optimal solution. Different chaotic maps have been considered, combined with several working strategies. We propose five different 2D chaotic maps in an optimization algorithm using a two-step chaotic optimization method and compare them. This study reviews and compares chaotic optimization algorithms from the literature. Moreover, the two-phase strategy is a commonly used technique in a COA to refine the solution and help escape local optima. A performance study is conducted to understand their impact on a chaotic optimization algorithm.

Keywords :Chaotic optimization algorithm- Dynamic system- Chaos- Optimisation.

Résumé

Dans ce travail on a présenté les performances d'une nouvelle classe d'algorithmes évolutionnaires appelés algorithme d'optimisation chaotique (COA). Proposé pour résoudre des problèmes d'optimisation non linéaire avec des variables bornées par Caponetto et al. [7, 8]. L'optimisation chaotique est un nouveau algorithme d'optimisation stochastique, qui utilise directement les variables chaotiques pour rechercher la solution optimale. Différents modèles chaotiques ont été envisagés, combinées à plusieurs stratégies de travail. Nous proposons cinq modèles chaotiques 2D différents dans un algorithme d'optimisation utilisant une méthode d'optimisation chaotique en deux phases et les comparons.

Cette étude passe en revue et compare les algorithmes d'optimisation chaotique de la littérature. De plus, la stratégie en deux phases est une technique couramment utilisée dans un COA pour affiner la solution et aider à échapper aux optimums locaux. Une étude de performance est menée pour comprendre leur impact sur un algorithme d'optimisation chaotique.

Mots clés : Algorithme d'optimisation chaotique- Système dynamique- Chaos- Optimisation.

ملخص

في هذا العمل قدمنا أداء فئة جديدة من الخوارزميات التطورية تسمى خوارزمية التحسين الفوضوي (COA). مقترح لحل مشاكل التحسين غير الخطية مع المتغيرات المحدودة بواسطة **Caponetto et al**.

التحسين الفوضوي عبارة عن خوارزمية تحسين عشوائية جديدة، والتي تستخدم بشكل مباشر المتغيرات الفوضوية للعثور على الحل الأمثل. تم النظر في نماذج فوضوية مختلفة، بالإضافة إلى العديد من استراتيجيات العمل. نقترح خمسة نماذج فوضوية مختلفة ثنائية الأبعاد في خوارزمية تحسين باستخدام طريقة تحسين فوضوية على مرحلتين ومقارنتها.

تستعرض هذه الدراسة وتقارن خوارزميات التحسين الفوضوية من الأدبيات. علاوة على ذلك، فإن الاستراتيجية ذات المرحلتين هي تقنية شائعة الاستخدام في شهادة توثيق البرامج لتحسين الحل والمساعدة في تجنب الحل المثالي المحلي. يتم إجراء دراسة للأداء لفهم تأثيرها على خوارزمية تحسين فوضوية.

الكلمات المفتاحية:

خوارزم التحسين الفوضوي، النظام الديناميكي، الفوضى، التحسين.