

Contribution à la résolution du modèle géométrique inverse des manipulateurs hyper – redondants plans

Abdelhakim CHIBANI^{1,2*}, Abdelouahab ZAATRI², Chawki MAHFOUDI¹

¹ Département de Génie mécanique, Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées.
Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi

² Département de Génie mécanique, Faculté des Sciences de la Technologie.
Université Constantine1

* auteur correspondant : ahchibani@gmail.com

Résumé - Dans ce travail on s'intéresse à la résolution du problème géométrique inverse des robots manipulateurs hyper – redondants. Ces derniers possèdent plusieurs degrés de liberté, leur modèle géométrique inverse admet une infinité de solutions. Nous présentons une alternative simple pour la résolution de la redondance des manipulateurs hyper – redondants plans. Deux approches différentes ont été utilisées: la première est basée sur le concept de la jacobienne pseudo – inverse tandis que dans la deuxième, un schéma d'optimisation déterministe pour un problème non linéaire contraint est utilisé. La résolution utilise la puissante méthode de programmation quadratique SQP. Finalement, des résultats de simulations pour deux études de cas sont présentés pour visualiser les résultats, d'une part, et d'autre part pour prouver l'efficacité de l'approche optimisation.

Mots Clés : Manipulateur hyper – redondant, Pseudo – inverse, Optimisation non linéaire.

Nomenclature (11 points, 2 colonnes)

R_j	repère lié à l'articulation j	$r(t)$	polynôme d'interpolation
θ_j	$j^{\text{ème}}$ variable articulaire	Ω	espace de travail admissible
∂X	variation élémentaire des coordonnées opérationnelles	r_i	vecteur position
J	matrice jacobienne	X	vecteur des paramètres d'optimisation
J^\dagger	matrice pseudo-inverse de J	F	fonction objective globale
$P(t)$	loi de mouvement entre position initiale	\mathfrak{S}	fonction objective responsable de l'évitement d'obstacle
P^i et finale P^f			

1. Introduction

Les manipulateurs hyper – redondants (MHR) possèdent un grand nombre de degrés de liberté actionnés dépassant le nombre minimum nécessaire pour accomplir une tâche [1]. Les activités de recherche dans le domaine des MHR ont pris deux voies principales : les robots hyper – redondants à liaisons rigides et ceux à structures continues [2]. La première catégorie s'occupe des manipulateurs construits par concaténation d'un grand nombre de liaisons (ou corps) rigides. La deuxième catégorie couvre les manipulateurs avec plusieurs segments souples capables de s'allonger et de se plier (structures bio-inspirées). Dans le présent travail, nous nous concentrons sur une classe de MHR à liaisons rigides de type série. Leurs intéressantes performances ont attirés de nombreux chercheurs à la fois dans la modélisation et la conception. Une considération importante dans la conception des robots hyper – redondants est l'analyse géométrique ; elle est habituellement traitée à partir de deux points

de vue, directe et inverse ; la seconde est extrêmement importante, car elle permet de calculer les variables articulaires permettant au robot d'approcher un point dans l'espace, en plus de son importance dans le suivi de trajectoires. Cependant, la grande redondance représente une difficulté majeure quant à la modélisation et la commande. En effet, si on considère le modèle géométrique inverse des MHR, il est certain qu'il possède une infinité de solutions et par conséquent, un critère de sélection efficace est requis. Dans ce contexte, plusieurs auteurs ont contribué par diverses méthodes. Une nouvelle méthode géométrique pour résoudre la cinématique inverse des manipulateurs redondants plans a été proposée par [3]. Dans [4] une étude comparative des méthodes d'optimisation pour la résolution de la cinématique inverse d'un MHR modulaire à 10 degré de liberté (DDL) est présentée. Un schéma de commande d'un robot hyper-redondant basé sur des méthodes heuristiques a été proposé par [5]. Les résultats sont comparés avec ceux de la technique de la jacobienne pseudo-inverse. Dans [6] les auteurs ont utilisé les algorithmes génétiques pour traiter la planification de mouvement optimale des robots redondants. Une approche d'optimisation non linéaire a été utilisée par [7] pour résoudre la cinématique inverse d'un robot redondant à 7 DDL. Dans ce travail, nous présentons une alternative simple pour la résolution de la redondance des MHR plans. Sur la base d'un formalisme d'optimisation non linéaire on détermine les configurations cinématiques optimales c.-à-d. les meilleurs consignes à envoyés aux actionneurs du robot pour exécuter une tâche ou un mouvement tout en minimisant un indice de performance donné. Les résultats seront comparés avec ceux issus d'une approche numérique basée sur le concept de la pseudo – inverse de la matrice jacobienne.

Le papier est organisé en quatre parties et une conclusion générale. La première regroupe, une synthèse géométrique des manipulateurs hyper-redondants plans de type série. La seconde présente la résolution de la redondance cinématique par la méthode de la jacobienne inverse et enfin, dans la troisième partie, une approche d'optimisation non linéaire utilisant un schéma déterministe est exposée. Finalement, sur la base des résultats de simulations sur les cas des robots plans 3R et 8R pour différents scénarios, une comparaison entre les deux méthodes est donnée dans la quatrième partie.

2. Description du manipulateur hyper-redondant plan.

Le robot plan considéré possède en général N articulations rotoides bondées dans l'intervalle $[\theta_{j_{\min}} \theta_{j_{\max}}]$, $j = 1 \dots N$. L'indice de mobilité étant au maximum égal à 3, le degré de redondance est donc $N-3$. $N+1$ repères sont associés à chaque articulation (Figure 1) y compris ceux liés à la base R_0 et à l'effecteur terminal (E.T.) R_{N+1} . La description de Denavit – Hartenberg permet de déterminer les paramètres θ , α , d et r (Tableau 1).

3. Résolution de la redondance par la méthode de la jacobienne pseudo – inverse.

Dans cette section on présente la méthode basée sur la pseudo-inverse de la jacobienne pour la résolution du modèle géométrique inverse des MHR plans

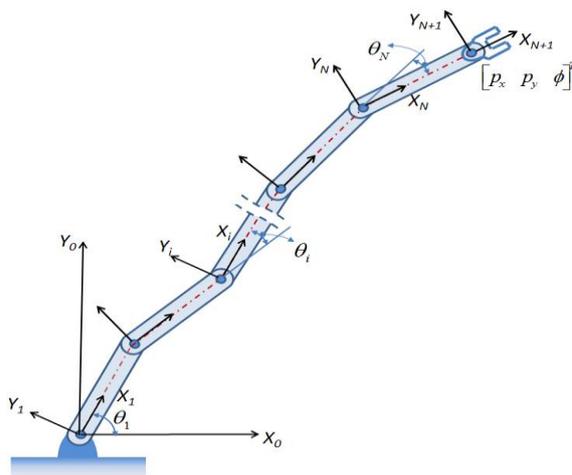


Tableau 1 : Paramètres géométriques de Denavit Hartenberg.

Transformations	θ_j	α_j	d_j	r_j
$0 \rightarrow 1$	θ_1	0	0	0
$1 \rightarrow 2$	θ_2	0	0	L_1
$2 \rightarrow 3$	θ_3	0	0	L_2
...
$N-1 \rightarrow N$	θ_N	0	0	L_{N-1}
$N \rightarrow N+1$	0	0	0	L_N

Figure 1 : Modèle 2D du manipulateur hyper-redondant.

4. Modèle différentiel et expression analytique de la jacobienne.

Le modèle différentiel direct qui donne les variations élémentaires $\partial \mathbf{X}$ en fonction des coordonnées articulaires $\partial \boldsymbol{\theta}$ s'exprime par :

$$\partial \mathbf{X} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \partial \boldsymbol{\theta} \quad (1)$$

Où $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ désigne la matrice jacobienne de dimension $(M \times N)$ du mécanisme, égale à $\partial \mathbf{X} / \partial \boldsymbol{\theta}$ et fonction de la configuration articulaire $\boldsymbol{\theta}$. L'inverse de \mathbf{J} permet d'écrire :

$$\partial \boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}^{-1} \partial \mathbf{X} \quad (2)$$

L'expression analytique de \mathbf{J} est donnée par la matrice des dérivées partielles du premier ordre des variables articulaires en fonction des coordonnées opérationnelles de l'E.T. (p_x, p_y, ϕ) .

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_N} \\ \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_N} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \phi}{\partial \theta_N} \end{bmatrix} \quad (3)$$

5. Méthode de résolution

La matrice jacobienne (équation 3) est non carrée et doit être inversée ; mais il lui correspond une infinité d'inverse généralisées. Les solutions du système $\partial \boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}^{-1} \partial \mathbf{X}$ s'écrivent :

$$\partial \boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}^\dagger \partial \mathbf{X} + (\mathbf{I}_N - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \mathbf{Z} \quad (5)$$

Où \mathbf{J}^\dagger désigne la pseudo-inverse de \mathbf{J} et \mathbf{Z} représente un vecteur arbitraire de dimension $(N \times 1)$. Le second terme du membre de droite n'affecte pas la valeur de $\partial \mathbf{X}$ et peut être utilisé pour satisfaire des contraintes d'optimisation supplémentaires. Pour choisir une solution nous pouvons poser $\mathbf{Z} = 0$. Ce choix signifie que le déplacement $\partial \boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}^\dagger \partial \mathbf{X}$ est minimisé à chaque itération. Sous la condition que $\text{rang}(\mathbf{J}) = M$ [8], la pseudo-inverse est calculée par :

$$J^\dagger = J^T (JJ^T)^{-1} \quad (6)$$

La matrice JJ^T est carrée, de dimension 3 et elle doit être régulière. A chaque itération k :

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \delta\theta_k \quad (7)$$

Les coordonnées articulaires calculées doivent correspondre à des valeurs qui respectent les contraintes mécaniques de chaque articulation.

5.3.1. Génération de mouvement.

Les trajectoires adoptées sont modélisées sous formes de tâches continues et linéaires afin d'obliger le robot à suivre un mouvement continu. Pour définir la trajectoire en fonction du temps $t \in [0 T]$ entre une position initiale P^i et une position finale P^f , une loi possible [9] consiste à utiliser une interpolation polynomiale de degré 3.

$$P(t) = P^i + r(t)(P^f - P^i) \quad \text{avec} \quad r(t) = 3\left(\frac{t}{T}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{T}\right)^3 \quad (8)$$

La fonction $r(t)$, avec $r(0) = \dot{r}(0) = r(T) = \dot{r}(T)$, assure un déplacement avec une vitesse nulle au départ et à l'arrivée. L'organigramme de la figure 2 représente le schéma de calcul numérique du modèle géométrique inverse.

6. Méthode type optimisation.

Introduction

L'idée fondamentale est de générer des configurations cinématiques optimales permettant à un MHR de rejoindre une configuration opérationnelle donnée. Ce pendant, il existe une infinité de solutions permettant au robot d'atteindre son objectif. Le choix de la meilleur solution est basé sur un schéma d'optimisation déterministe utilisant un processus itératif qui évalue le coût d'une posture candidate par une minimisation d'un indice de performance donné tout en respectant les contraintes imposées au système.

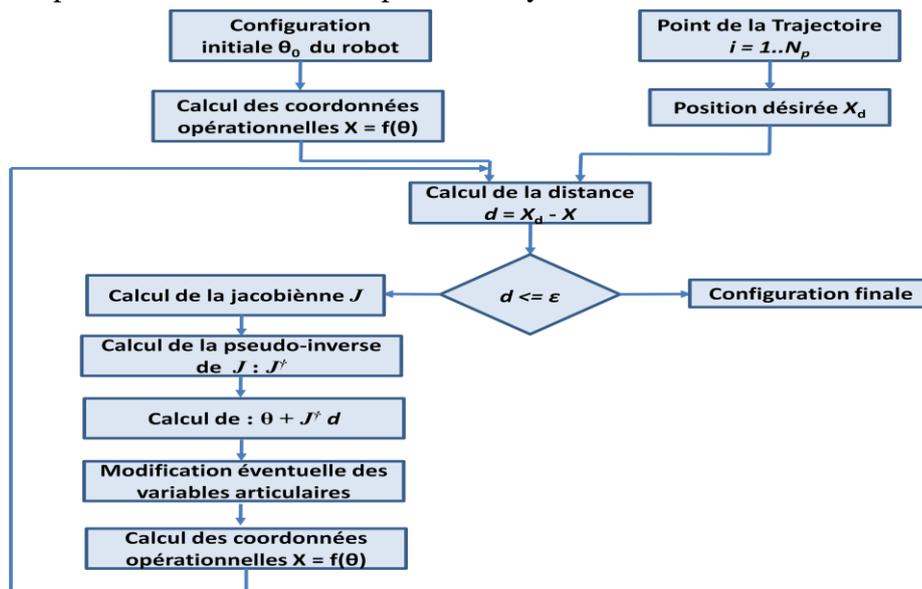


Figure 2 :
Algorithme
de calcul du

géométrique inverse.

itératif
modèle

5.4. Modélisation mathématique du problème

La forme générale d'un problème d'optimisation est la suivante :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N} f(\mathbf{X}) \\ \text{sous les contraintes} \\ g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, q \\ h_i(\mathbf{X}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (9)$$

$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction objectif et g_j, h_i sont respectivement les ensembles de contraintes égalités et inégalités. i et j des indices identifiant les contraintes. En générale, l'espace des solutions admissibles \mathbf{X} est défini par les deux types de contraintes. \mathbf{X} représente le vecteur des paramètres d'optimisation. Les contraintes sont linéarisées en utilisant une approximation quadratique du lagrangien. La plupart des méthodes d'optimisation tentent de trouver un minimum en améliorant itérativement une estimation initiale $X_0 \in \mathbf{X}$. Un critère d'arrêt à ce processus itératif est nécessaire. Ce critère est donné par les conditions de Karush-Kuhn-Tucker [11] ou conditions KKT qui décrivent les rapports entre le gradient de f et les contraintes \mathbf{g} et \mathbf{h} au point optimal.

5.5. Formulation du problème d'optimisation

La fonction objectif f à minimiser représente le coût d'une posture optimale du robot pour un point de l'espace donné. Elle est généralement une expression contenant des paramètres significatifs liés au comportement du robot et à l'efficacité du système. Puisqu'on s'est limité au modèle différentiel, f représente un critère quadratique simple à minimiser :

$$f(\mathbf{X}) = \partial \mathbf{X}^T \partial \mathbf{X} \quad (10)$$

Avec $\mathbf{X} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T$ le vecteur des paramètres d'optimisation.

D'autres critères peuvent être substitués à l'équation (10). Les butées articulaires, typiquement présentes dans les robots manipulateurs, peuvent être évitées par la minimisation de la fonction de coût suivante [2] :

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\theta_j - \theta_{j,moy}}{\theta_{j,max} - \theta_{j,min}} \right)^2 \quad (11)$$

Où $[\theta_{j,min}, \theta_{j,max}]$ les limites articulaires de l'articulation j et $\theta_{j,moy}$ la valeur moyenne. Une autre application intéressante réside dans le critère de manipulabilité qui permet entre autre l'éloignement des singularités. Le critère à minimiser et le suivant :

$$f(\mathbf{X}) = \sqrt{\det(J(\mathbf{X})J^T(\mathbf{X}))} \quad (12)$$

5.5.1. Conditions aux limites

Le MHR et à N degrés de liberté, son indice de mobilité égale à $(N-M)$. Les différentes positions que peut prendre l'E.T. par rapport au repéré de référence R_0 doivent respectés les conditions aux limites suivantes :

$$r_i(\mathbf{X}) \in \Omega \quad i = 1, \dots, N_p \quad (13)$$

r_i : Vecteur position au point i de la trajectoire (en fonction des paramètres d'optimisation).

Ω : Espace de travail admissible du robot ; N_p : Le nombre de point pris sur la trajectoire.

5.5.2. Contraintes et limitations physiques

Vu la nature hyper-redondante du comportement du MHR, les 2 types de contraintes sont utilisées. Les contraintes de type égalités sont imposées sur l'E.T. et l'on écrit :

$$r_{i, traj} - r_{i, cal}(\mathbf{X}) = 0 \quad i = 1, \dots, N_p \quad (14)$$

Les limitations physique, butées articulaires, forment les contraintes inégalité :

$$\theta_{j \min} \leq \theta_j \leq \theta_{j \max} \quad j = 1, \dots, N \quad (15)$$

5.5.3. Evitement d'obstacles

Lorsque des obstacles existent dans l'espace de travail, la stratégie consiste à générer une posture optimale permettant au robot d'éviter les obstacles et atteindre la cible. Nous définissons une fonction objective auxiliaire dont la diminution se traduira par l'éloignement des obstacles. Elle est écrite sous la forme générale suivante :

$$\mathfrak{Z}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N_{obs}} c_i p(\ell(\mathbf{X})) \quad (16)$$

N_{obs} : Nombre d'obstacle ; c_i : multiplicateur ayant une relation avec la nature des obstacles ; p : la fonction de pénalité ; ℓ : la fonction liée aux différents obstacles.

La fonction objective responsable de l'évitement d'obstacle (équation 16) doit être calculée lors de la génération des formes optimales. Pour calculer $\ell(\mathbf{X})$ on considère le critère de la distance tangente minimale qui consiste à couvrir à la fois la structure du robot et les obstacles environnants en utilisant un ensemble de formes géométriques simples (par exemple, des cercles Figure 4) [13]. L'espace se compose de N_{obs} obstacles identifiés par le vecteur de position de leurs centres de gravité par rapport au repère de référence de base. La Génération des configurations cinématiques optimales doit satisfaire, en plus des contraintes physiques imposées au système, les $N \times N_{obs}$ contraintes associées à l'évitement d'obstacles. Une manière simple consiste à prendre les relations suivantes entre la fonction p et la contrainte $\ell(\mathbf{X})$:

$$\ell(\mathbf{X}) = d(\mathbf{X}); \quad p(\ell(\mathbf{X})) = \frac{1}{\ell(\mathbf{X})} \quad (17)$$

La procédure de calcul se fait conformément à l'algorithme 1. Finalement, le problème de calcul du modèle géométrique inverse du MHR devient un problème d'optimisation non linéaire contraint :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}) \\ (18) \quad & \text{Sous les contraintes } \begin{cases} g(\mathbf{X}) \leq 0 \\ h(\mathbf{X}) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Algorithme 1 : EvitObs(θ, r_{Ai}, r_{obs})
Input : $Nobs, Robs$; {Nombre obstacles et dimensions}
 $r_{Ai} = [x_{Ai} \ y_{Ai}]^T$;
 {coordonnées des centres de chaque
 {articulation déduites de la génération du MGI}
 ds_{min} ; {distance de sécurité}
Output : $dsCol$; {distance critique}
 % initialisation ;
 $dsCol \leftarrow []$;
for $j = 1 \rightarrow Nobs$ **do**
 for $I = 1 \rightarrow N$ **do**
 $d(j,i) \leftarrow \|A_i G_j\|$;
 $ds(j,i) \leftarrow d(j,i) - Robs - R_{Ai}$;
 % test collision
 If $ds \leq ds_{min}$ **then**
 $dsCol \leftarrow dsCol + ds(j,i)$
 end if
 end for
end for
return $dsCol$;

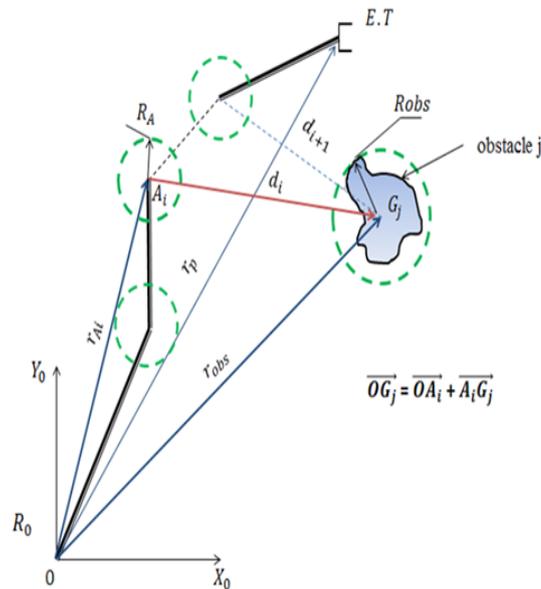


Figure 3 : Procédure d'évitement d'obstacle.

$\mathbf{X} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T$ est le vecteur des paramètres d'optimisation qui correspond dans notre cas aux variables articulaires optimales. F est la fonction objective globale de l'optimisation, $g(\mathbf{X})$ et $h(\mathbf{X})$ respectivement les vecteurs contrainte inégalité et égalité. Pour la résolution nous avons adoptés la méthode SQP (de Sequential Quadratic Programming) [12] dont l'algorithme correspondant est intégré dans Matlab. La génération de trajectoire est similaire à celle présentée dans la section 3.

7. Résultats et discussions.

Deux cas d'étude ont été considérés. Les données de la simulation pour le robot plan 3R sont telles que : $P^i = [0.3 \ 0.2]^T$, $P^f = [0.5 \ 0.5]^T$, $T = 15sec.$, $\Delta T = 0.04$, avec les caractéristiques géométriques $L_i = [0.4, 0.4, 0.18]^T$ $i = 1..3$ (unité de longueur) et une configuration initiale $X_0 = [2.3201, -2.4699, -0.03534]^T$ (radians).

Pour la même trajectoire, le cas 8R avec : $[2.3201; -2.4699; -0.03534; -0.01334; -0.01011; -0.01010; -0.01001; -0.00957]^T$ et $L_i = [0.4, 0.2, 0.18, 0.16, 0.14, 0.12, 0.09, 0.07]^T$ $i = 1..8$.

On note que les contraintes de limites articulaires et d'évitement d'obstacles ne sont considérées que dans la solution type optimisation. On considère dans ce cas la condition : $-\pi/2 \leq \theta_j \leq \pi/2$. Les figures 4(a) et (b) représentent une génération de trajectoire avec les variations des variables articulaires pour une résolution par la méthode de la jacobienne. Les résultats déduits de la méthode d'optimisation sont représentés dans la figure 5. L'unicité de la solution dans la première méthode fait que la résolution du MGI est très liée à l'estimation initiale tandis que dans la deuxième, les configurations obtenues correspondent aux solutions optimales indépendamment de X_0 . En présence d'obstacle dans l'espace de travail, le manipulateur exécute la trajectoire en suivant un comportement lisse, tout en respectant toutes les contraintes imposées au système. (Figure 5(c) et (d)).

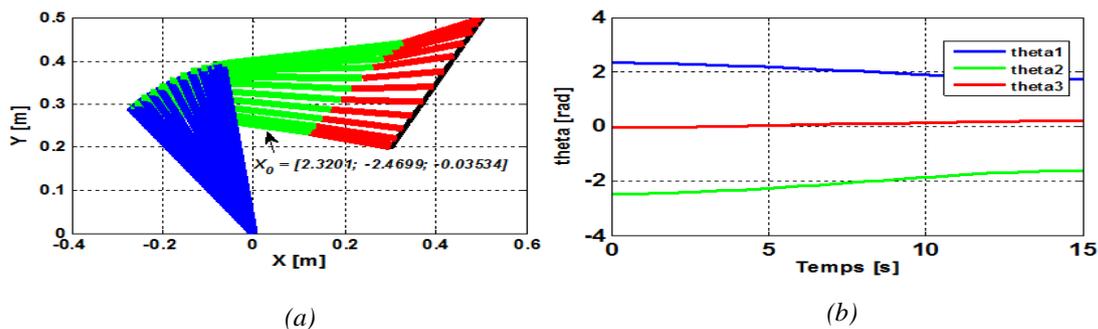


Figure 4 : Robot plan 3R. (a) génération de trajectoire, (b) variables articulaire θ_j

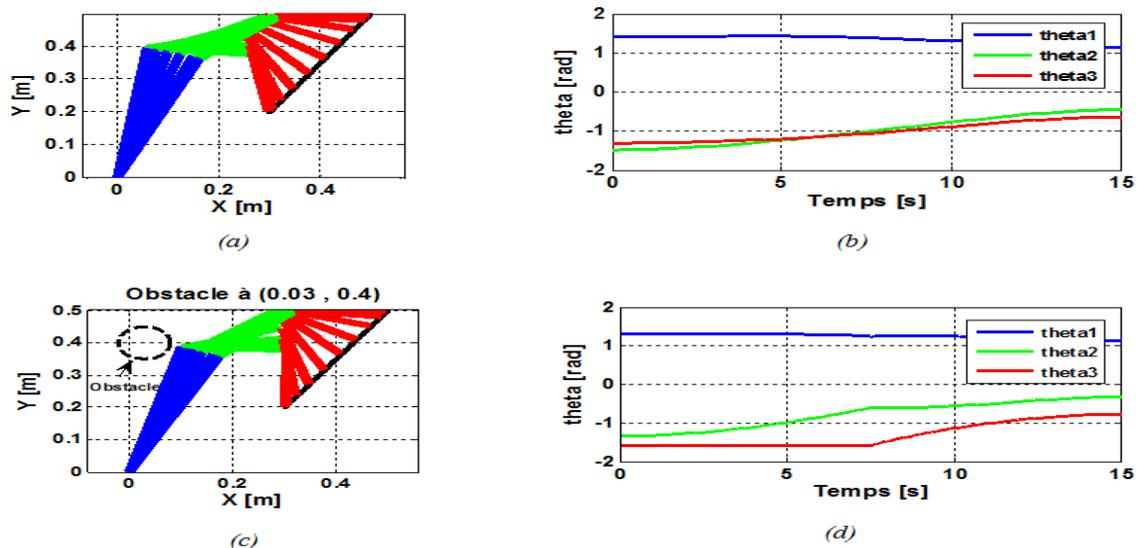


Figure 5: Solution optimale de la génération de trajectoire. (a) et (b) sans obstacle, (c) et (d) en présence d'obstacle.

La fonction objective atteint un minimum de 1.923 le long de la trajectoire pour un temps moyen de calcul de 0.0383 s par point (Figures 6(a) et (c)). L'existence d'obstacle dans l'espace de travail provoque un pic au niveau de la fonction objective ce qui se traduit par un évitement d'obstacle (Figures 6(b) et (d)). Dans la figure 6, le cas plus compliqué d'un MHR 8R exécutant une trajectoire linéaire oblique en absence d'obstacle et en présence de deux obstacles. Le manipulateur s'adapte avec de nouvelles postures optimales et physiquement acceptables le long de la trajectoire (Figures 7(a) et (b)). Le temps d'exécution en présence d'obstacles est nettement plus important (Figures 8(c) et (d)).

Finalement, contrairement à l'algorithme basé sur la matrice jacobienne et sa pseudo-inverse qui pose des problèmes de calcul numérique surtout au voisinage des configurations singulières pour lesquelles $ran(J) < M$, la résolution de la redondance cinématique des MHR par la méthode type optimisation offre plusieurs avantages compte tenu que différents paramètres peuvent être contrôlés à la fois et ce par un choix judicieux de la fonction objective et des équations de contraintes imposées au système.

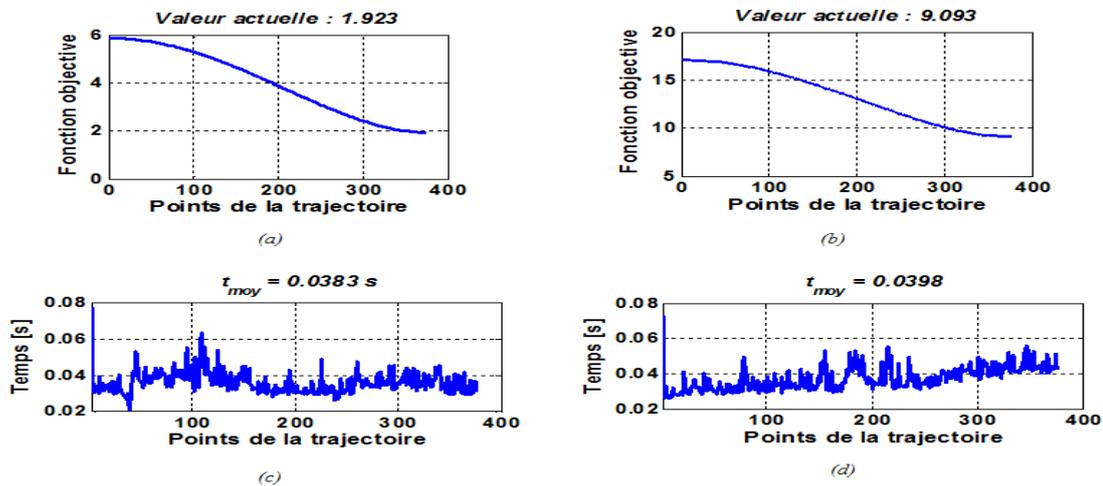


Figure 6: Variation de la fonction objective et du temps d'exécution le long de la trajectoire. (a) et (c) sans obstacle, (b) et (d) en présence d'obstacle.

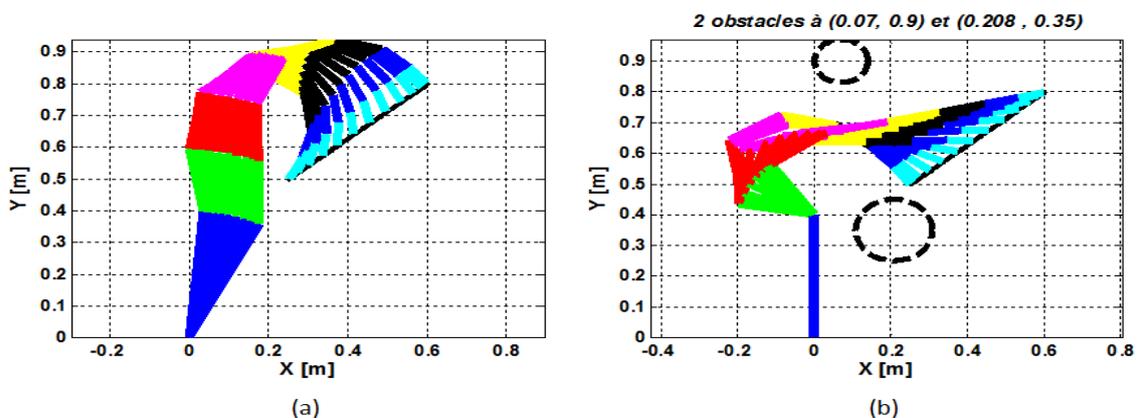


Figure 7: Manipulateur hyper-redondant 8R. (a) génération de trajectoire sans obstacles, (b) en présence de 2 obstacles.

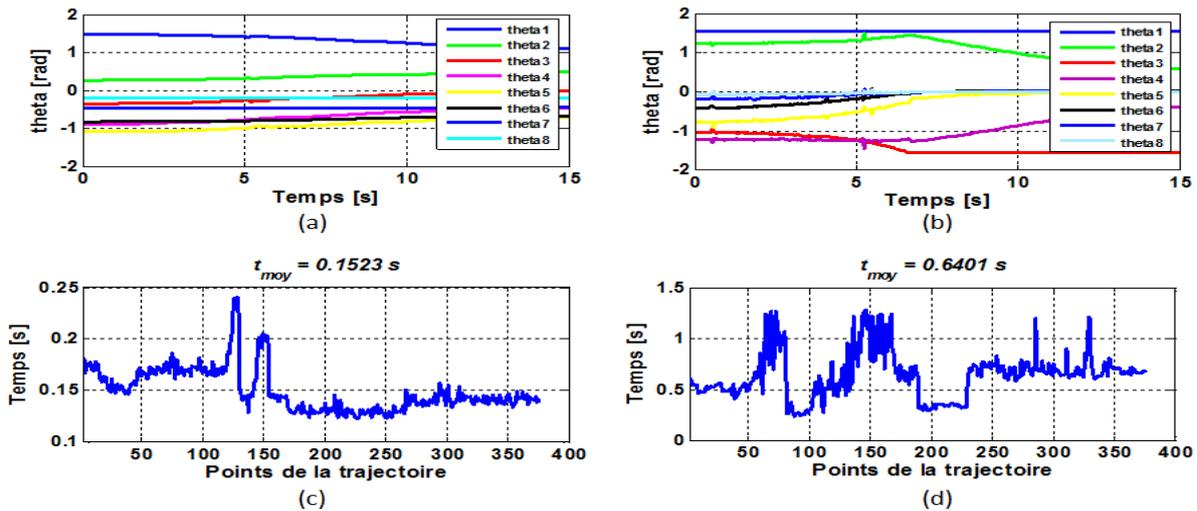


Figure 8: Figure 6: Variation des variables articulaires et du temps d'exécution le long de la trajectoire. (a) et (c) sans obstacle, (b) et (d) en présence d'obstacles.

8. Conclusion

Dans cet article, une méthode d'optimisation permettant de générer des configurations cinématiques optimales pour les manipulateurs hyper-redondants plans de type série est proposée. Un schéma d'optimisation déterministe est utilisé pour évaluer le coût d'une posture candidate. Ceci est réalisé par la technique SQP implantée dans l'algorithme de génération de trajectoire pour assurer la minimisation de la fonction objective tout en respectant les contraintes imposées. Un algorithme d'évitement d'obstacle basé sur la technique de la distance tangente minimale à été développé. Comparée aux méthodes classiques basées sur la matrice jacobienne et sa pseudo-inverse, la méthode proposée semble être plus performante. En effet, sur la base des résultats de simulation, par un choix judicieux de la fonction objective, un bon compromis est réalisé entre les données du problème, le modèle mathématique, les contraintes imposées au système et les résultats souhaités.

Références

1. G.S. Chirikjan, J. Burdick, A Hyper-Redundant Manipulator, IEEE Robotic and automation Magazine (1994), USA.
2. Siciliano, Khatib , Kinematically Redundant Manipulators, Handbook of Robotics: Chapter 11 (2008), Springer.
3. S. Yahya et Haider A.F Mohamed, A New Geometrical Inverse Kinematics Method For Planar Hyper Redundant Manipulators, conference on Innovative Technologies in Intelligent Systems (2009), Malaisie.
4. E. Mario Saenz, G .José, Inverse kinematics of a 10 DOF modular hyper-redundant robot resorting to exhaustive and error-optimization methods: A comparative Study, Robotics Symposium (2012), Brazil.
5. L. Marques, J. Dinis, A.P. Coimbra et al. 3D hyper-redundant robot. 11th Spanish Portuguese Conference on Electrical Engineering (2009), Spain.
6. A. C. Nearchou, N. A. Aspragathos, Obstacle Avoidance control of Redundant Robots Using Genetic Algorithms. IEEE, 3^{ième} Symposium en Control and Automation, (1997) 60-67.
7. S. Kumar, N. Sukavanam et R. Balasubramanian. An optimization approach to solve the inverse kinematics of redundant manipulator. Int. J. of information and systems sciences, 6(4): (2010) 414-423.
8. Wissama Khalil et Etienne Dombre, Modélisation identification et commande des robots, Paris (1999), Ed. Hermes.
9. A. Gasparetto et al., Trajectory Planning in Robotics, Mathematics in Computer Science, 6(3) (2012): 269-279.
10. H. Ding et al. Optimal Motion Planning for Robotic Manipulators with Dynamic Obstacles using Mixed-integer Linear Programming. IEEE, 17^{ième} Conférence méditerranéenne en Control and Automation, (2009) 934-939.
11. M.J. Powell, Algorithm for nonlinear constraints that use Lagrangian functions. Math Program; 14: (1978) 224–248.
12. A. Barclay, P.E. Gill et J.B. Rosen, SQP methods and their application to numerical optimal control. Report NA97-3. San Diego, CA: Department of Mathematics, University of California, San Diego, (1997).
13. A. Chibani, C. Mahfoudi et al. Generating optimal reference kinematic configurations for hyperredundant parallel robots, *J. Systems and Control Engineering*, IMechE (2015), Sage Publication.