

# L'INFLUENCE DU CISAILLEMENT TRANSVERSE ET DES DEFORMATION NORMALES SUR LE COMPORTEMENT DES FLECHES DES PLAQUE FGM

H. SAIDI<sup>1</sup>, S. ABDELBARI<sup>1</sup>, E. A. ADDABEDIA<sup>1</sup>, A. TOUNSI<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoires des matériaux et hydrologie, Université de Djillali liabes, Sidi Bel Abbes  
E-mail: hayatsaidi2016@yahoo.fr

## RÉSUMÉ

Dans ce travail, une solution analytique de l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriété est présentée en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffinée. Cette théorie prend en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur. Le module d'élasticité de la plaque est supposé être varié selon la loi de distribution de puissance en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants. La couche centrale est considérée être homogène est constituée d'un matériau isotrope en céramique. L'influence de l'épaisseur de la couche FGM, l'indice de la fraction volumique et les rapports des dimensions géométriques sur les flèches et les contraintes de la plaque sandwich fonctionnellement gradué sont étudiées.

**Mots Clés:** *Thermomécanique, modélisation analytique, matériau à gradient de propriété, L'effet d'étirement.*

---

## NOMENCLATURE

### Symboles :

$E(z)$  Module de Young en fonction de  $z$

$\alpha(z)$  Coefficient de dilatation thermique

$V(z)$  Fraction volumique

### Lettres grecques :

$\Psi(z)$  Fonction de gauchissement

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  Déformation dans la direction  $x, y$  et  $z$

$P_c, P_m$  Propriété du céramique et métal

$\tau_{xz}, \tau_{yz}$  Contraintes de cisaillement

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  Contraintes normales

$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  Déformations de distorsion

### Indices / Exposants :

$k$  Paramètre du matériau

$u, v, w$  Les déplacements dans les directions  $x, y, z$

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  Les rotations autour des axes  $x, y$  et  $z$ ,

$a, b, h$  La longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque

---

## 1. INTRODUCTION

L'évaluation du comportement de déformation thermomécanique des structures de plaque à gradient de propriété dépend considérablement de la cinématique du modèle de plaque. Plusieurs théories des plaques sont disponibles pour analyser les déformations des plaques composites. Le problème important de l'utilisation de la théorie classique des plaques de Kirchhoff (CPT), est qu'elle ne tient pas compte des effets de cisaillement transversal et par conséquent elle fournit des résultats raisonnables pour des plaques relativement minces. Cependant, dans des plaques épaisses et moyennement épaisses, les déformations de cisaillement transversales doivent être prises en compte. Il existe de nombreuses théories des plaques qui incluent ces déformations [Reissner, 1945; Mindlin, 1951]. Ces théories sont souvent appelées la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

et un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour éliminer le problème de la distribution constante de la contrainte de cisaillement transversale.

L'objectif de ce travail est de développer une solution analytique pour l'analyse de la flexion

Thermomécanique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées. Pour cela une nouvelle théorie hyperbolique raffinée de déformation de cisaillement incluant la déformation de cisaillement transverse et la déformation normale «l'effet de l'étirement de l'épaisseur» est proposé. Contrairement aux autres théories d'ordre élevé, la présente théorie contient six inconnus. Les faces de la plaque sandwich sont constitués de deux matériaux isotropes (métal-céramique) variant à travers l'épaisseur selon une simple loi de distribution de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Par conséquent les propriétés matérielles telles que le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique sont supposés être variés aussi selon la même loi de distribution de puissance. La couche centrale est constituée complètement en céramique. Les résultats numériques pour les flèches et les contraintes sont obtenues et leurs précisions sont vérifiées en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature.

## 2. MODELE MATHEMATIQUE

Considérons une plaque sandwich en matériau à gradient de propriété composée de trois couches ayant les dimensions représentées dans la figure.1. Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à  $z = \pm h/2$ , et les bords de la plaque sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ . La plaque est composée de trois couches, « couche 1 », « couche 2 » et « couche 3 » de la partie basse à la partie haute. Les ordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces limitant la couche centrale, et de la surface supérieure de la plaque sont respectivement,  $z=h_0$ ,  $z=h_1$ ,  $z=h_2$ ,  $z=h_3$

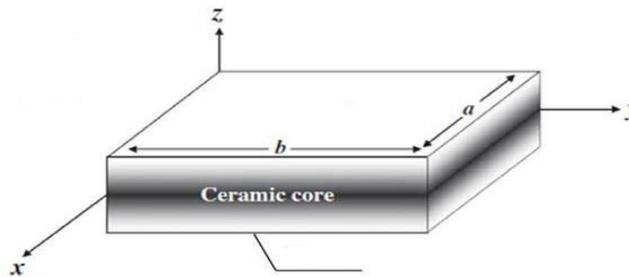


FIGURE1. Géométrie d'une plaque sandwich en FGM dans le système de coordonnées

Les faces de la plaque sandwich sont constituées de deux matériaux isotropes (métal céramique) Variant à travers l'épaisseur selon une simple loi de distribution de puissance en fonction de la fraction volumique  $V(n)$  des matériaux constituants. Par conséquent les propriétés matérielles telles que le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique sont supposés être variés aussi selon la même loi de distribution de puissance. La couche centrale est constituée complètement en céramique. La fraction volumique  $V(n)$  à travers l'épaisseur de la plaque sandwich est définie par :

$$\begin{aligned}
 V^{(1)} &= \left( \frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^k, & z \in [h_0, h_1] \\
 V^{(2)} &= 1, & z \in [h_1, h_2] \\
 V^{(3)} &= \left( \frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^k, & z \in [h_2, h_3]
 \end{aligned} \tag{1}$$

Où  $k$  est un paramètre de matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la plaque, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

Les propriétés mécaniques et thermiques de la plaque sandwich en FGM sont déterminées à

partir de la fraction volumique des matériaux constituants  $V(n)$ . Cependant, le module d'élasticité  $E(z)$  et le coefficient dilatation thermique  $\alpha(z)$  à tout point de la plaque sont donnés par la loi de mélange [Zenkour, 2010, Houari, 2011].

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (2)$$

Où  $P^{(n)}(z)$  est la propriété matérielle effective de la couche  $n$  de la plaque sandwich en FGM.  $P_m$  et  $P_c$  sont les propriétés des faces inférieure et supérieure de la couche 1 respectivement, et vice versa pour la couche 3 selon la fraction volumique  $V(n)$  ( $n=1,2,3$ ). Notant que  $P_m$  et  $P_c$  sont respectivement les propriétés correspondantes au métal et au céramique de la plaque sandwich.

La présente théorie est vibrationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres. et avec la prise en compte de la déformation normale (effet d'étirement de l'épaisseur)  $\theta z$  [Saidi et al, 2013].

Le champ de déplacement de n'importe quel point de la plaque s'écrit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - zw_{,x} + f(z)\theta_x \quad (3a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - zw_{,y} + f(z)\theta_y \quad (3b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + \dot{f}(z)\theta_z \quad (3c)$$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation (III.6) soit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (4b)$$

Le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \varepsilon_z - \alpha T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement.

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions au limites, le principe des travaux virtuels est appliquée, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec

les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (6)$$

Où  $\Omega$  est la surface supérieure de la plaque.

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches en FGM.

les déplacements  $u_0, v_0, w_0, w_s, \theta_x, \theta_y, \theta_z$  satisfaisant les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ Y \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ Z \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

Où

$U, V, W, X, Y,$  et  $Z$  sont des paramètres arbitraires représentent l'amplitude de chacun des termes dans les séries pour la solution de Navier déterminés sous la condition que la solution de l'équation III.30 doit vérifier l'équation III.22. On obtient l'opérateur suivant :

$$[C]\{\Delta\} = \{F\}, \quad (8)$$

Où  $\{\Delta\} = \{U, V, W, X, Y, Z\}^t$  et  $[C]$  c'est une matrice de rigidité

### 3. RESULTATS

Dans cette partie, on a étudié l'influence de quelques paramètres géométriques et matériels sur le comportement thermomécanique des plaques sandwiches en FG. Pour cela, des résultats numériques sont présentés dans les figures IV.2 – IV.5 en utilisant la présente théorie (RHSDT) avec la considération de l'effet d'étirement de l'épaisseur.

Les figures 2-3 montrent la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  avec le rapport d'élancement ( $a/h$ ) pour les deux types des plaques sandwiches avec différents épaisseur de la couche FGM ( $t_{FGM}$ ). On remarque que la flèche de la plaque complètement métallique à la plus grande valeur et celle de la plaque complètement céramique prend la plus petite valeur. Les flèches des plaques sandwiches en FGM et des plaques homogènes diminuent lorsque le rapport ( $a/h$ ) augmente.

Les figures 4-5 montrent les effets du rapport de dimension  $a/b$  sur la flèche non dimensionnelle  $\bar{w}$ . La flèche de la plaque céramique à la plus petite valeur par contre la plaque métallique a la plus grande valeur. L'augmentation du rapport  $a/b$  engendre une décroissance des flèches des plaques sandwiches homogènes et fonctionnellement gradués.

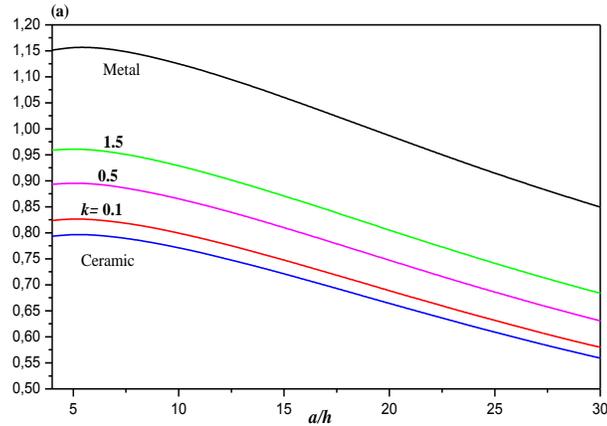


FIGURE2. La flèche centrale adimensionnelle  $\bar{w}$  en fonction du rapport d'élancement  $a/h$  pour les deux types des plaques sandwiches en FGM  $t_{FGM} = 0.4h$  ;

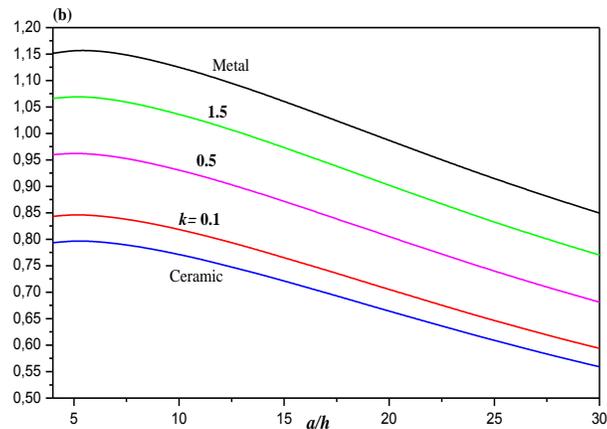


FIGURE3. La flèche centrale adimensionnelle  $\bar{w}$  en fonction du rapport d'élancement  $a/h$  pour les deux types des plaques sandwiches en FGM  $t_{FGM} = 0.8h$

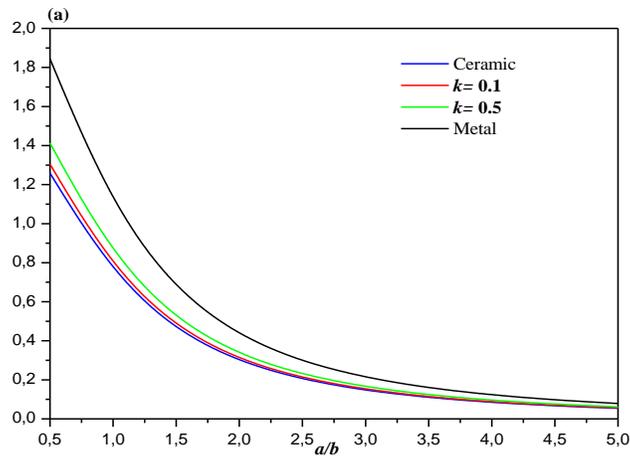


FIGURE4. La flèche centrale adimensionnelle  $\bar{w}$  en fonction du rapport d'allongement  $a/b$  pour les deux types des plaques sandwiches en FGM  $t_{FGM} = 0.4h$

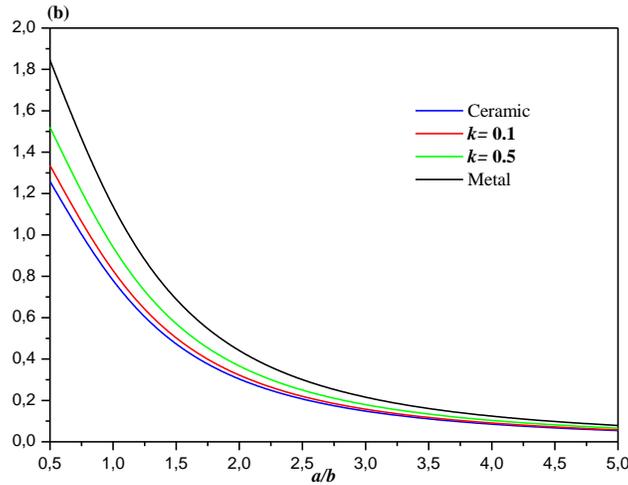


FIGURE5. La flèche centrale adimensionnelle  $\bar{w}$  en fonction du rapport d'allongement  $a/b$  pour les deux types des plaques sandwiches en FGM  $t_{FGM} = 0.8h$

#### 4. CONCLUSIONS

Une nouvelle théorie hyperbolique raffinée de la déformation de cisaillement est développée pour l'analyse thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches en FGM.

Les résultats numériques pour les flèches sont obtenus, et étudiés pour les différentes configurations des plaques sandwiches en FGM. Il a été confirmé que l'inclusion de l'effet d'étirement de l'épaisseur rend la plaque plus rigide et par conséquent conduit à une réduction des déplacements.

#### REFERENCES

- [1] E. Reissner: «The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates». *J. Appl. Mech.*, Volume 12, pages: 69-77, 1945.
- [2] R. D. Mindlin, 1951. Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.* 18, 31-38.
- [3] A. M. Zenkour, Alghamdi, N. "A. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **17**, 419–432, 2010.
- [4] M. S. A Houari, Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Adda bedia, E.A., "Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates", *J. Thermal Stresses*, **34**, 315–334, 2011
- [5] H. Saidi, Houari, M.S.A, Tounsi, A., Adda bedia, E.A., "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory", *Steel and Composite Structures*, **15** N° 2, 221–245, 2013.