

## Etude des courants de gravité non-Boussinesq dans les milieux homogènes

Ouardia AIT OUCHEGGOU<sup>1</sup>, Bouzid BENKOUSSAS<sup>1</sup>, Rabah MEHADDI<sup>2</sup>,  
Olivier VAUQUELIN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire GMD, Ecole Nationale Polytechnique, 10 Rue des frères Oudek,  
Hassen Badi, El-Harrach 16200, Alger, Algérie

<sup>2</sup> Aix-Marseille Université/Laboratoire IUSTI/ UMR CNRS 7343, 5 rue E. Fermi, 13453  
Marseille, France,

Auteur correspondant: [bouzid.benkoussas@gmail.com](mailto:bouzid.benkoussas@gmail.com)

**Résumé** - Les courants de gravité sont des déplacements le long d'une surface d'un fluide dense au sein d'un fluide moins dense. Ils forment d'impressionnants murs de sable lors des tempêtes en milieu désertique. Ils peuvent aussi avoir lieu à des échelles plus faibles posant de sérieux problèmes de sécurité à l'homme, par exemple les avalanches et les coulées de boue. L'étude réalisée concerne la prédiction analytique et numérique du comportement des courants de gravité non-Boussinesq dans des milieux homogènes. La variation de la vitesse de propagation et de l'avancée du front du courant de gravité à partir des modèles théoriques de la littérature, dont la validité est montrée aussi bien pour le cas Boussinesq que pour le cas non-Boussinesq, sont déterminées. La confrontation des résultats analytiques avec ceux des simulations numériques a permis de valider l'approche de résolution numérique utilisée. Les résultats obtenus ont mis en évidence, dans la configuration non-Boussinesq l'existence d'une nouvelle loi de comportement « linéaire » dans le cas où les effets inertiels sont prépondérants, pour les larges valeurs de différences de masse volumique.

**MOTS-CLÉS** : Courant de gravité, non-Boussinesq, loi de comportement

### Nomenclature

Fr	Nombre de Froude	<i>Acronymes</i>
$g'$	Accélération réduite, $m.s^{-1}$	FDS Fire Dynamics Simulator
$h_f$	Hauteur du courant au niveau de la tête, m	LES Large Eddy Simulation
Re	Nombre de Reynolds.	<i>Indices</i>
$u_f$	Vitesse de déplacement de la tête du courant de gravité, m	I Phase inertielle
	<i>Symboles grecs</i>	V Phase visqueuse
$\rho$	Masse volumique, $kg.m^{-3}$	C Courant de gravité
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide en déplacement, $kg.m^{-1}.s^{-1}$	A Milieu ambiant
$\Delta\rho$	Ecart des masses volumiques, $kg.m^{-3}$	

## 1. Introduction

Le courant de gravité est le déplacement le long d'une surface horizontale ou inclinée d'un fluide dense au sein d'un fluide moins dense, ou l'inverse. À grand échelle, on évoque les courants de gravité lorsqu'il s'agit des situations liées à la météorologie et la géophysique, notamment la forme d'enclume de nuage orageux qui est en fait liée à l'existence d'un courant de gravité créé au sommet du nuage. On cite également les avalanches de neige, les écoulements pyroclastiques lors des éruptions volcaniques. Ces courants de gravité sont aussi omniprésents dans les applications industrielles, notamment en aéronautique qui s'intéresse aux sciences incluant en particulier l'aérodynamique. On rencontre encore les courants de gravité lors d'incendie ou de rejet de gaz dans les tunnels miniers ou routiers.

Les premières investigations sur la problématique ont été menées par Von Karman [1] qui a mis le point sur l'importance d'une combinaison sensée et judicieuse entre vision physique et modélisation mathématique des courants de gravité. Trente ans plus tard, Benjamin [2] a utilisé une approche similaire pour modéliser l'écoulement d'une cavité d'air dans un canal rempli de liquide. Il a développé un modèle théorique en se basant sur le théorème de Bernoulli le long des frontières et la ligne de courant interfaciale, en plus des équilibres de masse et de débit. Bien que cette situation soit idéalisée, sans dissipation ni mélange, ce modèle fournit des résultats en bon accord avec ceux obtenus expérimentalement et a constitué le fondement de plusieurs analyses ultérieurement.

Pour le cas Boussinesq comme pour le cas non-Boussinesq cette analyse et les autres études qui ont été menées après, ont révélé l'existence de deux lois de comportement selon qu'on est dans le cas où les effets inertiels sont dominants (Phase inertielle) ou dans le cas où les effets visqueux sont dominants (Phase visqueuse). Les courants de type Boussinesq sont les plus rencontrés dans la nature. Un courant est dit de type Boussinesq lorsque la différence de masse volumique entre le courant et le fluide ambiant qui le compose est relativement faible (de l'ordre de 0.05), Ungarish [3]. Les travaux présentés dans la littérature sont majoritairement effectués sous l'approximation de Boussinesq [4-8] cependant, la configuration non-Boussinesq est peu traitée, sa compréhension nécessite plus d'investigation.

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à la reproduction analytiques des lois de comportement obtenues par Benjamin en approximation de Boussinesq, ensuite à l'élargissement de l'étude sur la configuration non-Boussinesq pour une plage plus étendue des différences de masse volumique et ce à travers des simulations réalisées par le code FDS.

## 2. Modèle théorique

### 2.1. Cas Boussinesq

Le modèle théorique est développé par application des lois physiques et de conservation sur un volume de contrôle du modèle classique proposé par Benjamin [2], (Figure 1). Les hypothèses suivantes sont considérées : (1) le régime est permanent, (2) le courant de gravité est de type Boussinesq, (3) Le volume du courant de gravité est constant, (4) le milieu ambiant est homogène, (5) le nombre de Reynolds du courant de gravité est de l'ordre de  $10^4$  permettant de s'assurer qu'au départ les effets inertiels sont dominants.

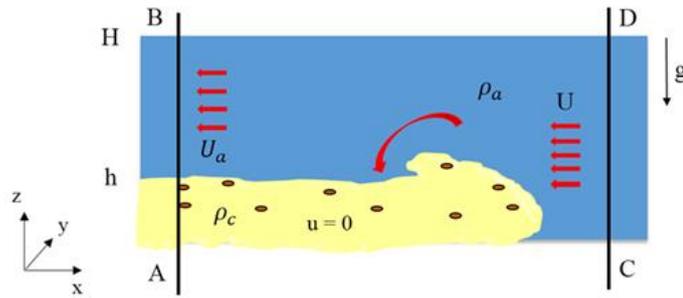


Figure 1: Volume de contrôle et image d'un courant de gravité

Dans le volume de contrôle ABCD du modèle physique schématisé dans la Figure 1, le fluide lourd étant considéré au repos (fluide de référence), le fluide léger circule de façon régulière sur l'interface, s'approchant de loin avec une vitesse de propagation «  $U$  » en amont du front du courant de gravité (du côté CD) et a une vitesse «  $U_a$  » en aval (du côté AB).

La continuité du débit entre les deux extrémités gauche (AB) et droite (CD) du volume de contrôle ABCD s'étalant toutes les deux sur la hauteur  $H$ , permet d'écrire :

$$UH = (H - h) U_a \quad (1)$$

L'adimensionnement sur la hauteur permet d'obtenir la vitesse de propagation :

$$U_a = \frac{U}{(1 - a)} \quad (2)$$

Avec :  $a = \frac{h}{H}$  le paramètre géométrique.

L'équilibre dynamique suivant la direction  $x$  se traduit par une compensation entre les forces de l'écoulement sur les deux extrémités verticales (AB) et (CD) du volume de contrôle, il se traduit par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

Sur la base des hypothèses introduites, l'équation (3) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) = 0 \Rightarrow \rho u^2 + P = \text{constante} \quad (4)$$

Ce qui permet d'écrire entre les deux extrémités verticales du volume de contrôle ABCD :

$$\int_A^B (\rho u^2 + P) dz = \int_C^D (\rho u^2 + P) dz \quad (5)$$

Du côté CD, la vitesse « U » est la même de 0 à H et pour un repère lié au milieu ambiant la pression est nulle. Par contre, du côté AB,  $u = 0$  pour  $0 \leq z \leq h$  et est calculé selon l'équation (2) pour  $h \leq z \leq H$ . Concernant la pression, elle est déterminée par le théorème de Bernoulli appliqué entre (AB) et (CD) dans chacune des zones  $0 \leq z \leq h$  et  $h \leq z \leq H$ .

En tenant compte de ce qui a été défini sur les deux extrémités (AB) et (CD) à travers les deux zones verticales, les expressions donnant la pression du côté (AB), pour  $0 \leq z \leq h$  et pour  $h \leq z \leq H$  sont respectivement  $P = \frac{1}{2}\rho_a U^2 - \Delta\rho g z$  et  $P = \frac{1}{2}\rho_a U^2 - \Delta\rho g h$ .

Ainsi en remplaçant dans l'équation (5), on obtient :

$$\int_0^h (\frac{1}{2}\rho_a U^2 - \Delta\rho g z) dz + \int_h^H \rho (\frac{U}{(1-a)})^2 dz = \int_0^H \rho U^2 dz \quad (6)$$

Après intégration, l'expression donnant la vitesse « U » en fonction de la hauteur du courant de gravité « h », de l'accélération réduite « g' » et du paramètre géométrique « a » est comme suit :

$$U = \sqrt{g'h \frac{(2-a)(1-a)}{1+a}} = Fr. \sqrt{g'h} \quad (7)$$

Par identification, l'expression du nombre de Froude en fonction du paramètre géométrique  $a = \frac{h}{H}$  est alors :

$$Fr = \sqrt{\frac{(2-a)(1-a)}{1+a}} \quad (8)$$

En translatant l'extrémité (AB) jusqu'à la tête du courant de gravité, l'expression (7) peut être reproduite pour les paramètres de la tête du courant de gravité :

$$U_f = \sqrt{g'h_f Fr} \quad (9)$$

A l'issue de cette analyse et des investigations de la littérature dans la configuration Boussinesq, les lois de comportement présentées dans le Tableau 1 ont été obtenues.

Tableau 1 : Lois de comportement, cas Boussinesq pour les deux phases : inertielle et visqueuse

Phase inertielle	Phase visqueuse
$X = K_I T^{2/3}$	
Avec : $1,6 \leq K_I \leq 1,47$ (Hoult, 1972)	$X = K_V T^{3/8}$ (Hoult, 1972)
$1,3 \leq K_I \leq 1,6$ (Marino, 2005)	$X = K'_V T^{1/5}$ (Huppert, 1982)

Où  $X$  et  $T$  sont des variables sans dimension désignant la distance parcourue par le courant de gravité et le temps, données par :

$$T = \frac{t}{\frac{x_0}{\sqrt{g_a h_0}}} \text{ et } X = \frac{x}{x_0}$$

## 2.2. Cas non-Boussinesq

Dans la littérature, la plus grande majorité des investigations ont été rapportées sur la configuration Boussinesq. Cela justifie l'intérêt que nous portons à la configuration non-Boussinesq (peu traitée). En premier, on s'est référé à une étude récente effectuée sur ce type de courant de gravité, Dai [9]. Ensuite, nous l'avons approfondie dans le but de mettre en évidence l'existence de nouvelles lois de comportement, en particulier dans la phase inertielle. La phase visqueuse se caractérise par une non-régularité, ce qui rend sa représentation aléatoire.

Les résultats de la série d'expériences réalisée par Dai [9] dans les écoulements gravitaires non-Boussinesq, où la différence des masses volumiques entre les deux fluides est relativement importante, se situant dans la plage  $0.05 \leq \varepsilon \leq 0.17$ , avec  $\varepsilon = (\rho_a - \rho_c)/\rho_c$ , sont analysés. Ces résultats ont été obtenus pour les angles d'inclinaison du domaine  $\theta$ , variant entre  $0$  et  $9^\circ$ . Dans sa conclusion, il rapporte qu'il n'y a pas de différence entre le cas Boussinesq et le cas Non-Boussinesq par rapport aux lois de comportement, du fait que l'entraînement du fluide ambiant au niveau de la tête réduit la différence de masse volumique entre ce dernier et celui du fluide à la tête et donc les mêmes lois de comportement que celles de la littérature sont obtenues dans les deux cas, Tableau 1.

Dans cette étude, on a considéré des valeurs de différences de masse volumique dans un domaine plus étendu ( $0.6 \leq \varepsilon \leq 0.9$ ). Le code FDS est exploité pour étudier le comportement du courant de gravité dans cette plage. Ce programme écrit en langage Fortran et qui effectue la lecture d'un fichier d'entrée que l'utilisateur rédige suivant une syntaxe bien déterminée. Ce logiciel est basé sur la simulation des grandes échelles ou Large Eddy Simulation (LES) et résout des équations de Navier & Stokes à faible nombre de Mach. La géométrie du domaine de calcul est présentée sur la Figure 2. Initialement, les vitesses des deux fluides sont nulles, le volume du courant de gravité est de  $0.0016 \text{ m}^3$  et celui du milieu ambiant étant de  $0.3 \text{ m}^3$ . Les tests ont été réalisés pour une seule valeur de la masse volumique du milieu ambiant qu'est celle de l'air ( $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$ ) et différentes valeurs de la masse volumique du courant de gravité.

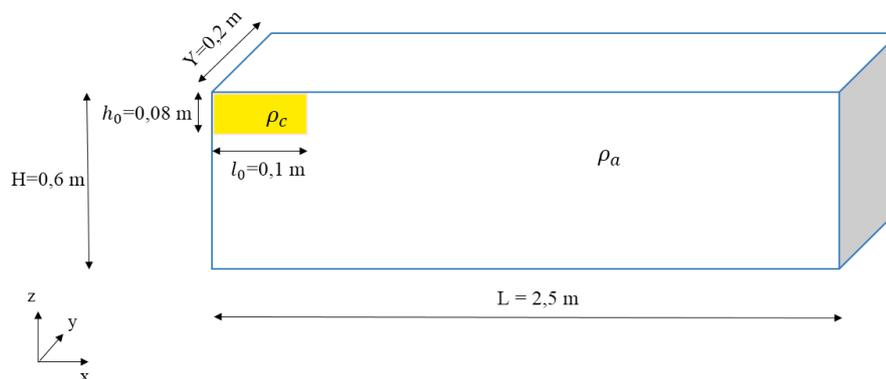


Figure 2: Modèle géométrique adopté pour les simulations avec FDS.

## 3. Résultats et interprétations

### 3.1. Caractérisation qualitative du courant de gravité

Un test numérique réalisé sur le domaine de la Figure 2 pour une masse volumique du courant de gravité de  $1.18 \text{ kg/m}^3$  est représenté dans la Figure 3. On observe que le fluide de masse volumique  $\rho_c$  se déplace le long du domaine. L'interface montre aussi qu'il y a entrainement, la couleur verte sur l'échelle des masses volumiques correspond bien à une valeur intermédiaire entre la masse volumique du milieu ambiant et celle du courant de gravité. Le résultat illustré sur la Figure 3 montre bien que le code FDS peut reproduire avec une certaine fidélité le comportement du courant de gravité.

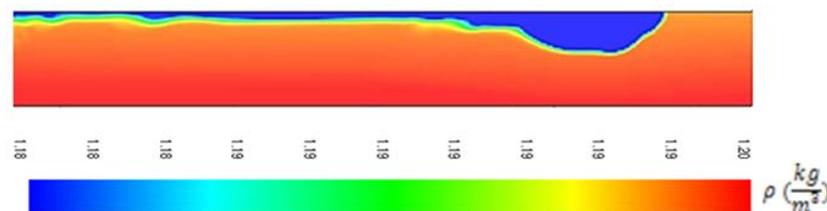


Figure 3: illustration qualitative du courant de gravité obtenue par simulation avec le code FDS en configuration Boussinesq à  $t = 0.5 \text{ s}$

### 3.2. Validation quantitative des résultats de simulation avec le code FDS

Une série de simulations numériques sur FDS a été réalisée pour évaluer l'avancée du front de courant de gravité en fonction du temps pour les valeurs de la masse volumique variant entre  $1.14$  et  $0.02 \text{ kg/m}^3$ . La masse volumique du milieu ambiant étant prise égale à  $1.2 \text{ kg/m}^3$ . Nous montrons dans Figure 4, le déplacement du front de courant de gravité en fonction du temps, obtenu pour  $\varepsilon = 0.05$ . Des lois de comportement ont été déduites pour les phases inertielle et visqueuse, elles ont été comparées à celle de la littérature pour les mêmes conditions. Une parfaite concordance est observée, particulièrement pour la phase inertielle. Ceci permet de confirmer la fiabilité du code FDS quant à l'étude de ce type d'écoulement dans la configuration non-Boussinesq.

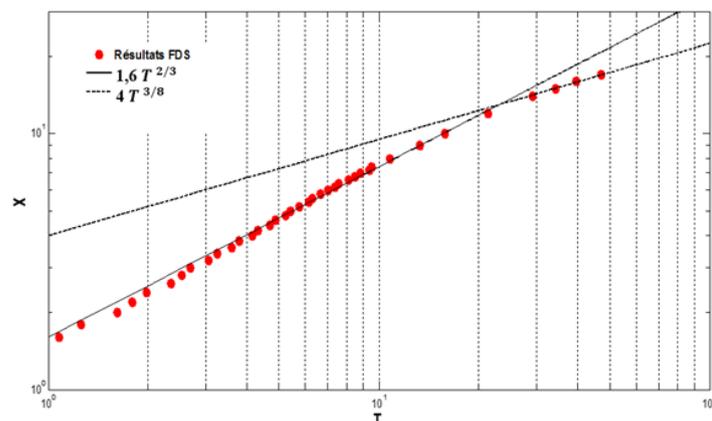


Figure 4: Résultats des simulations avec FDS et les asymptotes dans les deux phases inertielle et visqueuse pour  $\varepsilon = 0.05$

La Figure 4 montre le tracé de « X » en fonction de « T ». Les pentes étant de 1.6 et 4 pour les phases inertielle et visqueuse respectivement et les asymptotes sont de  $2/3$  pour la phase inertielle et de  $3/8$  pour la phase visqueuse. Ce qu'on observe également est que la transition entre les deux phases a eu lieu dans l'intervalle de temps  $20 \leq T \leq 30$ .

### 3.3. Lois de comportement du courant de gravité lors de la phase inertielle

#### 3.3.1. Corrélation reliant $K_I$ à $\epsilon'$

Afin de corréliser l'évolution de la pente de la loi de comportement dans la phase inertielle  $K_I$  en fonction de  $\epsilon'$ , plusieurs simulations avec un intervalle plus étendu des valeurs de  $\epsilon'$  ont été réalisées. Pour convenance  $\epsilon'$  est rapportée à la masse volumique de l'air,  $\epsilon' = (\rho_a - \rho_c)/\rho_a$ . Cette évolution est tracée sur la Figure 5, avec la courbe de tendance et son équation. Sur la Figure 6, nous avons présenté l'avancée  $X$  en fonction de  $T$  pour les deux phases du courant de gravité.

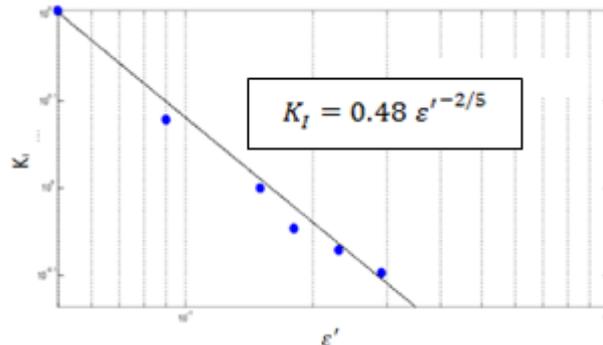


Figure 5: Variation de  $K_I$  en fonction de  $\epsilon'$  obtenue avec FDS et courbe de tendance

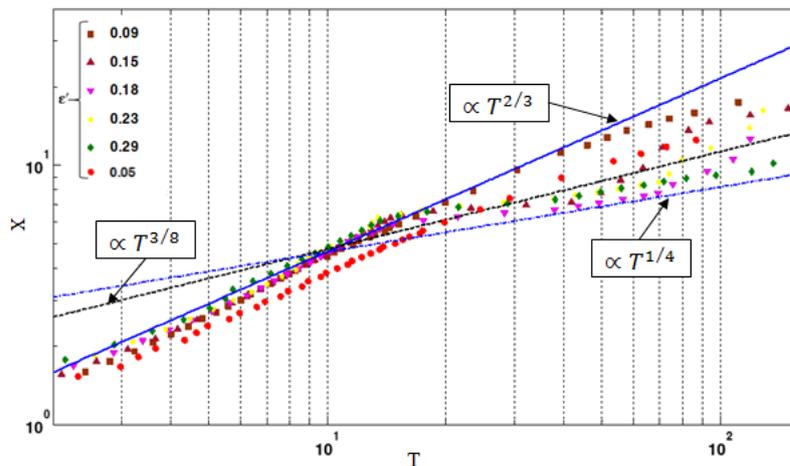


Figure 6: Comportement dynamique d'un courant gravitaire en fonction de  $\epsilon'$

On remarque que la transition de la phase inertielle vers la phase visqueuse se fait à  $10 < T < 30$  pour toutes les courbes présentées dans la Figure 6, et que ces dernières se rejoignent dans la phase inertielle avec un comportement asymptotique  $\propto T^{2/3}$  et que pour la phase visqueuse, ces courbes se situent entre deux asymptotes  $\propto T^{2/3}$  et  $\propto T^{1/4}$ .

#### 3.3.2. Nouvelle loi de comportement pour la phase inertielle

Le résultat précédent sur l'évolution de la pente de la loi de comportement dans la phase inertielle  $K_I$  en fonction de  $\epsilon'$  était un argument pour étendre nos investigations sur une plage plus large des valeurs de  $\epsilon'$ . Le résultat montre un comportement plutôt linéaire à partir de la valeur de  $\epsilon' = 0.6$  (Figure 7). Ce même comportement linéaire lors de la phase inertielle est aussi retrouvé pour les valeurs de  $\epsilon' = 0.6, 0.7, 0.8$  et  $0.9$ . Ce dernier est considéré comme une originalité par rapport à ce qui existe déjà dans la littérature concernant le comportement asymptotique de  $X$  en

fonction de  $T$  dans le cas des écoulements des courants de gravité non-Boussinesq dans la phase inertielle.

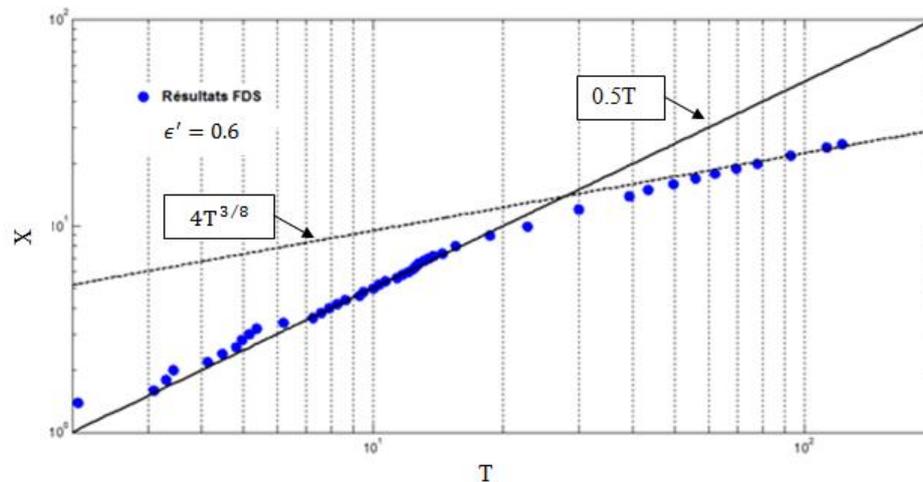


Figure 7: Résultats des simulations et les asymptotes dans les deux phases inertielle et visqueuse

#### 4. Conclusion

Dans la littérature, pour le cas Boussinesq comme pour le cas non-Boussinesq, il existe deux lois de comportement des courants de gravité selon qu'on est dans une phase où les effets inertiels sont dominants ou dans une autre où les effets visqueux sont dominants. L'étude présentée nous a permis de mettre en évidence numériquement dans la configuration non-Boussinesq une nouvelle loi linéaire de comportement dans la phase inertielle pour les larges valeurs des différences de masse volumique.

#### 5. Références

1. V. Karman, The engineer grapples with non-linear problems, Bull. Amer. Math. Soc, (1940), pp. 615-683.
2. Benjamin, Gravity Current and Related Phenomena, J. Fluid. Mech, (1968), pp. 209-248.
3. M. Ungarish, An Introduction to Gravity Currents and Intrusions, CRC Press, (2009), p. 110.
4. J. Rottman and J. Simpson. Gravity currents produced by instantaneous releases of a heavy fluid in a rectangular channel. J. Fluid Mech. (1983), 135, pp. 95–110.
5. T. Maxworthy and N. Didden, The viscous spreading of plane and axisymmetric gravity currents, Eng ASCE (1982), 113(5) pp 615-629.
6. T. Bonometti, S. Balachandar and J. Magnaudet, Wall effects in non-Boussinesq density currents, J. Fluid. Mech., (2008), pp. 315-325.
7. J. Simpson., Experiments on the dynamics of the gravity current head, J. Fluid. Mech, (1979), pp. 477-495.
8. J. Simpson, Gravity Currents, 2nd edition-Cambridge University Press, (1997), pp. 450-512.
9. A. Dai, Non-Boussinesq gravity currents propagating on different bottom slopes, Cambridge university Press, (2014), pp. 658-680.