

## ETUDE ANALYTIQUE DU COMPORTEMENT DES PLAQUES A L'ECHELLE NANOMETRIQUE.

**KHETIR Hafid<sup>1</sup>, BACHIR BOUIADJRA Mohamed<sup>1-3</sup>, BOUKHELF Fouad<sup>1</sup>, FEKRAR Abdelkader<sup>2-3</sup>**

<sup>1</sup> Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics, Université de SIDIBEL ABBES. BP 89 cite Ben M'hidi 22000 SIDI BEL ABBES, Algérie, hkhatir22@gmail.com<sup>2</sup>  
Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Djillali lybes, SIDI BEL ABBES. BP 89 cite Ben M'hidi 22000 SIDI BEL ABBES.

<sup>3</sup> Agence Thématique de Recherche Scientifique et Technologique. ATRST (Algérie).

### RESUME

A travers ce travail, un modèle sinusoïdal des nano-plaques (à l'échelle Nanométrique) est développé en se basant sur la théorie d'élasticité non local d'Eringen. Le modèle proposé considère que la déformation au cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque est une fonction sinusoïdale qui satisfait les conditions aux limites sans tenir en compte dans les surfaces le facteur de correction de cisaillement. Les équations du mouvement et les conditions aux limites sont obtenues par application du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques pour la déflexion sont données pour les plaques simplement appuyées et les résultats obtenus par la présente analyse sont présentés et comparés aux solutions existantes dans la littérature.

**Mots-clés :** Théorie d'ordre élevé, théorie d'élasticité non locale, théorie des plaques

### 1. INTRODUCTION

Les nanostructures sont de plus en plus utilisées dans le micro /nano-échelle et les systèmes tels que le biocapteur, microscope à force atomique, micro-électromécanique (MEMS), et les systèmes nano-electro-mécanique en raison de leur mécanique et électronique supérieure. Dans telles applications, à petite échelle les effets sont expérimentalement observés.

Il a été trouvé que lorsque l'épaisseur de ces structures est près la longueur interne du paramètre d'échelle du matériau, ces effets sont importants et doivent être pris en compte lors de l'étude de leur comportement. Des modèles conventionnels des plaques fondés sur des théories des milieux continus classiques ne sont pas capables de décrire les effets dus au manque des paramètres d'échelle du matériau.

La théorie de l'élasticité non local initiée par Eringen, est l'une des prometteuses théories qui tient compte de leur taille. Contrairement aux théories classiques qui supposent que les contraintes en un point est une fonction de la déformation de ce point, la théorie de l'élasticité non local suppose que la contrainte à un point est une fonction des déformations à tous les points du voisinage. De cette manière, les effets à petite échelle sont compris par le biais de l'utilisation des lois de comportement régissant.

Sur la base de la théorie de l'élasticité non-locale, un certain nombre de travaux ont été publiés dans les dernières années, en essayant de développer des modèles de plaques non locaux et les appliquer pour les réponses des nano plaques en la flexion.

Dans le présent travail, est d'étendre la théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale de Touratier aux plaques micro-nanométrique. Les équations du mouvement et les conditions aux limites sont dérivées du principe d'Hamilton sur la base des relations constitutives non-locales Eringen.

Des solutions analytiques sont proposées pour les flèches pour les plaques simplement appuyées, et les résultats sont comparés avec ceux existants afin de vérifier l'exactitude du modèle actuel.

## 2. MODELE DE LA PLAQUE NON LOCAL

Le champ de déplacement de la théorie déformation de cisaillement sinusoïdal est choisi sur la base de l'hypothèse que la contrainte de cisaillement transversale disparaît sur le haut des surfaces inférieures et supérieure de la plaque et non nulle ailleurs. Il est donné comme suit :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \psi(z) \varphi_x \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \psi(z) \varphi_y \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (01)$$

Où  $u_1, u_2, u_3$  sont les déplacements dans les directions  $x, y, z$  ;  $u, v$  et  $w$  sont les déplacements centraux moyens.  $\varphi_x, \varphi_y$  désignent les rotations flexionnelles des plans YZ et XZ, respectivement,  $\psi(z)$  représente la fonction de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales sur l'épaisseur.

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation (1) sont :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \psi(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (2a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \psi(z) \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (2b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \psi(z) \left[ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right] \quad (2c)$$

$$\gamma_{xz} = \psi(z)' \varphi_x \quad (2d) \quad \gamma_{yz} = \psi(z)' \varphi_y \quad (2e)$$

Il est observé qu'à partir des équations (2d) et (2e) que les déformations de cisaillement transversale,  $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  sont nulle en haut ( $z=h/2$ ) et en bas ( $z=-h/2$ ) des surfaces de la plaque, satisfaisant ainsi aux conditions aux limites  $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz})$ .

## 3. EQUATION DE MOUVEMENT

Le principe d'Hamilton est utilisé pour dériver les équations de mouvement. Il peut indiquer sous la forme analytique suivante :

$$\int_0^T \delta U = 0 \quad (03)$$

Où  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée par :

$$\delta U = \iint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz$$

$$\delta U = \int \left[ N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + P_x \frac{\partial^2 \delta \varphi_x}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} - P_y \frac{\partial \delta \varphi_y}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + P_{xy} \left( \frac{\partial \delta \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \varphi_y}{\partial x} \right) + Q_{xz} \delta \varphi_x + Q_{yz} \delta \varphi_y \right] dA \quad (04)$$

En substituant l'expression de  $\delta U$  de l'équation. (04) dans l'équation (03) et l'intégration par parties, et en recueillant les coefficients de  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \varphi_x$  et  $\delta \varphi_y$  on obtient les équations du mouvement suivante :

$$\delta U = \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (5a)$$

$$\delta V = \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{N_y}{\partial y} = 0 \quad (5b)$$

$$\delta W = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - q = 0 \quad (5c)$$

$$\delta \varphi_x = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - Q_{xy} = 0 \quad (5d)$$

$$\delta \varphi_y = \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - Q_{yz} = 0 \quad (5e)$$

$$\text{Avec } N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \quad (6a)$$

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \quad (6b)$$

$$P_i = \int_{-h/2}^{h/2} \psi(z) \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \quad (6c)$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \psi(z)' \sigma_i dz, (i = xz, yz) \quad (6d)$$

Les conditions aux limites de la présente théorie sont données :

$$\delta u:0 = N_x n_x + N_{xy} n_y$$

$$\delta u:0 = N_{xy} n_x + N_y n_y$$

$$\delta w:0 = v_x n_x + v_y n_y \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$$

$$\delta \varphi_x:0 = p_x n_x + p_{xy} n_y$$

$$\delta \varphi_y:0 = p_{xy} n_x + p_y n_y$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial n}:0 = M_{nm}$$

ou :

$$M_{ns} = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2)$$

$$M_{nm} = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y$$

De toute évidence, lorsque les effets de déformation de cisaillement sont négligés, la théorie actuelle récupère la CPT.

#### 4. EQUATIONS CONSTITUTIVES

La théorie non locale suppose que les contraintes à un point dépendent non seulement de la déformation à ce point, mais aussi sur des déformations dans les autres points du corps. Selon Eringen les contraintes non locales du tenseur  $\sigma$  a un point est exprimé par :  $(1 - \mu \nabla^2) \sigma = \tau$  est la contrainte classique du tenseur à un point lié à la déformation par la loi de Hook ;  $R=1 - \mu \Delta$  ( qui représente un opérateur différentiel linéaire ou  $N(\sigma) = \tau$  (7)

-  $\nabla$  : l'opérateur laplacien du système de coordonnées cartésiennes a deux dimensions.

-  $\mu = (e_0 a^2)$  : le paramètre non-local qui incorpore l'effet à petite échelle.

Jusqu'à présent, il n'y a pas d'études rigoureuses faites sur l'estimation de la valeur du paramètre non-local. Il est suggéré que sa valeur peut être déterminé par expérience ou par la conduite d'une comparaison des courbes de dispersion de la mécanique des milieux continus non locaux ainsi qu'avec des simulations dans la dynamique moléculaire.

Pour une plaque micro/nanométrique isotrope, la relation constitutive non-local dans l'équation (7) prend la forme

$$\{\sigma\} - \mu \nabla^2 \{\sigma\} = \frac{E}{1 - \nu^2} [C] \{\varepsilon\} \quad (8)$$

Où E et  $\nu$  sont le module d'élasticité et le coefficient de poisson, respectivement. En utilisant les équations (4),(5) et (8).

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= A \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + F \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix} &= F \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + H \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} &= A^s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \\ (A, D, F, H) &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( h, \frac{h^3}{12}, \frac{2h^3}{\pi^3}, \frac{h^3}{2\pi^2} \right) \quad A^s = \frac{Eh}{4(1-\nu)} \end{aligned}$$

## 5. SOLUTION ANALYTIQUE

Considérons une plaque rectangulaire simplement appuyée de longueur L de largeur b sous chargement transversal q dans le plan deux directions. sur la base de l'approche de navier, les expressions des déplacements suivants sont choisies pour satisfaire automatiquement les conditions aux limites simplement appuyées de la plaque.

$$\varphi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t}$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t}$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{Lb} \int_0^L \int_0^L q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy$$

Les coefficients  $Q_{mn}$  sont donnés ci-dessous pour certaines charges typiques

$$Q_{mn} = \begin{cases} q_0 & \text{Pour une charge sinusoïdale d'intensité} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{Pour une charge sinusoïdale d'intensité} \\ \frac{4Q_0}{Lb} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} & \text{Pour une charge } q_0 \text{ ponctuelle au centre} \end{cases}$$

## 7. RESULTATS NUMERIQUES

Pour valider l'exactitude des présentes solutions, les résultats obtenus sont comparés avec celles prédites par MPT (Mindlin Plate Theory) dans le tableau ci-dessous, pour les plaques carrées simplement appuyée avec différents valeurs de longueurs de coté L et paramètre non-local ( $e_0 a$ ) devrait être inférieur à 02 nm pour un nanotube de carbone à paroi simple. Du moment, ou la valeur maximale de ( $e_0 a$ ) n'a pas été exactement connue pour feuille de graphène, elle est supposée être égale à celui du nanotube à paroi simple. Le facteur de correction de cisaillement utilisé dans MPT est égal à 5/6.

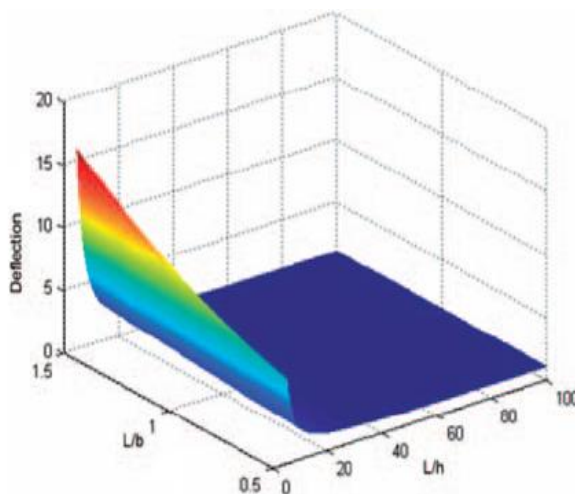
Déflexion $\bar{w}$			
L/h	E <sub>0</sub> a (nm)	MPT	Présente
5	0	0.0557	0.0557
	0.5	0.1397	0.1398
	1	0.3918	0.3922
	1.5	0.8128	0.8128
	2	1.4002	1.4017
10	0	0.0496	1.0495
	0.5	0.0688	0.0688
	1	0.1264	0.1265
	1.5	0.2226	0.2226
	2	0.3571	0.3572
20	0	0.048	0.048
	0.5	0.0527	0.0527
	1	0.0668	0.0668
	1.5	0.0903	0.0903
	2	0.1231	0.1231
	0	0.0476	0.0476
	0.5	0.0483	0.0483
	1	0.0506	0.0506

50	1.5	0.0543	0.0543
	2	0.0595	0.0595
100	0	0.0475	0.0475
	0.5	0.0477	0.0477
	1	0.0483	0.0483
	1.5	0.0492	0.0492
	2	0.0505	0.0505

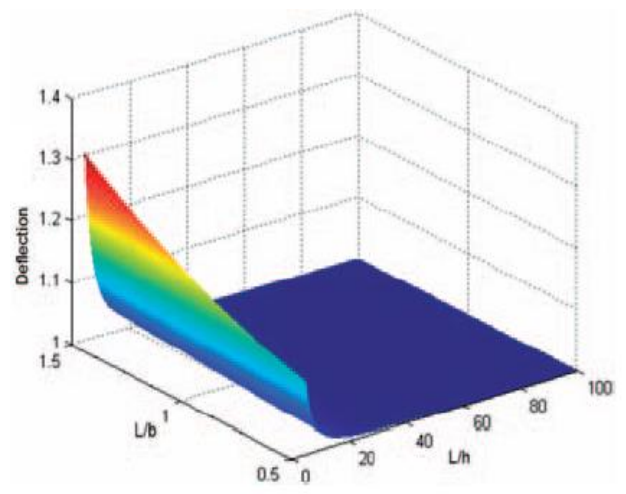
Le déplacement et la contrainte non-unidimensionnels sont présents comme suit:  $\frac{w}{w_0} = \frac{wEh^3}{q_0L^4}$

Pour illustrer les effets à petite échelle sur les réponses des nano-plaques, les figures 1 à 2 tracent l'allure de la flèche, En fonction de la taille de la plaque simplement appuyée. La flèche définie comme ce prédites par la théorie non locale en correspondance avec ceux obtenues par la théorie locale (c.-à-d. :  $(e_0a)=0$ ).

On peut voir que le rapport de flèche est supérieur à l'unité. Cela signifie que la théorie sous-estime la flèche local (figure1). Cela est dû du fait que la théorie locale ne tient pas compte de l'effet des petites échelles.



**Figure 01** : Effet de petit-échelle sur la ration de déviation de la plaque Simplyment



**Figure 02** : Effet de déformation de cisaillement sur le ratio de déviation de la

appuyée sous charge sinusoïdale

plaque Simplement appuyée sous charge  
sinusoïdale

. En d'autres termes, l'inclusion de l'effet de petite taille conduit à une augmentation de la flèche. Cet effet est significatif pour des plaques épaisses en particulier aux modes supérieurs. Cela signifie que l'effet de la déformation de cisaillement rend la plaque plus flexible (figure 2).

### 8. CONCLUSION :

Dans ce travail, le modèle de plaque non-local pour la flexion, est élaboré à partir des théories différentielles non locales (relations constitutives d'Eringen).

Comme le montre cette étude, l'inclusion de petites dimensions et des effets de déformation de cisaillement rend la plaque plus souple et par conséquent, conduit à une augmentation de la flèche.

Ces effets sont significatifs pour les plaques épaisses surtout aux modes plus élevés, mais ils diminueront pour les plaques très minces

### REMERCIEMENTS

Cette recherche a été soutenue par l'Agence thématique de recherche Scientifique et Technologique (Algérie) et l'université de Sidi Bel Abbes (UDL SBA) en Algérie.

### REFERENCES

- [1]. Li X, Bhushan B, Takashima K, et al. Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nano indentation techniques. *Ultramicroscopy* 2003; 97: 481-494.
- [2]. Eringen AC and Edelen DGB. On nonlocal elasticity. *Int J Eng Sci* 1972;10:233
- [3]. Eringen AC. Nonlocal polar elastic continua. *Int J Eng Sci* 1972; 10: 1-16.
- [4]. Eringen AC. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *J Appl Phys* 1983; 54: 4703-4710.
- [5]. Reddy JN. Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates. *Int J Eng Sci* 2010;48:1507-1518.
- [6]. Zenkour AM comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates.
- [7]. Zenkour AM generalized sheared deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2006;30:67-84.
- [8]. Arash B and Wang Q. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes.
- [9]. Wang Q and Wang C the constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics.
- [10]. Hashemi SH and Samaei AT. Buckling analysis of micro/nanoscale plates via nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional systems Nanostructures* 2011;43:1400-1404.