

Détermination de la périodicité optimale de remplacement préventif des pièces mécaniques

Ryma BERREHAL^{1*}, Smail BENISSAAD²

¹ Laboratoire de mécanique

² Laboratoire d'Énergétique Appliquée et de Pollution

Département de Génie Mécanique, Faculté des Sciences de la Technologie. Université des Frères Mentouri – Constantine. Campus Chaab Ersas, 25000 Constantine, Algérie

* berrehalryma@yahoo.fr

Résumé – Ce travail est défini par la détermination de la périodicité optimale de remplacement préventif T qui minimise le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Le modèle mathématique de cette stratégie a déjà été développé, sous certaines hypothèses (l'équipement ne peut être qu'en deux état, en opération ou en panne, les pannes sont détectées instantanément, les temps des actions préventives et correctives sont négligeables, suite à une intervention l'équipement est remis à neuf, le coût de remplacement préventif est inférieur au coût correctif). Le modèle développé est difficile à résoudre analytiquement. Il est résolu à l'aide de méthodes numériques.

Mots Clés : périodicité optimale, remplacement préventif

Nomenclature

C	Rapport des coûts = CP/CC	$R(t)$	Fiabilité (probabilité de bon fonctionnement)
C_c	Coût de remplacement correctif (remplacement d'une pièce défaillante), [D.A]	T	variable aléatoire, [h]
C_p	Coût de remplacement préventif (remplacement d'une pièce en bon état), [D.A]	t	Temps, [h]
C_t	Coût total par pièce, [D.A]	t_0	Période de remplacement optimale, [h]
$C_{tm}(t)$	Coût total moyen prévu par pièce et par unité de temps, [D.A.h-1]	$y(\mu)$	Fonction du rapport des coûts
C_{min}	Coût minimal, [D.A.h-1]	<i>Symboles grecs</i>	
$F(t)$	Probabilité de défaillance (défiabilité)	β	Paramètre de forme
$f(t)$	Densité de probabilité de défaillance	γ	Paramètre de position (d'origine des temps), [h]
$M(t_0)$	Nombre moyen de défaillances durant la période du temps	η	Paramètre d'échelle, [h]
$P(t)$	Probabilité	μ	Variable aléatoire = $\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta$
MP	Maintenance préventive	μ_0, μ_1	Racines de $y(\mu)$
MC	Maintenance corrective	ε	Fraction temporelle, [h]

1. Introduction

Dans les entreprises manufacturières, l'augmentation continue des coûts d'entretien, d'équipement et de main-d'œuvre pose des problèmes que le contexte de la compétitivité mondiale impose de résoudre. Un de ces problèmes est la détermination de la périodicité optimale pour le remplacement de pièces mécaniques. À cet effet, différents modèles ont été proposés dans le

domaine de la planification de maintenance préventive pour trouver des politiques optimales de remplacement un de ces modèle est le remplacement par bloc.

Pour le remplacement par bloc, la maintenance préventive est exécutée périodiquement à des périodes spécifiées $k.t_0$ ou $k.N$, ($N = 0, 1, 2, \dots$), ($k = 1, 2, 3, \dots$). Si le système tombe en panne durant l'intervalle du temps $[(k-1).t_0, k.t_0]$ ou $[(k-1).N, k.N]$, alors la maintenance corrective est exécutée au moment de la défaillance.

Flehinger [1] a réalisé les premières investigations reliées à la stratégie de maintenance de type bloc. La stratégie optimale est obtenue à partir du paramètre T^* , c'est à dire, la valeur du temps de remplacement préventif qui minimise le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini.

Hanscom et Cléroux [2] ont utilisé des méthodes graphiques pour déterminer T^* dans le cas où $f(t)$ serait une distribution normale tronquée, Gamma ou Weibull. Cox [3] a établi les conditions suffisantes d'existence d'une solution unique T^* finie pour toute distribution non concentrée en zéro et de variance finie avec $T > 0$.

Récemment, Yeh et al. [4] ont analysé l'effet d'une stratégie de garantie de type FRW (Free Repair Warranty) sur la politique de remplacement périodique. Ils ont cherché à déterminer la période optimale de remplacement périodique qui minimise le coût total moyen par unité de temps pour un produit réparable vendu avec une garantie. Leur étude a montré que le consommateur aurait intérêt à faire coïncider le premier instant de remplacement préventif du produit avec l'instant de la fin de la période de garantie.

Nosoohi et Hejazi [5] ont proposé un nouveau modèle multi-objectif pour le remplacement préventif d'une pièce sur un horizon de planification. Le modèle proposé considère différents objectifs et des questions pratiques, tels que le remplacement correctif et ses conséquences, la durée de vie résiduelle et le type de l'indice de la productivité. En outre, le modèle détermine le nombre de pièces de rechange, nécessaires pour le remplacement de la partie défectueuse, qui doivent être fournies au début de la période de planification. Le modèle multi-objectif est applicable aux machines ou aux équipements qui sont réparés en remplaçant leur pièce défaillante par une nouvelle pièce de rechange.

Maaroufi et al. [6] ont réalisé une étude portant sur la détermination de la stratégie optimale de remplacement périodique pour des produits vendus avec et sans garantie. Le type de garantie considéré, dans cette étude, consiste à la prise en charge par le vendeur de toutes les réparations durant la période de garantie (Free Repair Warranty). Chaque réparation survenant suite à une défaillance aléatoire du produit consiste à remettre celui-ci en marche dans un état intermédiaire entre l'état 'as good as new' et l'état 'as bad as old' ce qui correspond à une réparation imparfaite. Le processus de quasi-renouvellement est utilisé pour modéliser la maintenance imparfaite. Dans ce contexte et pour les deux cas avec et sans garantie, les auteurs ont établi les conditions d'existence et d'unicité d'une stratégie optimale de remplacement minimisant le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Ils ont présenté un exemple numérique pour illustrer leur démarche et ont discuté et comparé les résultats obtenus avec d'autres déjà parus dans la littérature considérant des réparations minimales suite aux pannes et non pas des réparations imparfaites.

Habituellement, le temps moyen entre défaillances est caractérisé par la distribution de durée de vie dans laquelle les paramètres sont estimés à partir des données historiques. Mais, dans la plupart des cas, les études réalisées se concentrent sur la détermination du calendrier de remplacement optimal en supposant que les paramètres du modèle sont constants. Halim et Tang [7] ont étudié les questions soulevées par l'utilisation de paramètres estimés. Ils ont proposé, une approche graphique, dans laquelle les temps inter-défaillance suivent une distribution de Weibull à deux paramètres, pour obtenir les limites de confiance pour le moment optimal de remplacement, compte tenu des

paramètres clés des deux modèles de remplacement, à savoir le modèle de remplacement d'âge et le modèle de remplacement par bloc (Barlow et Hunter [8]).

2. Équations

Dans cette étude, nous avons choisi d'étudier le modèle de remplacement par bloc de type I: c'est à dire que la pièce défaillante est remplacée instantanément au moment de la défaillance quelque soit son âge. Le coût moyen total prévu par unité de temps dans ce cas est donnée par l'expression suivante :

$$C_{tm}(t) = \frac{C_P + C_C M(t_0)}{t_0} ; t_0 \geq 0 \quad (1)$$

où $M(t_0)$ est le nombre moyen de défaillances durant la période du temps $(0, t]$.

$$M(t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \quad (2)$$

Afin de simplifier l'expression de $M(t_0)$, nous avons considéré dans cette étude, que nous avons à faire à une seule défaillance entre deux remplacements préventifs consécutifs. Alors on aura dans ce cas :

$$M(t_0) = F(t) \quad (3)$$

Le coût total est :

$$C_t(t) = C_P + C_C [1 - R(t_0)] \quad (4)$$

On a un calcul optimiste car nous n'avons considéré qu'une seule défaillance durant la période du temps $(0, t]$. C'est le cas le plus courant en pratique.

Le coût total moyen par pièce et par unité de temps sera :

$$C_{tm}(t) = \frac{C_P + C_C [1 - R(t_0)]}{t_0} \quad (5)$$

Dans le cas de la loi de Weibull avec $\gamma = 0$ (qui est le cas le général, le matériel est mis en service à $t=0$), alors :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (6)$$

et l'équation (5) devient :

$$\beta \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} + e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} = 1 + \frac{C_P}{C_C} \quad (7)$$

On pose :

$$\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta = \mu \quad (8)$$

On obtient alors :

$$e^{-\mu}(\beta\mu + 1) - 1 = \frac{C_P}{C_C} \quad (9)$$

On pose :

$$y(\mu) = e^{-\mu}(\beta\mu + 1) - 1 = \frac{C_P}{C_C} \quad (10)$$

L'étude analytique de l'équation (10) nous a montré que pour $\beta > 1$, l'équation (15) a deux solutions μ_0 et μ_1 . D'où :

$$t_0 = \eta \mu_0^{\frac{1}{\beta}} \quad (11.a)$$

$$t_1 = \eta \mu_1^{\frac{1}{\beta}} \quad (11.b)$$

à condition que :

$$0 < \frac{C_p}{C_c} < \beta e^{-\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)} - 1 \quad (12)$$

$$C_{min}(t) = C_c \frac{\left(t f(t) + R(t) - 1 - \frac{C_p}{C_c}\right)}{t^2} \quad (13)$$

Dans ce travail nous avons, choisi d'employer une méthode directe pour obtenir les racines de l'équation (13) permettant de définir t_0 correspondant au coût minimal tout en respectant la condition (12).

Nous présentons, alors, les résultats obtenus par la résolution numérique de l'équation différentielle (5) qui exprimé le coût total moyen par unité de temps et par pièce et qui a donné lieu à l'équation (10) dans le cas de la loi de Weibull avec $\gamma=0$. Ces résultats concernent l'effet du rapport des coûts C , du paramètre de forme β , du paramètre d'échelle η et des valeurs de C_p et C_c sur la valeur de la périodicité de remplacement optimal t_0 . Donc dans chaque situation, nous varions un paramètre, tandis que les autres paramètres seront maintenus fixes.

Les résultats obtenus sont validés par confrontation avec l'étude analytique suscitée.

3. Tableaux

Tableau 1 : Variation de C_t et de t_0 en fonction du β cas où $C_p/C_c=0.25$

β	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
C_{min}	4,099	3,663	3,526	3,067	2,864	2,702	2,570	2,460	2,3682	2,289
t_0	1110	1065	1080	1105	1135	1166	1195	1225	1255	1280

Tableau 2: Variation de C_t et de t_0 en fonction du β cas où $C_p/C_c=0.5$

β	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
$C(t)_{min}$	5,626	5,353	5,091	4,865	4,671	4,506	4,363	4,240	4,133
T_0	1535	1395	1360	1355	1365	1375	1390	1405	1420

Tableau 3: Variation de C_t et de t_0 en fonction du β cas où $C_p/C_c=0.75$

β	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
$C(t)_{min}$	6,78803	6,59367	6,40752	6,23824	6,0866	5,95132	5,83048
T_0	1600	1535	1515	1505	1510	1515	1520

Tableau 4: Variation de C_t et de t_0 en fonction du β cas où $C_p/C_c=1,5$

β	6	6,5	7
$C(t)_{\min}$	10,622	10,529	10,426
T_0	1820	1770	1740

Tableau 5: Variation de C_t et de t_0 en fonction du η cas où $C_p/C_c=0,5$

η	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
$C(t)_{\min}$	6,228	4,671	3,737	3,114	2,669	2,335	2,076	1,868
T_0	1025	1365	1705	2045	2390	2725	3070	3410

4. Présentation des figures

La figure 1 représente la variation du Coût Total Moyen par unité de temps et par pièce C_{tm} en fonction du temps dans le cas où $C=0.25$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β . Dans ce cas, nous constatons la présence d'un coût minimal de C_{tm} correspondant à la période la plus appropriée pour effectuer l'opération de MP. Ce coût est sensiblement dépendant de la valeur du rapport de forme β . Il varie de 2.28 pour $\beta=7$ à 4.09 pour $\beta=2.5$ et la période de remplacement optimal correspondant varie de 1110h pour $\beta=2.5$ à 1280h pour $\beta=7$ (tableau1). Il en ressort, dans ce cas, que les opérations de MP sont très bénéfiques au fur et à mesure que les valeurs de β seront élevées, ce qui correspond en réalité à un taux de défaillance fortement croissant (période d'usure et de vieillesse). Cette période t_0 , correspondant au coût minimal, peut être légèrement différée, en cas de nécessité. Mais, en cas d'un retard excessif, le coût de l'opération augmente rapidement. Par exemple, dans le cas de $\beta=7$, ce coût qui est de 2.2 quand $T_0=1280h$, peut atteindre 5.13 quand $T=2315h$.

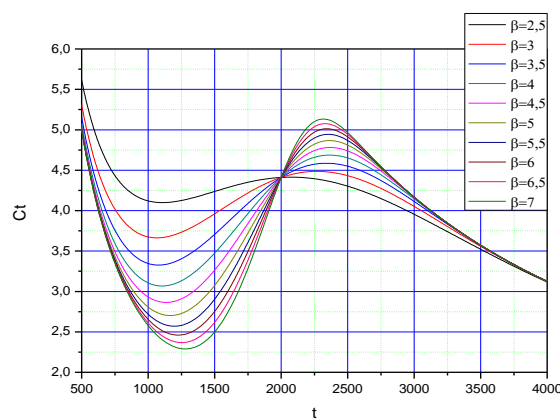


Figure 1 : Variation de C_t en fonction du temps dans le cas où $C_p/C_c=0.25$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

La figure 2 représente la variation du Coût Total Moyen par unité de temps et par pièce C_{tm} en fonction du temps dans le cas où $C_p/C_c=0.5$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β . Nous constatons ici qu'on n'a pas une solution optimale pour $\beta < 3$. Pour $\beta=3$, on constate que la période de MP commence au delà de $T=1535h$ où C_{tm} est minimal ($=5.62$) et il constituera de l'être à partir de ce moment. Tandis que, pour les autres valeurs de β , la valeur du coût minimal C_{\min} correspondant à la période de MP varie de 4.13 pour $\beta=7$ à 5.35 pour $\beta=3.5$, et la période de remplacement optimal correspondant varie de 1395h pour $\beta=3.5$ à 1420h pour $\beta=7$ (tableau2). De manière analogue, on constate pour les valeurs élevées de β , que la variation de C_{tm} en fonction de

la période remplacement choisie peut être importante. Par exemple, dans le cas de $\beta = 7$, ce coût qui est de 4.13 quand $T_0 = 1420h$, peut atteindre

6.21 quand $T = 2280h$.

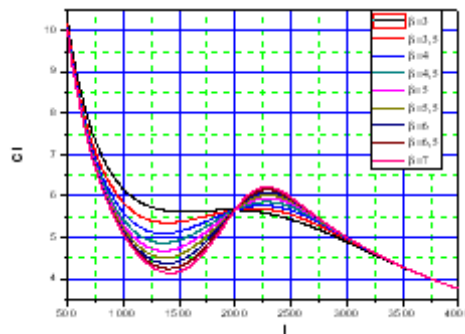


Figure 2 : Variation de C_t en fonction du temps dans le cas où $C_p/C_c = 0.5$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

A partir de la figure 3, nous pouvons retenir les mêmes constatations que le cas précédent (figure 2). Nous constatons ici qu'on n'a pas une solution optimale pour $\beta < 4$. Nous remarquons, que pour $\beta = 4$, la période de MP commence à partir de $T = 1600h$ où C_{tm} est minimal ($= 6.78$) et il constituera de l'être à partir de ce moment jusqu'à $T = 1800h$, où il commencera à croître avant de décroître à $T = 2300h$. Tandis que, pour les autres valeurs de β , la valeur du coût minimal C_{min} correspondant à la période de MP varie de 5.83 pour $\beta = 7$ à 6.59 pour $\beta = 4.5$ et la période de remplacement optimale correspondante varie de 1600h pour $\beta = 4$ à 1520h pour $\beta = 7$ (tableau 3). C_t varie de 5.83 dans le cas de $\beta = 7$ correspondant à $T_0 = 1520$, à 7.78 quand $T = 2250h$.

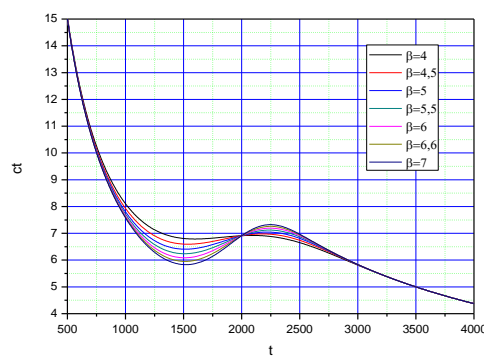


Figure 3 : Variation de C_t en fonction du temps dans le cas où $C_p/C_c = 0.75$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

Nous remarquons d'après ce graphe que C_{tm} ne possède plus un minimum permettant de déterminer t_0 , quelque soit la valeur du paramètre de forme β . Mais, C_{tm} atteint sa valeur minimale et continuera à décroître à partir d'une valeur déterminée de T . Dans le cas de $C = 1.5$, la valeur de T est de 1820h (voir tableau 4). Ceci nous permet de confirmer, du point de vue économique, que la MP ne doit pas être programmée lorsque son coût devient supérieur à celui de la MC.

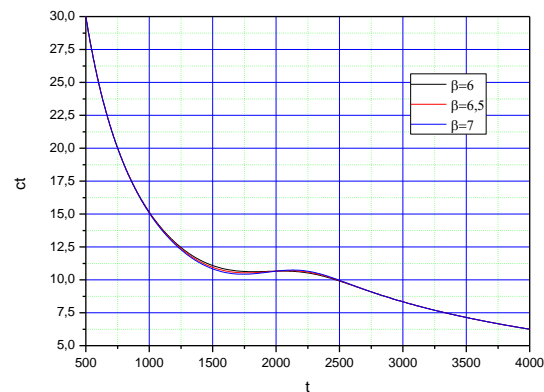


Figure 4: Variation de C_t en fonction du temps dans le cas où $C_p/C_c=1.5$ pour différentes valeurs du paramètre de forme β .

La figure 5 représente la variation de coût total moyen C_t en fonction du temps pour le cas de $C_p/C_c=0,5$ et pour différentes valeurs du paramètre d'échelle η . Nous constatant que C_t diminue avec l'augmentation des valeurs de η , alors que la période optimal de coût de remplacement t_0 augmente. Ainsi pour $\eta=1500$; $C_t=6.2$ et $t_0= 1000$, tandis que pour $\eta=5000$; $C_t=1.9$ et $t_0=3500$ (tableau 5)

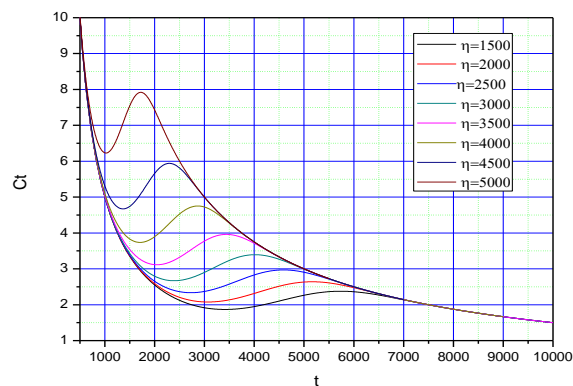


Figure 5 : Variation de C_t en fonction du temps dans le cas où $C_p/C_c=0,5$ pour différentes valeurs du paramètre d'échelle η .

5. Conclusion

Ce travail consiste à calculer le coût total moyen par pièce et par unité de temps, à chercher son minimum et prendre la période correspondant à ce minimum comme période optimale pour effectuer la maintenance préventive

La propriété principale du remplacement par bloc est qu'il est facile à gérer en générale, puisque le temps de remplacement préventif est programmé à l'avance et on n'a pas besoin de surveiller l'âge du système.

A notre avis le modèle de type âge semble être préférable, d'un point de vue économique, à celui du type bloc qui consiste à remplacer les composants défectueux aux instants $k.T$ ($k=1,2,3\dots$). En

effet, le modèle de type âge est basée sur l'utilisation effective de l'équipement. Il permet donc d'éviter le remplacement d'un équipement neuf après une courte période de la date de son installation.

Références

1. B.J. Flehinger, A General Model for the Reliability Analysis of Systems under Various Preventive Maintenance Policies, *Annals of Math. Stat.*, 33, 1 (1962)137-156.
2. M. Hanscom, R. Cleroux, The Block Replacement Problem, *Journal of Statistical Computation and simulation*, 3 (1975) 233-248.
3. D.R. Cox, *Renewal theory*, Methuen and C. London England (1962).
4. R.H.Yeh, M.Y. Chen, C.Y.. Lin, Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty, *Eur. J. Oper. Res.*, 176 (2007) 1678–1686
5. I. Nosoohi, S.R. Hejazi, A multi-objective approach to simultaneous determination of spare part numbers and preventive replacement times, *Appl. Math. Model.*, 35 (2011) 1157–1166.
6. G. Maaroufi, A. Chelbi, S. Samet, Stratégie optimale de remplacement périodique pour des produits vendus avec ou sans garantie avec réparation imparfaite a la panne, 8ème Conférence Internationale de Modélisation et Simulation, MOSIM'10, 10 au 12 mai, Hammamet, Tunisie (2010).
7. T. Halim, L.C. Tang, Confidence interval for optimal preventive maintenance interval and its applications in maintenance planning, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 40 (2009) 203–213.
8. R.E. Barlow, L.C. Hunter, Optimum preventive maintenance policies, *Oper. Res.*, 8 (1960) 90–100.