

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

NUMERO D'ORDRE : 24/D3C/2018
NUMERO DE SERIE : 01/Math/2018

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :
Doctorat 3^{ème} Cycle LMD en Mathématiques

Option : Equations Différentielles

Thème

**ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES
DE CAUCHY INVERSES**

Par :


BENCHIKHA Abdelali

Devant le Jury :

Président :	N. KECHKAR	Prof.	Univ. Frères Mentouri Constantine
Rapporteur :	M. DENCHE	Prof.	Univ. Frères Mentouri Constantine
Examineurs :	M. YAROU	Prof.	Univ. de Jijel
	A. NOUAR	M.C.A	Univ. de Skikda

Année Universitaire : 2017-2018

Remerciements

ouange à **ALLAH** Le tout Puissant, Seigneur des mondes et que le Salut et la Bénédiction soient sur Celui Qui a Eté Envoyé comme Miséricorde à toutes les créatures, notre **Prophète MOHAMED**, ainsi que sur Les Gens de Sa Maison et l'Ensemble de Ses Compagnons et sur Tous Ceux Qui Suivent Leurs Traces jusqu'au Jour de la Résurrection.

En premier lieu, je tiens à exprimer toute ma très profonde reconnaissance à mon directeur de Thèse, Monsieur Le Professeur **Denche Mohamed**, pour l'encadrement attentionné, son soutien constant tout au long de ma Thèse et sa vaillance sur le bon déroulement du travail.

Je remercie vivement tous les membres du Jury Monsieur **Kechkar Nasreddine** Professeur à l'Université Frères Mentouri Constantine, Monsieur **Yarou Mustapha** Professeur à l'Université de Jijel, et Monsieur **Nouar Ahmed** Maître de Conférences à l'Université de Skikda, d'avoir accepté de participer à la soutenance, et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leur attention sur ce travail.

Plus personnellement, je dédie cette Thèse à Quelqu'un Qui m'a Pris par la main quand j'étais petit et Qui m'a Guidé sur le chemin d'un bonheur, c'est La Personne La Plus Importante et La Première dans ma vie :

♡ **Ma Mère AIMEUR ZOHRA** ♡,

sans Elle, cette Thèse n'aurait jamais vu le jour, à **Mon Père Ibrahim Nasrallah**, pour leur soutien constant, leurs encouragements et son aide, à **Mes Chers Frères Mohamed et Ahmed**, ainsi qu'à **Ma Soeur Leila** et tous mes proches. Je ne saurai jamais leur témoigner suffisamment toute mon affection et ma gratitude pour m'avoir toujours soutenu.

Je tiens enfin à exprimer ma gratitude et reconnaissance envers tous ceux qui ont été mes Enseignants durant toutes mes Années d'Etudes.

Publications découlantes de cette Thèse

□ Denche Mohamed et Benchikha Abdelali

1. An a posteriori truncation regularization method for an ill-posed problem for the heat equation with an integral boundary condition.

- Georgian Mathematical Journal.
- Date de soumission : 25 Mars 2015.
- Date d'acceptation : 08 Juillet 2016.
- Date de publication : 21 Septembre 2017.
- Article URL : <https://doi.org/10.1515/gmj-2017-0021> .

Le travail est approuvé par la **Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique (DGRSDT)**. Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique d'Algérie.

2. An a posteriori truncation regularization method for an abstract parabolic non-homogeneous backward Cauchy problem.

3. An a posteriori truncation method for the backward non-homogeneous heat equation with integral boundary condition.

4. An a posteriori truncation method of a boundary value problem for second order parabolic equation with non-local conditions.


Les trois derniers travaux ont été soumis pour publications dans des revues internationales.

Table des matières

PLAN DE LA THÈSE	3
INTRODUCTION GÉNÉRALE	4
1 NOTIONS PRÉLIMINAIRES	6
1.1 Notions sur les problèmes mal posés	6
1.2 Exemples de problèmes mal posés	7
1.2.1 Le problème de Cauchy inverse pour l'équation de la chaleur non-homogène	8
1.2.2 Le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace dans le cas bidimensionnel	9
1.2.3 Un problème de Neumann mal posé	10
2 RÉGULARISATION D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES DE CAUCHY INVERSES NON-HOMOGÈNES	12
2.1 Motivation au problème	12
2.2 La formulation mathématique et la cause de l'instabilité . . .	14
2.3 Le choix a posteriori du paramètre de régularisation et les estimations de la stabilité	16
2.4 Expériences numériques	21
3 RÉGULARISATION D'UN PROBLÈME MAL POSÉ POUR L'ÉQUA- TION DE LA CHALEUR AVEC UNE CONDITION INTÉGRALE	26
3.1 Motivation au problème	26
3.2 Représentation de la solution du problème (3.1.4)–(3.1.7) . . .	28
3.3 La formulation mathématique du problème et l'analyse de l'in- stabilité	30
3.4 Sélection a posteriori du paramètre de régularisation et esti- mations de la stabilité	31
3.5 Applications numériques	35

4	RÉGULARISATION D'UN PROBLÈME NON-HOMOGENÈ	
	POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC UNE CONDITION IN-	
	TÉGRALE	40
4.1	Introduction	40
4.2	Représentation de la solution du problème (4.1.5)–(4.1.8) . . .	42
4.3	La formulation mathématique et l'analyse de l'instabilité . . .	44
4.4	Règle du choix a posteriori du paramètre de régularisation et les estimations de la stabilité	45
4.5	Exemple numérique	52
5	RÉGULARISATION D'UN PROBLÈME NON-HOMOGENÈ	
	POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC DES CONDITIONS	
	NON-LOCALES	58
5.1	Introduction	58
5.2	Représentation de la solution du problème (5.1.1)–(5.1.4) . . .	59
5.3	La formulation mathématique et l'analyse de l'instabilité . . .	62
5.4	Le choix a posteriori du paramètre de régularisation et les estimations de la stabilité	62
5.5	Simulations numériques	69
	BIBLIOGRAPHIE	75

Plan de la Thèse

 Dans cette Thèse, on s'intéresse à l'étude de certaines classes de problèmes inverses mal posés, celle-ci est composée d'une introduction et de cinq chapitres.

- Le premier chapitre (1) est consacré à certaines notions préliminaires sur les problèmes mal posés au sens d'Hadamard en les illustrant par des exemples bien détaillés.
- Dans le deuxième chapitre (2), on aborde l'étude d'un problème de Cauchy abstrait parabolique rétrograde non-homogène à coefficient opératoire positif auto-adjoint non borné. Ce problème est mal posé. On propose alors de le régulariser par une méthode de troncature avec un choix a posteriori du paramètre de régularisation. Un exemple numérique est donné pour montrer l'efficacité de la méthode proposée.
- La même méthode a été appliquée avec succès dans le troisième chapitre (3) sur un problème mal posé pour l'équation de la chaleur avec une condition intégrale. Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans le journal international **Georgian Mathematical Journal**.
- Le quatrième chapitre (4) traite un problème non-homogène pour une équation parabolique du second ordre avec une condition aux limites intégrale. On montre qu'il est mal posé et on propose de le régulariser par la même méthode appliquée précédemment. On illustre la méthode par une application numérique.
- Le dernier chapitre (5) est consacré à l'étude d'un problème non-homogène mal posé pour l'équation de la chaleur où on combine entre une condition aux limites intégrale et une autre non-locale. On analyse l'instabilité du problème et on propose une régularisation par la méthode appliquée dans cette Thèse. Enfin, un exemple numérique est donné pour prouver l'efficacité de la méthode.

Introduction générale

□ PROBLÈMES MAL POSÉS

LE concept de problème bien posé en physique mathématique a été introduit en 1923 par le Mathématicien Français Jacques Salomon Hadamard dans son écrit sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique [15]. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, est unique et dépend continûment des données (stabilité). Il est à noter que ces notions doivent être précisées par le choix des espaces et des topologies. Hadamard pensait que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique.

Les problèmes mal posés ont été longtemps négligés par la physique mathématique les considérant dénués de sens physique ou reflétant une modélisation inadéquate. Actuellement, la notion de problèmes mal posés est reconnue et inspire de nombreuses recherches en mathématiques.

□ PROBLÈMES INVERSES

UN problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène. Par exemple, en sismologie, la localisation de l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre est un problème inverse. C'est également en quelques sortes le contraire d'un problème direct.

D'après J. B. Keller [22], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. Cette définition comporte une part d'arbitraire, et fait jouer un rôle symétrique aux deux problèmes considérés.

Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues. Cette définition montre que nous sommes plus habitués à étudier des problèmes directs. En effet, depuis Newton la notion de causalité est ancrée dans notre subconscient scientifique, et à un niveau plus prosaïque, nous avons appris à poser, puis résoudre des problèmes pour lesquels les causes sont données, et l'on cherche les effets.

La prédiction de l'état futur d'un système physique, connaissant son état actuel, est l'exemple type du problème direct. On peut envisager divers problèmes inverses : par exemple, reconstituer l'état passé du système connaissant son état actuel (si ce système est irréversible), ou la détermination de paramètres du système, connaissant (une partie de) son évolution.

On retrouve des problèmes inverses dans de nombreux domaines scientifiques, en particulier dans les tissus organiques en imagerie médicale, le traitement du signal, la cosmologie, une salle de concert en acoustique architecturale, l'Univers en cosmologie..., ce caractère répandu, et ce dans des domaines aussi divers s'explique par la nature très générale des problèmes inverses.

La résolution d'un problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle, voire de problèmes non linéaires, c'est-à-dire que la modélisation peut s'approcher des observations en s'écartant des paramètres réels. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des informations a priori qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique.

Une difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, ce qui se traduit par le recours à une grande variété de notions tant physiques que mathématiques. Le succès dans la résolution d'un problème inverse repose en général sur des éléments spécifiques à ce problème.

Notions préliminaires

AU début de cette Thèse, on rappelle quelques notions importantes sur les problèmes mal posés en les illustrant par des exemples bien détaillés. Plus précisément, on aborde trois exemples de problèmes mal posés qui sont : le problème de Cauchy inverse pour l'équation de la chaleur non-homogène, le problème de Cauchy pour l'équation de la Laplace dans le cas bidimensionnel, et enfin, on terminera par un problème de Neumann.

1.1 Notions sur les problèmes mal posés

Le concept mathématique de problème bien posé provient d'une définition du Jacques Salomon Hadamard* qui pensait que les modèles mathématiques de phénomènes physiques devraient avoir les trois propriétés suivantes : **une solution existe, la solution est unique, la solution dépend de façon continue des données** dans le cadre d'une topologie raisonnable.

Définition 1.1.1 (Hadamard) *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $A : X \rightarrow Y$ un opérateur. Le problème inverse $Ax = y$ est bien posé au sens d'Hadamard si :*

1. **Existence** : Pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$, tel que $Ax = y$.
2. **Unicité** : Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$.
3. **Stabilité** : La solution x dépend continûment de la donnée y .

Si au moins l'une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit mal posé ou incorrectement posé.

*. Mathématicien Français né le 08 Décembre 1865 à Versailles, mort le 17 Octobre 1963 à Paris connu par ses travaux en théorie des nombres, en analyse complexe, en analyse fonctionnelle, en géométrie différentielle et en théorie des équations aux dérivées partielles.

Remarque 1.1.1 De la Définition précédente, on remarque le suivant :

1. Du point de vue mathématique, la condition 1 exige que l'opérateur A soit surjectif, c'est-à-dire :

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : Ax = y.$$

2. La condition 2 exige que l'opérateur A soit injectif, c'est-à-dire :

$$\forall x_1, x_2 \in X : Ax_1 = Ax_2 \implies x_1 = x_2.$$

3. La condition 3 signifie mathématiquement la continuité de l'opérateur inverse A^{-1} , en d'autres termes :

$$\text{pour } Ax = y, A\hat{x} = \hat{y}, \text{ on a : } \lim_{\hat{y} \rightarrow y} \hat{x} = x.$$

On note que ces notions doivent être bien précisées par le choix des espaces ou des topologies, dans lesquelles les données et la solution évoluent.

Le fait que la solution d'un problème puisse ne pas exister, n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématiques).

Si un problème a plusieurs solutions (non-unicité) c'est une chose plus sérieuse, il faut un moyen de choisir entre elles. Dans ce cas, il faut ajouter des informations supplémentaires pour minimiser le nombre des solutions (une information a priori).

La question la plus difficile sans aucun doute est celle de la stabilité : si l'on change légèrement les données (conditions initiales, conditions aux limites, coefficients, la géométrie du domaine, et les éventuelles variations en temps de ces derniers) la solution varie-t-elle peu ou beaucoup ? C'est-à-dire, varie-t-elle continûment en fonction des données ? Il y a des problèmes où une petite différence dans les paramètres entraîne un comportement totalement différent de la solution (cas des phénomènes dits "chaotiques").

Le manque de stabilité est problématique, en effet, le fait de remplacer le problème exact par un problème approché implique en général des perturbations sur les données. Si on n'est pas assuré que de "petites" perturbations sur les données entraînent des perturbations "pas trop grandes" sur la solution, il devient très difficile de calculer une solution approchée du problème.

1.2 Exemples de problèmes mal posés

Ci-après, on donne trois exemples de problèmes mal posés.

1.2.1 Le problème de Cauchy inverse pour l'équation de la chaleur non-homogène

Exemple 1.2.1 *Considérons le problème de Cauchy inverse suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \xi(x,t), & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x,T) = \psi(x), & x \in [0, \pi], \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où $\psi(x)$ et $\xi(x,t)$ sont deux fonctions données. Le nombre T est strictement positif, c'est-à-dire $T > 0$.

Le problème direct lié à l'équation de la chaleur est de déterminer la température $u(x,t)$ au temps $t \in (0, T)$ à savoir la température initiale $u(x,0)$, tandis que le problème inverse est de déterminer $u(x,t)$ pour $t \in (0, T)$ à savoir la température finale $u(x,T)$.

Par la méthode de séparation des variables, on obtient la solution du problème (1.2.1) donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)n^2} \psi_n - \int_t^T e^{(s-t)n^2} \xi_n(s) ds \right) \phi_n(x), \quad (1.2.2)$$

avec

$$\psi_n = \int_0^\pi \psi(x) \phi_n(x) dx, \quad \xi_n(t) = \int_0^\pi \xi(x,t) \phi_n(x) dx,$$

et

$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ qui forment une base orthonormale complète dans l'espace de Hilbert $L^2(0, \pi)$.

Il est clair que si cette solution existe, elle est unique et cela par l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations paraboliques.

Le problème consiste à chercher la donnée initiale, c'est-à-dire la solution $u(x,t)$ à l'instant $t = 0$. En remplaçant $t = 0$ dans (1.2.2) on obtient :

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{Tn^2} \psi_n - \int_0^T e^{sn^2} \xi_n(s) ds \right) \phi_n(x). \quad (1.2.3)$$

On peut voir que le problème (1.2.1) est résoluble si la série (1.2.3) est convergente dans $L^2(0, \pi)$ et cela veut dire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{Tn^2} \psi_n - \int_0^T e^{sn^2} \xi_n(s) ds \right)^2 < +\infty. \quad (1.2.4)$$

Cette dernière condition de convergence ne peut pas avoir lieu seulement si ψ_n et ξ_n décroissent suffisamment rapide pour n assez grand, donc la solution dans le cas contraire n'existe pas, et par suite le problème (1.2.1) est mal posé.

Remarque 1.2.1 *Même si on suppose que la solution existe, le problème (1.2.1) reste mal posé, car nous nous trouvons face à un problème d'instabilité, c'est-à-dire que des petites perturbations de la donnée finale ψ n'impliquent guère le même comportement sur la solution.*

1.2.2 Le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace dans le cas bidimensionnel

Exemple 1.2.2 † *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi_1(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2.5)$$

où $\varphi_1(x)$ et $g_1(x)$ sont deux fonctions données. Si on prend :

$$g_1(x) = 0, \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x), \quad \alpha > 0,$$

on obtient la solution du problème de Cauchy (1.2.5) donnée par :

$$u_1(x, y) = \frac{1}{\alpha^2} \sin(\alpha x) \sinh(\alpha y). \quad (1.2.6)$$

Il est clair que $u_1(x, y)$ est une solution unique du problème (1.2.5) et cela par l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations elliptiques.

Maintenant, prenons les données différentes suivantes :

$$g_2(x) = 0, \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = 0,$$

On vérifie aisément que :

$$u_2(x, y) = 0, \quad (1.2.7)$$

est l'unique solution du problème (1.2.5).

Estimons au sens de la métrique d de C (l'espace des fonctions continues) les différences entre les données initiales et les solutions (1.2.6) et (1.2.7) :

$$\begin{aligned} d(g_1, g_2) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_1(x) - g_2(x)| \\ &= 0, \end{aligned}$$

†. Exemple cité par Hadamard, voir [14].

$$\begin{aligned}
d(\varphi_1, \varphi_2) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) \right| \\
&= \frac{1}{\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(u_1, u_2) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_1(x, y) - u_2(x, y)| \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\alpha^2} \sin(\alpha x) \sinh(\alpha y) \right| \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \sinh(\alpha y).
\end{aligned}$$

C'est clair qu'on peut rendre la valeur $\frac{1}{\alpha}$ assez petite que l'on veut en prenant des valeurs assez grandes de α . Par contre, la valeur $\frac{1}{\alpha^2} \sinh(\alpha y)$ peut être rendue assez grande que l'on veut pour des valeurs suffisamment élevées de α pour chaque $y > 0$ fixé. Par conséquent, des petites perturbations sur les données entraînent des grandes variations sur les solutions, et par suite le problème (1.2.5) est instable, donc il est mal posé.

1.2.3 Un problème de Neumann mal posé

Exemple 1.2.3 *Considérons le problème de Neumann pour une fonction $u(x)$ à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a, b]$:*

$$\begin{cases} u''(x) = 0, \\ u'(a) = \psi, \\ u'(b) = \varphi, \end{cases} \quad (1.2.8)$$

où ψ et φ sont deux constantes réelles.

On veut savoir si ce problème est mal ou bien posé. Cherchons alors la solution $u(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
u''(x) = 0 &\implies \int u''(x) dx = \int 0 dx, \\
&\implies u'(x) = c_1 / c_1 \text{ est une constante réelle arbitraire,} \\
&\implies \int u'(x) dx = \int c_1 dx, \\
&\implies u(x) = c_1 x + c_2 / c_2 \text{ est une constante réelle arbitraire.}
\end{aligned}$$

Cette solution doit vérifier les deux conditions du problème, on a alors :

$$u'(x) = c_1 \implies u'(a) = c_1 = \psi, \quad (1.2.9)$$

$$u'(x) = c_1 \implies u'(b) = c_1 = \varphi. \quad (1.2.10)$$

De (1.2.9) et (1.2.10), on obtient : $\psi = \varphi$.

De ce qui précède, on déduit que la solution du problème (1.2.8) n'existe pas si $\psi \neq \varphi$, par contre si $\psi = \varphi$ on obtient une infinité de solutions de la forme $u(x) = \psi x + c_2$ qui vérifient le problème (1.2.8), et dans les deux cas le problème est mal posé.

Régularisation d'une classe de problèmes de Cauchy inverses non-homogènes

Dans ce chapitre, on étudie un problème de Cauchy abstrait parabolique rétrograde non-homogène à coefficient operatoriel positif auto-adjoint non borné sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . En utilisant la méthode de troncature avec une règle du choix a posteriori du paramètre de régularisation, on donne les estimations de convergence entre la solution exacte et son approximation régularisée. Enfin, un exemple numérique est donné pour montrer l'efficacité de la méthode proposée.

2.1 Motivation au problème

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\|\cdot\|$. Pour un nombre strictement positif T , on considère le problème de Cauchy non-homogène qui consiste à chercher la fonction $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ telle que :

$$u_t + Au(t) = f, \quad 0 < t < T, \quad (2.1.1)$$

$$u(T) = g, \quad (2.1.2)$$

où la donnée finale g est dans \mathcal{H} et $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$. L'opérateur A est un opérateur non borné positif et auto-adjoint. Ce problème est mal posé. Si une solution existe sur $[0, T]$, elle ne dépendra jamais de la donnée finale g . Alors, les méthodes de régularisation pour ce genre de problèmes sont nécessaires. Dans ce contexte, de nombreuses approches ont été appliquées, comme la méthode de quasi-valeurs de Ivanov [20], la méthode de régularisation de Tikhonov [33], la méthode de quasi-réversibilité de Lattès et Lions [23], la méthode de Gajewski et Zacharia basée sur l'expansion de fonctions propres [21], la méthode des conditions aux limites auxiliaires [20, 25], la méthode des valeurs quasi-limites [8, 11, 31], la méthode de réduction à un problème de Dirichlet dite la méthode de Carasso [6, 7] et la méthode dite en anglais C-regularized semigroups [25].

Le cas où $f = 0$ et A est un opérateur auto-adjoint ayant un spectre discret sur \mathcal{H} a été considéré par de nombreux auteurs en utilisant des approches différentes, citons par exemple Lattès et Lions [23], Miller [26], Payne [29] qui ont approché (2.1.1)–(2.1.2) en perturbant l’opérateur A . Cette méthode est appelée la méthode de quasi-réversibilité (QR). L’idée principale de cette technique consiste à ajouter un “correcteur” dans l’équation principale, ils ont considéré le problème :

$$u_t + Au - \epsilon A^* Au = 0, \quad t \in [0, T], \quad u(T) = g.$$

La magnitude de la stabilité de la méthode est de l’ordre $e^{c\epsilon^{-1}}$. Dans [21], le problème est approché par :

$$u_t + Au + \epsilon Au_t = 0, \quad t \in [0, T], \quad u(T) = g.$$

Ames et Hughes [3] ont donné une étude sur la relation entre les méthodes de la théorie des opérateurs et la méthode de QR, ils ont traité le problème de Cauchy abstrait :

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(T) = \chi, \quad 0 < t < T.$$

Les auteurs ont considéré le problème à la fois dans un espace de Hilbert et dans un espace de Banach. Ils ont également donné de nombreux résultats de stabilité structurale.

Dans [32], Showalter a présenté une méthode différente appelée méthode des valeurs quasi-limites pour régulariser le problème linéaire homogène, il a donné une stabilité mieux que l’une donnée par les méthodes décrites précédemment. L’idée principale consiste à ajouter un “correcteur” approprié dans la donnée finale. En utilisant cette méthode, les auteurs Clark et Oppenheimer dans [8], Denche et Bessila dans [11] ont régularisé le problème homogène abstrait à valeur finale en remplaçant la condition finale par :

$$u(T) + \epsilon u(0) = g,$$

et

$$u(T) - \epsilon u'(0) = g,$$

respectivement.

Une approche similaire connue sous le nom de la méthode des conditions aux limites auxiliaires a été donnée dans [20, 25].

Très récemment, une version améliorée du problème homogène mal posé a été également donnée dans [18] par Dinh Nho Hào et son groupe.

Parmi de nombreuses études sur le problème de Cauchy rétrograde, le cadre général du problème non-homogène est à peine pris en considération. Le cas général où A est le générateur infinitésimal d’un semi-groupe holomorphe a été étudié dans [4] où le problème approché est donné par :

$$\begin{cases} u_t + h(A)u = f, & 0 < t < T, \\ u(T) = g, \end{cases}$$

pour une convenable fonction h .

On propose dans cette Thèse de stabiliser le problème (2.1.1)–(2.1.2) en éliminant toutes les fréquences élevées dans la solution, ce qui est connu comme la méthode de troncature. Elle consiste à couper les coefficients de Fourier en faisant une règle a posteriori du choix du paramètre de régularisation. Dans le cas homogène cela coïncide avec l'écart de la donnée bruitée et sa projection de dimension finie.

Cela permettra d'obtenir une estimation a posteriori entre la solution exacte et la solution régularisée. Il convient de mentionner qu'une technique similaire a été appliquée avec succès pour différents modèles tels que les équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre paraboliques rétrogrades [41], les équations de type Helmholtz [40], la différentiation numérique [43], et le prolongement numérique analytique basé sur des développements d'Hermite [42].

La méthode de troncature a été effectivement appliquée pour régulariser de nombreux problèmes mal posés (voir par exemple, [13, 27, 28, 37, 38]) pour différents problèmes paraboliques rétrograde dans le temps, mais les estimations d'erreur ont été basées sur une règle a priori du choix du paramètre de régularisation.

Le reste du travail est organisé comme suit : dans la section 2, on affirme la formulation mathématique du problème (2.1.1)–(2.1.2) et on analyse son instabilité. La règle du choix a posteriori du paramètre de régularisation et les estimations de stabilité sont présentées dans la section 3. Dans la section 4, un exemple numérique est donné pour tester la précision et l'efficacité de la méthode proposée.

2.2 La formulation mathématique et la cause de l'instabilité

Considérons le problème de Cauchy rétrograde non-homogène suivant :

$$\begin{cases} u_t + Au(t) = f, & 0 < t < T, \\ u(T) = g, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où $T > 0$ est une constante positive et $A : \mathfrak{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur non borné positif auto-adjoint sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . La donnée finale $g \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2((0, T), \mathcal{H})$. On suppose que l'opérateur A admet une base propre orthonormale $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ dans \mathcal{H} , associée aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ telles que :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Définition 2.2.1 *Une fonction $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ est appelée une solution du problème (2.2.1) dans le sens classique si $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$, pour tout $t \in (0, T)$, $u \in C^1((0, T), \mathcal{H})$ et satisfait l'équation et la condition finale.*

Lemme 2.2.1 *Pour $g \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2((0, T), \mathcal{H})$, le problème (2.2.1) a une solution dans le sens classique si et seulement si :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 < +\infty. \quad (2.2.2)$$

Preuve 2.2.1 *Supposons que le problème (2.2.1) a une solution $u(t)$ dans le sens classique, alors : $u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \phi_n$, $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $\forall t \in (0, T)$ et $u \in C^1((0, T), \mathcal{H})$.*

D'après l'équation et la condition finale dans le problème (2.2.1), $u(t)$ peut être formellement écrite comme suit :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n, \quad (2.2.3)$$

où g_n et f_n sont les coefficients de Fourier de g et f dans \mathcal{H} respectivement. Comme $u(t) \in \mathcal{H}$, $\forall t \in [0, T]$, en utilisant l'identité de Parseval–Steklov, on obtient :

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 < +\infty,$$

en particulier pour $t = 0$, on aura :

$$\|u(0)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 < +\infty.$$

Maintenant, supposons que la condition (2.2.2) soit satisfaite, alors on définit la fonction $u(t)$ par la formule (2.2.3) et en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz et des inégalités élémentaires, on obtient :

$$\|u(t)\|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 + 2T \|f\|_{L^2((0, T), \mathcal{H})}^2.$$

Similairement, pour $Au(t)$, on aura :

$$\|Au(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 e^{-2t\lambda_n} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2,$$

alors :

$$\|Au(t)\|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 + 2T \|f\|_{L^2((0, T), \mathcal{H})}^2,$$

et par suite, $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $\forall t \in (0, T)$. D'une manière similaire, étant donné que nous avons :

$$u'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[f_n(t) - \lambda_n e^{-t\lambda_n} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right) \right] \phi_n,$$

on vérifie que $u \in C^1((0, T), \mathcal{H})$. Finalement, nous vérifions que $u(t)$ satisfait le problème (2.2.1), ainsi le Lemme est démontré. □

Ensuite, supposons que E soit une constante positive telle que :

$$\|u(0)\| \leq E. \quad (2.2.4)$$

Soit $g^\delta \in \mathcal{H}$ vérifiant :

$$\|g^\delta - g\| \leq \delta, \quad (2.2.5)$$

où δ représente le niveau d'erreur.

La solution du problème (2.2.1) est comme suit :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n, \quad (2.2.6)$$

où $g_n = \langle g, \phi_n \rangle$, $f_n = \langle f, \phi_n \rangle$, $\forall n \geq 1$.

D'après (2.2.4), (2.2.6), et l'identité de Parseval–Steklov, on a :

$$\|u(0)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 < +\infty. \quad (2.2.7)$$

Notons que la croissance rapide des termes $e^{T\lambda_n}$ et $e^{s\lambda_n}$ est la source de l'instabilité du problème (2.2.1). La borne a priori (2.2.4) implique que les coefficients g_n et f_n doivent se décroître rapidement pour les grands n . Par conséquent, un moyen naturel pour obtenir une approximation stable de la solution u est d'éliminer l'effet des hautes fréquences et de considérer la solution u pour les λ_n qui sont inférieures ou égales à N , c'est-à-dire $\lambda_n \leq N$, où N est un entier positif qui joue le rôle du paramètre de régularisation.

2.3 Le choix a posteriori du paramètre de régularisation et les estimations de la stabilité

On définit la solution régularisée du problème (2.2.1) comme suit :

$$u_N(t) = \sum_{\lambda_n \leq N} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n. \quad (2.3.1)$$

Dans le cas de la donnée finale perturbée g^δ , on utilise la formule similaire :

$$u_N^\delta(t) = \sum_{\lambda_n \leq N} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n^\delta - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n, \quad (2.3.2)$$

où $g_n^\delta = \langle g^\delta, \phi_n \rangle$ sont les coefficients de Fourier de g^δ .

On propose de choisir le paramètre de régularisation comme le premier entier N tel que : $\|(I - P_N)e^{-TA}u^\delta(0)\| \leq \tau\delta$, où τ est une constante telle que $\tau > 1$, P_N est la projection orthogonale sur l'espace propre $\text{span}\{\phi_n | \lambda_n \leq N\}$, c'est-à-dire : $P_N h = \sum_{\lambda_n \leq N} \langle h, \phi_n \rangle \phi_n$, $\forall h \in \mathcal{H}$, et $u^\delta(0)$ est la solution

exacte correspondante à la donnée finale perturbée g^δ à l'instant $t = 0$. Plus précisément, on a la relation suivante :

$$\|(I - P_N)e^{-TA}u^\delta(0)\| \leq \tau\delta < \|(I - P_{N-1})e^{-TA}u^\delta(0)\|. \quad (2.3.3)$$

Proposition 2.3.1 *Soit la solution $u(t)$ du problème (2.2.1) satisfaite à la borne a priori (2.2.4) et soit $g^\delta \in \mathcal{H}$ vérifie (2.2.5). Si le paramètre de régularisation N est choisi selon (2.3.3), alors :*

$$N \leq \frac{\ln E - \ln((\tau - 1)\delta)}{T}. \quad (2.3.4)$$

Preuve 2.3.1 *En utilisant la borne a priori (2.2.4), on obtient d'une part :*

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\lambda_n \geq N} \left(g_n - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n \right\|^2 \\ &= \sum_{\lambda_n \geq N} \left| g_n - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda_n \geq N} e^{-2T\lambda_n} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 \\ &\leq e^{-2TN} \sum_{\lambda_n \geq N} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 \\ &\leq e^{-2TN} E^2. \end{aligned}$$

Alors :

$$\left\| \sum_{\lambda_n \geq N} \left(g_n - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n \right\| \leq e^{-TN} E. \quad (2.3.5)$$

D'autre part, d'après (2.3.3) et l'inégalité triangulaire, on sait que :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\lambda_n \geq N} \left(g_n - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{\lambda_n \geq N} \left(g_n^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n - \sum_{\lambda_n \geq N} (g_n^\delta - g_n) \phi_n \right\| \\
&\geq \left\| \sum_{\lambda_n \geq N} \left(g_n^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n \right\| - \left\| \sum_{\lambda_n \geq N} (g_n^\delta - g_n) \phi_n \right\| \\
&\geq \tau\delta - \delta = (\tau - 1)\delta,
\end{aligned}$$

et par suite :

$$\left\| \sum_{\lambda_n \geq N} \left(g_n - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n \right\| \geq (\tau - 1)\delta. \quad (2.3.6)$$

Combinons (2.3.5) avec (2.3.6), il en résulte que :

$$(\tau - 1)\delta \leq e^{-TN} E,$$

ainsi, la preuve est complétée par quelques calculs élémentaires. □

Proposition 2.3.2 Soit $u(t)$ la solution du problème (2.2.1), supposons que toutes les conditions de la Proposition (2.3.1) soient satisfaites et soient $u_N(t)$, $u_N^\delta(t)$ données par (2.3.1) et (2.3.2) respectivement. Alors, on a l'estimation :

$$\|u_N^\delta(t) - u_N(t)\| \leq e^{(T-t)N} \delta, \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.3.7)$$

Preuve 2.3.2 Pour tout $t \in (0, T)$, en utilisant l'identité de Parseval–Steklov et la borne a priori (2.2.5), on obtient :

$$\|u_N^\delta(t) - u_N(t)\|^2 = \sum_{\lambda_n \leq N} e^{2(T-t)\lambda_n} |g_n^\delta - g_n|^2 \leq e^{2(T-t)N} \sum_{\lambda_n \leq N} |g_n^\delta - g_n|^2,$$

il en résulte que :

$$\|u_N^\delta(t) - u_N(t)\|^2 \leq e^{2(T-t)N} \|g^\delta - g\|^2 \leq e^{2(T-t)N} \delta^2,$$

ce qui implique l'estimation désirée. □

Proposition 2.3.3 Soit $u(t)$ la solution du problème (2.2.1). Supposons qu'il existe un nombre positif A de sorte que $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T e^{2s\lambda_n} |f_n(s)|^2 ds \leq A$. Supposons que toutes les conditions de la Proposition (2.3.1) soient satisfaites et $u_N(t)$ soit donnée par (2.3.1). Alors, on a l'estimation suivante :

$$\|u(t) - u_N(t)\| \leq \sqrt{2 \left(E^{\frac{2(T-t)}{T}} ((\tau + 1) \delta)^{\frac{2t}{T}} + T A e^{-2TN} \right)}, \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.3.8)$$

Preuve 2.3.3 Pour tout $t \in (0, T)$, d'après l'identité de Parseval–Steklov et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} & \|u(t) - u_N(t)\|^2 \\ &= \sum_{\lambda_n \geq N+1} \left| e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda_n \geq N+1} \left| e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds + \int_0^t e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 \\ &\leq \sum_{\lambda_n \geq N+1} 2 \left| e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 + 2 \left| \int_0^t e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 \\ &\leq \sum_{\lambda_n \geq N+1} 2e^{-2t\lambda_n} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 \\ &+ 2t \sum_{\lambda_n \geq N+1} \int_0^t e^{2(s-t)\lambda_n} |f_n(s)|^2 ds \\ &\leq \sum_{\lambda_n \geq N+1} 2 \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^{\frac{2(T-t)}{T}} \left| g_n - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right|^{\frac{2t}{T}} \\ &+ 2T e^{-2tN} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T e^{2s\lambda_n} |f_n(s)|^2 ds \\ &\leq 2 \left[\sum_{\lambda_n \geq N+1} \left| e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 \right]^{\frac{T-t}{T}} \\ &\times \left[\sum_{\lambda_n \geq N+1} \left| g_n - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right|^2 \right]^{\frac{t}{T}} + 2T e^{-2tN} A \\ &\leq 2E^{\frac{2(T-t)}{T}} \left\| \sum_{\lambda_n \geq N+1} \left(g_n - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n \right\|^{\frac{2t}{T}} + 2T e^{-2tN} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2E^{\frac{2(T-t)}{T}} \times \\
&\left\| \sum_{\lambda_n \geq N+1} \left(g_n^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n - \sum_{\lambda_n \geq N+1} (g_n^\delta - g_n) \phi_n \right\|^{\frac{2t}{T}} \\
&+ 2Te^{-2tN} A \\
&\leq 2E^{\frac{2(T-t)}{T}} \times \\
&\left[\left\| \sum_{\lambda_n \geq N+1} \left(g_n^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \phi_n \right\| + \left\| \sum_{\lambda_n \geq N+1} (g_n^\delta - g_n) \phi_n \right\| \right]^{\frac{2t}{T}} \\
&+ 2Te^{-2tN} A \\
&\leq 2E^{\frac{2(T-t)}{T}} (\tau\delta + \delta)^{\frac{2t}{T}} + 2Te^{-2tN} A \\
&= 2E^{\frac{2(T-t)}{T}} ((\tau + 1)\delta)^{\frac{2t}{T}} + 2Te^{-2tN} A.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|u(t) - u_N(t)\| \leq \sqrt{2 \left(E^{\frac{2(T-t)}{T}} ((\tau + 1)\delta)^{\frac{2t}{T}} + Te^{-2tN} A \right)}.$$

□

Maintenant, combinons les Propositions 2.3.1–2.3.3, on obtient le Théorème suivant qui nous donne l'estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution régularisée.

Théorème 2.3.1 *Soit $u(t)$ la solution du problème (2.2.1) telle que $\|u(0)\| \leq E$. La donnée $g^\delta \in \mathcal{H}$ satisfait (2.2.5). Supposons qu'il existe un nombre positif A satisfaisant $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T e^{2s\lambda_n} |f_n(s)|^2 ds \leq A$. Si $u_N^\delta(t)$ est donnée par (2.3.2) et le paramètre de régularisation N est choisi selon (2.3.3), on aura :*

$$\|u(t) - u_N^\delta(t)\| \leq \left[\left(\frac{E}{\tau - 1} \right)^{\frac{T-t}{T}} + \sqrt{2 \left(E^{\frac{2(T-t)}{T}} (\tau + 1)^{\frac{2t}{T}} + TA \left(\frac{\tau - 1}{E} \right)^{\frac{2t}{T}} \right)} \right] \delta^{\frac{t}{T}}, \quad (2.3.9)$$

$\forall t \in (0, T)$.

Remarque 2.3.1 *Dans le cas du problème homogène, (2.3.3) devient :*

$$\|(I - P_N)g^\delta\| \leq \tau\delta < \|(I - P_{N-1})g^\delta\|,$$

alors on obtient l'estimation suivante :

$$\|u(t) - u_N^\delta(t)\| \leq \left[(\tau + 1)^{\frac{t}{T}} + \left(\frac{1}{\tau - 1} \right)^{\frac{T-t}{T}} \right] E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}}, \quad \forall t \in (0, T).$$

Remarque 2.3.2 Dans le problème de Cauchy rétrograde (2.2.1), si on prend $f = 0$ et l'opérateur $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec $\mathfrak{D}(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$, on obtient le même ordre dans $L^2(0, \pi)$ que celui donné dans [41].

2.4 Expériences numériques

Nous allons donner dans cette section un exemple numérique pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode de régularisation de troncature avec la règle du choix a posteriori (2.3.3). Nous prenons $T = 1$, et la donnée simulée est générée en utilisant la formule suivante :

$$g_i^\delta = g_i + \delta \text{rand}(\text{size}(g))_i, \quad (2.4.1)$$

où g_i est la donnée exacte, $\text{rand}(\text{size}(g))_i$ est un nombre aléatoire dans $[-1, 1]$, g désigne le vecteur dont les éléments sont g_i ($i = 1, 2, \dots, M$) (M est le nombre de discrétisation de la variable de l'espace), et δ indique le niveau d'erreur.

Nous prenons $M = 41$ et pour un $t \in (0, 1)$ fixé, afin de mesurer l'exactitude de l'approximation numérique de la fonction $u(x, t)$, nous utilisons la fonction RRMSE (dite en anglais **relative root mean square error**), définie par :

$$\text{RRMSE} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^M (u(x_i, t) - u_N^\delta(x_i, t))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M u(x_i, t)^2}}, \quad (2.4.2)$$

où u et u_N^δ sont la solution exacte et approximative, respectivement.

Pour l'évaluation de tous les coefficients dans l'exemple, nous utilisons la formule de Simpson pour calculer les intégrales $g_n = \langle g(x), \phi_n(x) \rangle_{L^2(0, \pi)}$ ($n = 1, 2, \dots, N_0$) dans $[0, \pi]$, et les coefficients $\{g_n^\delta\}_{n=1}^{N_0}$ correspondants à la donnée perturbée g^δ sont également calculés de la même manière, où N_0 est un entier positif assez grand .

Pour calculer le paramètre de régularisation N , nous le choisissons toujours selon (2.3.3), où la constante $\tau > 1$ est égale à 1,01, comme dans [16] et [41].

Exemple 2.4.1 Considérons le problème de Cauchy non-homogène direct suivant :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -t \sin(x), & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = g_0(x) = (1 - e^{-x^2})(\pi - x)^2, & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

La solution du problème (2.4.3) est comme suit :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n^2 t} g_n^0 + \int_0^t e^{(s-t)n^2} f_n(s) ds \right) \phi_n(x), \quad (2.4.4)$$

où $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$, $n = 1, 2, \dots$, qui forment un système orthonormal de $L^2(0, \pi)$, $g_n^0 = \langle g_0(x), \phi_n(x) \rangle_{L^2(0, \pi)}$, et $f_n(t) = \langle -t \sin(x), \phi_n(x) \rangle_{L^2(0, \pi)}$.
En particulier pour $t = 1$, on obtient la donnée finale suivante :

$$u(x, 1) = g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-n^2} g_n^0 + \int_0^1 e^{(s-1)n^2} f_n(s) ds \right) \phi_n(x). \quad (2.4.5)$$

Notons que la donnée (2.4.5) est une série infinie. Pour pouvoir faire de comparaisons numériques entre les deux solutions exacte et régularisée, nous devons d'abord la couper comme suit :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{N_0} \left(e^{-n^2} g_n^0 + \int_0^1 e^{(s-1)n^2} f_n(s) ds \right) \phi_n(x), \quad (2.4.6)$$

pour N_0 suffisamment grand. Dans nos calculs, nous prenons $N_0 = 27$, et $g^\delta(x)$ est calculée selon (2.4.1).

Ensuite, nous choisissons le problème final correspondant donné par :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -t \sin(x), & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 1) = g(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Pour chaque $t \in (0, 1)$, la solution exacte du problème (2.4.7) et son approximation régularisée sont évaluées respectivement par :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{27} \left(e^{(1-t)n^2} g_n - \int_t^1 e^{(s-t)n^2} f_n(s) ds \right) \phi_n(x), \quad (2.4.8)$$

et

$$u_N^\delta(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(e^{(1-t)n^2} g_n^\delta - \int_t^1 e^{(s-t)n^2} f_n(s) ds \right) \phi_n(x), \quad (2.4.9)$$

où $g_n = \langle g, \phi_n \rangle_{L^2(0, \pi)}$ et $g_n^\delta = \langle g^\delta, \phi_n \rangle_{L^2(0, \pi)}$.

La Figure (2.1) montre la relation entre la fonction RRMSE et les différentes valeurs du paramètre de régularisation N avec un niveau de bruit $\delta = 1 \times 10^{-4}$ à l'instant $t = 0, 9$. De cette figure, nous pouvons voir qu'une coupure appropriée du nombre des coefficients de Fourier est nécessaire, et son choix approprié est très important. On note également dans cet exemple que N joue vraiment le rôle du paramètre de régularisation.

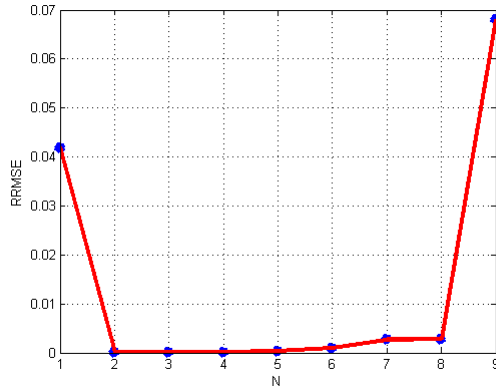


FIGURE 2.1 – RRMSE par rapport à N avec $\delta = 1 \times 10^{-4}$ à l’instant $t = 0.9$.

Dans la Figure (2.2) et la Figure (2.3), nous présentons la solution exacte et son approximation régularisée avec un niveau d’erreur égal à 1×10^{-2} .

L’erreur absolue dans la Figure (2.4) avec $\delta = 1 \times 10^{-2}$ indique que plus t est petit, plus la solution régularisée est loin de la solution exacte. Au contraire, plus le temps t se rapproche de 1, nous pouvons obtenir un meilleur effet de calcul, ce qui coïncide avec notre estimation théorique (2.3.9).

Les comparaisons de la solution exacte et son approximation régularisée dans des moments différents $t = 0, 1, 0, 5, 0, 9$ avec $\delta = 3 \times 10^{-2}$ sont illustrées dans la Figure (2.5), et encore, nous pouvons dire la même observation que pour la Figure (2.4).

La Figure (2.6) montre les comparaisons de la solution exacte et son approximation régularisée à l’instant $t = 0, 6$ avec différentes valeurs de niveaux de bruit $\delta = 5 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-2}$ ajoutées à la donnée. De cette figure, on peut voir que l’effet numérique devient pire par rapport à l’augmentation de la valeur du niveau de bruit.

De l’exemple précédent, on peut conclure le suivant :

1. Plus le temps t est petit, plus la solution régularisée s’éloigne de la solution exacte. En revanche, quand le temps t est près de 1, nous pouvons obtenir un meilleur effet de calcul, ce qui coïncide avec notre estimation théorique (2.3.9).
2. Plus le niveau de bruit est petit, plus la solution régularisée peut approcher la solution exacte.

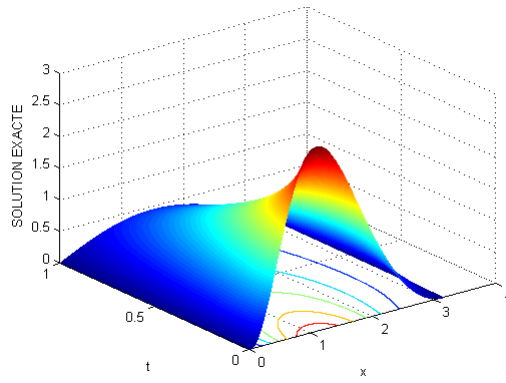


FIGURE 2.2 – La solution exacte.

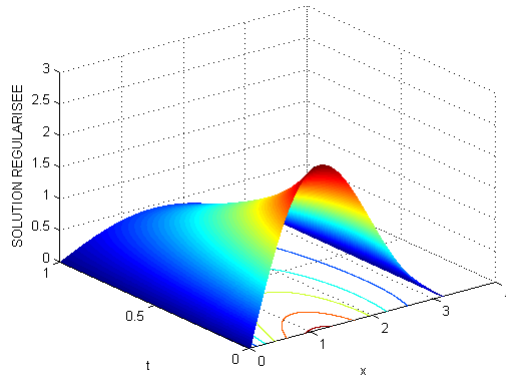


FIGURE 2.3 – La solution régularisée avec $\delta = 1 \times 10^{-2}$.

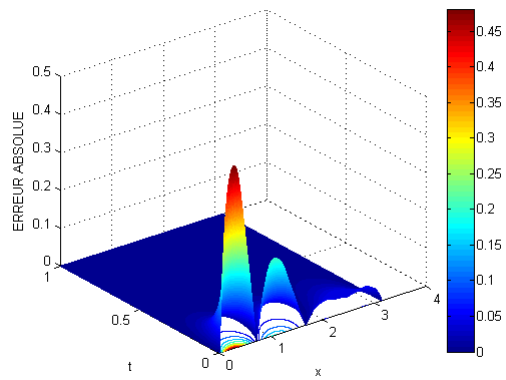


FIGURE 2.4 – L'erreur absolue avec $\delta = 1 \times 10^{-2}$.

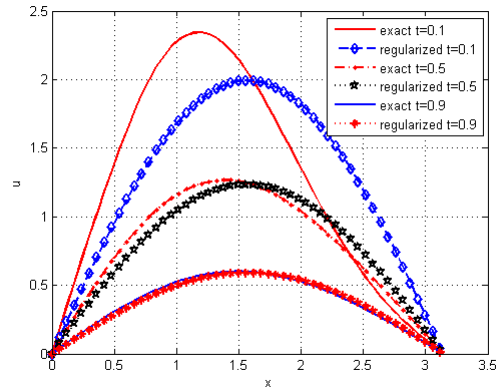


FIGURE 2.5 – La comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée avec $\delta = 3 \times 10^{-2}$ en $t = 0.1, 0.5, 0.9$.

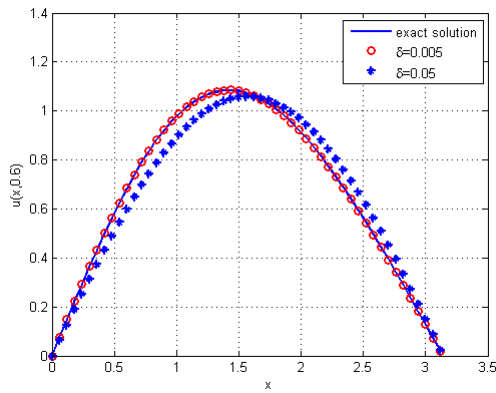


FIGURE 2.6 – La comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée avec $\delta = 5 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-2}$ à l'instant $t = 0.6$.

Régularisation d'un problème mal posé pour l'équation de la chaleur avec une condition intégrale

Dans ce chapitre, on aborde l'étude d'un problème de contrôle par les conditions initiales pour l'équation de la chaleur avec une condition intégrale. Par une méthode de troncature combinée avec une règle du choix a posteriori du paramètre de régularisation, on établit les estimations de convergence entre les solutions exacte et régularisée. Finalement, on illustre la méthode par un exemple numérique afin de prouver son efficacité.

3.1 Motivation au problème

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & x \in]0, 1[, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ \int_0^1 u(x, t) dx = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \xi(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

On suppose que ξ vérifie les conditions de compatibilité suivantes :

$$\xi(0) = 0, \quad \int_0^1 \xi(x) dx = 0. \quad (3.1.2)$$

Ce type de problèmes aux limites a été étudié par de nombreux auteurs, voir par exemple [5, 19, 30]. Un cas plus général a été étudié par Yurchuk dans [39].

Dans notre travail, on considère le problème de contrôle suivant : pour $T > 0$ et $\phi \in W_2^1(0, 1)$ vérifiant les conditions (3.1.2), nous essayons de

minimiser la fonctionnelle :

$$I(\xi) = \int_0^1 |u(x, T; \xi) - \phi(x)|^2 dx. \quad (3.1.3)$$

Une solution évidente au problème (3.1.3) est de choisir ξ tel que $I(\xi) = 0$, c'est-à-dire, $u(x, T; \xi) = \phi(x)$.

Par conséquent, dans le rectangle $D_T = (0, 1) \times (0, T)$, nous considérons u comme une solution du problème aux limites final suivant :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in D_T, \quad (3.1.4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.1.5)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.1.6)$$

$$u(x, T) = \phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.1.7)$$

et nous prenons $\xi(x) = u(x, 0)$. Ces problèmes sont mal posés. Si une solution existe sur $[0, T]$, elle ne dépendra jamais continûment de la donnée finale ϕ .

Une approche bien connue traitant ces problèmes est la méthode de quasi-réversibilité introduite par Lattès et Lions dans [23]. Cette dernière consiste à remplacer le dernier problème aux limites avec un autre problème approximatif qui est bien posé. Dans notre contexte, cette méthode ne convient pas pour la présence du terme intégral dans les conditions aux limites. Un problème similaire dans [2] a été considéré en utilisant une méthode de quasi-réversibilité modifiée basée sur une perturbation de l'équation (3.1.4) d'une manière spécifique.

Après les travaux [8] et [31], les auteurs Denche et Bessila dans [12] ont étudié le problème (3.1.1), où ils ont remplacé la condition $u(x, T) = \phi(x)$ par $\alpha u(x, 0) + (1 - \alpha)u(x, T) = \phi(x)$ pour former un problème non-local approximatif en fonction du paramètre $\alpha \in]0, 1[$. La même méthode a été appliquée dans [1, 11, 17, 18, 34, 35] pour le cas où A est un opérateur auto-adjoint. Cette méthode est appelée méthode des valeurs quasi-limites, et le problème lié approximatif est appelé problème de valeurs quasi-limites (Q.B.V.P). Une approche similaire connue sous le nom de la méthode des conditions aux limites auxiliaires a été donnée dans [20, 25] où le problème perturbé est défini dans l'intervalle $[0, T + \theta]$, avec $\theta > 0$.

Dans cette Thèse, nous allons stabiliser le problème (3.1.4)–(3.1.7) en éliminant toutes les fréquences élevées dans la solution, ce qui est connu comme la méthode de troncature. Elle consiste à couper les coefficients de Fourier par une règle a posteriori du choix du paramètre de régularisation en faisant l'écart de la donnée bruitée et sa projection de dimension finie.

3.2 Représentation de la solution du problème (3.1.4)–(3.1.7)

Définition 3.2.1 *On définit une solution classique du problème (3.1.4)–(3.1.7) comme étant une fonction telle que :*

1. *Elle est continue dans \overline{D}_T .*
2. *Dans D_T , elle a une dérivée première continue par rapport à t et une seconde dérivée continue par rapport à x .*
3. *Elle satisfait (3.1.4) avec (3.1.5)–(3.1.7), dans le sens classique.*

Maintenant, remplaçons le problème (3.1.4)–(3.1.7) par le problème équivalent suivant [19] :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in D_T, \quad (3.2.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.2.2)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2.3)$$

$$u(x, T) = \phi(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3.2.4)$$

On suppose que la fonction $\phi \in W_2^1(0, 1)$ vérifie la condition (3.1.2). Puis, en développant cette fonction dans un système bi-orthogonal, on obtient :

$$\phi(x) = \phi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \phi_{2k} X_{2k}(x) \right), \quad (3.2.5)$$

par rapport à la base formée de fonctions propres et fonctions associées :

$$X_0(x) = x, \quad X_{2k-1}(x) = x \cos(2\pi kx), \quad X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx), \quad k \geq 1, \quad (3.2.6)$$

du problème de Sturm–Liouville non auto-adjoint suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda X(x), & 0 < x < 1, \\ X(0) = 0, \\ X'(0) = X'(1). \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Ce dernier correspond au problème (3.2.1)–(3.2.4). Les coefficients ϕ_0 , ϕ_{2k-1} , ϕ_{2k} sont donnés par la formule :

$$\phi_0 = \int_0^1 \phi(x) Y_0(x) dx, \quad \phi_{2k-1} = \int_0^1 \phi(x) Y_{2k-1}(x) dx, \quad \phi_{2k} = \int_0^1 \phi(x) Y_{2k}(x) dx, \quad (3.2.8)$$

où la suite $\{Y_k\}_0^\infty$ de fonctions propres et fonctions associées du problème adjoint de (3.2.7) :

$$\begin{cases} -\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = \lambda Y(x), & 0 < x < 1, \\ Y'(1) = 0, \\ Y(0) = Y(1), \end{cases} \quad (3.2.9)$$

est donnée par la formule :

$$Y_0(x) = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx), \quad Y_{2k}(x) = 4(1-x) \sin(2\pi kx), \quad k \geq 1. \quad (3.2.10)$$

Les valeurs propres du problème (3.2.7) et celles du problème adjoint (3.2.9) sont données par :

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, \quad k \geq 0. \quad (3.2.11)$$

Les bases (3.2.6) et (3.2.10) forment un système bi-orthogonal.

Comme $\int_0^1 \phi(x) dx = 0$, on a $\phi_0 = 0$ dans (3.2.5).

Par analogie avec la méthode de Fourier, on cherche une solution du problème (3.2.1)–(3.2.4) sous la forme :

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + u_{2k}(t)X_{2k}(x) \right). \quad (3.2.12)$$

Maintenant, si on peut permuter la somme (\sum) avec la première dérivée partielle ($\partial/\partial t$) par rapport à t , et de même, avec la seconde dérivée partielle ($\partial^2/\partial x^2$) par rapport à x dans la formule (3.2.12), on trouve :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 0, \\ u_{2k-1}(t) &= \phi_{2k-1} e^{(T-t)\lambda_k}, \\ u_{2k}(t) &= \left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(T-t)\lambda_k}. \end{aligned}$$

Donc :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1}) X_{2k}(x) \right) e^{(T-t)\lambda_k}. \quad (3.2.13)$$

3.3 La formulation mathématique du problème et l'analyse de l'instabilité

Considérons l'équation parabolique rétrograde avec la condition aux limites intégrale suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \\ u(0, t) = 0, & t \in [0, T], \\ \int_0^1 u(x, t) dx = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, T) = \phi(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où T est une constante strictement positive.

On suppose que ϕ vérifie les conditions de compatibilité suivantes :

$$\phi(0) = 0, \quad \int_0^1 \phi(x) dx = 0. \quad (3.3.2)$$

Soit $\phi^\delta(x) \in W_2^1(0, 1)$ satisfait :

$$\|\phi^\delta - \phi\|_{W_2^1(0,1)} \leq \delta, \quad (3.3.3)$$

où δ représente le niveau d'erreur.

La solution du problème (3.3.1) est comme suit :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1}) X_{2k}(x) \right) e^{(T-t)\lambda_k}, \quad (3.3.4)$$

où $X_{2k-1}(x) = x \cos(2\pi kx)$, $X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx)$, $\lambda_k = (2\pi k)^2$,

$$\phi_{2k-1} = \int_0^1 \phi(x) 4 \cos(2\pi kx) dx, \quad \phi_{2k} = \int_0^1 \phi(x) 4(1-x) \sin(2\pi kx) dx.$$

Notons que la croissance rapide du terme $e^{(T-t)\lambda_k}$ quand $k \rightarrow +\infty$ est la source de l'instabilité. Par conséquent, un moyen naturel pour obtenir une approximation stable de la solution u est d'éliminer l'effet des hautes fréquences et de considérer la solution u pour les k qui sont inférieurs ou égaux à N , c'est-à-dire $k \leq N$, où N est un entier positif qui joue le rôle du paramètre de régularisation.

D'après le Théorème 1 dans [19], on sait que pour $\phi \in L^2(0, 1)$, on a :

$$\frac{3}{4} \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \phi_k^2 \leq 16 \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (3.3.5)$$

D'après (3.3.4) et (3.3.5), on a clairement :

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{32}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2 + \lambda_k T^2 \phi_{2k-1}^2 \right) e^{2T\lambda_k}. \quad (3.3.6)$$

Soit E une constante positive et supposons qu'elle vérifie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2 + \lambda_k T^2 \phi_{2k-1}^2 \right) e^{2T\lambda_k} \leq E^2. \quad (3.3.7)$$

3.4 Sélection a posteriori du paramètre de régularisation et estimations de la stabilité

On définit la solution régularisée du problème (3.3.1) comme suit :

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N \left(\phi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1}) X_{2k}(x) \right) e^{(T-t)\lambda_k}. \quad (3.4.1)$$

Dans le cas d'une donnée finale bruitée ϕ^δ , on utilise la formule similaire suivante :

$$u_N^\delta(x, t) = \sum_{k=1}^N \left(\phi_{2k-1}^\delta X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k}^\delta + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1}^\delta) X_{2k}(x) \right) e^{(T-t)\lambda_k}, \quad (3.4.2)$$

où $\phi_{2k-1}^\delta = \int_0^1 \phi^\delta(x) 4 \cos(2\pi kx) dx$, $\phi_{2k}^\delta = \int_0^1 \phi^\delta(x) 4(1-x) \sin(2\pi kx) dx$.

On propose de choisir le paramètre de régularisation comme le premier entier N tel que : $\|\phi^\delta - \phi_N^\delta\|_{W_2^1(0,1)} \leq \tau\delta$, où τ est une constante telle que

$\tau > \frac{8}{\sqrt{3}}$ et $\phi_N^\delta = \sum_{k=1}^N \left(\phi_{2k-1}^\delta X_{2k-1}(x) + \phi_{2k}^\delta X_{2k}(x) \right)$. Plus précisément, on a la relation suivante :

$$\|\phi^\delta - \phi_N^\delta\|_{W_2^1(0,1)} \leq \tau\delta < \|\phi^\delta - \phi_{N-1}^\delta\|_{W_2^1(0,1)}. \quad (3.4.3)$$

Proposition 3.4.1 *Soit $u(x, t)$ la solution du problème (3.3.1), soit la condition a priori (3.3.7) satisfaite, et soit $\phi^\delta(x) \in W_2^1(0, 1)$ satisfait (3.3.3). Si le paramètre de régularisation N est choisi selon (3.4.3), on aura :*

$$N \leq \sqrt{\frac{\ln E \sqrt{\frac{4}{3} \max\left(1, \frac{1}{T^2}\right)} - \ln\left(\tau - \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \delta}{4T\pi^2}}. \quad (3.4.4)$$

Preuve 3.4.1 *En utilisant la borne a priori (3.3.7), l'inégalité (3.3.5) et l'égalité :*

$$\|\phi'\|_{L^2(0,1)}^2 = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \phi_{2k-1}^2, \quad \forall \phi \in L^2(0, 1), \quad (3.4.5)$$

on aura :

$$\begin{aligned}
\|\phi - \phi_{N-1}\|_{W_2^1(0,1)}^2 &= \|\phi - \phi_{N-1}\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\phi' - \phi'_{N-1}\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\leq \frac{4}{3} \sum_{k=N}^{+\infty} (\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2) + \frac{1}{8} \sum_{k=N}^{+\infty} (\lambda_k \phi_{2k-1}^2) \\
&\leq \frac{4}{3} \sum_{k=N}^{+\infty} (\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2) + \frac{1}{8T^2} \sum_{k=N}^{+\infty} (\lambda_k T^2 \phi_{2k-1}^2) \\
&\leq \frac{4}{3} \max\left(1, \frac{1}{T^2}\right) \sum_{k=N}^{+\infty} (\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2 + \lambda_k T^2 \phi_{2k-1}^2) \\
&\quad \times e^{2T\lambda_k} e^{-2T\lambda_k} \\
&\leq \frac{4}{3} \max\left(1, \frac{1}{T^2}\right) e^{-8T\pi^2 N^2} E^2.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|\phi - \phi_{N-1}\|_{W_2^1(0,1)} \leq E e^{-4T\pi^2 N^2} \sqrt{\frac{4}{3} \max\left(1, \frac{1}{T^2}\right)}. \quad (3.4.6)$$

D'autre part, d'après (3.4.3) et l'inégalité triangulaire, on sait que :

$$\begin{aligned}
&\|\phi - \phi_{N-1}\|_{W_2^1(0,1)} \\
&= \|(\phi^\delta - \phi_{N-1}^\delta) - (\phi^\delta - \phi_{N-1}^\delta - \phi + \phi_{N-1})\|_{W_2^1(0,1)} \\
&\geq \|\phi^\delta - \phi_{N-1}^\delta\|_{W_2^1(0,1)} - \|\phi^\delta - \phi_{N-1}^\delta - \phi + \phi_{N-1}\|_{W_2^1(0,1)} \\
&\geq \tau\delta - \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1}) X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k}) X_{2k}(x) \right) \right\|_{W_2^1(0,1)}.
\end{aligned}$$

D'après (3.3.5) et (3.4.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1}) X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k}) X_{2k}(x) \right) \right\|_{W_2^1(0,1)}^2 \\
&\leq \frac{4}{3} \sum_{k=N}^{+\infty} (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 + \frac{1}{8} \sum_{k=N}^{+\infty} \lambda_k (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 \\
&\leq \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 \\
&\leq \frac{64}{3} \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1}) X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k}) X_{2k}(x) \right) \right\|_{W_2^1(0,1)}^2,
\end{aligned}$$

et cela implique :

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1}) X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k}) X_{2k}(x) \right) \right\|_{W_2^1(0,1)} \\ & \leq \frac{8}{\sqrt{3}} \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1}) X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k}) X_{2k}(x) \right) \right\|_{W_2^1(0,1)}, \end{aligned}$$

d'où, il en résulte que :

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi_{N-1}\|_{W_2^1(0,1)} & \geq \tau\delta - \frac{8}{\sqrt{3}} \|\phi^\delta - \phi\|_{W_2^1(0,1)} \\ & \geq \tau\delta - \frac{8}{\sqrt{3}}\delta = \left(\tau - \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \delta. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|\phi - \phi_{N-1}\|_{W_2^1(0,1)} \geq \left(\tau - \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \delta. \quad (3.4.7)$$

Combinons (3.4.6) avec (3.4.7), on obtient :

$$\left(\tau - \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \delta \leq E e^{-4T\pi^2 N^2} \sqrt{\frac{4}{3} \max\left(1, \frac{1}{T^2}\right)},$$

et la preuve de cette Proposition est complétée par quelques calculs élémentaires.

Proposition 3.4.2 Soit $u(x, t)$ la solution du problème (3.3.1). Soient toutes les conditions de la Proposition 3.4.1 satisfaites et soient $u_N(x, t)$, $u_N^\delta(x, t)$ données par (3.4.1) et (3.4.2) respectivement. Alors, on aura l'estimation suivante :

$$\|u_N^\delta(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \delta e^{4\pi^2 N^2(T-t)} \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)}, \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.4.8)$$

Preuve 3.4.2 En utilisant l'inégalité (3.3.5), l'égalité (3.4.5), et l'inégalité de Bessel, on obtient :

$$\begin{aligned} & \|u_N^\delta(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq \frac{32}{3} \sum_{k=1}^N \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 \right) \\ & \quad + T^2 \lambda_k (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 e^{2(T-t)\lambda_k} \\ & \leq \frac{32}{3} e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \sum_{k=1}^N \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 \right) \\ & \quad + T^2 \lambda_k (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 \\ & \leq \frac{32}{3} e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \left(16 \|\phi^\delta - \phi\|_{L^2(0,1)}^2 + 8T^2 \|\phi'^\delta - \phi'\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{512}{3} \max(1, T^2) e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \|\phi^\delta - \phi\|_{W_2^1(0,1)}^2.$$

Alors :

$$\|u_N^\delta(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \delta e^{4\pi^2 N^2(T-t)} \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)}.$$

Proposition 3.4.3 Soit $u(x, t)$ la solution du problème (3.3.1). Soient toutes les conditions de la Proposition 3.4.1 satisfaites et soit $u_N(x, t)$ donnée par (3.4.1). Alors :

$$\|u(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq E^{1-\frac{t}{T}} \left(\left(\tau + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \delta \right)^{\frac{t}{T}} \sqrt{\frac{32}{3} (16 \max(1, T^2))^{\frac{t}{T}}}, \quad (3.4.9)$$

$\forall t \in (0, T)$.

Preuve 3.4.3 Pour tout $t \in (0, T)$, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} & \|u(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq \frac{32}{3} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2 + T^2 \lambda_k \phi_{2k-1}^2 \right) e^{2(T-t)\lambda_k} \\ & \leq \frac{32}{3} \sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{2(T-t)\lambda_k} \left[\left(\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2 + T^2 \lambda_k \phi_{2k-1}^2 \right) \right]^{\frac{T-t}{T}} \\ & \quad \times \left[\left(\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2 + T^2 \lambda_k \phi_{2k-1}^2 \right) \right]^{\frac{t}{T}} \\ & \leq \frac{32}{3} \left[\sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{2T\lambda_k} \left(\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2 + T^2 \lambda_k \phi_{2k-1}^2 \right) \right]^{\frac{T-t}{T}} \\ & \quad \times \left[\sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^2 + \phi_{2k}^2 + T^2 \lambda_k \phi_{2k-1}^2 \right) \right]^{\frac{t}{T}} \\ & \leq \frac{32}{3} E^{\frac{2(T-t)}{T}} \left(16 \max(1, T^2) \right)^{\frac{t}{T}} \|\phi - \phi_N\|_{W_2^1(0,1)}^{\frac{2t}{T}} \\ & \leq \frac{32}{3} E^{\frac{2(T-t)}{T}} \left(16 \max(1, T^2) \right)^{\frac{t}{T}} \left[\|\phi^\delta - \phi_N^\delta\|_{W_2^1(0,1)} \right. \\ & \quad \left. + \|\phi^\delta - \phi_N^\delta + \phi_N - \phi\|_{W_2^1(0,1)} \right]^{\frac{2t}{T}} \\ & \leq \frac{32}{3} E^{\frac{2(T-t)}{T}} (16 \max(1, T^2))^{\frac{t}{T}} \left(\left(\tau + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \delta \right)^{\frac{2t}{T}}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|u(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq E^{1-\frac{t}{T}} \left(\left(\tau + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \delta \right)^{\frac{t}{T}} \sqrt{\frac{32}{3} (16 \max(1, T^2))^{\frac{t}{T}}}.$$

Maintenant, combinons les Propositions (3.4.1)–(3.4.3), on obtient le Théorème suivant qui nous donne l'estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution régularisée.

Théorème 3.4.1 *Soit $u(x, t)$ la solution du problème (3.3.1), soient la condition (3.3.7) satisfaite et la donnée $\phi^\delta(x) \in W_2^1(0, 1)$ satisfait (3.3.3). Si $u_N^\delta(x, t)$ est donnée par (3.4.2) et le paramètre de régularisation N est choisi selon (3.4.3), alors on aura :*

$$\|u(x, t) - u_N^\delta(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \left[\sqrt{\frac{32}{3}} \left(\left(\tau + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) c_1 \right)^{\frac{t}{T}} + c_2 \left(\frac{c_3}{\tau - \frac{8}{\sqrt{3}}} \right)^{\frac{T-t}{T}} \right] E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}}, \quad (3.4.10)$$

$$\forall t \in (0, T), \text{ où } c_1 = \sqrt{16 \max(1, T^2)}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)}, \quad \text{et } c_3 = \sqrt{\frac{4}{3} \max\left(1, \frac{1}{T^2}\right)}.$$

3.5 Applications numériques

On propose dans cette section de donner un exemple numérique afin de montrer la précision et l'efficacité de la méthode de régularisation de troncature avec la règle du choix a posteriori (3.4.3). Nous prenons $\tau = 9$, $T = 1$, et la donnée simulée est générée en utilisant la formule suivante :

$$\phi_i^\delta = \phi_i + \delta \text{rand}(\text{size}(\phi))_i, \quad (3.5.1)$$

où ϕ_i est la donnée exacte, $\text{rand}(\text{size}(\phi))_i$ est un nombre aléatoire dans $[-1, 1]$, ϕ désigne le vecteur dont les éléments sont ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, M$) (M est le nombre de discrétisation de la variable de l'espace), et δ indique le niveau d'erreur.

Nous prenons $M = 41$ et pour un $t \in (0, 1)$ fixé, afin de mesurer l'exactitude de l'approximation numérique de la fonction $u(x, t)$, nous utilisons la fonction RRMSE définie par :

$$\text{RRMSE} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^M (u(x_i, t) - u_N^\delta(x_i, t))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M u(x_i, t)^2}}, \quad (3.5.2)$$

où u et u_N^δ sont la solution exacte et approximative, respectivement.

Pour l'évaluation de tous les coefficients donnés dans l'exemple, nous utilisons la formule de Simpson pour calculer les intégrales $\phi_{2k-1} = (\phi(x), Y_{2k-1}(x))_{L^2(0,\pi)}$, $\phi_{2k} = (\phi(x), Y_{2k}(x))_{L^2(0,\pi)}$ ($k = 1, 2, \dots, N_0$) dans $[0, \pi]$, où $Y_{2k-1}(x) = \frac{4}{\pi^2} \cos(2kx)$, $Y_{2k}(x) = \frac{4}{\pi^2} (\pi - x) \sin(2kx)$, et les coefficients $\{\phi_{2k-1}^\delta\}_{k=1}^{N_0}$, $\{\phi_{2k}^\delta\}_{k=1}^{N_0}$ correspondants à la donnée perturbée ϕ^δ sont également calculés de la même manière, où N_0 est un entier positif assez grand.

Pour calculer le paramètre de régularisation N , nous le choisissons toujours selon (3.4.3).

Exemple 3.5.1 *Considérons le problème direct suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ \int_0^\pi u(x, t) dx = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = \phi_0(x) = 2x(2x - \pi)(x - \pi), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

La solution du problème (3.5.3) est comme suit :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^0 X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k}^0 - 2t\sqrt{\lambda_k} \phi_{2k-1}^0) X_{2k}(x) \right) e^{-t\lambda_k}, \quad (3.5.4)$$

où $\lambda_k = (2k)^2$, $X_{2k-1}(x) = x \cos(2kx)$, $X_{2k}(x) = \sin(2kx)$, $\phi_{2k-1}^0 = \int_0^\pi \phi_0(x) Y_{2k-1}(x) dx$, $\phi_{2k}^0 = \int_0^\pi \phi_0(x) Y_{2k}(x) dx$, $k = 1, 2, \dots$. En particulier, pour $t = 1$, on obtient la donnée finale suivante :

$$u(x, 1) = \phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^0 X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k}^0 - 4k\phi_{2k-1}^0) X_{2k}(x) \right) e^{-4k^2}, \quad (3.5.5)$$

Notons que la donnée (3.5.5) est une série infinie. Pour pouvoir faire de comparaison numérique entre les deux solutions exacte et régularisée, nous devons d'abord la couper comme suit :

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{N_0} \left(\phi_{2k-1}^0 X_{2k-1}(x) + (\phi_{2k}^0 - 4k\phi_{2k-1}^0) X_{2k}(x) \right) e^{-4k^2}, \quad (3.5.6)$$

pour N_0 suffisamment grand. Dans nos calculs, nous prenons $N_0 = 12$, et $\phi^\delta(x)$ est calculée selon (3.5.1).

Ensuite, nous choisissons le problème final correspondant donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ \int_0^\pi u(x, t) dx = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 1) = \phi(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (3.5.7)$$

La solution exacte du problème (3.5.7) et son approximation régularisée sont évaluées respectivement par :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{12} \left(\phi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \phi_{2k} X_{2k}(x) + 4k(1-t)\phi_{2k-1} X_{2k}(x) \right) e^{(1-t)4k^2}, \quad (3.5.8)$$

et

$$u_N^\delta(x, t) = \sum_{k=1}^1 \left(\phi_{2k-1}^\delta X_{2k-1}(x) + \phi_{2k}^\delta X_{2k}(x) + 4k(1-t)\phi_{2k-1}^\delta X_{2k}(x) \right) e^{(1-t)4k^2}, \quad (3.5.9)$$

où $\phi_{2k-1} = (\phi(x), Y_{2k-1}(x))_{L^2(0,\pi)}$, $\phi_{2k} = (\phi(x), Y_{2k}(x))_{L^2(0,\pi)}$,
 $\phi_{2k-1}^\delta = (\phi^\delta(x), Y_{2k-1}(x))_{L^2(0,\pi)}$, $\phi_{2k}^\delta = (\phi^\delta(x), Y_{2k}(x))_{L^2(0,\pi)}$.

La Figure (3.1) montre la relation entre la fonction RRMSE et les différentes valeurs du paramètre de régularisation N avec un niveau de bruit $\delta = 1 \times 10^{-4}$ à l'instant $t = 0.9$. De cette figure, nous pouvons voir qu'une coupure appropriée du nombre des coefficients de la solution régularisée est nécessaire, et son choix approprié est très important. On note également dans cet exemple que N joue vraiment le rôle du paramètre de régularisation.

Dans la Figure (3.2) et la Figure (3.3), nous présentons la solution exacte et son approximation régularisée avec un niveau d'erreur égal à $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

L'erreur absolue dans la Figure (3.4) avec $\delta = 1 \times 10^{-3}$ indique que plus t est petit, plus la solution régularisée est loin de la solution exacte. Au contraire, plus le temps t se rapproche de 1, nous pouvons obtenir un meilleur effet de calcul, ce qui coïncide avec notre estimation théorique (3.4.10).

Les comparaisons de la solution exacte et son approximation régularisée dans des moments différents $t = 0.1, 0.5, 0.9$, avec $\delta = 2 \times 10^{-3}$ sont illustrées dans la Figure (3.5), et encore, nous pouvons dire la même observation que la Figure (3.4).

La Figure (3.6) montre les comparaisons de la solution exacte et son approximation régularisée à l'instant $t = 0.2$ avec différentes valeurs de niveaux de bruit $\delta = 5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}$ ajoutées à la donnée, on peut voir que l'effet numérique devient pire par rapport à l'augmentation de la valeur du niveau de bruit.

De l'exemple précédent, on peut conclure le suivant :

1. Plus le temps t est petit, plus la solution régularisée s'éloigne de la solution exacte. En revanche, quand le temps t est près de 1, nous pouvons obtenir un meilleur effet de calcul, ce qui coïncide avec notre estimation théorique (3.4.10).
2. Plus le niveau de bruit est petit, plus la solution régularisée peut approcher la solution exacte.

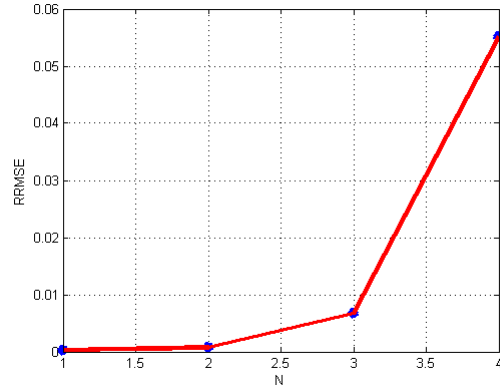


FIGURE 3.1 – RRMSE par rapport à N avec $\delta = 1 \times 10^{-4}$ à l'instant $t = 0.9$.

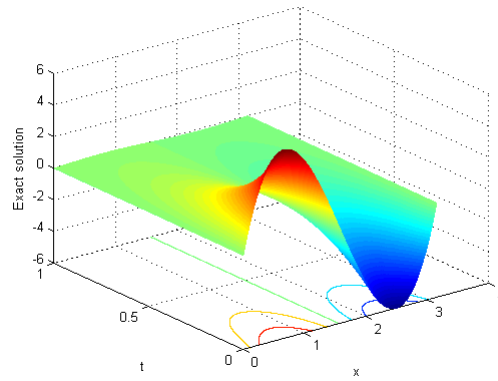


FIGURE 3.2 – La solution exacte.

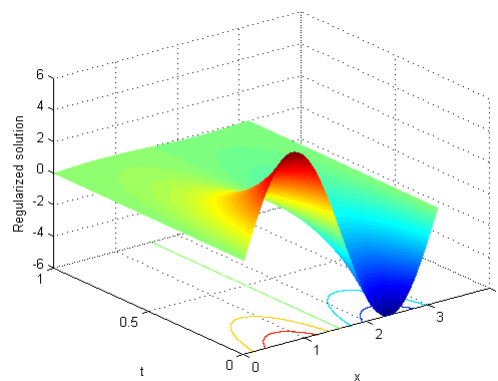


FIGURE 3.3 – La solution régularisée avec $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

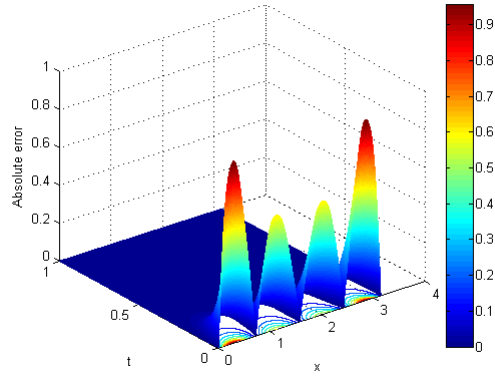


FIGURE 3.4 – L'erreur absolue avec $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

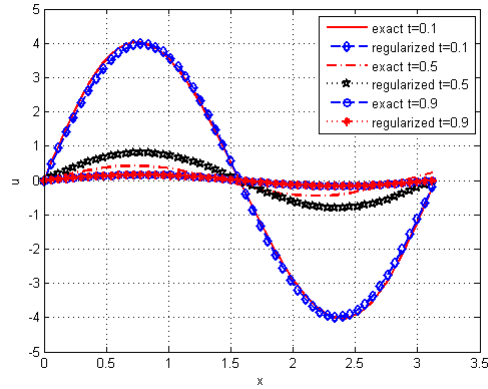


FIGURE 3.5 – La comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée avec $\delta = 2 \times 10^{-3}$ en $t = 0.1, 0.5, 0.9$.

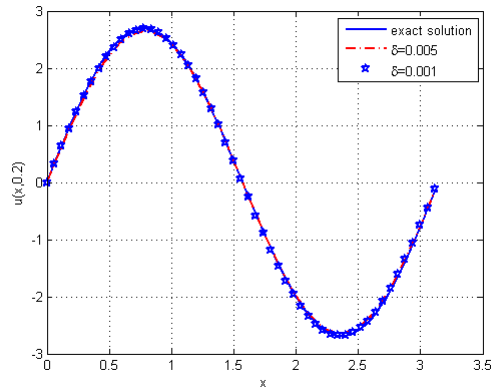


FIGURE 3.6 – La comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée avec $\delta = 5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}$ à l'instant $t = 0.2$.

Régularisation d'un problème non-homogène pour l'équation de la chaleur avec une condition intégrale

U
 quatrième chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème non-homogène pour l'équation de la chaleur avec une condition intégrale. On montre qu'il est mal posé et on propose de le régulariser par une méthode de troncature avec une règle du choix a posteriori du paramètre de régularisation. On donne ensuite les estimations de convergence entre la solution exacte et son approximation régularisée. Une simulation numérique est donnée pour illustrer la méthode proposée.

4.1 Introduction

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in]0, 1[, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ \int_0^1 u(x,t) dx = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \xi(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

On suppose que ξ vérifie les conditions de compatibilité suivantes :

$$\xi(0) = 0, \quad \int_0^1 \xi(x) dx = 0, \quad (4.1.2)$$

et f satisfait la condition :

$$\int_0^1 f(x,t) dx = 0. \quad (4.1.3)$$

Ce type de problèmes dans le cas homogène a été considéré par de nombreux auteurs, voir par exemple [5, 19, 30]. Un cas plus général a été étudié par Yurchuk dans [39].

Dans notre travail, on considère le problème de contrôle suivant : pour $T > 0$ et $\phi \in W_2^1(0, 1)$ vérifiant les conditions (4.1.2), nous essayons de minimiser la fonctionnelle :

$$I(\xi) = \int_0^1 |u(x, T; \xi) - \phi(x)|^2 dx. \quad (4.1.4)$$

Une solution évidente au problème (4.1.4) est de choisir ξ tel que $I(\xi) = 0$, c'est-à-dire, $u(x, T; \xi) = \phi(x)$.

Par conséquent, dans le rectangle $D_T = (0, 1) \times (0, T)$, on considère u comme une solution du problème aux limites final suivant :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (4.1.5)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (4.1.6)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T], \quad (4.1.7)$$

$$u(x, T) = \phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (4.1.8)$$

et nous prenons $\xi(x) = u(x, 0)$. Ces problèmes sont mal posés. Si une solution existe sur $[0, T]$, elle ne dépendra jamais continûment de la donnée finale ϕ .

Une approche bien connue traitant ces problèmes est la méthode de quasi-réversibilité introduite par Lattès et Lions dans [23]. Cette dernière consiste à remplacer le dernier problème aux limites avec un autre problème approximatif qui est bien posé. Dans notre contexte, cette méthode ne convient pas pour la présence du terme intégral dans les conditions aux limites. Un problème similaire avec $f = 0$ dans [2] a été considéré en utilisant une méthode de quasi-réversibilité modifiée basée sur une perturbation de l'équation (4.1.5) d'une manière spécifique.

Dans cette direction, il convient également de mentionner la méthode bien connue des valeurs quasi-limites et des conditions auxiliaires développées en [1, 8, 11, 12, 17, 18, 31, 34, 35] et [20, 25] respectivement.

Parmi de nombreuses études autour du problème aux limites de l'équation de la chaleur avec une condition intégrale, le cadre général du cas non-homogène est rarement considéré.

Dans ce travail, on propose stabiliser le problème (4.1.5)–(4.1.8) en éliminant toutes les fréquences élevées dans la solution, ce qui est connu comme la méthode de troncature. Elle consiste à couper les coefficients de Fourier en faisant une règle de sélection a posteriori du paramètre de régularisation.

4.2 Représentation de la solution du problème

(4.1.5)–(4.1.8)

Définition 4.2.1 *On définit une solution classique du problème (4.1.5)–(4.1.8) comme étant une fonction telle que :*

1. Elle est continue dans \overline{D}_T .
2. Dans D_T , elle a une dérivée première continue par rapport à t et une seconde dérivée continue par rapport à x .
3. Elle satisfait (4.1.5) avec (4.1.6)–(4.1.8), dans le sens classique.

Maintenant, remplaçons le problème (4.1.5)–(4.1.8) par le problème équivalent suivant [19] :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (x, t) \in D_T, \quad (4.2.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (4.2.2)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad t \in [0, T], \quad (4.2.3)$$

$$u(x, T) = \phi(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (4.2.4)$$

On suppose que la fonction $\phi \in W_2^1(0, 1)$ vérifie la condition (4.1.2) et $f \in L^2((0, T), L^2(0, 1))$ vérifie (4.1.3). Puis, en développant ϕ et f dans un système bi-orthogonal, on obtient :

$$\phi(x) = \phi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \phi_{2k} X_{2k}(x) \right), \quad (4.2.5)$$

et

$$f(x, t) = f_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(f_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + f_{2k}(t) X_{2k}(x) \right), \quad (4.2.6)$$

respectivement, par rapport à la base formée de fonctions propres et fonctions associées :

$$X_0(x) = x, \quad X_{2k-1}(x) = x \cos(2\pi kx), \quad X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx), \quad k \geq 1, \quad (4.2.7)$$

du problème de Sturm–Liouville non auto-adjoint suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda X(x), & 0 < x < 1, \\ X(0) = 0, \\ X'(0) = X'(1). \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Ce dernier correspond au problème (4.2.1)–(4.2.4). Les coefficients ϕ_0 , ϕ_{2k-1} , ϕ_{2k} sont donnés par la formule :

$$\phi_0 = \int_0^1 \phi(x)Y_0(x)dx, \quad \phi_{2k-1} = \int_0^1 \phi(x)Y_{2k-1}(x)dx, \quad \phi_{2k} = \int_0^1 \phi(x)Y_{2k}(x)dx, \quad (4.2.9)$$

et similairement pour les coefficients $f_0(t)$, $f_{2k-1}(t)$, $f_{2k}(t)$, on a :

$$f_0(t) = \int_0^1 f(x, t)Y_0(x)dx, \quad f_{2k-1}(t) = \int_0^1 f(x, t)Y_{2k-1}(x)dx, \\ f_{2k}(t) = \int_0^1 f(x, t)Y_{2k}(x)dx, \quad (4.2.10)$$

où la suite $\{Y_k\}_0^\infty$ de fonctions propres et fonctions associées du problème adjoint de (4.2.8) :

$$\begin{cases} -\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = \lambda Y(x), & 0 < x < 1, \\ Y'(1) = 0, \\ Y(0) = Y(1), \end{cases} \quad (4.2.11)$$

est donnée par la formule :

$$Y_0(x) = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx), \quad Y_{2k}(x) = 4(1-x) \sin(2\pi kx), \quad k \geq 1. \quad (4.2.12)$$

Les valeurs propres du problème (4.2.8) et celles du problème adjoint (4.2.11) sont données par :

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, \quad k \geq 0. \quad (4.2.13)$$

Les bases (4.2.7) et (4.2.12) forment un système bi-orthogonal.

Comme $\int_0^1 \phi(x)dx = 0$ et $\int_0^1 f(x, t)dx = 0$ on a $\phi_0 = 0$ et $f_0(t) = 0$ dans (4.2.5) et (4.2.6) respectivement.

Par analogie avec la méthode de Fourier, on cherche une solution du problème (4.2.1)–(4.2.4) sous la forme :

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + u_{2k}(t)X_{2k}(x) \right). \quad (4.2.14)$$

Maintenant, si on peut permuter la somme (\sum) avec la première dérivée partielle ($\partial/\partial t$) par rapport à t , et de même, avec la seconde dérivée partielle ($\partial^2/\partial x^2$) par rapport à x dans la formule (4.2.14), on obtient :

$$u_0(t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
u_{2k-1}(t) &= e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds, \\
u_{2k}(t) &= \left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(T-t)\lambda_k} \\
&\quad - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2\sqrt{\lambda_k}(s-t)f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\
&\quad + \left[\left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(T-t)\lambda_k} \right. \\
&\quad \left. - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2\sqrt{\lambda_k}(s-t)f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x). \quad (4.2.15)
\end{aligned}$$

4.3 La formulation mathématique et l'analyse de l'instabilité

Considérons l'équation parabolique non-homogène rétrograde avec la condition aux limites intégrale suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \\ u(0, t) = 0, & t \in [0, T], \\ \int_0^1 u(x, t) dx = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, T) = \phi(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.3.1)$$

où T est une constante strictement positive.

On suppose que ϕ vérifie les conditions de compatibilité suivantes :

$$\phi(0) = 0, \quad \int_0^1 \phi(x) dx = 0, \quad (4.3.2)$$

et f vérifie la condition (4.1.3).

Soit E une constante positive et supposons qu'elle vérifie la condition a priori suivante :

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq E, \quad (4.3.3)$$

et que $\phi^\delta(x) \in W_2^1(0, 1)$ satisfait :

$$\|\phi^\delta - \phi\|_{W_2^1(0,1)} \leq \delta, \quad (4.3.4)$$

où δ représente le niveau de bruit.

La solution du problème (4.3.1) est donnée par (4.2.15). Notons que la croissance rapide des termes $e^{(T-t)\lambda_k}$ et $e^{(s-t)\lambda_k}$ quand $k \rightarrow +\infty$ est la source de l'instabilité. Par conséquent, un moyen naturel pour obtenir une approximation stable de la solution u est d'éliminer l'effet des hautes fréquences et de considérer la solution u pour les k qui sont inférieurs ou égaux à N , c'est-à-dire $k \leq N$, où N est un entier positif qui joue le rôle du paramètre de régularisation.

4.4 Règle du choix a posteriori du paramètre de régularisation et les estimations de la stabilité

On définit la solution régularisée du problème (4.3.1) comme suit :

$$\begin{aligned} u_N(x, t) = & \sum_{k=1}^N \left(e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\ & + \left[\left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(T-t)\lambda_k} \right. \\ & \left. - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2\sqrt{\lambda_k}(s-t) f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x). \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Dans le cas d'une donnée finale bruitée ϕ^δ , on utilise la formule similaire suivante :

$$\begin{aligned} u_N^\delta(x, t) = & \sum_{k=1}^N \left(e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1}^\delta - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\ & + \left[\left(\phi_{2k}^\delta + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1}^\delta \right) e^{(T-t)\lambda_k} \right. \\ & \left. - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2\sqrt{\lambda_k}(s-t) f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x), \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

où $\phi_{2k-1}^\delta = \int_0^1 \phi^\delta(x) Y_{2k-1}(x) dx$, $\phi_{2k}^\delta = \int_0^1 \phi^\delta(x) Y_{2k}(x) dx$.

On propose de choisir le paramètre de régularisation comme le premier entier N tel que :

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \leq \tau\delta, \end{aligned}$$

où τ est une constante telle que $\tau > \sqrt{\frac{512}{3}} \max(1, T^2)$. Plus précisément, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
& \qquad \qquad \qquad \leq \tau \delta < \\
& \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}. \tag{4.4.3}
\end{aligned}$$

Proposition 4.4.1 *Soit $u(x, t)$ la solution du problème (4.3.1), soit la condition a priori (4.3.3) satisfaite, et soit $\phi^\delta(x) \in W_2^1(0, 1)$ satisfait (4.3.4). Si le paramètre de régularisation N est choisi selon (4.4.3), on aura :*

$$N \leq \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{8}{\sqrt{3}}E\right) - \ln((\tau - c_1)\delta)}{4T\pi^2}}, \tag{4.4.4}$$

où $c_1 = \sqrt{\frac{512}{3}} \max(1, T^2)$.

Preuve 4.4.1 *D'après le Théorème 1 dans [19], on sait que pour $\phi \in L^2(0, 1)$, on a :*

$$\frac{3}{4} \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k^2 \leq 16 \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2. \tag{4.4.5}$$

Donc, de (4.4.5) et la condition a priori (4.3.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\
& \leq \frac{4}{3} \sum_{k=N}^{+\infty} \left[\left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left[\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right] e^{2T\lambda_k} e^{-2T\lambda_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{4}{3} e^{-8T\pi^2 N^2} \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} e^{T\lambda_k} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \\
&+ \left[\left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \\
&\leq \frac{64}{3} e^{-8T\pi^2 N^2} E^2.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} \right. \right. \\
&\left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{8}{\sqrt{3}} e^{-4T\pi^2 N^2} E.
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

D'un autre coté, d'après l'inégalité triangulaire, on sait que :

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} \right. \right. \\
&\left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
&= \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\
&\left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right. \\
&\left. - \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k-1}(x) + \left(\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k} \right) \right. \\
&\left. + 2\sqrt{\lambda_k} T \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
&\geq \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\
&\left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
&\left. - \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k-1}(x) + \left(\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k} \right) \right. \right. \\
&\left. \left. + 2\sqrt{\lambda_k} T \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties, on aura :

$$\lambda_k \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right)^2 = 8a_k^2, \tag{4.4.7}$$

où $a_k = \int_0^1 (\phi^\delta(x) - \phi(x))' \sqrt{2} \sin(2\pi kx) dx$.

D'après (4.4.5), (4.4.7), et l'inégalité de Bessel, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1}) X_{2k-1}(x) + \left((\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k}) \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\sqrt{\lambda_k} T (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1}) \right) X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\
& \leq \frac{4}{3} \sum_{k=N}^{+\infty} (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + \left((\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k}) + 2\sqrt{\lambda_k} T (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1}) \right)^2 \\
& \leq \frac{4}{3} \sum_{k=N}^{+\infty} (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + 2(\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 + 8\lambda_k T^2 (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 \\
& \leq \frac{32}{3} \max(1, T^2) \sum_{k=1}^{+\infty} (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 + \lambda_k (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 \\
& \leq \frac{32}{3} \max(1, T^2) \left(16 \|\phi^\delta - \phi\|_{L^2(0,1)}^2 + 8 \|\phi'^\delta - \phi'\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\
& \leq \frac{512}{3} \max(1, T^2) \|\phi^\delta - \phi\|_{W_2^1(0,1)}^2 \\
& \leq \frac{512}{3} \max(1, T^2) \delta^2.
\end{aligned}$$

Alors, de (4.4.3), on a :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
& \geq \tau\delta - \delta \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)} = \left(\tau - \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)} \right) \delta. \quad (4.4.8)
\end{aligned}$$

Combinons (4.4.6) avec (4.4.8), on a :

$$\left(\tau - \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)} \right) \delta \leq \frac{8}{\sqrt{3}} e^{-4T\pi^2 N^2} E,$$

et la preuve de cette Proposition est complétée par quelques calculs élémentaires.

Proposition 4.4.2 Soit $u(x, t)$ la solution du problème (4.3.1). Soient toutes les conditions de la Proposition 4.4.1 satisfaites et soient $u_N(x, t)$, $u_N^\delta(x, t)$ données par (4.4.1) et (4.4.2) respectivement. Alors, on aura l'estimation suivante :

$$\|u_N^\delta(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq e^{4\pi^2 N^2(T-t)} c_1 \delta, \quad \forall t \in (0, T), \quad (4.4.9)$$

où $c_1 = \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)}$.

Preuve 4.4.2 Pour tout $t \in (0, T)$, en utilisant l'inégalité (4.4.5), l'égalité (4.4.7), et l'inégalité de Bessel, on a :

$$\begin{aligned}
& \|u_N^\delta(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
& \leq \frac{32}{3} \sum_{k=1}^N \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 \right. \\
& \quad \left. + T^2 \lambda_k (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 \right) e^{2(T-t)\lambda_k} \\
& \leq \frac{32}{3} e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \sum_{k=1}^N \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 \right. \\
& \quad \left. + T^2 \lambda_k (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 \right) \\
& \leq \frac{32}{3} e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \left(16 \|\phi^\delta - \phi\|_{L^2(0,1)}^2 + 8T^2 \|\phi'^\delta - \phi'\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\
& \leq \frac{512}{3} \max(1, T^2) e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \|\phi^\delta - \phi\|_{W_2^1(0,1)}^2 \\
& \leq \frac{512}{3} \max(1, T^2) e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \delta^2.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|u_N^\delta(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \delta e^{4\pi^2 N^2 (T-t)} \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)}, \quad \forall t \in (0, T).$$

Proposition 4.4.3 Supposons qu'ils existent deux nombres positifs A_1 et A_2 tels que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^T e^{2s\lambda_k} f_{2k-1}^2(s) ds \leq A_1, \quad (4.4.10)$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^T e^{2s\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right)^2 ds \leq A_2. \quad (4.4.11)$$

Soit $u(x, t)$ la solution du problème (4.3.1). Soient toutes les conditions de la Proposition 4.4.1 satisfaites et soit $u_N(x, t)$ donnée par (4.4.1). Alors on l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
& \|u(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \\
& \sqrt{\frac{8}{3} \left(16E^{\frac{2(T-t)}{T}} [(\tau + c_1) \delta]^{\frac{2t}{T}} + T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2) \right)}, \quad (4.4.12)
\end{aligned}$$

$\forall t \in (0, T)$, où $c_1 = \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)}$.

Preuve 4.4.3 Pour tout $t \in (0, T)$, en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura :

$$\begin{aligned}
& \|u(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
& \leq \frac{4}{3} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \\
& + \left[\left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(T-t)\lambda_k} \right. \\
& \left. - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2(s-t)\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \\
& \leq \frac{4}{3} \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2e^{-2t\lambda_k} \left(e^{T\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \\
& + 2T \int_0^T e^{2(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}^2(s) ds + 2e^{-2t\lambda_k} \left[\left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} \right. \\
& \left. - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2(s-t)\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \\
& + 2T \int_0^T e^{2(s-t)\lambda_k} \left(2(s-t)\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right)^2 ds \\
& \leq \frac{4}{3} \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2e^{-2t\lambda_k} \left[\left(e^{T\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
& \left. + \left[\left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right] \\
& + \frac{8}{3}Te^{-8t\pi^2N^2}A_1 + \frac{8}{3}Te^{-8t\pi^2N^2}A_2 \\
& \leq \frac{8}{3} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left[\left(e^{T\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
& \left. + \left[\left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right]^{\frac{T-t}{T}} \\
& \times \left[\left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
& \left. + \left[\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right]^{\frac{t}{T}} \\
& + \frac{8}{3}Te^{-8t\pi^2N^2} (A_1 + A_2) \\
& \leq \frac{8}{3} \left[\sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(e^{T\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
& \left. + \left[\left(\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right]^{\frac{T-t}{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
& + \left. \left[\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right]^{\frac{t}{T}} \\
& + \frac{8}{3} T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2) \\
& \leq \frac{128}{3} E^{\frac{2(T-t)}{T}} \left\| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \right. \\
& + \left. \left[\phi_{2k} + 2\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2s\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] \right. \\
& \times \left. X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}^{\frac{2t}{T}} + \frac{8}{3} T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2) \\
& \leq \frac{128}{3} E^{\frac{2(T-t)}{T}} \left[\left(\tau + \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)} \right) \delta \right]^{\frac{2t}{T}} + \frac{8}{3} T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
& \|u(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \\
& \sqrt{\frac{8}{3} \left(16E^{\frac{2(T-t)}{T}} \left[\left(\tau + \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)} \right) \delta \right]^{\frac{2t}{T}} + T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2) \right)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, combinons les Propositions (4.4.1)–(4.4.3), on obtient le Théorème suivant qui nous donne l'estimation d'erreur entre la solution exacte et son approximation régularisée.

Théorème 4.4.1 *Soit $u(x, t)$ la solution du problème (4.3.1), soient la condition (4.3.3) satisfaite et la donnée $\phi^\delta(x) \in W_2^1(0, 1)$ satisfait (4.3.4). Si $u_N^\delta(x, t)$ est donnée par (4.4.2) et le paramètre de régularisation N est choisi selon (4.4.3), alors on aura :*

$$\begin{aligned}
& \|u(x, t) - u_N^\delta(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \left[c_1 \left(\frac{8E}{\sqrt{3}(\tau - c_1)} \right)^{\frac{T-t}{T}} \right. \\
& + \left. \sqrt{\frac{8}{3} \left(16E^{\frac{2(T-t)}{T}} (\tau + c_1)^{\frac{2t}{T}} + T (A_1 + A_2) \left(\frac{\sqrt{3}(\tau - c_1)}{8E} \right)^{\frac{2t}{T}} \right)} \right] \delta^{\frac{t}{T}},
\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

$$\forall t \in (0, T), \text{ où } c_1 = \sqrt{\frac{512}{3} \max(1, T^2)}.$$

4.5 Exemple numérique

Dans cette section nous allons donner un exemple numérique pour prouver la précision et l'efficacité de la méthode de régularisation de troncature avec la règle du choix a posteriori (4.4.3). Nous prenons $\tau = 28$, $T = 1$, et la donnée simulée est générée en utilisant la formule suivante :

$$\phi_i^\delta = \phi_i + \delta \text{rand}(\text{size}(\phi))_i, \quad (4.5.1)$$

où ϕ_i est la donnée exacte, $\text{rand}(\text{size}(\phi))_i$ est un nombre aléatoire dans $[-1, 1]$, ϕ désigne le vecteur dont les éléments sont ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, M$) (M est le nombre de discrétisation de la variable de l'espace), et δ indique le niveau d'erreur.

Nous prenons $M = 41$ et pour un $t \in (0, 1)$ fixé, afin de mesurer l'exactitude de l'approximation numérique de la fonction $u(x, t)$, nous utilisons la fonction RRMSE définie par :

$$\text{RRMSE} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^M (u(x_i, t) - u_N^\delta(x_i, t))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M u(x_i, t)^2}}, \quad (4.5.2)$$

où u et u_N^δ sont la solution exacte et approximative, respectivement.

Pour l'évaluation de tous les coefficients donnés dans l'exemple, nous utilisons la formule de Simpson pour calculer les intégrales $\phi_{2k-1} = (\phi(x), Y_{2k-1}(x))_{L^2(0,\pi)}$, $\phi_{2k} = (\phi(x), Y_{2k}(x))_{L^2(0,\pi)}$ ($k = 1, 2, \dots, N_0$) dans $[0, \pi]$, où :

$$Y_{2k-1}(x) = \frac{4}{\pi^2} \cos(2kx), \quad Y_{2k}(x) = \frac{4}{\pi^2} (\pi - x) \sin(2kx),$$

et les coefficients $\{\phi_{2k-1}^\delta\}_{k=1}^{N_0}$, $\{\phi_{2k}^\delta\}_{k=1}^{N_0}$ correspondants à la donnée perturbée ϕ^δ sont également calculés de la même manière, où N_0 est un entier positif assez grand.

Pour calculer le paramètre de régularisation N , nous le choisissons toujours selon (4.4.3).

Exemple 4.5.1 *Considérons le problème direct suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -t \sin(2x), & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ \int_0^\pi u(x, t) dx = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = \phi_0(x) = 2x(2x - \pi)(x - \pi), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (4.5.3)$$

La solution du problème (4.5.3) est comme suit :

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{-t\lambda_k} \phi_{2k-1}^0 + \int_0^t e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\
& + \left[\left(\phi_{2k}^0 - 2t\sqrt{\lambda_k} \phi_{2k-1}^0 \right) e^{-t\lambda_k} \right. \\
& \left. + \int_0^t e^{(s-t)\lambda_k} \left(f_{2k}(s) - 2\sqrt{\lambda_k} (t-s) f_{2k-1}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x), \quad (4.5.4)
\end{aligned}$$

où $\lambda_k = (2k)^2$, $X_{2k-1}(x) = x \cos(2kx)$, $X_{2k}(x) = \sin(2kx)$,
 $\phi_{2k-1}^0 = (\phi_0(x), Y_{2k-1}(x))_{L^2(0,\pi)}$, $\phi_{2k}^0 = (\phi_0(x), Y_{2k}(x))_{L^2(0,\pi)}$,
 $f_{2k-1}(t) = (f(x, t), Y_{2k-1}(x))_{L^2(0,\pi)}$, $f_{2k}(t) = (f(x, t), Y_{2k}(x))_{L^2(0,\pi)}$,
 $k = 1, 2, \dots, N_0$. En particulier, pour $t = 1$, on obtient la donnée finale suivante :

$$\begin{aligned}
u(x, 1) = \phi(x) = & \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{-4k^2} \phi_{2k-1}^0 + \int_0^1 e^{(s-1)4k^2} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\
& + \left[\left(\phi_{2k}^0 - 4k \phi_{2k-1}^0 \right) e^{-4k^2} \right. \\
& \left. + \int_0^1 e^{(s-1)4k^2} \left(f_{2k}(s) - 4k(1-s) f_{2k-1}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x). \quad (4.5.5)
\end{aligned}$$

Notons que la donnée (4.5.5) est une série infinie. Pour pouvoir faire de comparaisons numériques entre la solution exacte et la solution régularisée, nous devons d'abord la couper comme suit :

$$\begin{aligned}
\phi(x) = & \sum_{k=1}^{N_0} \left(e^{-4k^2} \phi_{2k-1}^0 + \int_0^1 e^{(s-1)4k^2} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\
& + \left[\left(\phi_{2k}^0 - 4k \phi_{2k-1}^0 \right) e^{-4k^2} \right. \\
& \left. + \int_0^1 e^{(s-1)4k^2} \left(f_{2k}(s) - 4k(1-s) f_{2k-1}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x), \quad (4.5.6)
\end{aligned}$$

pour N_0 suffisamment grand. Dans nos calculs, nous prenons $N_0 = 12$ et $\phi^\delta(x)$ est calculée selon (4.5.1).

Ensuite, nous choisissons le problème final correspondant donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -t \sin(2x), & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, 1), \\ u(0, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ \int_0^\pi u(x, t) dx = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 1) = \phi(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (4.5.7)$$

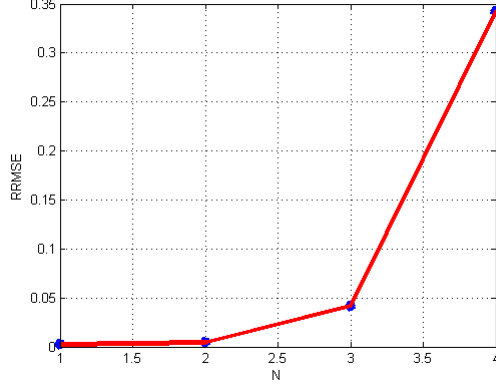


FIGURE 4.1 – RRMSE par rapport à N avec $\delta = 1 \times 10^{-6}$ à l'instant $t = 0.9$.

La solution exacte du problème (4.5.7) et son approximation régularisée sont évaluées respectivement par :

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \sum_{k=1}^{12} \left(e^{(1-t)4k^2} \phi_{2k-1} + \int_t^1 e^{(s-t)4k^2} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\
& + \left[\left(\phi_{2k} + 4k(1-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(1-t)4k^2} \right. \\
& \left. - \int_t^1 e^{(s-t)4k^2} \left(4k(s-t) f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x), \quad (4.5.8)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_N^\delta(x, t) = & \sum_{k=1}^N \left(e^{(1-t)4k^2} \phi_{2k-1}^\delta + \int_t^1 e^{(s-t)4k^2} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\
& + \left[\left(\phi_{2k}^\delta + 4k(1-t)\phi_{2k-1}^\delta \right) e^{(1-t)4k^2} \right. \\
& \left. - \int_t^1 e^{(s-t)4k^2} \left(4k(s-t) f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x), \quad (4.5.9)
\end{aligned}$$

où $\phi_{2k-1} = (\phi(x), Y_{2k-1}(x))_{L^2(0,\pi)}$, $\phi_{2k} = (\phi(x), Y_{2k}(x))_{L^2(0,\pi)}$,
 $\phi_{2k-1}^\delta = (\phi^\delta(x), Y_{2k-1}(x))_{L^2(0,\pi)}$, $\phi_{2k}^\delta = (\phi^\delta(x), Y_{2k}(x))_{L^2(0,\pi)}$.

La Figure (4.1) montre la relation entre la fonction RRMSE et les différentes valeurs du paramètre de régularisation N , ($N = 1, 2, 3, 4$) avec un niveau de bruit $\delta = 1 \times 10^{-6}$ à l'instant $t = 0.9$. De cette figure, nous pouvons voir qu'une coupure appropriée du nombre des coefficients de la solution régularisée est nécessaire, et son choix approprié est très important. On note également dans cet exemple que N joue vraiment le rôle du paramètre de régularisation.

Dans la Figure (4.2) et la Figure (4.3), nous présentons la solution exacte et son approximation régularisée avec un niveau d'erreur égal à $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

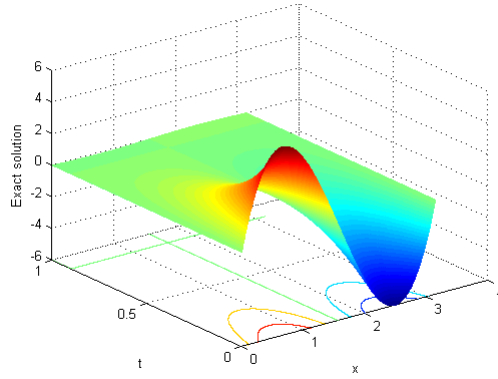


FIGURE 4.2 – La solution exacte.

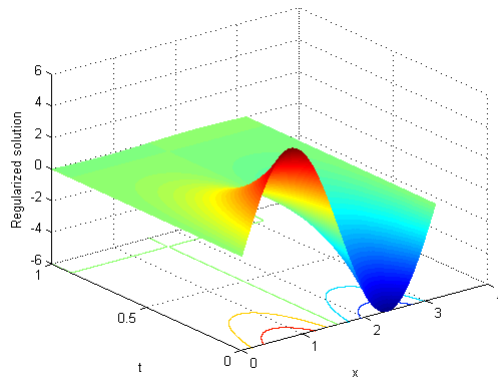


FIGURE 4.3 – La solution régularisée avec $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

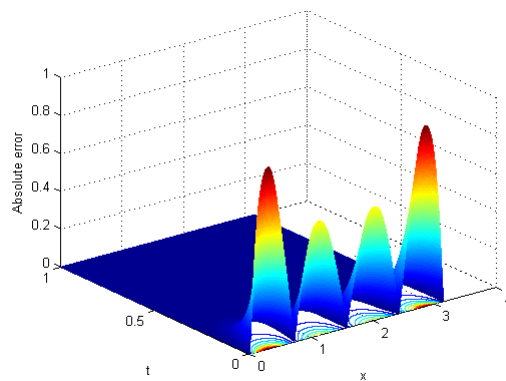


FIGURE 4.4 – L'erreur absolue avec $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

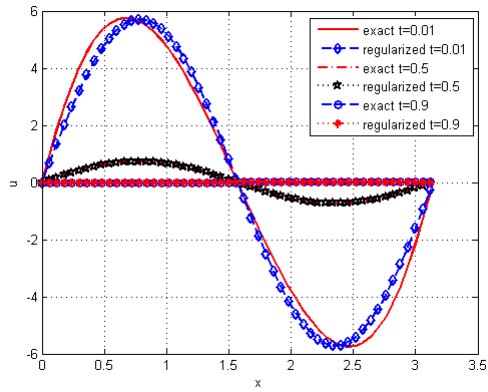


FIGURE 4.5 – La comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée avec $\delta = 2 \times 10^{-3}$ en $t = 0.01, 0.5, 0.9$.

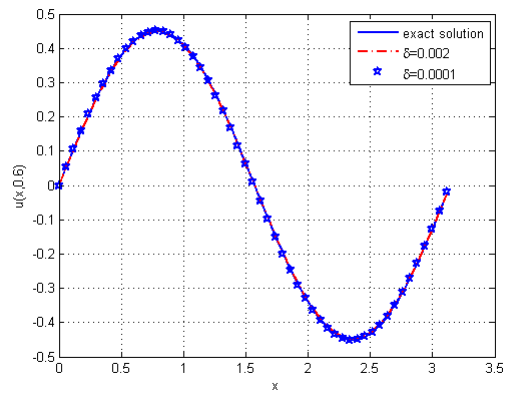


FIGURE 4.6 – La comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée avec $\delta = 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}$ à l'instant $t = 0.6$.

L'erreur absolue dans la Figure (4.4) avec $\delta = 1 \times 10^{-3}$ indique que plus t est petit, plus la solution régularisée est loin de la solution exacte. Au contraire, plus le temps t se rapproche de 1, nous pouvons obtenir un meilleur effet de calcul, ce qui coïncide avec notre estimation théorique (4.4.13).

Les comparaisons de la solution exacte et son approximation régularisée dans des moments différents $t = 0.01, 0.5, 0.9$, avec $\delta = 2 \times 10^{-3}$ sont illustrées dans la Figure (4.5), et encore, nous pouvons dire la même observation que la Figure (4.4).

La Figure (4.6) montre les comparaisons de la solution exacte et son approximation régularisée à l'instant $t = 0.6$ avec différentes valeurs de niveaux de bruit $\delta = 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}$ ajoutées à la donnée, on peut voir que l'effet numérique devient pire par rapport à l'augmentation de la valeur du niveau de bruit.

De l'exemple précédent, on peut conclure le suivant :

1. Plus le temps t est petit, plus la solution régularisée s'éloigne de la solution exacte. En revanche, quand le temps t est près de 1, nous pouvons obtenir un meilleur effet de calcul, ce qui coïncide avec notre estimation théorique (4.4.13).
2. Plus le niveau de bruit est petit, plus la solution régularisée peut approcher la solution exacte.

Régularisation d'un problème non-homogène pour l'équation de la chaleur avec des conditions non-locales

Dans le dernier chapitre, on considère un problème non-homogène mal posé pour une équation parabolique du second ordre où on combine entre une condition intégrale et une condition entre deux points limites. Par une méthode de troncature avec une règle de sélection a posteriori du paramètre de régularisation, on donne des estimations de stabilité et de convergence. Enfin, on illustre la méthode par une application numérique qui prouve son efficacité.

5.1 Introduction

Dans le rectangle $D_T = (0, 1) \times (0, T)$, on considère u comme une solution du problème aux limite final suivant :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (5.1.1)$$

$$u(0, t) - \beta u(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5.1.2)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5.1.3)$$

$$u(x, T) = \phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (5.1.4)$$

où T est une constante positive et $\beta \neq \pm 1$ est un nombre donné.

On suppose que ϕ vérifie les conditions de compatibilité suivantes :

$$\phi(0) = \beta\phi(1), \quad \int_0^1 \phi(x) dx = 0, \quad (5.1.5)$$

et f satisfait la condition :

$$\int_0^1 f(x, t) dx = 0. \quad (5.1.6)$$

Une approche bien connue traitant ces problèmes est la méthode de quasi-réversibilité introduite par Lattès et Lions dans [23]. Cette dernière consiste à remplacer le dernier problème aux limites avec un autre problème approximatif qui est bien posé. Dans notre cas, la raison qui nous empêche d'utiliser cette méthode est la nature des conditions aux limites. Un problème similaire avec $f = 0$ et $\beta = 0$ dans [2] a été considéré en utilisant une méthode de quasi-réversibilité modifiée basée sur une perturbation de l'équation (5.1.1) d'une manière spécifique.

Dans ce travail, nous allons stabiliser le problème (5.1.1)–(5.1.4) en éliminant toutes les fréquences élevées dans la solution, ce qui est connu comme la méthode de troncature. Elle consiste à couper les coefficients de Fourier par une sélection appropriée du paramètre de régularisation par une règle a posteriori.

5.2 Représentation de la solution du problème (5.1.1)–(5.1.4)

Définition 5.2.1 *On définit une solution classique du problème (5.1.1)–(5.1.4) comme étant une fonction telle que :*

1. Elle est continue dans \overline{D}_T .
2. Dans D_T , elle a une dérivée première continue par rapport à t et une seconde dérivée continue par rapport à x .
3. Elle satisfait (5.1.1) avec (5.1.2)–(5.1.4), dans le sens classique.

Maintenant, remplaçons le problème (5.1.1)–(5.1.4) par le problème équivalent suivant [19] :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (x, t) \in D_T, \quad (5.2.1)$$

$$u(0, t) - \beta u(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5.2.2)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad t \in [0, T], \quad (5.2.3)$$

$$u(x, T) = \phi(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (5.2.4)$$

On suppose que la fonction $\phi \in W_2^1(0, 1)$ vérifie la condition (5.1.5) et $f \in L^2((0, T), L^2(0, 1))$ vérifie (5.1.6). Puis, en développant ϕ et f dans un système bi-orthogonal, on obtient :

$$\phi(x) = \phi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \phi_{2k} X_{2k}(x) \right), \quad (5.2.5)$$

et

$$f(x, t) = f_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(f_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + f_{2k}(t)X_{2k}(x) \right), \quad (5.2.6)$$

respectivement, par rapport à la base formée de fonctions propres et fonctions associées :

$$X_0(x) = px+q, \quad X_{2k-1}(x) = (px+q) \cos(2\pi kx), \quad X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx), \quad k \geq 1, \quad (5.2.7)$$

du problème de Sturm–Liouville non auto-adjoint suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda X(x), & 0 < x < 1, \\ X(0) = \beta X(1), & \beta \neq \pm 1, \\ X'(0) = X'(1), \end{cases} \quad (5.2.8)$$

où

$$p = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \neq 0, \quad q = \frac{\beta}{1 + \beta}.$$

Ce dernier correspond au problème (5.2.1)–(5.2.4). Les coefficients ϕ_0 , ϕ_{2k-1} , ϕ_{2k} sont donnés par la formule :

$$\phi_0 = \int_0^1 \phi(x)Y_0(x)dx, \quad \phi_{2k-1} = \int_0^1 \phi(x)Y_{2k-1}(x)dx, \quad \phi_{2k} = \int_0^1 \phi(x)Y_{2k}(x)dx, \quad (5.2.9)$$

et similairement pour les coefficients $f_0(t)$, $f_{2k-1}(t)$, $f_{2k}(t)$, on a :

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \int_0^1 f(x, t)Y_0(x)dx, & f_{2k-1}(t) &= \int_0^1 f(x, t)Y_{2k-1}(x)dx, \\ f_{2k}(t) &= \int_0^1 f(x, t)Y_{2k}(x)dx, \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

où la suite $\{Y_k\}_0^\infty$ de fonctions propres et fonctions associées du problème adjoint de (5.2.8) :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = \lambda Y(x), & 0 < x < 1, \\ Y(0) = Y(1), \\ Y'(1) = \beta Y'(0), & \beta \neq \pm 1, \end{cases} \quad (5.2.11)$$

est donnée par la formule :

$$Y_0(x) = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx), \quad Y_{2k}(x) = 4(1-q-px) \sin(2\pi kx), \quad k \geq 1. \quad (5.2.12)$$

Les valeurs propres du problème (5.2.8) et celles du problème adjoint (5.2.11) sont données par :

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, \quad k \geq 0. \quad (5.2.13)$$

Les bases (5.2.7) et (5.2.12) forment un système bi-orthogonal.

Théorème 5.2.1 [24] *Le système de fonctions (5.2.7) forme une base de Riesz dans l'espace $L^2(0,1)$ et les estimations :*

$$r \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k^2 \leq R \|\phi\|_{L^2(0,1)}^2, \quad (5.2.14)$$

où

$$r = \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(p + \frac{3}{2}q \right)^2 + \frac{3}{4}q^2 \right] + \frac{1}{2} \left(1 + \|(px + q)^2\|_{C[0,1]} \right) \right\}^{-1},$$

$$R = 8 \left(1 + \|(1 - q - px)^2\|_{C[0,1]} \right), \quad \phi_k = \int_0^1 \phi(x) Y_k(x) dx, \quad k \geq 0,$$

sont valides pour toute fonction $\phi \in L^2(0,1)$.

Comme $\int_0^1 \phi(x) dx = 0$ et $\int_0^1 f(x, t) dx = 0$ on a $\phi_0 = 0$ et $f_0(t) = 0$ dans (5.2.5) et (5.2.6) respectivement.

Par analogie avec la méthode de Fourier, on cherche une solution du problème (5.2.1)–(5.2.4) sous la forme :

$$u(x, t) = u_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + u_{2k}(t) X_{2k}(x) \right). \quad (5.2.15)$$

Maintenant, si on peut permuter la somme (\sum) avec la première dérivée partielle ($\partial/\partial t$) par rapport à t , et de même, avec la seconde dérivée partielle ($\partial^2/\partial x^2$) par rapport à x dans la formule (5.2.15), on peut trouver :

$$u_0(t) = 0,$$

$$u_{2k-1}(t) = e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds,$$

$$u_{2k}(t) = \left(\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(T-t)\lambda_k}$$

$$- \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2p\sqrt{\lambda_k}(s-t) f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds.$$

Alors :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x)$$

$$+ \left[\left(\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(T-t)\lambda_k} \right.$$

$$\left. - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2p\sqrt{\lambda_k}(s-t) f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x). \quad (5.2.16)$$

5.3 La formulation mathématique et l'analyse de l'instabilité

Considérons le problème non-homogène parabolique rétrograde suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in (0,1), \quad t \in (0,T), \\ u(0,t) - \beta u(1,t) = 0, & t \in [0,T], \\ \int_0^1 u(x,t) dx = 0, & t \in [0,T], \\ u(x,T) = \phi(x), & x \in [0,1], \end{cases} \quad (5.3.1)$$

où T est une constante strictement positive et $\beta \neq \pm 1$ est un nombre donné.

On suppose que ϕ vérifie les conditions (5.1.5) et f vérifie la condition (5.1.6).

Soit E une constante positive et supposons qu'elle vérifie la condition a priori suivante :

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq E, \quad (5.3.2)$$

et que $\phi^\delta(x) \in W_2^1(0,1)$ satisfait :

$$\|\phi^\delta - \phi\|_{W_2^1(0,1)} \leq \delta, \quad (5.3.3)$$

où δ représente le niveau de bruit.

La solution du problème (5.3.1) est donnée par (5.2.16). Notons que la croissance rapide des termes $e^{(T-t)\lambda_k}$ et $e^{(s-t)\lambda_k}$ quand $k \rightarrow +\infty$ est la source de l'instabilité. Par conséquent, un moyen naturel pour obtenir une approximation stable de la solution u est d'éliminer l'effet des hautes fréquences et de considérer la solution u pour les k qui sont inférieurs ou égaux à N , c'est-à-dire $k \leq N$, où N est un entier positif qui joue le rôle du paramètre de régularisation.

5.4 Le choix a posteriori du paramètre de régularisation et les estimations de la stabilité

On définit la solution régularisée du problème (5.3.1) comme suit :

$$\begin{aligned} u_N(x,t) = & \sum_{k=1}^N \left(e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\ & + \left[\left(\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(T-t)\lambda_k} \right. \\ & \left. - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2p\sqrt{\lambda_k}(s-t) f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x). \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Dans le cas d'une donnée finale bruitée ϕ^δ , on utilise la formule similaire suivante :

$$\begin{aligned} u_N^\delta(x, t) = & \sum_{k=1}^N \left(e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1}^\delta - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\ & + \left[\left(\phi_{2k}^\delta + 2p\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1}^\delta \right) e^{(T-t)\lambda_k} \right. \\ & \left. - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2p\sqrt{\lambda_k}(s-t)f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x), \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

où $\phi_{2k-1}^\delta = \int_0^1 \phi^\delta(x) Y_{2k-1}(x) dx$, $\phi_{2k}^\delta = \int_0^1 \phi^\delta(x) Y_{2k}(x) dx$.

On propose de choisir le paramètre de régularisation comme le premier entier N tel que :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2p\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \leq \tau\delta, \end{aligned}$$

où τ est une constante telle que $\tau > \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)}$. Plus précisément, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2p\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\ \leq \tau\delta < \\ \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2p\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Proposition 5.4.1 *Soit $u(x, t)$ la solution du problème (5.3.1), soient la condition a priori (5.3.2) satisfaite et $\phi^\delta(x) \in W_2^1(0, 1)$ satisfait (5.3.3). si le paramètre de régularisation N est choisi selon (5.4.3), on aura :*

$$N \leq \sqrt{\frac{\ln \left(E\sqrt{Rr^{-1}} \right) - \ln \left((\tau - c_1) \delta \right)}{4T\pi^2}}, \quad (5.4.4)$$

où $c_1 = \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)}$.

Preuve 5.4.1 *D'après (5.2.14) et la condition a priori (5.3.2), on a :*

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\
& \leq r^{-1} \sum_{k=N}^{+\infty} \left[\left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left[\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right] e^{2T\lambda_k} e^{-2T\lambda_k} \\
& \leq r^{-1} e^{-8T\pi^2 N^2} \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} e^{T\lambda_k} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \\
& \quad + \left[\left(\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} \right. \\
& \quad \left. - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \\
& \leq Rr^{-1} e^{-8T\pi^2 N^2} E^2.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
& \leq \sqrt{Rr^{-1}} e^{-4T\pi^2 N^2} E. \tag{5.4.5}
\end{aligned}$$

D'un autre coté, d'après l'inégalité triangulaire, on sait que :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
& = \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2p\sqrt{\lambda_k}T\phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k}f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
& \quad - \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k-1}(x) + \left(\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2p\sqrt{\lambda_k}T \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k}(x) \Big\|_{L^2(0,1)} \\
& \geq \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k}^\delta + 2p\sqrt{\lambda_k}T \phi_{2k-1}^\delta \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
& - \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k-1}(x) + \left(\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k} \right) \right. \\
& \quad \left. + 2p\sqrt{\lambda_k}T \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties, on aura :

$$\lambda_k \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right)^2 = 8a_k^2, \quad (5.4.6)$$

$$\text{où } a_k = \int_0^1 \left(\phi^\delta(x) - \phi(x) \right)' \sqrt{2} \sin(2\pi kx) dx.$$

D'après (5.2.14), (5.4.6), et l'inégalité de Bessel, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k-1}(x) + \left(\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k} \right) \right. \\
& \quad \left. + 2p\sqrt{\lambda_k}T \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\
& \leq r^{-1} \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right)^2 + \left(\left(\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k} \right) + 2p\sqrt{\lambda_k}T \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right) \right)^2 \\
& \leq r^{-1} \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right)^2 + 2 \left(\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k} \right)^2 + 8\lambda_k (pT)^2 \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right)^2 \\
& \leq 8r^{-1} \max(1, (pT)^2) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right)^2 + \left(\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k} \right)^2 \\
& \quad + \lambda_k \left(\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1} \right)^2 \\
& \leq 8r^{-1} \max(1, (pT)^2) \left(R \|\phi^\delta - \phi\|_{L^2(0,1)}^2 + 8 \|\phi'^\delta - \phi'\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\
& \leq 8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2) \|\phi^\delta - \phi\|_{W_2^1(0,1)}^2 \\
& \leq 8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2) \delta^2.
\end{aligned}$$

Donc, de (5.4.3), on a :

$$\left\| \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) + \left[\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}T \phi_{2k-1} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \Big] X_{2k}(x) \Big\|_{L^2(0,1)} \\
& \geq \tau\delta - \delta \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)} = \left(\tau - \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)} \right) \delta. \quad (5.4.7)
\end{aligned}$$

Combinons (5.4.5) avec (5.4.7), il en résulte :

$$\left(\tau - \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)} \right) \delta \leq \sqrt{Rr^{-1}} e^{-4T\pi^2 N^2} E,$$

et la preuve de cette Proposition est complétée par quelques calculs élémentaires.

Proposition 5.4.2 Soit $u(x, t)$ la solution du problème (5.3.1). Soient toutes les conditions de la Proposition 5.4.1 satisfaites et soient $u_N(x, t)$, $u_N^\delta(x, t)$ données par (5.4.1) et (5.4.2) respectivement. Alors, on aura l'estimation suivante :

$$\|u_N^\delta(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq e^{4\pi^2 N^2(T-t)} c_1 \delta, \quad \forall t \in (0, T), \quad (5.4.8)$$

où $c_1 = \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)}$.

Preuve 5.4.2 Pour tout $t \in (0, T)$, en utilisant l'inégalité (5.2.14), l'égalité (5.4.6), et l'inégalité de Bessel, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \|u_N^\delta(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
& \leq 8r^{-1} \max(1, (pT)^2) \sum_{k=1}^N \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 \right. \\
& \quad \left. + \lambda_k (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 \right) e^{2(T-t)\lambda_k} \\
& \leq 8r^{-1} \max(1, (pT)^2) e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \sum_{k=1}^N \left((\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 + (\phi_{2k}^\delta - \phi_{2k})^2 \right. \\
& \quad \left. + \lambda_k (\phi_{2k-1}^\delta - \phi_{2k-1})^2 \right) \\
& \leq 8r^{-1} \max(1, (pT)^2) e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \left(R \|\phi^\delta - \phi\|_{L^2(0,1)}^2 + 8 \|\phi'^\delta - \phi'\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\
& \leq 8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2) e^{8(T-t)\pi^2 N^2} \|\phi^\delta - \phi\|_{W_2^1(0,1)}^2.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|u_N^\delta(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \delta e^{4\pi^2 N^2(T-t)} \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)}.$$

Proposition 5.4.3 *Supposons qu'ils existent deux nombres positifs A_1 et A_2 tels que :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^T e^{2s\lambda_k} f_{2k-1}^2(s) ds \leq A_1, \quad (5.4.9)$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^T e^{2s\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right)^2 ds \leq A_2. \quad (5.4.10)$$

Soit $u(x, t)$ la solution du problème (5.3.1). Soit toutes les conditions de la Proposition 5.4.1 satisfaites et soit $u_N(x, t)$ donnée par (5.4.1). Alors on l'estimation suivante :

$$\|u(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \sqrt{2r^{-1} \left(RE^{\frac{2(T-t)}{T}} [(\tau + c_1)\delta]^{\frac{2t}{T}} + Te^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2) \right)}. \quad (5.4.11)$$

$\forall t \in (0, T)$, où $c_1 = \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)}$.

Preuve 5.4.3 *Pour tout $t \in (0, T)$, en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura :*

$$\begin{aligned} & \|u(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq r^{-1} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \\ & + \left[\left(\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{(T-t)\lambda_k} \right. \\ & \left. - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_k} \left(2p(s-t)\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \\ & \leq r^{-1} \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2e^{-2t\lambda_k} \left(e^{T\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \\ & + 2T \int_0^T e^{2(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}^2(s) ds + 2e^{-2t\lambda_k} \left[\left(\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k}(T-t)\phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} \right. \\ & \left. - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2p(s-t)\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \\ & + 2T \int_0^T e^{2(s-t)\lambda_k} \left(2p(s-t)\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right)^2 ds \\ & \leq r^{-1} \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2e^{-2t\lambda_k} \left[\left(e^{T\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\ & \left. + \left[\left(\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right] \\ & + 2r^{-1} T e^{-8t\pi^2 N^2} A_1 + 2r^{-1} T e^{-8t\pi^2 N^2} A_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2r^{-1} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left[\left(e^{T\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
&+ \left. \left[\left(\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right]^{\frac{T-t}{T}} \\
&\times \left[\left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
&+ \left. \left[\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right]^{\frac{t}{T}} \\
&+ 2r^{-1} T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2) \\
&\leq 2r^{-1} \left[\sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(e^{T\lambda_k} \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{s\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
&+ \left. \left[\left(\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} \right) e^{T\lambda_k} - \int_0^T e^{s\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right]^{\frac{T-t}{T}} \\
&\times \left[\sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right)^2 \right. \\
&+ \left. \left[\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right]^2 \right]^{\frac{t}{T}} \\
&+ 2r^{-1} T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2) \\
&\leq 2Rr^{-1} E^{\frac{2(T-t)}{T}} \left\| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \right. \\
&+ \left. \left[\phi_{2k} + 2p\sqrt{\lambda_k} T \phi_{2k-1} - \int_0^T e^{(s-T)\lambda_k} \left(2ps\sqrt{\lambda_k} f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] \right. \\
&\times \left. X_{2k}(x) \right\|_{L^2(0,1)}^{\frac{2t}{T}} + 2r^{-1} T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2) \\
&\leq 2Rr^{-1} E^{\frac{2(T-t)}{T}} \left[\left(\tau + \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)} \right) \delta \right]^{\frac{2t}{T}} \\
&+ 2r^{-1} T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|u(x, t) - u_N(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq$$

$$\sqrt{2r^{-1} \left(RE^{\frac{2(T-t)}{T}} [(\tau + c_1) \delta]^{\frac{2t}{T}} + T e^{-8t\pi^2 N^2} (A_1 + A_2) \right)},$$

$$\forall t \in (0, T), \text{ où } c_1 = \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)}.$$

Maintenant, combinons les Propositions (5.4.1)–(5.4.3), on obtient le Théorème suivant qui nous donne l'estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution régularisée.

Théorème 5.4.1 *Supposons que les conditions (5.4.9) et (5.4.10) sont satisfaites. Soit $u(x, t)$ la solution du problème (5.3.1) telle que $\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq E$. La donnée $\phi^\delta(x) \in W_2^1(0, 1)$ satisfait (5.3.3). Si $u_N^\delta(x, t)$ est donnée par (5.4.2) et le paramètre de régularisation N est choisi selon (5.4.3), alors on aura :*

$$\|u(x, t) - u_N^\delta(x, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \left[c_1 \left(\frac{E\sqrt{Rr^{-1}}}{\tau - c_1} \right)^{\frac{T-t}{T}} + \sqrt{2r^{-1} \left(RE^{\frac{2(T-t)}{T}} (\tau + c_1)^{\frac{2t}{T}} + T(A_1 + A_2) \left(\frac{\tau - c_1}{E\sqrt{Rr^{-1}}} \right)^{\frac{2t}{T}} \right)} \right] \delta^{\frac{t}{T}}, \quad (5.4.12)$$

$\forall t \in (0, T)$, où $c_1 = \sqrt{8Rr^{-1} \max(1, (pT)^2)}$.

5.5 Simulations numériques

On donne dans cette section un exemple numérique afin de montrer la précision et l'efficacité de la méthode de régularisation de troncature avec la règle du choix a posteriori (5.4.3). Nous prenons $T = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\tau = 16$, et la donnée simulée est générée en utilisant la formule suivante :

$$\phi_i^\delta = \phi_i + \delta \text{rand}(\text{size}(\phi))_i, \quad (5.5.1)$$

où ϕ_i est la donnée exacte, $\text{rand}(\text{size}(\phi))_i$ est un nombre aléatoire dans $[-1, 1]$, ϕ désigne le vecteur dont les éléments sont ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, M$) (M est le nombre de discrétisation de la variable de l'espace), et δ indique le niveau d'erreur.

Nous prenons $M = 41$ et pour un $t \in (0, 1)$ fixé, afin de mesurer l'exactitude de l'approximation numérique de la fonction $u(x, t)$, nous utilisons la fonction RRMSE définie par :

$$\text{RRMSE} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^M (u(x_i, t) - u_N^\delta(x_i, t))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M u(x_i, t)^2}}, \quad (5.5.2)$$

où u et u_N^δ sont la solution exacte et approximative, respectivement.

Pour l'évaluation de tous les coefficients donnés dans l'exemple, nous utilisons la formule de Simpson pour calculer les intégrales $\phi_{2k-1} = (\phi(x), Y_{2k-1}(x))_{L^2(0,\pi)}$, $\phi_{2k} = (\phi(x), Y_{2k}(x))_{L^2(0,\pi)}$ ($k = 1, 2, \dots, N_0$) dans $[0, \pi]$, où :

$$Y_{2k-1}(x) = \frac{4}{\pi} \cos(2kx), \quad Y_{2k}(x) = \frac{4}{3\pi} (2\pi - x) \sin(2kx),$$

et les coefficients $\{\phi_{2k-1}^\delta\}_{k=1}^{N_0}$, $\{\phi_{2k}^\delta\}_{k=1}^{N_0}$ correspondants à la donnée perturbée ϕ^δ sont également calculés de la même manière, où N_0 est un entier positif assez grand.

Pour calculer le paramètre de régularisation N , nous le choisissons toujours selon (5.4.3).

Exemple 5.5.1 *Considérons le problème direct suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -t \sin(2x), & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, 1), \\ u(0,t) - \frac{u(\pi,t)}{2} = 0, & t \in [0, 1], \\ \int_0^\pi u(x,t) dx = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x,0) = \phi_0(x) = 2x(2x - \pi)(x - \pi), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (5.5.3)$$

La solution du problème (5.5.3) est comme suit :

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{-t\lambda_k} \phi_{2k-1}^0 + \int_0^t e^{(s-t)\lambda_k} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\ & + \left[\left(\phi_{2k}^0 - \frac{2p}{\pi} t \sqrt{\lambda_k} \phi_{2k-1}^0 \right) e^{-t\lambda_k} \right. \\ & \left. + \int_0^t e^{(s-t)\lambda_k} \left(f_{2k}(s) - \frac{2p}{\pi} \sqrt{\lambda_k} (t-s) f_{2k-1}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x), \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

où

$$\lambda_k = (2k)^2, \quad X_{2k-1}(x) = \left(\frac{x + \pi}{3\pi} \right) \cos(2kx), \quad X_{2k}(x) = \frac{\sin(2kx)}{\pi},$$

$$\phi_{2k-1}^0 = \int_0^\pi \phi_0(x) Y_{2k-1}(x) dx, \quad \phi_{2k}^0 = \int_0^\pi \phi_0(x) Y_{2k}(x) dx,$$

$$f_{2k-1}(t) = \int_0^\pi f(x,t) Y_{2k-1}(x) dx, \quad f_{2k}(t) = \int_0^\pi f(x,t) Y_{2k}(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

En particulier, pour $t = 1$, on obtient la donnée finale suivante :

$$\begin{aligned} u(x,1) = \phi(x) = & \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{-4k^2} \phi_{2k-1}^0 + \int_0^1 e^{(s-1)4k^2} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\ & + \left[\left(\phi_{2k}^0 - \frac{4k}{3\pi} \phi_{2k-1}^0 \right) e^{-4k^2} \right. \\ & \left. + \int_0^1 e^{(s-1)4k^2} \left(f_{2k}(s) - \frac{4k}{3\pi} (1-s) f_{2k-1}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x). \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Notons que la donnée (5.5.5) est une série infinie. Pour pouvoir faire de comparaisons numériques entre la solution exacte et la solution régularisée, nous devons d'abord la couper comme suit :

$$\begin{aligned} \phi(x) = \sum_{k=1}^{N_0} \left(e^{-4k^2} \phi_{2k-1}^0 + \int_0^1 e^{(s-1)4k^2} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\ + \left[\left(\phi_{2k}^0 - \frac{4k}{3\pi} \phi_{2k-1}^0 \right) e^{-4k^2} \right. \\ \left. + \int_0^1 e^{(s-1)4k^2} \left(f_{2k}(s) - \frac{4k}{3\pi} (1-s) f_{2k-1}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x), \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

pour N_0 suffisamment grand. Dans nos calculs, nous prenons $N_0 = 13$ et $\phi^\delta(x)$ est calculée selon (5.5.1).

Ensuite, nous choisissons le problème final correspondant donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -t \sin(2x), & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, 1), \\ u(0,t) - \frac{u(\pi,t)}{2} = 0, & t \in [0, 1], \\ \int_0^\pi u(x,t) dx = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x,1) = \phi(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (5.5.7)$$

La solution exacte du problème (5.5.7) et son approximation régularisée sont évaluées respectivement par :

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{k=1}^{13} \left(e^{(1-t)4k^2} \phi_{2k-1} + \int_t^1 e^{(s-t)4k^2} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\ + \left[\left(\phi_{2k} + \frac{4k}{3\pi} (1-t) \phi_{2k-1} \right) e^{(1-t)4k^2} \right. \\ \left. - \int_t^1 e^{(s-t)4k^2} \left(\frac{4k}{3\pi} (s-t) f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x), \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

et

$$\begin{aligned} u_N^\delta(x,t) = \sum_{k=1}^N \left(e^{(1-t)4k^2} \phi_{2k-1}^\delta + \int_t^1 e^{(s-t)4k^2} f_{2k-1}(s) ds \right) X_{2k-1}(x) \\ + \left[\left(\phi_{2k}^\delta + \frac{4k}{3\pi} (1-t) \phi_{2k-1}^\delta \right) e^{(1-t)4k^2} \right. \\ \left. - \int_t^1 e^{(s-t)4k^2} \left(\frac{4k}{3\pi} (s-t) f_{2k-1}(s) + f_{2k}(s) \right) ds \right] X_{2k}(x). \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

La Figure (5.1) montre la relation entre la fonction RRMSE et les différentes valeurs du paramètre de régularisation N , ($N = 1, 2, 3, 4$) avec un

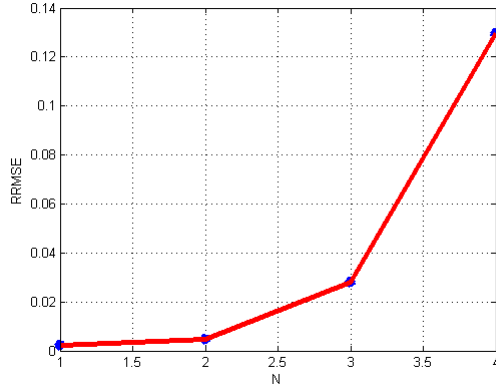


FIGURE 5.1 – RRMSE par rapport à N avec $\delta = 1 \times 10^{-6}$ à l’instant $t = 0.9$.

niveau de bruit $\delta = 1 \times 10^{-6}$ à l’instant $t = 0.9$. De cette figure, nous pouvons voir qu’une coupure appropriée du nombre des coefficients de la solution régularisée est nécessaire, et son choix approprié est très important. On note également dans cet exemple que N joue vraiment le rôle du paramètre de régularisation.

Dans la Figure (5.2) et la Figure (5.3), nous présentons la solution exacte et son approximation régularisée avec un niveau d’erreur égal à $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

L’erreur absolue dans la Figure (5.4) avec $\delta = 1 \times 10^{-3}$ indique que plus t est petit, plus la solution régularisée est loin de la solution exacte. Au contraire, plus le temps t se rapproche de 1, nous pouvons obtenir un meilleur effet de calcul, ce qui coïncide avec notre estimation théorique (5.4.12).

Les comparaisons de la solution exacte et son approximation dans des moments différents $t = 0.01, 0.5, 0.9$, avec $\delta = 2 \times 10^{-3}$ sont illustrées dans la Figure (5.5), et encore, nous pouvons dire la même observation que la Figure (5.4).

La Figure (5.6) montre les comparaisons de la solution exacte et son approximation régularisée à l’instant $t = 0.6$ avec différentes valeurs de δ , $\delta = 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}$, on peut voir que l’effet numérique devient pire par rapport à l’augmentation de la valeur du niveau de bruit.

De l’exemple précédent, on peut conclure le suivant :

1. Plus le temps t est petit, plus la solution régularisée s’éloigne de la solution exacte. En revanche, quand le temps t est près de 1, nous pouvons obtenir un meilleur effet de calcul, ce qui coïncide avec notre estimation théorique (5.4.12).
2. Plus le niveau de bruit est petit, plus la solution régularisée peut approcher la solution exacte.

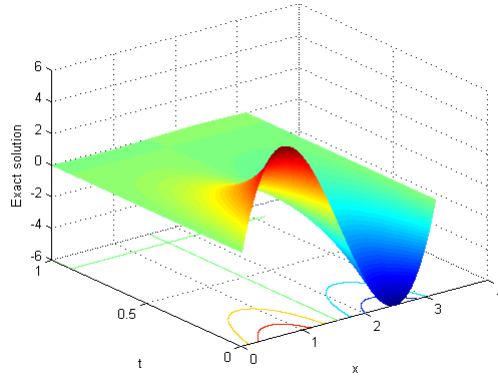


FIGURE 5.2 – La solution exacte.

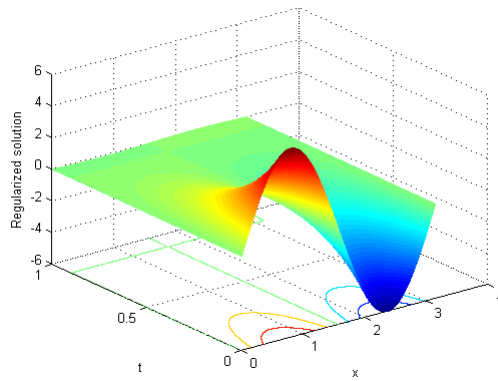


FIGURE 5.3 – La solution régularisée avec $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

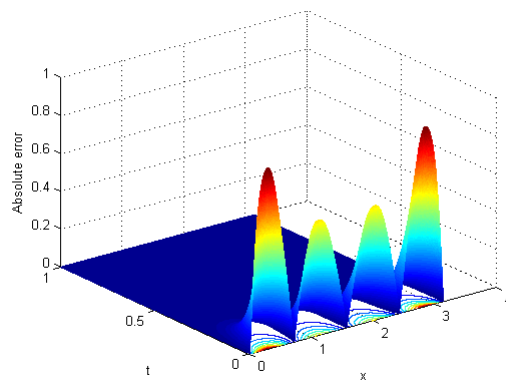


FIGURE 5.4 – L'erreur absolue avec $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

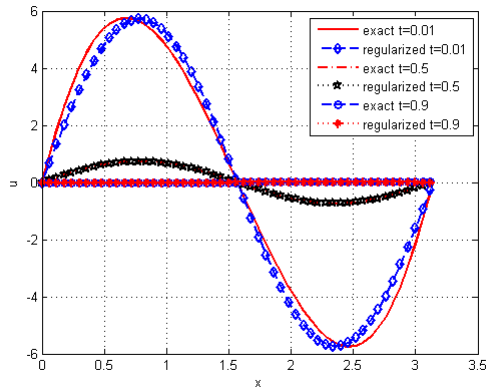


FIGURE 5.5 – La comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée avec $\delta = 2 \times 10^{-3}$ en $t = 0.01, 0.5, 0.9$.

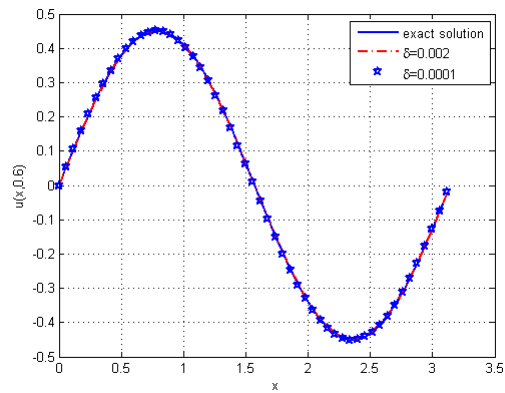


FIGURE 5.6 – La comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée avec $\delta = 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}$ à l'instant $t = 0.6$.

Bibliographie

- [1] M. Ababna, Regularization by non-local boundary conditions for a control problem by initial condition of evolution operator differential equation, *Vestn. Beloruss. Gos. Univ. Ser. 1, Physique-Mathématique et informatique*. **1998**, 60–63, (in Russian).
- [2] S. M. Alekseeva and N. I. Yurchuk, The quasi-inversion method for the problem of control by the initial condition of the heat equation with an integral boundary condition. *J. Differ. Equations*. **34**, No. 4, (1998), 493–500.
- [3] K. A. Ames and R. J. Hughes, Structural stability for ill-Posed problems in Banach space, *Semigroup Forum*. Vol. **70**, (1), (2005), 127–145.
- [4] B. M. Campbell Hetrick and R. J. Hughes, Continuous dependence results for inhomogeneous ill-posed problems in Banach space, *J. Math. Anal. Appl.* **331**, (1), (2007), 342–357.
- [5] J. R. Cannon, The one-dimensional heat equation. *Encyclopedia of Mathematics and its applications*. vol. **23**, (1984), Addison-Wesley Publishing, Massachusetts.
- [6] A. Carasso, Error bounds in the final value problem for the heat equation, *SIAM J. Math. Anal.* **7**, (2), (1976), 195–199.
- [7] A. Carasso, The abstract backward beam equation, *SIAM J. Math. Anal.* **2**, (1971), 193–212.
- [8] G. W. Clark and S. F. Oppenheimer, Quasi-reversibility methods for non-well posed problems, *Electron. J. Diff. Eqns.* **1994**, No.1, 1–9.

- [9] J. H. Cushman and T. R. Ginn, Non-local dispersion in porous media with continuously evolving scales of heterogeneity. *Transp. Porous Media.* **13**, No. 1, (1998), 123–138.
- [10] J. H. Cushman, B. X. Hu and F. W. Deng, Non-local reactive transport with physical and chemical heterogeneity : Localization error. *Water Resources Res.* **31**, No. 9, (1995), 2219–2237.
- [11] M. Denche and K. Bessila, A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems, *J. Math. Anal. Appl.* **301**, (2005), 419–426.
- [12] M. Denche and K. Bessila, Quasi-boundary value method for non-well posed problem for a parabolic equation with integral boundary condition. *Maths. Probl. Eng.* **7**, No. 2, (2001), 129–145.
- [13] X. L. Feng, L. Eldén and C. L. Fu, Stability and regularization of a backward parabolic PDE with variable coefficients, *J. Inverse Ill-posed Probl.* **18**, (2010), 217–243.
- [14] J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, *Paris, Hermann.* 1932.
- [15] J. Hadamard, Lectures on Cauchy’s problem in linear partial differential equations. *Yale University Press.* 1923.
- [16] M. Hanke and P. C. Hansen, Regularization methods for large-scale problems, *Surv. Math. Ind.* **3**, (4), (1993), 253–315.
- [17] D. N. Hào, N. Van Duc and D. Lesnic, Regularization of parabolic equations backward in time by a non-local boundary value problem method. *Journal of Applied Mathematics.* **75**, (2010), 291–315.
- [18] D. N. Hào, N. Van Duc and H. Sahli, A non-local boundary value problem method for parabolic equations backward in time, *J. Math. Anal. Appl.* **345**, (2008), 805–815.
- [19] N. I. Ionkin, Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a non-classical boundary condition. *Differ. Uravnenia.* **13**, No. 2, (1977), 294–304.
- [20] V. K. Ivanov, I. V. Melnikova and A. I. Filinkov, Differential-operator equations and ill-posed problem, (in Russian), *Moscou, Naouka-Fizmatlit.* 1995.
- [21] H. Gajewski and K. Zacharias, Zur regularisierung einer klasse nicht-korrekter probleme bei evolutionsgleichungen, *J. Math. Anal. Appl.* **38**, (1972), 784–789.

- [22] J. B. Keller, Inverse problems, *Amer. Math. Monthly*, **83**, 107–118, (1976).
- [23] R. Lattès and J. L. Lions, Méthode de quasi-réversibilité et applications, *Dunod, Paris*, (1967), (*English translation : R. Bellman, Elsevier, New York*, 1969).
- [24] Y.T. Mehraliyev and G.N. Isgendarova, On the identification of a linear source for the second order hyperbolic equation with integral condition, *Appl. Math. Sci.* **9**, (30), (2015), 1463–1473.
- [25] I. V. Mel'nikova and A. I. Filinkov, The Cauchy problem. Three approaches, *Monograph and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, vol. **120**, *Chapman and Hall*, (2001).
- [26] K. Miller, Stabilized quasi-reversibility and other nearly best possible methods for non-well posed problems, *in : Symposium on Non-well Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes Mathematics*, vol. **316**, *Springer-Verlag, Berlin*, (1973), 161–176.
- [27] P. T. Nam, An approximate solution for non-linear backward parabolic equations, *J. Math. Anal. Appl.* **367**, (2010), 337–349.
- [28] P. T. Nam, D. D. Trong and N. H. Tuan, The truncation method for a two-dimensional non-homogeneous backward heat problem, *Appl. Math. Comput.* **216**, (2010), 3423–3432.
- [29] L. E. Payne, Improperly posed problems in partial differential equations, *SIAM, Philadelphia*, (1975).
- [30] A. A. Samarskii, Some problems of the theory of differential equations. *Diffrents. Uravn.* **16**, No. 11, (1980), 1925-1935.
- [31] R. E. Showalter, Cauchy problem for hyper-parabolic differential equations, *Trends in the Theory and Practice of Non-linear Analysis, Elsevier*, (1983).
- [32] R. E. Showalter, The final value problem for evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.* **47** (1974), 563–572.
- [33] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, Solution of ill-posed problems, *Winston and Sons, Washington, DC*, (1977).
- [34] D. D. Trong, P. H. Quan and N. H. Tuan, A quasi-boundary value method for regularizing non-linear ill-posed problems, *Electron. J. Diff. Eqns.* **2009**, 1–16.

- [35] D. D. Trong and N. H. Tuan, A non-homogeneous backward heat problem : regularization and error estimates, *Electronic. J. Diff. Eqns*, Vol. **2008**, 1–14,.
- [36] D. D. Trong and N. H. Tuan, Regularization and error estimates for non-homogeneous backward heat problem, *Electronic. J. Diff. Eqns*, Vol. **2006**, 1–10.
- [37] N. H. Tuan and D. D. Trong, A non-linear parabolic equation backward in time : Regularization with new error estimates, *Nonlinear Anal.* **73**, (2010), 1842–1852.
- [38] N. H. Tuan and D. D. Trong, Two regularization methods for backward heat problems with new error estimates, *Nonlinear Anal. RWA.* **12**, (2011), 1720–1732.
- [39] N. I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations. *Differential Equations.* **22**, (1986), 1457–1463.
- [40] Y. X. Zhang, C. L. Fu and Z. L. Deng, An a posteriori truncation method for some Cauchy problems associated with Helmholtz-type equation, *Inverse Probl. Sci. Eng.* Vol. **21**, (7), (2013), 1151–1168.
- [41] Y. X. Zhang, C. L. Fu and Y. J. Ma, An a posteriori parameter choice rule for the truncation regularization method for solving backward parabolic problems, *J. Comput. Appl. Math.* **255**, (2014), 150–160.
- [42] Z. Y. Zhao, Numerical analytic continuation by a mollification method based on Hermite functions expansion, *Inverse Prob.* **28**, (2012), 1–12.
- [43] Z. Y. Zhao and J. F. Liu, Hermite spectral and pseudo-spectral methods for numerical differentiation, *Appl. Num. Math.* **61**, (2011), 1322–1330.

Etude de quelques problèmes de Cauchy inverses

Résumé

Le but du présent travail est l'étude d'une classe de problèmes de Cauchy inverses. On se propose de développer une nouvelle méthode de régularisation basée sur la méthode bien connue de régularisation par troncature qui consiste à éliminer toutes les fréquences élevées dans la solution du problème mal posé en faisant une règle appropriée du choix du paramètre de régularisation. Cela permettra d'obtenir une estimation a posteriori entre la solution exacte et l'approximation régularisée.

On établit des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la solution et sous certaines conditions, on donne des résultats de stabilité et de convergence ainsi de l'estimation d'erreur.

Enfin, on présente certaines applications numériques qui montrent l'efficacité de la méthode proposée.

Mots clés. Règle a posteriori du choix de paramètre, Problème de Cauchy inverse, Equation parabolique, Méthode de régularisation, Méthode de troncature.

Study of some inverse Cauchy problems

Abstract

The goal of this work is the study of a class of inverse Cauchy problems. A new regularization method based on the well-known method of regularization by truncation of eliminating all high frequencies in the solution of ill-posed problem by making an appropriate rule for choosing the regularization parameter is proposed to develop. This will provide an a posteriori estimate between the exact solution and regularized approximation.

We establish necessary and sufficient conditions of existence of the solution and under certain conditions, we give stability and convergence results and error rates.

Finally, we present some numerical applications which show the effectiveness of the proposed method.

Keywords. A posteriori parameter choice rule, Backward Cauchy problem, Parabolic equation, Regularization method, Truncation method.

دراسة بعض مسائل كوشي العكسيّة

ملخص

الغرض من هذا العمل هو دراسة فئة من المسائل العكسيّة لكوشي. يقترح تطوير طريقة جديدة للتّعديل إستناداً إلى طريقة معروفة من التّعديل والتي تتمثّل في القطع والقضاء على جميع التّردّدات العالية في حل المسألة المطروحة بشكل غير جيّد وهذا بإعطاء قاعدة مناسبة لإختيار الوسيط التّعديلي. ينتج مما سبق تقديم تقدير بأثر رجعي بين الحل الدقيق والتّقريب التّعديلي. نقدّم الشّروط اللاّزمة والكافية لوجود الحل وتحت شروط معيّنة، نقدّم نتائج الإستقرار و التّقارب وكذلك تقدير الخطأ. وأخيراً، نعرض بعض التّطبيقات العدديّة التي تظهر فعاليّة الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحيّة: طريقة عن بعد لإختيار معامل التّعديل، مسألة كوشي العكسيّة، معادلة القطع المكافئ، طريقة تعديل، طريقة قطع.
