

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI, CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**

**N° d'ordre :
N° de Série :**

**THESE :
PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME
DE
DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES
THEME**

**EVALUATION DE SYSTEMES DE FIABILITE
A CONFIGURATION COMPLEXE**

SPECIALITE

PROBABILITES-STATISTIQUE

PAR

SOHEIR BELALOU

Soutenu le :

Devant le jury :

Président	B. Mezerdi	Prof.	Université de Biskra
Rapporteur	B. Ksir	Prof.	Université Mentouri, Constantine
Examineurs	A. Aissani	Prof.	USTHB
	F. L. Rahmani	MC.	Université Mentouri, Constantine
	F. Belarbi	MC.	Université de Sidi-Bel-Abbes

Table des matières

Préface	5
1 Modèle binaire	11
1.1 Introduction	11
1.2 Aspect déterministe	11
1.3 Aspect stochastique	18
2 Modèles multinaires	24
2.1 Introduction :	24
2.2 Modèle de Barlow et Wu :	25
2.3 Modèle de El-Neweihi, Proschan et Sethuraman (EPS) :	26
2.4 Modèle de Natvig de type 1 (MCS1) :	27
2.5 Modèle de Natvig de type 2 (MCS2) :	28
2.6 Modèle de Griffith fortement cohérent (MMSS) :	29
2.7 Modèle de Griffith cohérent (MMSC) :	29
2.8 Modèle de Griffith faiblement cohérent (MMSW) :	30
2.9 Modèe MCS1 généralisé de Natvig :	31
2.10 Modèle de Block et Savits :	31
2.11 Aspect stochastique	32
3 Calcul de la fiabilité des systèmes k consécutifs-parmi-n : G à plusieurs états	34
3.1 Introduction	34
3.1.1 Notations	35

3.1.2	Hypothèses :	36
3.2	Système k consécutifs- sur- $n : G$ à multi-états	37
3.2.1	Quelques exemples de systèmes k consécutifs-sur- $n : G$ à multi-états	40
3.3	Evaluation de la fiabilité du système	42
3.3.1	Interprétation de $R_{s,j} = P \{ \Phi (X) = j \}$.	44
3.3.2	Exemple 1	45
3.3.3	Exemple 2	53
3.3.4	Comparaison avec d'autres résultats	59
3.3.5	Cas particulier ($M = 1$)	64
4	Encadrement de la fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-$n : G$ à multi-états	66
4.1	Introduction	66
4.1.1	Notations :	67
4.2	Le modèle	67
4.2.1	Définitions des liens minimaux et coupes minimales :	69
4.2.2	Cas (a) : k constant	71
4.2.3	Théorème :	71
4.2.4	Cas de composants indépendants et identiquement distribués	77
4.2.5	Cas (b) : $k = k(j) = k_j$	80
4.2.6	Corollaire :	80
4.2.7	Cas de composants indépendants et identiquement distribués	81
4.3	Système k consécutifs-sur- $L_n : G$ série à multi-états	81
4.3.1	Cas particulier $n = 1$, $M = 1$:	85
5	Quelques modèles de systèmes à configuration complexe	87
5.1	Introduction	87
5.1.1	Notations :	87
5.1.2	Hypothèses :	88
5.2	Modèle 1	88
5.3	Modèle 2	89

5.4	Modèle 3	90
5.5	Modèle 4	91
5.6	Modèle 5	92
5.6.1	Exemple :	93
5.6.2	Cas particulier : cas i.i.d	98
6	Utilité de performance des systèmes à multi-états	102
6.1	Introduction	102
6.1.1	Importance d'un composant	102
6.2	Généralisation des mesures d'importance [76] :	105
6.2.1	*Importance de Birnbaum :	106
6.2.2	*Importance de la valeur d'accomplissement de la fiabilité (Reliability Achievement Worth CIM) :	107
6.2.3	*L'importance de Fussell-Vesely :	108
6.2.4	Importance de la valeur de réduction de la fiabilité (Reliability Reduction Worth CIM) :	109
6.3	Notion d'utilité	109
6.3.1	Espérance de l'utilité :	109
6.3.2	Notations :	111
6.3.3	Hypothèses :	111
6.3.4	L'importance au sens de Griffith [68] :	112
6.3.5	L'importance en utilité d'un composant d'un système en série à multi-états [68].	114
6.3.6	L'importance en utilité d'un composant d'un système en parallèle à multi-états [68].	117
6.3.7	L'importance en utilité d'un composant d'un système k consécutifs-sur- $n : G$ à multi-états	121
6.3.8	Exemple	128
7	Les indices de la fiabilité dynamique	140
7.1	Introduction :	140

7.2	Le modèle mathématique :	141
7.2.1	Hypothèses :	142
7.3	Les indices de la fiabilité dynamique (DRI) :	144
7.3.1	Indices de la fiabilité dynamique déterministe (DDRI) :	144
7.3.2	Les indices de la fiabilité dynamique du composant (CDRI)	145
7.3.3	Les indices de la fiabilité dynamique intégrée DIRI	146
7.3.4	Un algorithme pour le calcul des DRI :	147
7.3.5	Cas particulier :	147
7.4	Exemples	148
7.4.1	Exemple "2 consécutifs-sur-3" :	148
7.4.2	Exemple "2-sur-3" :	155
7.4.3	Exemple "Système en série" :	161
7.4.4	Exemple "Système en parallèle" :	164
	Conclusion	166
	Bibliographie	166

Préface

Un système est constitué de plusieurs composants assurant diverses fonctions. Une des plus importantes mesures de sa performance est sa fiabilité. La fiabilité d'un système est définie comme étant la probabilité que le système fonctionne durant une période de temps sous des conditions spécifiées.

Un objectif de la théorie de la fiabilité est de trouver le moyen d'évaluer la fiabilité d'un système complexe à partir de la connaissance des fiabilités des composants le constituant. D'où l'évaluation de la fiabilité d'un système est une caractéristique importante. Evaluer La fiabilité c'est la calculer (ou l'approximer) par des techniques probabilistes ou algorithmiques ou bien, trouver un encadrement de celle-ci lorsque la configuration du système est trop compliquée. La théorie des systèmes cohérents binaires (Birnbaum 1968) a servi comme base pour la construction d'une théorie mathématique et statistique de la fiabilité pour le cas dichotomique. Cette théorie ne conçoit pour les composants ou pour le système lui-même que deux états possibles : en fonction ou en panne . Cependant, dans beaucoup de situations réelles, les systèmes et leurs composants peuvent être dans des états intermédiaires. Ni complètement défaillant, ni fonctionnant parfaitement, mais étant plutôt capables d'occuper un certain nombre de niveaux de performance allant du fonctionnement parfait à la panne totale. Les modèles binaires, constituent, dans ce genre de cas, une sursimplification de la situation, et les modèles représentant des systèmes et des composants à plusieurs états sont plus aptes à décrire la relation liant la performance du système en termes de performance de ses composants. Diverses généralisations aux systèmes à plusieurs états ont d'abord été suggérées mais n'ont pas été vraiment significatives sauf dans des applications très spéciales. La construction d'une théorie des systèmes cohérents à états multiples a commencé à voir le jour essentiellement avec les travaux de Barlow et Wu [5] qui ont généralisé la théorie des systèmes cohérents en définissant l'état du système comme étant l'état du plus mauvais composant dans le meilleur lien minimal, ou l'état du meilleur composant dans la plus mauvaise coupe minimale, beaucoup de résultats ont été obtenus en utilisant les concepts de la fonction de structure et la fonction de fiabilité binaire, El-Newehi-Proschan et Sethuraman [4] ont établi des axiomes et ont obtenu les propriétés déterministes et probabilistes pour la performance du système, Ross [6] a considéré que les composants prennent des valeurs

réelles arbitraires et s'est investi dans l'aspect stochastique et dynamique du système, Block et Savits [15] ont généralisé le modèle de Natvig [13], Griffith [7] a présenté 3 types de cohérence basées sur l'intensité de l'axiome de pertinence et a étudié spécifiquement 2 parmi les 3, alors que le 3^{ème} a été discuté par El-Newehi et al [4], Aven [27] a donné une vision générale des mesures utiles pour les systèmes monotones à multi-états, quelques formules facilement calculées sont établies et comparées avec les résultats obtenus par la simulation de Monté-Carlo, Misra [23] a présenté les systèmes à 3 états, en utilisant l'approche Markovienne, il a obtenu une formule pour étudier l'état de disponibilité, la fréquence de panne, le temps moyen de panne, Pham et al [37] ont présenté un modèle performant l'analyse de la fiabilité des systèmes k -sur- n en supposant que les composants ont 3 états : bon, dégradé, panne catastrophique et ont établi des expressions pour calculer la fiabilité et le temps moyen de panne de ces systèmes, Kolowrocki [50] a présenté les systèmes en série, en parallèle, série-parallèle et parallèle-série à multi-états avec des structures de fiabilité régulières, en considérant que les composants ont des fonctions de fiabilité exponentielles, Levitin et Lisnianski [44, 46, 52, 61, 62, 66, 68] ont utilisé la méthode de la fonction génératrice universelle (appelée aussi la méthode d'Ushakov [17]) qui est utilisée pour une estimation rapide de la fiabilité des systèmes à multi-états et donne la disponibilité des systèmes série-parallèle et les systèmes ayant une structure de bridge qui s'appliquent bien à des systèmes physiques, Li et al. [77] ont établi un algorithme de simulation pour calculer la probabilité de distribution d'état du système et ils ont utilisé la théorie de la chaîne de Markov pour prédire la fiabilité des composants et du système.

Un espace d'états plus large noté $S = \{0, 1, \dots, M\}$ est considéré et le système à états multiples est déterminé par la fonction de structure notée ; $\Phi : S^n \longrightarrow S$ et donc le système et / ou ses composants peuvent assumer (prendre) $M + 1$ états. Comme exemples : une centrale électrique ayant les états 0, 1, 2, 3, 4 correspondant à 0%, 25%, 50%, 75%, 100% de l'électricité générée de sa capacité totale, est un exemple où les états sont discrets et ordonnés. En outre, un état peut être continu comme dans l'exemple de système de freinage, où il peut produire une force de freinage allant de 250 à 300 kg. Et évidemment, les systèmes dichotomiques sont un cas particulier des systèmes à plusieurs états ($M = 1$). La fonction de structure évalue la performance du système en termes de performance de ses composants.

Dans les systèmes binaires, on s'intéresse à la fiabilité du système sachant la fiabilité de ses

composants. Dans le contexte des systèmes à plusieurs états, on suppose que les probabilités pour chaque composant d'être dans différents états sont connues.

Dans la réalité, les systèmes rencontrés peuvent avoir des configurations différentes à savoir des systèmes en série, en parallèle, une composition entre des composants en série et en parallèle, c-à-d, des systèmes série-parallèle, parallèle-série, des systèmes k -parmi- n , k consécutifs- parmi- n , m consécutifs k -parmi- n , r parmi- k -consécutifs-sur- n .

Les systèmes k -consécutifs-sur- n ont attiré l'attention de plusieurs ingénieurs et chercheurs, car ils ont une large application, du fait qu'ils sont plus fiables que les systèmes en série et moins chers que les systèmes en parallèle. Comme exemples de ces systèmes :

- Système de télécommunication avec n stations en relais, chaque station est capable de transmettre aux k prochaines stations.
- Les systèmes pipelines avec n stations de pompage, chaque station est disposée à pomper le pétrole ou le gaz pour les k stations suivantes.
- Les systèmes de la distribution d'eau.
- circuits intégrés.
- ...etc.

En général, les composants de ces systèmes se dégradent graduellement, en réduisant leur capacités et ainsi la capacité totale du système.

Les systèmes k -consécutifs-parmi- n sont des systèmes de n composants disposés linéairement, ils fonctionnent (tombent en panne) si et seulement si il y a au moins k composants consécutifs qui fonctionnent (tombent en panne). Il y a deux topologies pour ces systèmes ; linéaire et circulaire.

Les systèmes binaires k -consécutifs-parmi- n ont été introduits par Kontoléon (1980) [8]. La fiabilité de tels systèmes a été étudiée en premier par Chiang et Niu[9], plus tard par Derman, Lieberman, Ross [6], Hwang, Shanthikumar [12], Antopoulou et Papastavridis, Wu et Chen [11]. La relation duale entre les systèmes k -consécutifs-sur- n : F et G a été donnée par Kuo et al [21] et Zuo [24] (G indique le fonctionnement, F indique la panne). Et puisque, il s'est avéré que les systèmes à états multiples sont plus flexibles et qui reflètent beaucoup de situations réelles, alors une généralisation des systèmes k -consécutifs- parmi- n était suggérée par [20] comme une généralisation des systèmes linéaires k -consécutifs-parmi- n et les systèmes

linéaires consécutivement-connectés [12, 19], des algorithmes pour évaluer la fiabilité de ces systèmes ont été développés [12, 19, 20]. Plus tard, un nombre considérable de chercheurs à savoir (Zuo et Liang [28], Kossow et Preuss [34], Malinowski et Preuss [35]) ont fait l'extension de la définition des systèmes k -consécutifs-parmi- n binaires aux systèmes à états multiples en supposant le système binaire tandis que ses composants sont à états multiples. Koutras [42] a fait l'extension des systèmes binaires k -consécutifs-parmi- $n : F$ au mode de panne double i.e que le système et chaque composant peuvent avoir un seul état de fonctionnement et deux états différents de panne. Haim et Porat [22] ont démontré un modèle de fiabilité de Bayes pour les systèmes k -consécutifs-parmi- n , dans lequel le système et ses composants peuvent avoir plus de deux états possibles et en supposant k constant. Récemment, Huang et al [48, 49, 63] ont proposé des définitions plus générales des systèmes k -parmi- $n : G$ (2000) [48, 49] et les systèmes k -consécutifs-parmi- $n : F, G$ (2003) [63] à plusieurs états. Dans leurs définitions, k peut avoir des valeurs différentes pour différents états du système. Ils ont établi une formule non récursive pour calculer la distribution d'état $[P(\Phi(X) = j)]$ du système k -parmi- $n : G$ ainsi que des algorithmes récursifs pour évaluer la distribution d'état du système k -consécutifs-parmi- $n : G$ décroissant ($k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_M$) et du système k -consécutifs-parmi- $n : F$ croissant ($k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_M$). Zuo et al.(2003) [64] ont proposé une formule récursive pour évaluer la distribution d'état du système k -consécutifs-parmi- $n : G$ quand $M = 3$, et quand $M \geq 4$, ils ont établi un algorithme pour encadrer la distribution d'état du système. Et en (2006) [84] Yamamoto et al. proposent encore une formule récursive pour calculer la fiabilité des systèmes k -consécutifs-parmi- $n : G$ mais sans contraintes sur k_j (croissant, décroissant, constant) ni sur M ($\forall M \geq 1$) . Alors que notre contribution dans ce domaine est de proposer une formule non récursive qui permet le calcul direct et exact de la distribution d'état de ces systèmes et ceci sans contraintes ni sur k_j ni sur M . [86].

En résumé, des études théoriques et appliquées ont été consacrées aux différents domaines des systèmes à états multiples, à savoir; fiabilité, simulation, méthodes d'approximation et optimisation. Dans lesquelles, diverses méthodes pour l'évaluation de la fiabilité, entre elles, l'utilisation de la fonction génératrice universelle des moments (UMGF)[44, 46, 52, 58, 69,] , les algorithmes génétiques utilisés pour l'optimisation[44, 46, 52, 67], la simulation de Monté-Carlo[70, 72]..etc.

L'objet de ce travail est une étude systématique des systèmes k -consécutifs-sur- $n : G$ à multi-états.

Le problème consiste à mettre au point des méthodes de calcul de la fiabilité de tels systèmes ou bien un encadrement de la valeur de cette fiabilité sous des hypothèses suffisamment générales pour l'ensemble des applications. Ces hypothèses portent essentiellement sur la nature des composants du système par exemple dépendance ou indépendance des composants, des lois identiques ou non des composants.

Cette thèse est composée d'une introduction qui donne un historique sur la généralisation des systèmes binaires aux systèmes à multi-états, et des chapitres suivants :

- **Chapitre 1** : Dans ce chapitre on expose, d'une façon brève, les modèles binaires.
- **Chapitre 2** : Dans ce chapitre, On introduit les systèmes à multi-états et on donne quelques modèles tels qu'ils ont été définis par les chercheurs qui ont procédé à la généralisation des systèmes binaires aux systèmes multinaires.
- **Chapitre 3** : Ici nous traitons d'une façon précise les systèmes k -consécutifs-sur- $n : G$ à multi-états. On commence par définir ces systèmes, ensuite et en parallèle avec des travaux récents [63, 64, 84] qui ont fourni des techniques de calcul dites "récursives" c'est à dire la fiabilité du système est obtenue par récurrence sur n , ordre du système, nous optons pour des méthodes "directes" de calcul de la fiabilité en utilisant une approche combinatoire. Puis on procède à la comparaison de nos résultats avec ceux établis. Ce travail a été sanctionné par une publication internationale [86].
- **Chapitre 4** : Il est important de signaler que le calcul direct de la fiabilité des systèmes est une tâche fastidieuse, d'où on fait recours à d'autres méthodes d'approximation, parmi elles, celle de l'encadrement. Dans ce chapitre, on propose un encadrement de la valeur de la fiabilité des systèmes k -consécutifs-sur- $n : G$ à multi-états, puis on fait une extension aux systèmes k -consécutifs-sur- $L_n : G$ série à multi-états où on déduit un encadrement de la fiabilité de ces systèmes.
- **Chapitre 5** : Dans ce chapitre, on présente quelques modèles de systèmes à multi-états qui sont souvent utilisés dans la pratique. On les définit puis on donne les expressions permettant le calcul de leur fiabilité.
- **Chapitre 6** : Ce chapitre est consacré à l'importance des composants. On commence

par généraliser quelques mesures d'importance du cas binaire au cas multinaire, puis on passe à la notion de l'utilité où en se basant sur une nouvelle définition introduite par Wu et Chan (2003) [68] qui mesure la contribution des différents états des composants à la performance du système. On calcule la fonction d'utilité de performance des systèmes k -consécutifs-sur- n : G à multi-états. Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'un article soumis et révisé à la revue Sciences & Technologie [85].

- **Chapitre 7** : Le dernier chapitre porte sur l'étude des indices de la fiabilité dynamique, où il est question de calculer la probabilité de panne et la probabilité de réparation du système si l'un de ses composants tombe en panne ou restauré. La méthode utilisée est basée sur une approche fondée sur le calcul différentiel logique et en particulier les dérivées partielles logiques de la fonction de structure Φ [33, 54 – 57, 60, 75].

La thèse s'achève par une conclusion où on profite de citer des problèmes intéressants non résolus et qui peuvent être des sujets de recherches antérieures.

Chapitre 1

Modèle binaire

1.1 Introduction

La théorie des systèmes cohérents binaires sera toujours sollicitée dans notre travail car les généralisations introduites par les différents modèles et la construction de la théorie multinaire font souvent appel à ce qui a été établi dans la théorie binaire.

Ainsi le cas binaire reste toujours un cas particulier du cas multinaire.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à un exposé bref des définitions et notations de base de la théorie binaire.

1.2 Aspect déterministe

Définitions et notations

Le système est considéré à un moment fixe du temps (le présent) et dont l'état est supposé ne dépendre que des états actuels des composants. Nous distinguons seulement deux états : état de fonctionnement et état de panne. Cette dichotomie s'applique aussi bien au système qu'aux composants.

Pour indiquer l'état du $i^{\text{ème}}$ composant nous lui assignons une variable indicatrice binaire X_i :

$$X_i = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si le composant } i \text{ fonctionne} \\ 0 \text{ si le composant } i \text{ est en panne} \end{array} \right\}$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$

n est le nombre des composants, il est appelé l'ordre du système. De même, la variable binaire Φ indique l'état du système :

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si le système fonctionne} \\ 0 \text{ si le système est en panne} \end{array} \right\}$$

Nous supposons que l'état du système est complètement déterminé par les états des composants, et ainsi on peut écrire :

$$\Phi = \Phi(X) \quad \text{où } X = (X_1, \dots, X_n)$$

La fonction $\Phi(X)$ est appelée la fonction de structure du système.

Exemples :

-Structure en série :

Une structure en série fonctionne si et seulement si chaque composant fonctionne. La fonction de structure est donnée par :

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^n X_i = \min(X_1, \dots, X_n)$$

(notation : $\prod_{i=1}^n X_i = (X_1.X_2.\dots.X_n)$)

-Structure en parallèle :

Une structure en parallèle fonctionne si et seulement si au moins l'un des composants fonctionne. La fonction de structure est donnée par :

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^n X_i = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$(\text{notation} \quad : \quad \prod_{i=1}^n X_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i))$$

-Structure k -parmi- n :

Une structure k -parmi- n fonctionne si et seulement si au moins k des n composants fonctionnent. La fonction de structure est donnée par :

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n X_i \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n X_i < k \end{cases}$$

-Structure k -consécutifs-parmi- n :

Une structure k -consécutifs-parmi- n fonctionne si et seulement si au moins k composants consécutifs des n composants fonctionnent. La fonction de structure est donnée par :

$$\Phi(X) = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \min_{i \leq l \leq i+k-1} X_l = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=i}^{i+k-1} X_l$$

-Structure parallèle- série :

Une structure parallèle-série fonctionne si tous les blocs fonctionnent et chaque bloc fonctionne si au moins un composant fonctionne.

-Structure série-parallèle :

Une structure série-parallèle fonctionne si au moins un bloc fonctionne et chaque bloc fonctionne si tous ses composants fonctionnent.

Définition :

Soit Φ une fonction de structure d'ordre n , le $i^{\text{ème}}$ composant est dit inutile à la structure Φ si Φ est constante en X_i , c'est-à-dire :

$$\Phi(1_i, X) = \Phi(0_i, X) \quad \text{pour tout vecteur } (\cdot_i, X)$$

où :

$$(1_i, X) = (X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$(0_i, X) = (X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$(\cdot_i, X) = (X_1, \dots, X_{i-1}, \cdot, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

Lemme (décomposition pivotale) :

Pour toute fonction de structure Φ d'ordre n on a :

$$\Phi(X) = X_i \Phi(1_i, X) + (1 - X_i) \Phi(0_i, X)$$

pour tout X et pour tout i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Définition (La fonction duale) :

Si Φ est une fonction de structure d'ordre n , on définit sa duale :

$$\Phi^D(X) = 1 - \Phi(1 - X)$$

$$\text{où } 1 - X = (1 - X_1, \dots, 1 - X_n)$$

Remarque :

Le dual d'un système en série est un système en parallèle, le dual d'un système en parallèle est un système en série et d'une manière générale, le dual d'un système k -parmi- n est un système $(n - k + 1)$ -parmi- n et le dual d'un système k -consécutifs-parmi- n est un système $(n - k + 1)$ consécutifs-parmi- n .

Structures cohérentes :

Définition :

Un système est dit cohérent si :

- 1) La fonction de structure est non-décroissante en chaque argument.
- 2) Chacun de ses composants est utile.

Théorème :

Soit Φ une structure cohérente d'ordre n , alors :

$$\Phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(1) = 1$$

Théorème :

Soit Φ une structure cohérente d'ordre n , alors :

$$\prod_{i=1}^n X_i \leq \Phi(X) \leq \prod_{i=1}^n X_i$$

Notation :

Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ des vecteurs à n composantes. On note :

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (X_1 \cdot Y_1, \dots, X_n \cdot Y_n) \\ X \amalg Y &= (X_1 \amalg Y_1, \dots, X_n \amalg Y_n) \quad , \quad X_i \amalg Y_i = \max(X_i, Y_i) \\ X \sqcap Y &= (X_1 \sqcap Y_1, \dots, X_n \sqcap Y_n) \quad , \quad X_i \sqcap Y_i = \min(X_i, Y_i) \\ X \leq Y &\text{ signifie } X_i \leq Y_i \text{ pour tout } i, i = 1, \dots, n \\ X < Y &\text{ signifie } X_i \leq Y_i \text{ pour tout } i, i = 1, \dots, n \text{ avec } X_i < Y_i \text{ pour au moins un } i \end{aligned}$$

Théorème :

Soit Φ une fonction de structure cohérente, alors :

$$a) \quad \Phi(X \amalg Y) \geq \Phi(X) \amalg \Phi(Y)$$

$$b) \quad \Phi(X \sqcap Y) \geq \Phi(X) \sqcap \Phi(Y)$$

On a l'égalité dans a) si et seulement si la structure est en parallèle.

On a l'égalité dans b) si et seulement si la structure est en série.

Liens minimaux-coupes minimales :

Définitions :

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ le vecteur indiquant les états des composants $C = (1, 2, \dots, n)$.

On définit

$$C_0(X) = \{i : X_i = 0\} \quad \text{et} \quad C_1(X) = \{i : X_i = 1\}$$

supposons la structure Φ cohérente.

- un vecteur-lien est un vecteur X tel que

$$\Phi(X) = 1$$

L'ensemble $C_1(X)$ correspondant s'appelle lien.

- un vecteur-lien minimal est un vecteur-lien X tel que

$$\text{si } Y < X \quad \text{alors} \quad \Phi(Y) = 0$$

. L'ensemble $C_1(X)$ correspondant s'appelle lien minimal. C'est l'ensemble minimal de composants dont le fonctionnement entraîne le fonctionnement du système.

-un vecteur-coupe est un vecteur X tel que

$$\Phi(X) = 0$$

L'ensemble $C_0(X)$ correspondant s'appelle coupe

-un vecteur-coupe minimal est un vecteur-coupe X tel que

$$\text{si } Y > X \quad \text{alors} \quad \Phi(Y) = 1.$$

L'ensemble $C_0(X)$ correspondant s'appelle coupe minimale. C'est l'ensemble minimal de composants dont la panne entraîne la panne du système.

Propriétés :

a) Au $j^{\text{ème}}$ lien minimal L_j on peut associer la fonction de structure $P_j(X)$,

$$P_j(X) = \prod_{i \in L_j} X_i$$

qui prend la valeur 1 si tous les composants du $j^{\text{ème}}$ lien minimal fonctionnent et la valeur 0 sinon.

(($j = 1, \dots, p$) où p est le nombre de liens minimaux).

Donc :

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^p P_i(X) = 1 - \prod_{i=1}^p (1 - P_i(X)) = \prod_{i=1}^p \prod_{i \in L_j} X_i = \max_{1 \leq i \leq p} \min_{i \in L_j} X_i$$

b) De manière similaire, à la $j^{\text{ème}}$ coupe minimale K_j on peut associer la fonction de structure $K_j(X)$,

$$K_j(X) = \prod_{i \in K_j} X_i,$$

qui prend la valeur 0 si tous les composants de la $j^{\text{ème}}$ coupe minimale sont en panne et 1 sinon.

(($j = 1, \dots, K$) où K est le nombre de coupes minimales).

Donc :

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^K K_i(X) = \prod_{i=1}^K \prod_{i \in K_j} X_i = \min_{1 \leq i \leq K} \max_{i \in K_j} X_i$$

c)

$$\bigcup_{j=1}^p L_j = C \quad \text{et} \quad \bigcup_{j=1}^p K_j = C$$

Remarque :

Si les ensembles $\{L_1, \dots, L_p\}$ sont considérés comme des liens minimaux alors ils déterminent d'une manière unique une structure binaire cohérente (C, Φ_0) , où Φ_0 est défini par

$$\Phi_0(X) = \max_{1 \leq i \leq p} \min_{i \in L_j} X_i$$

Réciproquement, partant d'une structure binaire cohérente Φ_0 , on détermine d'une manière unique ses vecteurs liens minimaux $\{L_1, \dots, L_p\}$.

Cette propriété caractéristique peut s'énoncer en définition comme suit :

Définition :

Soient P_1, \dots, P_p des sous-ensembles non vides de $C = \{1, \dots, n\}$ tels que :

$$\bigcup_{j=1}^p P_j = C \text{ et } P_i \not\subset P_j \text{ alors } \Phi(X) = \max_{1 \leq i \leq p} \min_{i \in P_j} X_i$$

La fonction Φ s'appelle fonction de structure d'un système binaire cohérent.

Importance relative d'un composant :

L'importance du $i^{\text{ème}}$ composant est :

$$I_{\Phi}(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{X/X_i=1\}} [\Phi(1_i, X) - \Phi(0_i, X)]$$

1.3 Aspect stochastique

Fiabilité du système dont les composants sont indépendants

Définitions et généralités :

Dans ce paragraphe, on suppose que les composants du système sont statistiquement indépendants.

L'état du $i^{\text{ème}}$ composant est une v.a X_i telle que :

$$X_i = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si le } i^{\text{ème}} \text{ composant fonctionne} \\ 0 \text{ si le } i^{\text{ème}} \text{ composant est en panne} \end{array} \right\}, \quad X = (X_1, \dots, X_n)$$

On a

$$EX_i = P[X_i = 1] = p_i, \quad i = 1, \dots, n$$

p_i est la fiabilité du $i^{\text{ème}}$ composant, c-à-d la probabilité que le $i^{\text{ème}}$ composant fonctionne.

De la même façon, la probabilité que le système fonctionne est donnée par :

$$P[\Phi(X) = 1] = R = E[\Phi(X)]$$

puisque les composants sont supposés indépendants, alors on peut écrire :

$$R = R(p) \quad \text{avec } p = (p_1, \dots, p_n)$$

$R(p)$ est appelée fonction de fiabilité du système.

Propriétés fondamentales de la fiabilité d'un système cohérent

Lemme : (décomposition pivotale)

La fonction de la fiabilité d'un système cohérent vérifie l'identité suivante :

$$R(p) = p_i R(1_i, p) + (1 - p_i) R(0_i, p) \quad , \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

Remarque :

$R(p)$ est multilinéaire.

$$\text{si } p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$$

alors $R(p)$ est un polynôme en p

Théorème :

La fonction de fiabilité $R(p)$ d'une structure cohérente est une fonction strictement croissante par rapport à chaque p_i , pour $0 \ll p \ll 1$.

Notation :

$$a \ll b \iff a_i < b_i \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Théorème :

Si $R(p)$ est la fonction de fiabilité d'une structure cohérente Φ alors :

$$a) \quad R(p \amalg p') \geq R(p) \amalg R(p')$$

$$b) \quad R(p \cdot p') \leq R(p) \cdot R(p')$$

pour tout p et p' ($0 \ll p \ll 1, 0 \ll p' \ll 1$).

On a l'égalité dans a) si et seulement si la structure est en parallèle et on a l'égalité dans b) si et seulement si la structure est en série.

Importance en fiabilité des composants :

Définition :

L'importance en fiabilité $I_R(i)$ du composant i est donnée par :

$$I_R(i) = \frac{\partial R(p)}{\partial p_i} \quad (1)$$

ou ce qui est équivalent à :

$$I_R(i) = R(1_i, p) - R(0_i, p) \quad (2)$$

plus explicitement :

$$I_R(i) = E[\Phi(1_i, X) - \Phi(0_i, X)] \quad (3)$$

Remarque :

Dans le cas où les composants sont statistiquement dépendants, nous ferons usage de (3) pour définir l'importance en fiabilité du composant i .

Variables aléatoires associées :

Définition :

Les v.a T_1, \dots, T_n sont dites associées si $Cov(\Gamma(T), \Delta(T)) \geq 0$, pour toute paire de fonctions binaires (Γ, Δ) croissantes.

Lemme :

Si T_1, \dots, T_n sont des v.a associées et si f et g sont des fonctions croissantes ; alors, lorsque la covariance existe, on a :

$$Cov(f(T), g(T)) \geq 0 \quad T = (T_1, \dots, T_n)$$

Propriétés importantes des v.a associées :

(P₁) Tout sous-ensemble de v.a associées est constitué de v.a associées.

(P₂) Une v.a X est associée.

(P₃) Les v.a images par les fonctions croissantes de v.a associées, sont associées.

(P₄) Si (X_1, \dots, X_n) sont des v.a associées et (Y_1, \dots, Y_n) sont des v.a associées et si $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ sont indépendantes alors $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables associées.

Théorème :

Des variables aléatoires indépendantes sont associées.

Théorème :

Si X_1, \dots, X_n sont des v.a binaires associées, $1 - X_1, \dots, 1 - X_n$ sont aussi des v.a binaires associées.

Théorème :

Si S et T sont associées et $Cov(S, T) = 0$ alors S et T sont indépendantes.

Calcul exact de la fiabilité d'un système :

On peut calculer la fiabilité du système par :

$$R = E \left[\prod_{j=1}^p \prod_{i \in L_j} X_i \right], \quad R = E \left[\prod_{j=1}^K \prod_{i \in K_j} X_i \right] \quad (4)$$

où $(L_j, j = 1, \dots, p)$ sont les liens minimaux et $(K_j, j = 1, \dots, K)$ sont les coupes minimales.

Lorsque les v.a X_1, \dots, X_n sont indépendantes, on peut également calculer cette fiabilité en utilisant la formule :

$$R(p) = \sum_X \Phi(X_1, \dots, X_n) \prod_i p_i^{X_i} (1 - p_i)^{1 - X_i} \quad (5)$$

Encadrement de la fiabilité d'un système :

Méthode d'inclusion-exclusion :

Cette méthode fournit des bornes successives d'encadrement de la fiabilité du système qui convergent vers la valeur exacte.

Soit E_r l'évènement : "tous les composants du lien minimal L_r fonctionnent et soit :

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq p} P[E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}]$$

Le principe d'inclusion-exclusion (Feller p 101) donne :

$$R = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} S_k \quad \text{où } p \text{ est le nombre de liens minimaux}$$

et nous avons :

$$\begin{aligned} R &\leq S_1 \quad , \quad R \geq S_1 - S_2 \\ R &\leq S_1 - S_2 + S_3 \quad , \quad R \geq S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \quad \text{etc} \end{aligned}$$

La série $\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} S_k$ est convergente mais pas nécessairement d'une manière uniforme. Dans la pratique, il suffit de calculer quelques S_k pour obtenir une bonne approximation.

Théorème :

Si X_1, \dots, X_n sont des v.a binaires associées alors :

$$\begin{aligned} a) \quad P \left[\prod_{i=1}^n X_i = 1 \right] &\geq \prod_{i=1}^n P[X_i = 1] \\ b) \quad P \left[\prod_{i=1}^n X_i = 1 \right] &\leq \prod_{i=1}^n P[X_i = 1] \end{aligned}$$

Théorème :

Soit Φ une structure cohérente dont les composants sont associés et de fiabilité p_1, \dots, p_n alors :

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq P[\Phi(X) = 1] \leq \prod_{i=1}^n p_i$$

Théorème :

Soit Φ une structure cohérente dont les composants sont associés, soient $L_1(X), \dots, L_p(X)$ les liens minimaux et $K_1(X), \dots, K_k(X)$ les coupes minimales de la structure Φ alors :

$$\prod_{j=1}^n P[K_j(X) = 1] \leq P[\Phi(X) = 1] \leq \prod_{i=1}^n P[L_j(X) = 1]$$

Corollaire :

Soit Φ une structure cohérente dont les composants sont indépendants alors :

$$\prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} p_i \leq P[\Phi(X) = 1] \leq \prod_{j=1}^p \prod_{i \in L_j} p_i \quad (6)$$

Remarque :

Soit :

$$L(p) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} p_i \quad \text{et} \quad U(p) = \prod_{j=1}^p \prod_{i \in L_j} p_i$$

alors :

a) $L(p)$ et $U(p)$ sont des fonctions croissantes.

b) $L(p) < R(p) < U(p)$ pour tout $p_i < 1$ quelque soit i et au moins deux coupes minimales se chevauchent et au moins deux liens minimaux se chevauchent .

Chapitre 2

Modèles multinaires

2.1 Introduction :

La théorie traditionnelle de la fiabilité ne conçoit pour les composants et pour le système lui-même que deux états possibles : état de fonctionnement ou état de panne. L'essentiel de la théorie mathématique et statistique de la fiabilité est ainsi fondée sur la notion de structures cohérentes binaires. Mais dans la pratique, il est souvent le cas que les systèmes étudiés présentent plusieurs états. Le cas binaire ne pouvant les décrire et en tant qu'un élargissement de ce dernier, le cas multinaire s'impose naturellement.

Des travaux allant dans le sens de la construction d'une théorie des systèmes cohérents à états multiples ont vu le jour. Il y a eu principalement ceux de Barlow et Wu (1978) [5], ceux de El-Newehi, Proschan et Sethuraman (1978) [4], ensuite, ceux de Griffith (1980) [7] , ceux de Natvig (1982) [13], Block et Savits (1982) [15], Boediheimer & Kapur (1994) [30] , Zuo & Liang (1994) [28] exposant des modèles plus généraux mais conservant l'essentiel des résultats mathématiques établis par leurs prédécesseurs. Récemment, à partir de (2000), d'autres chercheurs se sont investis dans cette théorie, à savoir Levitin & Lisnianski[44, 46, 51, 52, 61, 62, 66], Zuo[28, 64], Huang[48, 49, 63], Zio & Podofillini[70, 72],...etc où des algorithmes récursifs, des méthodes d'approximation, estimation et simulation ont été développés.

Dans cette partie, on donne d'une façon brève les premiers modèles introduits dans la théorie des systèmes à multi-états.

2.2 Modèle de Barlow et Wu :

Barlow et Wu (1978) [5] ont généralisé la notion de système cohérent binaire à un système cohérent à états multiples de la manière suivante :

Le système et les composants prennent des valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, M\}$ où 0 est la panne totale et M est le fonctionnement parfait.

Définition :

Soient P_1, \dots, P_p des sous-ensembles non vides (liens minimaux) de $C = \{1, 2, \dots, n\}$ tels que :

$$\bigcup_{i=1}^p P_i = C \quad \text{et} \quad P_i \not\subseteq P_j, \quad \text{pour } i \neq j$$

alors :

$$\Phi(X) = \max_{1 \leq j \leq p} \min_{i \in P_j} X_i \tag{7}$$

Tout système vérifiant cette condition s'appelle système de Barlow et Wu.

Remarque :

Un système binaire cohérent remplit les conditions de la définition du modèle de Barlow et Wu et, en conséquence, le modèle binaire n'en est qu'un cas particulier où le domaine et le rang de la fonction de structure se restreignent à l'ensemble $\{0, 1\}$. La généralisation ne porte donc que sur le domaine et le rang de Φ qui passe de $\{0, 1\}$ à $\{0, 1, \dots, M\}$.

Comme pour le modèle binaire, une structure générée par le modèle de Barlow et Wu est caractérisée d'une manière unique par les liens minimaux $\{P_1, \dots, P_p\}$ et du fait que

$$\bigcup_{i=1}^p P_i = C$$

alors :

Proposition:

Dans le modèle de Barlow et Wu, quand l'ensemble des composants contient n éléments. Le nombre de systèmes différents que l'on peut engendrer est égal au nombre de décompositions possibles de l'ensemble C en sous-ensembles (pouvant se chevaucher mais non se contenir).

Deux systèmes sont différents s'ils sont obtenus par deux décompositions différentes de C .

C'est le seul critère de différenciation.

Remarque :

Dans la mesure où la fonction de structure ne dépend que de l'état des composants, les bornes d'encadrement, au sens déterministe, de la performance d'un système ne dépendent également que de l'état des composants.

Par ailleurs, pour un même nombre de composants, il existe un ordre (du moins partiel) de la performance en fonction de la manière dont est faite la décomposition en sous-ensembles, en d'autres termes : la performance d'un système est encadrée par celles des systèmes engendrés par des décompositions différentes de l'ensemble C . Tout encadrement ne peut être vu que de cette manière.

Conclusion :

L'encadrement de la performance d'un système se fait donc suivant le niveau hiérarchique d'agrégation où une décomposition qui contient l'autre lui est moins performante.

La plus petite performance est au plus haut niveau de la hiérarchie (système en série).

La plus grande performance est au plus bas niveau de la hiérarchie (système en parallèle).

2.3 Modèle de El-Neweihi, Proschan et Sethuraman (EPS) :

Définition :

Un système à n composants est dit système cohérent à états multiples (EPS) si sa fonction de structure Φ satisfait les conditions suivantes :

- i) Φ est non-décroissante en chaque argument.
- ii) pour tout niveau j de tout composant i il existe un vecteur (\cdot_i, X) tel que :

$$\begin{aligned} \Phi(j_i, X) &= j \quad \text{tandis que} \quad \Phi(l_i, X) \neq j \quad \text{pour} \quad l \neq j \\ i &= 1, \dots, n \quad \quad j = 0, 1, \dots, M \end{aligned} \tag{8}$$

- iii)

$$\Phi(j, j, \dots, j) = j \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \dots, M$$

Fonction duale :

Soit Φ la fonction de structure d'un système EPS. La fonction de structure duale est donnée par :

$$\Phi^D(X) = M - \Phi(M - X_1, \dots, M - X_n) \quad (9)$$

Remarque :

Le dual d'un système EPS est un système EPS.

Théorème (encadrement) :

Soit Φ la fonction de structure d'un système EPS ayant n composants . Alors :

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq \Phi(X) \leq \max_{1 \leq i \leq n} X_i \quad (10)$$

2.4 Modèle de Natvig de type 1 (MCS1) :**Définition :**

Un système à n composants est dit système cohérent à états multiples de type 1 (MCS1) si et seulement si sa fonction de structure Φ satisfait les conditions suivantes :

i) Φ est non décroissante en chaque argument.

ii)

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, pour tout $j \in \{1, \dots, M\}$, pour tout (\cdot, X) tel que :

$$\Phi(j_i, X) \geq j \quad \text{et} \quad \Phi((j-1)_i, X) \leq j-1 \quad (11)$$

iii)

pour tout $j \in \{0, 1, \dots, M\}$, $\Phi(j, j, \dots, j) = j$

Fonction duale :

Elle est définie de la même manière que pour les EPS .

Le dual d'un système MCS1 est un système MCS1.

2.5 Modèle de Natvig de type 2 (MCS2) :

Définition :

Un système à n composants est dit MCS de type 2 (MCS2) si et seulement si il existe des structures binaires cohérentes $\Phi_j : j = 1, \dots, M$ de sorte que sa fonction de structure Φ vérifie :

$$\Phi(X) \geq j \iff \Phi_j(\Gamma_j(X)) = 1 \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, M \quad \text{et tout } X \quad (12)$$

où $\Gamma_j(X)$ est le vecteur indicateur $\Gamma_j(X) = (I_j(X_1), \dots, I_j(X_n))$ avec :

$$I_j(X_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geq j \\ 0 & \text{si } X_i < j \end{cases}$$

Remarque :

Si on conçoit que les composants et le système sont considérés fonctionnant à partir du niveau j , alors, en termes d'otique binaire, on peut transformer l'écriture du vecteur X comme suit :

- les composantes X_i supérieures à j seront remplacées par des 1.
- les composantes X_i inférieures à j seront remplacées par des 0.

Si avec un tel vecteur X , la performance du système dépasse j alors on attribue à la fonction de structure la valeur 1 sinon on lui attribue la valeur 0.

On pourrait ainsi dire que tout vecteur tel que la performance dépasse j ($\geq j$) fait fonctionner le système, et tout vecteur tel que la performance est inférieure à j ($< j$) fait arrêter le système.

De la sorte, c'est comme si on a construit une fonction binaire Φ_j telle que :

$$\Phi_j(\Gamma_j(X)) = 1 \quad \text{si} \quad \Phi(X) \geq j$$

$$\Phi_j(\Gamma_j(X)) = 0 \quad \text{si} \quad \Phi(X) < j$$

et de là on a :

$$\Phi(X) \geq j \iff \Phi_j(\Gamma_j(X)) = 1$$

Remarque :

Le modèle MCS2 est un sous- modèle du MCS1 donc les définitions et les résultats établis dans le cadre du MCS1 sont valables dans le cadre du MCS2.

2.6 Modèle de Griffith fortement cohérent (MMSS) :**Définition 1 :**

Soit Φ une fonction dont le domaine est $\{0, 1, \dots, M\}^n$ et le rang est $\{0, 1, \dots, M\}$ où M et n sont entiers positifs. Alors Φ est appelée système monotone à multi-états (MMS) s'il satisfait :

- i) $\Phi(X)$ est non-décroissante en chaque argument.
- ii)

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq \Phi(X) \leq \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

Définition 2 :

Soit Φ un MMS, si pour tout composant i et tout état j , il existe un vecteur (\cdot, X) tel que

$$\begin{aligned} \Phi(j_i, X) &= j \text{ tandis que } \Phi(l_i, X) \neq j \\ \text{pour } l &\neq j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, M. \end{aligned}$$

alors $\Phi(X)$ est dit système monotone à multi-états fortement cohérent (MMSS).

Remarque :

Ce modèle n'est autre que le modèle EPS défini précédemment par El-Newehi et al.

2.7 Modèle de Griffith cohérent (MMSC) :**Définition :**

Soit Φ un MMS, si pour tout composant i et tout état j , il existe un vecteur (\cdot, X) tel que

$$\Phi(j_i, X) \neq \Phi(l_i, X) \quad \text{pour } l \neq j. \tag{13}$$

alors $\Phi(X)$ est dit système monotone à multi-états cohérent (MMSC).

Fonction duale :

Le dual d'un système MMSC est un système MMSC.

Encadrement :

Comme dans les modèles précédents, on établit de la même manière, que la performance du système est encadrée par celle du système en parallèle et celle du système en série.

Utilité d'un composant en décomposition modulaire :

La définition d'un module et d'une décomposition modulaire d'un système formulée dans le cadre du cas binaire est adoptée sans changement dans les modèles multinaires.

Théorème :

Dans un système MMSC si un composant est utile dans un module qui est utile dans le système, alors ce composant est utile dans le système lui-même.

2.8 Modèle de Griffith faiblement cohérent (MMSW) :

Définition :

Soit Φ un MMS, si pour tout état j il existe (\cdot, X) tel que

$$\Phi(j_i, X) \neq \Phi(l_i, X) \quad \text{pour } l \neq j$$

alors $\Phi(X)$ est dit système monotone à multi-états faiblement cohérent.

Remarque :

La condition

$$\Phi(j_i, X) \neq \Phi(l_i, X) \quad \text{pour } l \neq j$$

peut être remplacée par la suivante :

pour tout i , il existe X tel que

$$\Phi(0_i, X) < \Phi(M_i, X)$$

Fonction duale :

Le dual d'un MMSW est un MMSW.

2.9 Modèle MCS1 généralisé de Natvig :

Un système à n composants est dit MCS modifié de type 1 si et seulement si sa fonction de structure vérifie :

i) $\Phi(X)$ est non-décroissante en chaque argument.

ii)

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}, \quad \exists (\cdot, X) \quad \text{tel que}$$

$$\Phi(k_i, X) \geq j \quad \forall k \in S_i \cap \{j, j+1, \dots, M\}$$

$$\Phi(k_i, X) \leq j-1 \quad \forall k \in S_i \cap \{0, 1, \dots, j-1\} \quad (14)$$

iii)

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq \Phi(X) \leq \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

2.10 Modèle de Block et Savits :

C'est le modèle généralisé de Natvig avec les corrections suivantes :

pour chaque composant i l'ensemble des états est S_i .

pour le système, l'ensemble des états est N .

$$\text{posons } M = \max(M_1, \dots, M_n, N) \quad \text{et soit } S = \{0, 1, \dots, M\}$$

.

on définit la fonction

$$\Phi^*(X_1, \dots, X_n) = \Phi(X_1 \cap M_1, \dots, X_n \cap M_n)$$

et on impose que :

$$\Phi^*(X_1, \dots, X_n) = M$$

Exemples particuliers des modèles précédents :

Les systèmes en série, les systèmes en parallèle et les systèmes k -parmi- n .

Redondance :

La redondance au niveau des composants est préférable à la redondance au niveau du système.

2.11 Aspect stochastique

Dans la théorie des systèmes à multi-états, le terme de fiabilité ne juxtapose plus la probabilité de fonctionnement et l'espérance mathématique de la v.a représentant l'état (pour les composants ou pour le système). Le discernement entre ces deux aspects est imposé par le fait qu'il n'existe pas qu'un seul niveau de performance. $R = E[\Phi(X)]$ ne peut être comprise que dans le sens suivant : c'est le niveau moyen de fonctionnement attendu. La notion de probabilité de fonctionnement n'a plus de signification.

Dans le même ordre d'idées, le terme "amélioration" se présente avec des nuances différentes :

Si dans le sens déterministe, améliorer un composant c'est le faire passer à un état supérieur, on pourrait choisir, au sens stochastique, de postuler qu'un composant (ou un système) est amélioré de deux manières :

a) l'espérance mathématique est plus grande :

$$E^*[X] \geq E[X] \quad \text{avec} \quad E[X] = \sum_{j=0}^M jP[X=j] \quad (15)$$

b) quel que soit l'état j , le composant amélioré a une plus grande probabilité de se trouver dans un état meilleur que j .

$$\text{i.e pour tout } j \in \{1, \dots, M\}, \quad P^*[X \geq j] \geq P[X \geq j]$$

A noter que si on adopte l'approche binaire et que l'on considère j comme étant l'état frontière de fonctionnement alors un système amélioré a une plus grande probabilité de "fonctionner" (supérieur à j) quel que soit le choix de j que le système original et donc :

$$P^*[X \geq j] \geq P[X \geq j]$$

A noter également que : le choix b) implique le choix a) (la réciproque n'est pas vraie).

Le souci d'adopter un choix et de formuler mathématiquement l'idée que l'amélioration des composants se traduit par une amélioration du système a figuré dans les préoccupations des auteurs ayant traité les modèles multinaires.

"Nous nous intéressons à rendre précise la façon dont la performance des composants affecte la performance du système"

W.S Griffith

"D'abord nous formalisons mathématiquement l'idée qu'une amélioration de la performance du composant résulte dans une amélioration de la performance du système"

W.S Griffith

"Intuitivement, meilleurs sont les composants, meilleur est le système"

Barlow et Wu

Chapitre 3

Calcul de la fiabilité des systèmes k consécutifs-parmi- n : G à plusieurs états

3.1 Introduction

Dans la réalité, les systèmes rencontrés ont des configurations différentes, c'est à dire que leurs composants sont ordonnés de manières différentes. Parmi ces configurations, les systèmes k -consécutifs-sur- n qui sont une extension des systèmes k -sur- n .

Les systèmes k -consécutifs-sur- n ont attiré l'attention de plusieurs ingénieurs et chercheurs, car ils ont une large application, du fait qu'ils sont plus fiables que les systèmes en série et moins chers que les systèmes en parallèle. Parmi les exemples de ces systèmes : les systèmes de télécommunication, de pompage de pétrole et de gaz par pipelines, les circuits intégrés, les systèmes de distribution d'eau ...etc. Les systèmes binaires k -consécutifs-parmi- n ont été introduits par Kontoléon (1980) [8]. La fiabilité de tels systèmes a été étudiée par plusieurs chercheurs et beaucoup de problèmes posés ont été résolus et bouclés [6, 8, 9, 10, 11, 12, 21]. Et puisque, il s'est avéré que les systèmes à états multiples sont plus flexibles et qui reflètent beaucoup de situations réelles, alors une généralisation des systèmes binaires k -consécutifs- parmi- n aux systèmes multinaires k -consécutifs- parmi- n [19, 20]. Plus tard, un nombre considérable

de chercheurs à savoir (Zuo et Liang [28], Kossow et Preuss [34], Malinowski et Preuss [35]) ont fait l'extension de la définition des systèmes binaires k -consécutifs-parmi- n aux systèmes à états multiples en supposant le système binaire tandis que ses composants sont à états multiples. Koutras [42] a fait l'extension des systèmes binaires k -consécutifs-parmi- $n : F$ au mode de panne double i.e que le système et chaque composant peuvent avoir un seul état de fonctionnement et deux états différents de panne. Haim et Porat [22] ont établi un modèle de fiabilité de Bayes pour les systèmes k -consécutifs-parmi- n , dans lequel le système et ses composants peuvent avoir plus de deux états possibles et en supposant k constant. Récemment, Huang et al.(2003) [63] ont proposé des définitions plus générales des systèmes multinaires k -consécutifs-parmi- $n : F, G$. Dans leurs définitions, k peut avoir des valeurs différentes pour différents états du système. Ils ont établi un algorithme récursif pour évaluer la distribution d'état du système k -consécutifs-parmi- $n : G$ décroissant ($k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_M$) et un autre algorithme pour borner la distribution d'état du système k -consécutifs-parmi- $n : F$ croissant ($k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_M$). Zuo et al. (2003) [64] ont proposé une formule récursive pour évaluer la distribution d'état du système k -consécutifs-parmi- $n : G$ quand $M = 3$, et quand $M \geq 4$, ils ont établi un algorithme pour encadrer la distribution d'état du système. Et en (2006), Yamamoto et al.[84] proposent encore une formule récursive pour calculer la fiabilité de ces systèmes mais sans contraintes sur k_j (croissant décroissant, constant) ni sur M ($\forall M \geq 1$). Alors que notre contribution dans ce domaine de recherches est de proposer un formule non récursive qui permet le calcul direct et exact de la distribution d'état du système en question, aussi sans contraintes sur k_j ni sur M [86].

Avant le calcul de la fiabilité, commençons par introduire les notations nécessaires ainsi que les hypothèses du système.

3.1.1 Notations

n : nombre de composants du système .

$M + 1$: nombre d'états du système et de ses composants .

M : fonctionnement parfait, 0 : panne totale.

$S = \{0, 1, \dots, M\}$.

X_i : état du composant i , $X_i \in S$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$X : (X_1, X_2, \dots, X_n)$ vecteur des états des composants.

$\Phi(X)$: fonction structure d'état du système, $\Phi(X) \in S$.

k_j : nombre minimum de composants consécutifs tel que : $X_i \geq j$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$P_{i,j} = P \{X_i \geq j\}$.

$Q_{i,j} = 1 - P_{i,j} = P \{X_i < j\}$.

$p_{i,j} = P \{X_i = j\}$.

$R_{s,j} = P \{\Phi(X) = j\}$.

$R_j(b, a) = P \left\{ \begin{array}{l} \text{il y a exactement } b \text{ composants dans l'état } j, \\ \text{parmi eux il y a au moins } k_j \text{ composants consécutifs} \\ \text{et les composants } (a - b) \text{ restants sont } < j \end{array} \right\}$

3.1.2 Hypothèses :

1) le système est monotone

- $\Phi(X)$ est non décroissante en chaque argument.

- $\Phi(j) = \Phi(j, j, \dots, j) = j$ pour $j \in S$.

2) les X_i (états du composant i) sont mutuellement indépendants .

3) les états possibles de chaque composant et du système sont ordonnés :

état $0 \leq \text{état } 1 \leq \dots \leq \text{état } M$.

4) les probabilités des différents états pour chaque composant sont connues.

Remarque

Dans la littérature, on rencontre deux types de systèmes k consécutifs-parmi- n :

1) **Système "k consécutifs- parmi- n : G"** : c'est un système formé de n composants disposés linéairement. Ce système fonctionne ssi il y a au moins k composants consécutifs qui fonctionnent. la fonction de structure s'écrit sous la forme suivante :

$$\Phi(X) = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \left(\min_{1 \leq l \leq i+k-1} X_l \right) = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=1}^{i+k-1} X_l \quad (16)$$

2) **Système "k consécutifs- parmi- n : F"** : c'est un système formé de n composants disposés linéairement. Ce système tombe en panne ssi il y a au moins k composants consécutifs

qui tombent en panne. Sa fonction de structure s'écrit sous la forme suivante :

$$\Phi(X) = \min_{1 \leq i \leq n-k+1} \left(\max_{1 \leq l \leq i+k-1} X_l \right) = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=1}^{i+k-1} X_l \quad (17)$$

Dans ce qui suit, on va étudier les systèmes k consécutifs-parmi- n : G à multi-états.

3.2 Système k consécutifs- sur- n : G à multi-états

Définition 1 :

Le système k consécutifs-sur- n : G à multi-états est un système comportant n composants disposés linéairement. Ce système fonctionne ssi il y a au moins k composants consécutifs qui fonctionnent.

Le nombre k peut être non constant, mais il dépend du niveau d'état j du système.

c.à.d qu'on peut définir le système k consécutifs-sur- n : G à multi-états comme suit :

pour maintenir au moins un certain niveau d'état pour le système, ceci nécessite un nombre variant de composants consécutifs qui soient supérieurs ou égaux à un certain niveau , en d'autres termes, vérifiant :

$$\Phi(X) \geq j \text{ ssi il y a au moins } k_j \text{ composants consécutifs qui sont } \geq j, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Définition proposée par (Huang et al) (2003) [63]

Huang et al ont proposé une définition plus générale pour les systèmes k consécutifs-sur- n : G à multi-états qui est formulée de la façon suivante :

Définition 2 :

$\Phi(X) \geq j$ ($j = 1, 2, \dots, M$) ssi il y a au moins k_l composants consécutifs dans des états supérieurs ou égaux à l'état l pour tout l ($1 \leq l \leq j$).

D'une façon plus explicite, $\Phi(X) \geq j$ ($j = 1, 2, \dots, M$) s'il y a au moins k_j composants consécutifs qui sont dans des états $\geq j$; il y a au moins k_{j-1} composants consécutifs qui sont dans des états $\geq j-1$;; il y a au moins k_1 composants consécutifs qui sont dans des états ≥ 1 .

Dans cette définition, les k_j ne sont pas les mêmes pour les différents niveaux d'état du système j ($1 \leq j \leq M$). Ceci veut dire que la structure du système peut être différente pour les différents niveaux d'état du système.

On peut reformuler cette définition par le biais de la variable aléatoire :

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geq j \\ 0 & \text{si } X_i < j \end{cases}$$

pour cela introduisons la notation Y_j tel que :

Y_j : nombre de composants consécutifs qui sont dans des états $\geq j$.

alors on peut écrire :

$$Y_j = \sum_{i=1}^n X_{i,j}$$

Ainsi, la définition précédente peut être reformulée comme suit :

$\Phi(X) \geq j$ si au moins une des inégalités suivantes est satisfaite .

$$Y_j \geq k_j; \quad Y_{j+1} \geq k_{j+1}; \dots; \quad Y_M \geq k_M \quad (18)$$

Une définition analogue est donnée pour les systèmes k consécutifs-parmi- n : F à multi-états.

Définition 3 :

$\Phi(X) < j$ ($j = 1, 2, \dots, M$) ssi il y a au moins k_l composants consécutifs dans des états inférieurs à l'état l pour tout l ($j \leq l \leq M$).

c-à-d le système tombe en panne [$\Phi(X) < j$ ($j = 1, 2, \dots, M$)] ssi il y a au moins k_l composants consécutifs qui tombent en panne, avec ($j \leq l \leq M$).

Remarque :

Le nombre k_j peut être croissant, décroissant ou constant.

Définition 4 :

Quand $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_M$ (avec au moins une inégalité stricte), le système est appelé k consécutifs-parmi- n : G décroissant à multi-états. Dans ce cas, pour que le système soit à un haut niveau supérieur ou égal à j , ceci nécessite un petit nombre de composants consécutifs qui soient supérieurs ou égaux à j .(voir exemple.2).

Définition 5 :

Quand $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_M$, le système est appelé k consécutifs-parmi- $n : G$ croissant à multi-états. Dans ce cas, pour que le système soit à un haut niveau supérieur ou égal à j , beaucoup de composants consécutifs doivent être supérieurs ou égaux à j .(voir exemple.1).

Définition 6 :

Quand $k_1 = k_2 = \dots = k_M$, le système est appelé k consécutifs-parmi- $n : G$ constant à multi-états. Dans ce cas, pour que le système soit à un haut niveau supérieur ou égal à j , le même nombre de composants consécutifs doivent être supérieurs ou égaux à j .

Dualité :

Dans le contexte binaire, la fonction duale de la fonction de structure Φ du système est définie par :

$$\Phi^D(X) = 1 - \Phi(\mathbf{1} - X) \quad \text{où } \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \quad (19)$$

Les systèmes k consécutifs-parmi- $n : G$ et Les systèmes k consécutifs-parmi- $n : F$ sont des duaux (Kuo et al., (1990) [21]).

Pour les systèmes à multi-états, une définition similaire de dualité est donnée par El-Newehi et al.(1978) [4] :

$$\Phi^D(X) = M - \Phi(\mathbf{M} - X) \quad \text{où } \mathbf{M} = (M, M, \dots, M)$$

et obtient comme résultat :

$$P\{\Phi^D(X) = j\} = P\{\Phi(\mathbf{M} - X) = M - j\}, \quad j \in \{0, 1, \dots, M\} \quad (20)$$

En se basant sur l'équation (20), si on pose :

$$p_{i,j} = p_{i,(M-j)}^D \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{et } j = 0, 1, \dots, M$$

alors la probabilité pour que le système primitif (originel) soit à l'état j est égale à la probabilité que le système dual soit à l'état $M - j$ pour $j = 0, 1, \dots, M$.

Ainsi, en se basant sur l'équation (20), les systèmes k consécutifs-parmi- $n : F$ et les systèmes k consécutifs-parmi- $n : G$ sont des duaux.

Plus spécifiquement, le dual d'un système k consécutifs-parmi- $n : F$ croissant à multi-états

est un système k consécutifs-parmi- $n : G$ décroissant à multi-états.

3.2.1 Quelques exemples de systèmes k consécutifs-sur- $n : G$ à multi-états

Dans ce qui suit, on donne quelques exemples illustrant les applications des systèmes k consécutifs-parmi- $n : G$ à multi-états dans de différents domaines de l'ingénieur.

Exemple A (problème de contrôle de qualité)

On classe un lot de produits suivant le niveau de qualité : grade A (état 2), grade B (état 1), rejeté (état 0). On prélève des échantillons au hasard et on classe les articles comme suit :

Si dans l'échantillon, on tire au moins 6 articles consécutifs parmi 10 qui ont le grade A, alors l'échantillon est classé au grade A.

Si dans l'échantillon, on tire au moins 3 articles consécutifs parmi 10 qui sont jugés supérieurs ou égaux au grade B, alors l'échantillon est classé au grade B, sinon le lot sera rejeté.

Ce système ainsi défini a la structure suivante :

- 6 composants consécutifs parmi 10 : G au niveau 2.
- 3 composants consécutifs parmi 10 : G au niveau 1.

Exemple B (problème de management)

Une usine est constituée de 5 lignes consécutives de production et elle a 4 niveaux différents de production.

- une production à grande échelle pour une demande maximale de clients (état 3).
- une production à moyenne échelle pour une demande normale de clients (état 2).
- une production à basse échelle pour une demande basse de clients (état 1).
- une production nulle quand l'usine est fermée (état 0).

et tel que :

- les 5 lignes consécutives de l'usine doivent travailler à grande échelle pour que le système soit à l'état 3.
- au moins 3 lignes consécutives doivent au moins produire à moyenne échelle pour que le système soit au moins à l'état 2.
- au moins 2 lignes consécutives produisent au moins à basse échelle pour que le système soit au moins à l'état 1.

On voit que cet exemple peut être assimilé à un système k consécutifs-sur- n : G croissant à 3 états avec $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 5$ et qui a la structure suivante :

- 5 composants consécutifs parmi 5 : G au niveau 3.(système en série).
- 3 composants consécutifs parmi 5 : G au niveau 2.
- 2 composants consécutifs parmi 5 : G au niveau 1.

Exemple C

Soit un train constitué de 20 wagons, le train (système) et les wagons (composants) peuvent avoir 5 états possibles.

- Le train est à l'état 4 s'il y a au moins 14 wagons consécutifs qui sont à l'état 4.
- Le train est à l'état 3 s'il y a au moins 15 wagons consécutifs qui sont à l'état 3.
- Le train est à l'état 2 s'il y a au moins 16 wagons consécutifs qui sont à l'état 2.
- Le train est à l'état 1 s'il y a au moins 18 wagons consécutifs qui sont à l'état 1.

Cet exemple peut être représenté par un système k consécutifs-sur-20 : G décroissant à 5 états avec $k_1 = 18$, $k_2 = 16$, $k_3 = 15$, $k_4 = 14$ et qui a la structure suivante :

- 14 composants consécutifs parmi 20 : G au niveau 4.
- 15 composants consécutifs parmi 20 : G au niveau 3.
- 16 composants consécutifs parmi 20 : G au niveau 2.
- 18 composants consécutifs parmi 20 : G au niveau 1.

Exemple D

Une compagnie produit des lampes électriques. Un lot de la production est constitué de 10000 lampes. Chaque lampe est considérée comme un composant et a 4 états différents.

- Grade 1 si sa durée de vie est ≥ 1500 heures (état 3).
- Grade 2 si sa durée de vie est ≥ 1200 heures (état 2).
- Grade 3 si sa durée de vie est ≥ 800 heures (état 1).
- En panne si sa durée de vie est < 800 heures (état 0).

Le contrôle de qualité standard de cette compagnie est un échantillonnage de 1% plus un critère de qualité de 10%, c-à-d, 100 composants (lampes) sont pris du lot comme un système d'échantillonnage et

S'il y a au moins 10 lampes consécutives qui sont \geq état 3, alors le lot est classé \geq état 3.

S'il y a au moins 10 lampes consécutives qui sont \geq état 2, alors le lot est classé \geq état 2.

S'il y a au moins 10 lampes consécutives qui sont \geq état 1, alors le lot est classé \geq état 1.

Ainsi, ce système de contrôle de qualité peut-être décrit en utilisant un système k consécutifs-sur-100 : G constant à 4 états avec $k_1 = k_2 = k_3 = k = 10$.

3.3 Evaluation de la fiabilité du système

On donne une approche pour évaluer la fiabilité des systèmes à multi-états par l'extention des résultats de la théorie binaire de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(X) \geq j \implies \text{le système fonctionne} \\ \Phi(X) < j \implies \text{le système est en panne} \end{array} \right\}$$

de façon similaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i \geq j \implies \text{le composant } i \text{ fonctionne} \\ X_i < j \implies \text{le composant } i \text{ est en panne} \end{array} \right\}$$

Puisque j peut avoir des valeurs différentes, les termes "fonctionner" et "en panne" ont des sens dynamiques i.e : quand la valeur de j change le sens de "en panne" et "fonctionner" change aussi.

Dans ce qui suit, on va calculer la distribution d'état du système

$$(R_{s,j} = P \{ \Phi(X) = j \}, \quad j = 1, 2, \dots, M)$$

ensuite déduire sa fiabilité, du fait que la relation entre les deux est triviale et elle est donnée par :

$$P \{ \Phi(X) \geq j \} = P \{ \Phi(X) = j \} + P \{ \Phi(X) = j + 1 \} + \dots + P \{ \Phi(X) = M \} \quad (21)$$

ainsi, le but de cette partie est de calculer $R_{s,j} = P \{ \Phi(X) = j \}$, $j = 1, 2, \dots, M$ c.à.d la distribution d'état du système. Et pour cela, on va proposer une formule non récursive basée sur une approche combinatoire permettant le calcul direct.

On commence par donner une définition de $\Phi(X) = j$ pour les systèmes k consécutifs -sur- n : G à multi-états avec le nombre k qui varie avec l'état j du système.

Définition :

$$\Phi(X) = j \iff \text{il y a au moins } k_j \text{ composants consécutifs } \geq j \text{ et au plus } k_h - 1$$

composants sont dans l'état h .

$$\text{pour } h = j + 1, j + 2, \dots, M \quad \text{et } j = 1, 2, \dots, M.$$

Et la formule permettant le calcul de $R_{s,j}$, i.e la probabilité pour que le système soit au niveau j est donnée par :

$$R_{s,j} = P \{ \Phi(X) = j \} = \sum_{k=k_j}^n \left[R_j(k, n) + \sum_{h=j+1, k_h > 1}^M H_k^j(h) \right] \quad (22)$$

avec $R_j(k, n)$ et $H_k^j(h)$ sont des probabilités définies de la manière suivante :

1) $R_j(k, n)$ est la probabilité qu'il y ait exactement k composants dans l'état j , parmi eux il y a au moins k_j composants consécutifs, les $(n - k)$ composants restants sont $< j$.

2) $H_k^j(h)$ est la probabilité que :

- au moins 1 et au plus $k_h - 1$ composants sont dans l'état h ($h > j$).
- au plus $k_u - 1$ composants sont dans l'état u pour $j < u < h$.
- le nombre total de composants $\geq j$ est k , parmi eux il y a au moins k_j composants consécutifs.
- $n - k$ composants sont $< j$.
- le système est à l'état j .

ainsi, la probabilité $H_k^j(h)$ peut être exprimée par la relation :

$$H_k^j(h) = \sum_{i_1=1}^{k_h-1} \sum_{i_2=0}^{k_{h-1}-1-I_1} \sum_{i_3=0}^{k_{h-2}-1-I_2} \dots \sum_{i_{h-j}=0}^{k_{j+1}-1-I_{h-j-1}} R \left[\left(h^{i_1}, (h-1)^{i_2}, \dots, (j+1)^{i_{h-j}}, j^{k-I_{h-j}} \right), n \right] \quad (23)$$

où

$$I_a = \sum_{m=1}^a i_m \quad \text{pour } a = 1, 2, \dots, h - j$$

et

$$R \left[\left(h^{i_1}, (h-1)^{i_2}, \dots, (j+1)^{i_{h-j}}, j^{k-I_{h-j}} \right), n \right]$$

est la probabilité qu'il y ait exactement :

- i_1 composants au niveau h .
- i_2 composants au niveau $h - 1$.

-
-
- i_{h-j} composants au niveau $j + 1$.
- $k - I_{h-j}$ composants au niveau j .
- les $n - k$ composants qui restent sont $< j$.

3.3.1 Interprétation de $R_{s,j} = P \{ \Phi(X) = j \}$.

Pour un k fixé ($k_j \leq k \leq n$), $R_{s,j}$ est la somme des probabilités qu'il y ait exactement k composants $\geq j$ parmi eux il y a au moins k_j composants consécutifs, et le système est exactement à l'état j .

c.à.d pour un k fixé ($k_j \leq k \leq n$) on a les possibilités A, B suivantes :

A)

- exactement k composants sont à l'état j , parmi eux, il y a au moins k_j composants consécutifs.
- les $(n - k)$ composants restants sont dans des états $< j$.

ou bien :

B)

- exactement k composants sont dans des états $\geq j$, parmi eux, il y a au moins k_j composants consécutifs.

avec :

- au moins 1 et au plus $k_h - 1$ composants sont à l'état h ($h > j$).
- au plus $k_u - 1$ composants sont à l'état u pour $j < u < h$.
- les $(n - k)$ composants restants sont dans des états $< j$.

Donc, on a l'expression qui calcule $R_{s,j} = P \{ \Phi(X) = j \}$, $j = 1, 2, \dots, M$ et ceci nous permet de déduire la fiabilité du système comme suit :

$$\begin{aligned}
 P \{ \Phi(X) \geq j \} &= P \{ \Phi(X) = j \} + P \{ \Phi(X) = j + 1 \} + \dots + P \{ \Phi(X) = M \} \\
 &= \sum_{\alpha=j}^M R_{s,\alpha} \quad j = 1, 2, \dots, M
 \end{aligned}$$

On peut illustrer ces résultats à travers les deux exemples suivants, où le 1^{er} traite le cas

croissant et le 2^{ème} traite le cas décroissant et en considérant les données suivantes :

$$n = 4, \quad M = 3$$

$$\begin{aligned} p_{1,0} &= 0.2, & p_{1,1} &= 0.1, & p_{1,2} &= 0.4, & p_{1,3} &= 0.3, \\ p_{2,0} &= 0.1, & p_{2,1} &= 0.1, & p_{2,2} &= 0.3, & p_{2,3} &= 0.5, \\ p_{3,0} &= 0.2, & p_{3,1} &= 0.1, & p_{3,2} &= 0.2, & p_{3,3} &= 0.5, \\ p_{4,0} &= 0.1, & p_{4,1} &= 0.1, & p_{4,2} &= 0.4, & p_{4,3} &= 0.4. \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} P_{1,0} &= 1, & P_{1,1} &= 0.8, & P_{1,2} &= 0.7, & P_{1,3} &= 0.3, \\ P_{2,0} &= 1, & P_{2,1} &= 0.9, & P_{2,2} &= 0.8, & P_{2,3} &= 0.5, \\ P_{3,0} &= 1, & P_{3,1} &= 0.8, & P_{3,2} &= 0.7, & P_{3,3} &= 0.5, \\ P_{4,0} &= 1, & P_{4,1} &= 0.9, & P_{4,2} &= 0.8, & P_{4,3} &= 0.4, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q_{1,0} &= 0, & Q_{1,1} &= 0.2, & Q_{1,2} &= 0.3, & Q_{1,3} &= 0.7, \\ Q_{2,0} &= 0, & Q_{2,1} &= 0.1, & Q_{2,2} &= 0.2, & Q_{2,3} &= 0.5, \\ Q_{3,0} &= 0, & Q_{3,1} &= 0.2, & Q_{3,2} &= 0.3, & Q_{3,3} &= 0.5, \\ Q_{4,0} &= 0, & Q_{4,1} &= 0.1, & Q_{4,2} &= 0.2, & Q_{4,3} &= 0.6. \end{aligned}$$

3.3.2 Exemple 1

Dans cet exemple, on pose : $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$. ($k_1 < k_2 < k_3$).

On peut représenter dans le tableau ci après, les états du système en fonction des états de ses composants.

$\Phi(X)$	0	1	2	3
	(0,0,0,0)	(0,0,1,1)	(2,2,2,0)	(3,3,3,3)
	(0,0,0,1)	(0,0,1,2)	(2,2,2,1)	
X	(0,0,0,2)	(0,0,1,3)	(2,2,2,2)	
	(0,0,0,3)	(0,0,2,1)	(2,2,2,3)	
	(0,0,1,0)	(0,0,2,2)	(2,3,2,0)	
	(0,0,2,0)	(0,0,2,3)	(2,3,2,1)	
	(0,0,3,0)	(0,0,3,1)	(2,3,2,2)	
	(1,0,0,0)	(0,0,3,2)	(2,3,2,3)	
	(1,0,0,1)	(0,0,3,3)	(3,2,2,0)	
	(1,0,0,2)	(1,0,1,1)	(3,2,2,1)	
	(1,0,0,3)	(1,0,1,2)	(3,2,2,2)	
	(1,0,1,0)	(1,0,1,3)	(3,2,2,3)	
	(2,0,0,0)	(1,0,2,1)	(3,3,2,0)	
	(2,0,0,1)	(1,0,2,2)	(3,3,2,1)	
	(2,0,0,2)	(1,0,2,3)	(3,3,2,2)	
	(2,0,0,3)	(1,0,3,1)	(3,3,2,3)	
	(2,0,1,0)	(1,0,3,2)	(3,3,3,0)	
	(2,0,2,0)	(1,0,3,3)	(3,3,3,1)	
	(3,0,0,0)	(2,0,1,1)	(3,3,3,2)	
	(3,0,0,1)	(2,0,1,2)	(0,2,2,2)	
	(3,0,0,2)	(2,0,1,3)	(1,2,2,2)	
	(3,0,0,3)	(2,0,2,1)	+	
	(3,0,1,0)	(2,0,2,2)		
	(3,0,2,0)	(2,0,2,3)		
	(3,0,3,0)	(2,0,3,1)		
	+	(2,0,3,2)		
		(2,0,3,3)		
		(2,1,0,0)		
		+		

Dans cet exemple, le système a une structure :

- 4 composants consécutifs sur 4 : G (structure en série) au niveau 3.
- 3 composants consécutifs sur 4 : G au niveau 2.
- 2 composants consécutifs sur 4 : G au niveau 1.

calculons alors les probabilités pour que le système soit à l'état 3, 2, 1 et 0.

Niveau 3 :

$$j = 3 ; k_3 = 4$$

$$R_{s,3} = R_3(4, 4) = p_{1,3}p_{2,3}p_{3,3}p_{4,3}$$

Niveau 2 :

$$j = 2 ; k_2 = 3, k_h = k_3 = 4 > 1$$

$$\begin{aligned} R_{s,2} &= \sum_{k=3}^4 \left[R_2(k, 4) + \sum_{h=3, k_h > 1}^3 H_k^2(h) \right] \\ &= \sum_{k=3}^4 [R_2(k, 4) + H_k^2(3)] \\ &= R_2(3, 4) + R_2(4, 4) + H_3^2(3) + H_4^2(3) \end{aligned}$$

avec :

$$R_2(3, 4) = p_{1,2}p_{2,2}p_{3,2}Q_{4,2} + Q_{1,2}p_{2,2}p_{3,2}p_{4,2} \quad (24)$$

$$R_2(4, 4) = p_{1,2}p_{2,2}p_{3,2}p_{4,2} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
H_3^2(3) &= \sum_{i_1=1}^3 [R(3^{i_1}, 2^{3-i_1}), 4] \\
&= R[(3^1, 2^2), 4] + R[(3^2, 2^1), 4] + R[(3^3, 2^0), 4] \\
&= Q_{1,2}(p_{2,3}p_{3,2}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,3}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,2}p_{4,3} + p_{2,3}p_{3,3}p_{4,2} + p_{2,3}p_{3,2}p_{4,3} \\
&\quad + p_{2,2}p_{3,3}p_{4,3} + p_{2,3}p_{3,3}p_{4,3}) + Q_{4,2}(p_{1,3}p_{2,2}p_{3,2} + p_{1,2}p_{2,3}p_{3,2} + p_{1,2}p_{2,2}p_{3,3} \\
&\quad + p_{1,3}p_{2,3}p_{3,2} + p_{1,3}p_{2,2}p_{3,3} + p_{1,2}p_{2,3}p_{3,3} + p_{1,3}p_{2,3}p_{3,3}) \tag{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4^2(3) &= \sum_{i_1=1}^3 R[(3^{i_1}, 2^{4-i_1}), 4] = R[(3^1, 2^3), 4] \\
&\quad + R[(3^2, 2^2), 4] + R[(3^3, 2^1), 4] \\
&= p_{1,3}p_{2,2}p_{3,2}p_{4,2} + p_{3,2}p_{4,2}(p_{1,3}p_{2,2} + p_{1,2}p_{2,3}) + p_{1,2}p_{2,2}(p_{3,3}p_{4,2} \\
&\quad + p_{3,2}p_{4,3}) + p_{1,3}(p_{2,3}p_{3,2}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,3}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,2}p_{4,3}) + \\
&\quad p_{1,2}(p_{2,3}p_{3,3}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,3}p_{4,3} + p_{2,3}p_{3,2}p_{4,3}) \\
&\quad + p_{3,3}p_{4,3}(p_{1,2}p_{2,3} + p_{1,3}p_{2,2}) + p_{1,3}p_{2,3}(p_{3,2}p_{4,3} + p_{3,3}p_{4,2}) \tag{27}
\end{aligned}$$

enfin :

$$R_{s,2} = (24) + (25) + (26) + (27)$$

Niveau 1 :

$$j = 1; k_1 = 2, k_h = k_2 = 3 > 1, k_3 = 4 > 1$$

$$\begin{aligned}
R_{s,1} &= \sum_{k=2}^4 \left[R_1(k, 4) + \sum_{h=2, k_h > 1}^3 H_k^1(h) \right] \\
&= \sum_{k=2}^4 [R_1(k, 4) + H_k^1(2) + H_k^1(3)] \\
&= R_1(2, 4) + H_2^1(2) + H_2^1(3) + R_1(3, 4) + H_3^1(2) + H_3^1(3) + R_1(4, 4) + H_4^1(2) + H_4^1(3)
\end{aligned}$$

avec :

$$R_1(2, 4) = p_{1,1}p_{2,1}p_{3,0}p_{4,0} + p_{1,0}(p_{2,0}p_{3,1}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,1}p_{4,0}) \quad (28)$$

$$R_1(3, 4) = p_{1,1}p_{2,1}(p_{3,1}p_{4,0} + p_{3,0}p_{4,1}) + p_{3,1}p_{4,1}(p_{1,1}p_{2,0} + p_{1,0}p_{2,1}) \quad (29)$$

$$R_1(4, 4) = p_{1,1}p_{2,1}p_{3,1}p_{4,1} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
H_2^1(2) &= \sum_{i_1=1}^2 R[(2^{i_1}, 1^{2-i_1}), 4] = R[(2^1, 1^1), 4] + R[(2^2, 1^0), 4] \\
&= (p_{1,1}p_{2,2} + p_{1,2}p_{2,1} + p_{1,2}p_{2,2})p_{3,0}p_{4,0} + (p_{3,1}p_{4,2} + p_{3,2}p_{4,1} + \\
&\quad p_{3,2}p_{4,2})p_{1,0}p_{2,0} + p_{1,0}p_{2,2}p_{3,2}p_{4,0}
\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
H_2^1(3) &= \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=0}^{2-i_1} R[(3^{i_1}, 2^{i_2}, 1^{k-I_2}), 4] = R[(3^1, 2^0, 1^1), 4] \\
&\quad + R[(3^1, 2^1, 1^0), 4] + R[(3^2, 2^0, 1^0), 4] \\
&= (p_{1,3}p_{2,1} + p_{1,1}p_{2,3} + p_{1,3}p_{2,2} + p_{1,2}p_{2,3} + p_{1,3}p_{2,3})p_{3,0}p_{4,0} + \\
&\quad p_{1,0}p_{2,0}(p_{3,1}p_{4,3} + p_{3,3}p_{4,1} + p_{3,3}p_{4,2} + p_{3,2}p_{4,3} + p_{3,3}p_{4,3}) \\
&\quad + p_{1,0}(p_{2,3}p_{3,1} + p_{2,1}p_{3,3} + p_{2,3}p_{3,2} + p_{2,2}p_{3,3} + p_{2,3}p_{3,3})p_{4,0}
\end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
H_3^1(2) &= \sum_{i_1=1}^2 R[(2^{i_1}, 1^{3-i_1}), 4] = R[(2^1, 1^2), 4] + R[(2^2, 1^1), 4] \\
&= p_{1,0}(p_{2,2}p_{3,1}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,2}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,1}p_{4,2}) + p_{1,2}p_{2,0}p_{3,1}p_{4,1} \\
&\quad + p_{1,1}(+p_{2,1}p_{3,1}p_{4,2}) + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,1}p_{4,0} \\
&\quad + p_{1,1}(p_{2,2}p_{3,1} + p_{2,1}p_{3,2})p_{4,0} + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,0}p_{4,1} \\
&\quad + p_{1,1}(p_{2,2}p_{3,0}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,0}p_{4,2}) + p_{1,0}(p_{2,2}p_{3,2}p_{4,1}) \\
&\quad + p_{2,2}p_{3,1}p_{4,2} + p_{2,1}p_{3,2}p_{4,2} \\
&\quad + (p_{1,1}p_{3,2}p_{4,2} + p_{1,2}p_{3,1}p_{4,2} + p_{1,2}p_{3,2}p_{4,1})p_{2,0} \\
&\quad + (p_{1,1}p_{2,2}p_{3,2} + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,2} + p_{1,2}p_{2,2}p_{3,1})p_{4,0} \\
&\quad + (p_{1,1}p_{2,2}p_{4,2} + p_{1,2}p_{2,1}p_{4,2} + p_{1,2}p_{2,2}p_{4,1})p_{3,0}
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
H_3^1(3) &= \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=0}^{2-i_1} R[(3^{i_1}, 2^{i_2}, 1^{3-I_2}), 4] \\
&= R[(3^1, 2^0, 1^2), 4] + R[(3^1, 2^1, 1^1), 4] + R[(3^2, 2^0, 1^1), 4] \\
&= (p_{1,3}p_{2,1}p_{3,1} + p_{1,1}p_{2,3}p_{3,1} + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,3} + p_{1,3}p_{2,2}p_{3,1} \\
&\quad + p_{1,2}p_{2,3}p_{3,1} + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,2} + p_{1,1}p_{2,3}p_{3,2} \\
&\quad + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,3} + p_{1,1}p_{2,2}p_{3,3} + p_{1,3}p_{2,3}p_{3,1} + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,3} \\
&\quad + p_{1,1}p_{2,3}p_{3,3})p_{4,0} + (p_{1,3}p_{2,1}p_{4,1} \\
&\quad + p_{1,1}p_{2,3}p_{4,1} + p_{1,1}p_{2,1}p_{4,3} + p_{1,3}p_{2,2}p_{4,1} + p_{1,2}p_{2,3}p_{4,1} \\
&\quad + p_{1,3}p_{2,1}p_{4,2} + p_{1,1}p_{2,3}p_{4,2} + p_{4,3}p_{1,2}p_{2,1} \\
&\quad + p_{1,1}p_{2,2}p_{4,3} + p_{1,3}p_{2,3}p_{4,1} + p_{2,1}p_{4,3}p_{1,3} + p_{1,1}p_{2,3}p_{4,3})p_{3,0} \\
&\quad + (p_{1,3}p_{3,1}p_{4,1} + p_{1,1}p_{3,3}p_{4,1} \\
&\quad + p_{1,1}p_{3,1}p_{4,3} + p_{1,3}p_{3,2}p_{4,1} + p_{1,3}p_{3,1}p_{4,2} + p_{1,2}p_{3,1}p_{4,3} \\
&\quad + p_{1,2}p_{3,3}p_{4,1} + p_{1,1}p_{3,3}p_{4,2} \\
&\quad + p_{1,1}p_{3,2}p_{4,3} + p_{1,3}p_{3,3}p_{4,1} + p_{1,3}p_{3,1}p_{4,3} + p_{1,1}p_{3,3}p_{4,3})p_{2,0} \\
&\quad + (p_{2,3}p_{3,1}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,3}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,1}p_{4,3} + p_{2,3}p_{3,2}p_{4,1} \\
&\quad + p_{2,3}p_{3,1}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,3}p_{4,1} + p_{2,2}p_{3,1}p_{4,3} + p_{2,1}p_{3,2}p_{4,3} + p_{2,1}p_{3,3}p_{4,2} \\
&\quad + p_{2,3}p_{3,3}p_{4,1} + p_{2,3}p_{3,1}p_{4,3} + p_{2,1}p_{3,3}p_{4,3})p_{1,0}
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
H_4^1(2) &= \sum_{i_1=1}^2 R[(2^{i_1}, 1^{4-i_1}), 4] = R[(2^1, 1^3), 4] + R[(2^2, 1^2), 4] \\
&= (p_{1,2}p_{2,1} + p_{1,1}p_{2,2})p_{3,1}p_{4,1} + p_{1,1}p_{2,1}(p_{3,2}p_{4,1} + p_{3,1}p_{4,2}) \\
&\quad + p_{1,2}(p_{2,2}p_{3,1}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,2}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,1}p_{4,2}) \\
&\quad + p_{1,1}(p_{2,2}p_{3,1}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,2}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,2}p_{4,2})
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
H_4^1(3) &= \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=0}^{2-i_1} R[(3^{i_1}, 2^{i_2}, 1^{4-I_2}), 4] \\
&= R[(3^1, 2^0, 1^3), 4] + R[(3^1, 2^1, 1^2), 4] + R[(3^2, 2^0, 1^2), 4] \\
&= p_{1,3}p_{2,1}p_{3,1}p_{4,1} + p_{1,1}(p_{2,3}p_{3,1}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,3}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,1}p_{4,3}) \\
&\quad + p_{1,3}(p_{2,2}p_{3,1}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,2}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,1}p_{4,2}) + \\
&\quad p_{1,2}(p_{2,3}p_{3,1}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,3}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,1}p_{4,3}) \\
&\quad + p_{1,1}p_{2,1}(p_{3,3}p_{4,2} + p_{3,2}p_{4,3}) + p_{1,1}p_{2,3}(p_{3,1}p_{4,2} + p_{3,2}p_{4,1}) \\
&\quad + p_{1,1}p_{2,2}(p_{3,1}p_{4,3} + p_{3,3}p_{4,1}) \\
&\quad + p_{1,1}(p_{2,3}p_{3,1}p_{4,3} + p_{2,3}p_{3,3}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,3}p_{4,3}) \\
&\quad + p_{1,3}(p_{2,3}p_{3,1}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,3}p_{4,1} + p_{2,1}p_{3,1}p_{4,3})
\end{aligned} \tag{36}$$

enfin :

$$R_{s,1} = (28) + (29) + (30) + (31) + (32) + (33) + (34) + (35) + (36)$$

Niveau 0 :

il est clair alors que :

$$R_{s,0} = 1 - (R_{s,1} + R_{s,2} + R_{s,3}) \tag{37}$$

ainsi, en remplaçant les $p_{i,j}$ par leurs valeurs, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
j &= 3; & R_{s,3} &= P\{\Phi(X) = 3\} = 0.03 \\
j &= 2; & R_{s,2} &= P\{\Phi(X) = 2\} = 0.4964 \\
j &= 1; & R_{s,1} &= P\{\Phi(X) = 1\} = 0.2286 \\
j &= 0; & R_{s,0} &= P\{\Phi(X) = 0\} = 0.245
\end{aligned}$$

Dans cet exemple, on remarque que :

$$R_{s,2} > R_{s,0} > R_{s,1} > R_{s,3}$$

et la fiabilité de ce système est :

$$\begin{aligned} j &= 0; & P\{\Phi(X) \geq 0\} &= 1 \\ j &= 1; & P\{\Phi(X) \geq 1\} &= 0.755 \\ j &= 0; & P\{\Phi(X) \geq 2\} &= 0.5264 \\ j &= 0; & P\{\Phi(X) \geq 3\} &= 0.03 \end{aligned}$$

3.3.3 Exemple 2

Dans cet exemple, on pose : $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$ ($k_1 > k_2 > k_3$).

De même, on peut représenter dans le tableau ci après, les états du système en fonction des états de ses composants.

$\Phi(X)$	0	1	2	3
	(0,0,0,0)	(1,1,1,1)	(3,2,2,2)	(1,2,3,3)
	(0,0,0,1)	(1,1,1,2)	(3,2,2,3)	(2,2,3,3)
X	(0,0,0,2)	(1,1,1,3)	(3,2,3,0)	(2,3,3,3)
	(0,0,0,3)	(1,1,2,1)	(3,2,3,1)	(1,3,3,3)
	(0,0,1,0)	(1,1,2,2)	(3,2,3,2)	(3,3,2,1)
	(0,0,1,1)	(1,1,2,3)	(2,3,2,0)	(3,3,2,2)
	(0,0,1,2)	(1,1,3,1)	(2,3,2,1)	(3,3,2,3)
	(0,0,1,3)	(1,1,3,2)	(2,3,2,2)	(3,3,3,1)
	(0,0,2,0)	(2,1,1,1)	(2,2,3,0)	(3,3,3,2)
	(0,0,2,1)	(2,1,1,2)	(2,2,3,1)	(3,3,3,3)
	(0,0,2,2)	(2,1,1,3)	(2,2,3,2)	+
	(0,0,2,3)	(2,2,1,1)	(3,2,2,0)	
	(0,0,3,0)	(2,2,1,2)	(3,2,2,1)	
	(0,0,3,1)	(2,2,1,3)	(3,2,2,2)	
	(0,0,3,2)	(2,3,1,1)	(2,2,2,2)	
	(1,0,0,0)	(2,3,1,2)	(2,3,2,3)	
	(1,0,0,1)	(2,3,1,3)	(1,2,2,2)	
	(1,0,0,2)	(2,3,2,1)	(3,2,2,3)	
	(1,0,0,3)	(2,3,2,2)	(1,3,2,3)	
	(1,0,1,0)	(2,3,2,3)	(3,2,3,1)	
	(1,0,1,1)	(2,1,2,1)	+	
	(1,0,1,2)	(2,1,2,2)		
	(1,0,1,3)	(2,1,2,3)		
	(1,0,2,0)	(2,1,3,1)		
	(1,0,2,1)	(2,1,3,2)		
	(1,0,2,2)	(2,2,3,1)		
	(1,0,2,3)	(2,2,3,2)		
	(1,0,3,0)	(3,1,3,1)		
	+	+		

Dans cet exemple, le système a une structure :

-2 composants consécutifs sur 4 : G au niveau 3.

-3 composants consécutifs sur 4 : G au niveau 2

-4 composants consécutifs sur 4 : G au niveau 1 (structure en série).

calculons alors les probabilités pour que le système soit à l'état : 3, 2, 1 et 0.

Niveau 3 :

$$j = 3; k_3 = 2$$

$$R_{s,3} = \sum_{k=2}^4 [R_3(k, 4)] = R_3(2, 4) + R_3(3, 4) + R_3(4, 4)$$

avec

$$\begin{aligned} R_3(2, 4) = & p_{1,3} (p_{2,3}p_{3,2}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,3}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,2}p_{4,3} + p_{2,3}p_{3,2}p_{4,1} + p_{2,2}p_{3,3}p_{4,1}) \\ & + p_{1,2} (p_{2,3}p_{3,2}p_{4,3} + p_{2,3}p_{3,3}p_{4,2} + p_{2,2}p_{3,3}p_{4,3} + p_{2,3}p_{3,3}p_{4,1}) \\ & + p_{1,1} (p_{2,3}p_{3,3}p_{4,2} + p_{2,3}p_{3,2}p_{4,3} + p_{2,2}p_{3,3}p_{4,3}) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} R_3(3, 4) = & p_{1,3}p_{2,3} (p_{3,3}p_{4,2} + p_{3,2}p_{4,3} + p_{3,3}p_{4,1}) \\ & + (p_{1,3}p_{2,2} + p_{1,2}p_{2,3}) p_{3,3}p_{4,3} + p_{1,1}p_{2,3}p_{3,3}p_{4,3} \end{aligned} \quad (39)$$

$$R_3(4, 4) = p_{1,3}p_{2,3}p_{3,3}p_{4,3} \quad (40)$$

enfin

$$R_{s,3} = (38) + (39) + (40)$$

Niveau 2 :

$$j = 2; k_2 = 3, \quad k_h = k_3 = 2 > 1$$

$$\begin{aligned}
R_{s,2} &= \sum_{k=3}^4 \left[R_2(k, 4) + \sum_{h=3, k_h > 1}^3 H_k^2(h) \right] \\
&= \sum_{k=3}^4 [R_2(k, 4) + H_k^2(3)] \\
&= R_2(3, 4) + R_2(4, 4) + H_3^2(3) + H_4^2(3)
\end{aligned}$$

où

$$R_2(3, 4) = (p_{1,2}p_{4,1} + p_{1,1}p_{4,2})p_{2,2}p_{3,2} \quad (41)$$

$$R_2(4, 4) = p_{1,2}p_{2,2}p_{3,2}p_{4,2} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
H_3^2(3) &= \sum_{i_1=1}^1 R \left[\left(3^{i_1}, 2^{k-i_1} \right), 4 \right] = R \left[(3^1, 2^2), 4 \right] \\
&= (p_{1,3}p_{4,1} + p_{1,1}p_{4,3})p_{2,2}p_{3,2} + p_{1,2}p_{4,1}(p_{2,3}p_{3,2} + p_{2,2}p_{3,3}) + \\
&\quad p_{1,1}(p_{2,2}p_{3,3} + p_{2,3}p_{3,2})p_{4,2}
\end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
H_4^2(3) &= \sum_{i_1=1}^1 R \left[\left(3^{i_1}, 2^{k-i_1} \right), 4 \right] = R \left[(3^1, 2^3), 4 \right] \\
&= (p_{1,3}p_{2,2} + p_{1,2}p_{2,3})p_{3,2}p_{4,2} + p_{1,2}p_{2,2}(p_{3,2}p_{4,2} + p_{3,2}p_{4,3})
\end{aligned} \quad (44)$$

enfin :

$$R_{s,2} = (41) + (42) + (43) + (44)$$

Niveau 1 :

$$j = 1; k_1 = 4, \quad k_h = k_2 = 3 > 1, k_3 = 2 > 1$$

$$R_{s,1} = \sum_{k=4}^4 \left[R_1(k, 4) + \sum_{h=2, k_h > 1}^3 H_k^1(h) \right] = R_1(4, 4) + H_4^1(2) + H_4^1(3)$$

avec :

$$R_1(4, 4) = p_{1,1}p_{2,1}p_{3,1}p_{4,1} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} H_4^1(2) &= \sum_{i_1=1}^1 R \left[\left(2^{i_1}, 1^{k-i_1} \right), 4 \right] = R \left[(2^1, 1^3), 4 \right] \\ &= p_{2,1}p_{3,1} (p_{1,2}p_{4,1} + p_{1,1}p_{4,2}) + p_{1,1} (p_{2,2}p_{3,2} + p_{2,1}p_{3,2}) p_{4,1} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} H_4^1(3) &= \sum_{i_1=1}^1 \sum_{i_2=0}^1 R \left[\left(3^{i_1} 2^{i_2}, 1^{k-(i_1+i_2)} \right), 4 \right] \\ &= R \left[(3^1, 2^0, 1^3), 4 \right] + R \left[(3^1, 2^1, 1^2), 4 \right] \\ &= (p_{1,1}p_{2,3} + p_{1,3}p_{2,1} + p_{1,2}p_{2,3} + p_{1,3}p_{2,2}) p_{3,1}p_{4,1} \\ &\quad + p_{1,1}p_{2,1} (p_{3,3}p_{4,1} + p_{3,1}p_{4,3} + p_{3,3}p_{4,2} + p_{3,2}p_{4,3}) \\ &\quad + p_{3,1}p_{4,2} (p_{1,1}p_{2,3} + p_{1,3}p_{2,1}) + p_{3,2}p_{4,1} (p_{1,3}p_{2,1} + p_{1,1}p_{2,3}) \\ &\quad + p_{3,1}p_{4,3} (p_{1,1}p_{2,2} + p_{1,2}p_{2,1}) + p_{3,3}p_{4,1} (p_{1,1}p_{2,2} + p_{1,2}p_{2,1}) \end{aligned} \quad (47)$$

enfin :

$$R_{s,1} = (45) + (46) + (47)$$

Niveau 0 :

$$R_{s,0} = 1 - (R_{s,1} + R_{s,2} + R_{s,3}) \quad (48)$$

En remplaçant les $p_{i,j}$ par leurs valeurs, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 j &= 3; & R_{s,3} &= P\{\Phi(X) = 3\} = 0.3022 \\
 j &= 2; & R_{s,2} &= P\{\Phi(X) = 2\} = 0.1386 \\
 j &= 1; & R_{s,1} &= P\{\Phi(X) = 1\} = 0.0199 \\
 j &= 0; & R_{s,0} &= P\{\Phi(X) = 0\} = 0.5393
 \end{aligned}$$

Dans cet exemple, on remarque que :

$$R_{s,0} > R_{s,3} > R_{s,2} > R_{s,1}$$

et la fiabilité de ce système est :

$$\begin{aligned}
 j &= 0; & P\{\Phi(X) \geq 0\} &= 1 \\
 j &= 1; & P\{\Phi(X) \geq 1\} &= 0.4607 \\
 j &= 0; & P\{\Phi(X) \geq 2\} &= 0.4408 \\
 j &= 0; & P\{\Phi(X) \geq 3\} &= 0.3022
 \end{aligned}$$

Remarque :

On remarque que les calculs sont fastidieux, mais fort heureusement qu'il y a le calcul numérique. Alors, avec un programme écrit dans le langage C, les résultats des exemples précédents sont obtenus en utilisant un ordinateur Pentium-4 ayant une RAM de 736 MB. Le temps de calcul croît avec les valeurs croissantes de n, M mais pas d'une façon exponentielle.

Remarque :

la méthode proposée est aussi valide quand k est supposé constant, i.e :

$$k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_{M-1} = k_M = k$$

dans ce cas, la structure du système est la même pour tous les niveaux d'état du système.

3.3.4 Comparaison avec d'autres résultats

Récemment, plusieurs chercheurs comme Zuo et al.[28, 64], Huang et al.[48, 49, 63], Belaloui & Ksir [73, 78 – 83, 85, 86], Levitin et al.[44, 46, 51, 52, 61, 62, 66, 69, 71]...etc se sont investis dans la théorie des systèmes à multi-états à savoir les systèmes k -sur- n et les systèmes k consécutifs-sur- n , vu leur importance et leur large application dans divers domaines (industrie, médecine, etc...). Ils ont établi des algorithmes et des formules pour calculer la fiabilité de tels systèmes.

*Dans ce paragraphe, on procède à la comparaison de quelques expressions récursives données avec notre méthode proposée.

On donne d'abord la définition du vecteur lien minimal car cette notion est utilisée dans les travaux en question.

Définition :

$Y \in S^n$ est un vecteur lien minimal à l'état j pour le système ssi

$$\Phi(Y) \geq j \quad \text{et} \quad \Phi(X) < j \quad \text{pour tout} \quad X < Y$$

avec

$$X < Y \quad \text{si} \quad x_i \leq y_i \quad \forall i, \quad \text{et} \quad x_i < y_i \quad \text{pour au moins un } i$$

A) Huang et al.(2003) [63] ont proposé un algorithme pour évaluer la distribution d'état d'un système k -consécutifs-parmi- n : F décroissant à multi-états qui est le suivant :

$$R(n, k) = v_n R(n-1, k) + u_n \left[\left(\prod_{j=n-k+1}^{n-1} u_j \right) R^*(n-k) + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} v_i \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} u_j \right) R(i-1, k) \right] \quad (49)$$

où $R(n; k)$ est la probabilité qu'il y ait au moins k composants consécutifs dans un système de n composants dans un état de fonctionnement et les autres composants sont en panne.

$$\text{et} \quad R^*(i) = \prod_{j=1}^i (u_j + v_j) \quad \text{por} \quad i \geq 1,$$

avec u_i : probabilité que le composant i fonctionne.

v_i : probabilité que le composant i est en panne.

et avec les conditions limites suivantes :

$$R(k, k) = u_1 u_2 \dots u_k$$

$$R(a, b) = 0 \quad \text{pour } b > a > 0$$

Cette formule récursive évalue la mesure exacte de $R_{s,j} = P(\Phi_s \geq j) = P\{\Phi(X) \geq j\}$ quand le vecteur lien minimal a au plus deux éléments différents, mais quand il a plus de deux éléments différents, la formule peut être utilisée pour trouver les bornes sup et inf de $R_{s,j} = P(\Phi_s \geq j)$.

En prenant l'exemple 5 donné dans leur papier avec les données suivantes :

$$n = 3, \quad M = 3, \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 1,$$

$$\begin{aligned} p_{1,0} &= 0.1, & p_{1,1} &= 0.2, & p_{1,2} &= 0.3, & p_{1,3} &= 0.4, \\ p_{2,0} &= 0.2, & p_{2,1} &= 0.2, & p_{2,2} &= 0.3, & p_{2,3} &= 0.3, \\ p_{3,0} &= 0.1, & p_{3,1} &= 0.1, & p_{3,2} &= 0.2, & p_{3,3} &= 0.6. \end{aligned}$$

Ils calculent $R_{s,1}$ ($R_{s,1} = 0.648$) et $R_{s,2}$ ($R_{s,2} = 0.474$) par le biais de leur équation (49), mais pour $R_{s,3}$ ($R_{s,3} = P(\Phi_s \geq 3) = P(\Phi_s = 3)$) ils donnent une borne sup et une borne inf comme suit (**0.318** $\leq R_{s,3} \leq$ **0.573**) et donc ils approximent $R_{s,3}$ ($R_{s,3} \approx$ **0.4455**).

Alors que notre méthode nous permet de calculer directement et exactement

$$(R_{s,j} = P\{\Phi(X) = j\} = P(\Phi_s = j), \quad j = 1, 2, \dots, M)$$

pour n'importe quel nombre d'éléments différents dans les vecteurs liens minimaux du système.

pour

$$\begin{aligned}
R_{s,3} &= P\{\Phi(X) = 3\} = P(\Phi_s = 3) = \sum_{k=1}^3 [R_3(k, 3)] = R_3(1, 3) + R_3(2, 3) + R_3(3, 3) \\
&= 0.165 + 0.198 + 0.072 = \mathbf{0.435}
\end{aligned}$$

$$R_{s,2} = P\{\Phi(X) = 2\} = P(\Phi_s = 2) = 0.039$$

$$R_{s,1} = P\{\Phi(X) = 1\} = P(\Phi_s = 1) = 0.174$$

B) Zuo et al.(2003) [64] ont évalué la distribution d'état du système k -consécutifs-parmi- n : G décroissant à multi-états comme suit :

En utilisant les vecteurs liens minimaux, ils ont établi une formule récursive pour trouver la distribution d'état exacte du système quand $M = 3$, et un algorithme pour l'encadrer quand $M \geq 4$.

Le cas ou $M = 3$,i.e

Quand chaque vecteur lien minimal à l'état j du système a exactement 3 valeurs différentes $\{m_0, m_1, m_2\}$ avec $0 \leq m_0 < m_1 < m_2 = j$.

Pour que le système soit à l'état j ou à un état supérieur il faut au moins k_2 composants consécutifs $\geq m_2 = j$, au moins k_1 composants consécutifs $\geq m_1$ et tous les composants doivent être $\geq m_0$. Ainsi $n = k_0 > k_1 > k_2$

Alors, ils proposent la formule suivante qui est basée sur la loi des probabilités totales :

$$R_2(n, k_1, k_2) = \Pr(\text{il y a au moins } k_l \text{ composants consécutifs } \geq m_l \text{ pour } l = 0, 1, 2)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (Q_{nm_1} - Q_{nm_0}) R_2(n-1, k_1, k_2) + \\ \sum_{i=n-k_1+1}^{n-1} (Q_{im_1} - Q_{im_0}) \left[\begin{array}{l} R(i-1, k_1) R^{(n)}(n-i, k_2) \\ + R_2(i-1, k_1, k_2) \left(\prod_{j=i+1}^n P_{jm_1} - R^{(n)}(n-i, k_2) \right) \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$\left. + \left\{ \begin{array}{l} \left[R^{(n)}(k_1, k_2) \prod_{i=1}^{n-k_1} P_{im_0} + R'(n-k_1, k_2) \prod_{i=n-k_1+1}^n P_{im_1} \right] \\ - R'(n-k_1, k_2) R^{(n)}(k_1, k_2) \end{array} \right\} \right. \\
\left. + \sum_{h=1}^{k_2-1} \left[\begin{array}{l} \left(\prod_{l=n-k_1+1}^{n-k_1+h} P_{lm_2} \right) (Q_{(n-k_1+h+1)m_2} - Q_{(n-k_1+h+1)m_1}) \\ \prod_{l=n-k_1+h+2}^n P_{lm_1} - R^{(n)}(k_1-h-1, k_2) \left(\prod_{l=n-k_1-k_2+h+1}^{n-k_1} P_{lm_2} \right) \\ Q_{(n-k_1-k_2+h)m_2} \left(\prod_{i=1}^{n-k_1-k_2+h-1} P_{im_0} - R'(n-k_1-k_2+h-1, k_2) \right) \end{array} \right] \right\} \quad (50)$$

où :

- $R(n, k)$: probabilité qu'il y ait au moins k composants consécutifs en fonctionnement et tous les autres sont en panne.

- $R(a, b)$: probabilité qu'il y ait au moins b composants consécutifs $\geq m_1$ parmi les a premiers composants.

- $R^{(n)}(a, b)$: probabilité qu'il y ait au moins b composants consécutifs $\geq m_2$ parmi les a derniers composants.

- $R'(a, b)$: probabilité qu'il y ait au moins b composants consécutifs $\geq m_2$ parmi les a premiers composants.

$R_2(n, k_1, k_2)$: probabilité qu'il y ait au moins k_l composants consécutifs $\geq m_l$ pour $l = 0, 1, 2$ dans un système de n composants.

m_0, m_1, m_2 : entiers tel que $m_0 < m_1 < m_2$

k_j : nombre minimum de composants consécutifs $< j$.

$P_{ij} : \Pr(X_i \geq j), \quad Q_{ij} : \Pr(X_i < j)$

et :

- $R(a, b)$ peut être calculée par Eq.(49) donnée par Huang et al [63] avec les considérations suivantes :

$$u_i = p_{im_1}, \quad i = 1, 2, \dots, a,$$

$$v_i = Q_{im_1} - Q_{im_0}, \quad i = 1, 2, \dots, a,$$

o $R'(a, b)$ peut être calculée par l'Eq.(49) donnée par Huang et al [63] avec les considérations suivantes :

$$u_i = p_{im_2}, \quad i = 1, 2, \dots, a,$$

$$v_i = Q_{im_2} - Q_{im_0}, \quad i = 1, 2, \dots, a,$$

o $R^{(n)}(a, b)$ peut être calculée par l'Eq.(49) donnée par Huang et al [63] avec les considérations suivantes :

$$u_i = p_{im_2}, \quad i = n - a + 1, n - a + 2, \dots, n,$$

$$v_i = Q_{im_2} - Q_{im_1}, \quad i = n - a + 1, n - a + 2, \dots, n,$$

Le cas où $M \geq 4$

i.e qu'il y a des vecteurs liens minimaux à l'état j du système qui ont plus de 3 valeurs différentes, dans ce cas ils proposent un encadrement de la distribution d'état du système.

On remarque que cette formule est récursive, longue et complexe et elle utilise une autre formule qui est aussi récursive (celle qui est donnée par Huang et al.[63]).

Et en considérant l'exemple (section 5) de leur papier [64], avec les données suivantes :

$$n = 4, \quad k_1 = 4, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = 1, \quad M = 4,$$

$$\begin{aligned} p_{1,0} &= 0.1, & p_{1,1} &= 0.15, & p_{1,2} &= 0.2, & p_{1,3} &= 0.25, & p_{1,4} &= 0.3, \\ p_{2,0} &= 0.15, & p_{2,1} &= 0.2, & p_{2,2} &= 0.2, & p_{2,3} &= 0.2, & p_{2,4} &= 0.25, \\ p_{3,0} &= 0.1, & p_{3,1} &= 0.1, & p_{3,2} &= 0.15, & p_{3,3} &= 0.2, & p_{3,4} &= 0.45, \\ p_{4,0} &= 0.1, & p_{4,1} &= 0.1, & p_{4,2} &= 0.1, & p_{4,3} &= 0.35, & p_{4,4} &= 0.35. \end{aligned}$$

Leur formule donne les résultats suivants :

$$R_{s1} = P(\Phi_s \geq 1) = 0.62, \quad R_{s2} = P(\Phi_s \geq 2) = 0.39, \quad R_{s3} = P(\Phi_s \geq 3) = 0.357$$

mais pour

$$R_{s4} = P(\Phi_s \geq 4) = P(\Phi_s = 4)$$

ils obtiennent une borne sup et une borne inf ($0.2557 \leq R_{s4} \leq 0.357$).

Mais en utilisant notre méthode, on peut calculer exactement

$$R_{s,4} = P\{\Phi(X) = 4\} = P(\Phi_s = 4) = \mathbf{0.2899}$$

En conclusion, on peut voir que la formule proposée dans notre travail est non restrictive, elle nous permet d'évaluer $R_{s,j} = P(\Phi_s = j) = P\{\Phi(X) = j\}$, $j = 1, 2, \dots, M$ pour tout $M \geq 1$ des systèmes multinaires k consécutifs-parmi- $n : G$ dans les cas croissant, décroissant et constant et aussi pour n'importe quel nombre d'éléments différents dans les vecteurs liens minimaux. Et bien sûr, l'avantage d'une formule non récursive est que pour un n (nombre de composants du système) fixé, on peut calculer $R_{s,j} = P\{\Phi(X) = j\}$ sans être obligé de calculer $R_{s,j}$ pour tout m ($1 \leq m \leq n - 1$).

3.3.5 Cas particulier ($M = 1$)

Quand $M = 1$, le système et ses composants sont binaires, c'est à dire ou en fonction ou en panne. Alors notre formule qui calcule la distribution d'état du système se réduit à :

$$R_{s,1} = P\{\Phi(X) = 1\} = \sum_{k=k_1}^n R_1(k, n) = R(k, n) \quad (51)$$

où :

$$R(k, n) : P \left\{ \begin{array}{l} \text{au moins } k \text{ composants consécutifs sont dans des états de fonctionnement,} \\ \text{les autres } (n - k) \text{ composants sont en panne} \end{array} \right\}$$

et quand les composants sont i.i.d, on obtient :

$$P\{\Phi(X) = 1\} = R(k, n) = \sum_{\alpha=k}^n N(\alpha, n - \alpha + 1, n) p^\alpha q^{n-\alpha} \quad (52)$$

où :

$N(\alpha, n - \alpha + 1, n)$: nombre de façons de placer α boules identiques dans $(n - \alpha + 1)$ urnes distinctes, en ayant au moins α boules et au plus n boules dans chacune des urnes. (voir Derman, Lieberman, Ross, (1982) [10]).

Chapitre 4

Encadrement de la fiabilité des systèmes k -consécutifs-sur- n :G à multi-états

4.1 Introduction

Il est important de signaler que le calcul direct de la fiabilité des systèmes est très laborieux, même quand les systèmes sont simples, binaires et ayant un nombre réduit de composants, alors le calcul se complique et devient pratiquement impossible surtout quand les systèmes sont multinaires et ont une configuration complexe. On est quelques fois contraint à résoudre ce problème en adoptant d'autres méthodes d'approximation (estimation [66, 69, 77], simulation comme par la méthode de Monté-Carlo [70 – 72], optimisation qui est soit à maximiser la fiabilité du système, soit à minimiser le coût total et dont les algorithmes génétiques sont appréciablement utilisés [43, 44, 52, 61, 62, 67] etc....). Et parmi ces méthodes, celle qui nous aide à fournir un encadrement de la valeur de cette fiabilité.

Le problème de calculer la fiabilité des systèmes k consécutifs-parmi- n à plusieurs états s'est posé dans plusieurs travaux, comme ceux de Levitin, Lisnianski [51, 61, 62] où ils ont eu recours à l'estimation en utilisant la fonction génératrice des moments universelle (UMGF). Et ceux de [65], [78, 80, 81] où l'approche adoptée pour résoudre ce problème est celle de l'encadrement de

la valeur de la fiabilité. Pour cela, les résultats de ([4],[30]) peuvent être appliqués pour établir des bornes de la fiabilité de tels systèmes. Et ceci en utilisant le concept de vecteurs critiques de connection au niveau j , qui n'est autre que le concept de vecteurs liens minimaux au niveau j .

L'objet de ce paragraphe est justement de donner une borne supérieure et une borne inférieure du système k consécutifs-parmi- $n : G$ à multi-états.

Pour cela, on commence par donner les notations suivantes :

4.1.1 Notations :

n : nombre de composants dans le système.

$M+1$: nombre d'états du système et ses composants, où l'état M : fonctionnement parfait, l'état 0 : panne totale.

$S : \{0, 1, 2, \dots, M\}$.

X_i : état du composant i , $X_i \in S$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$X : (X_1, X_2, \dots, X_n)$: vecteur d'états des composants (vecteur aléatoire).

$\Phi(X)$: fonction de structure de l'état du system : $\Phi(X) \in S$.

k_j : nombre minimum de composants consécutifs avec $X_i \geq j$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

T_i : durée de vie du composant i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

V_n^j : durée de vie du système k consécutifs-sur- $n : G$ à multi-états.

F : fonction de distribution cumulative, $\bar{F} = 1 - F$

L_n : nombre de composants dans chaque bloc B_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

L_i : nombre de composants dans le bloc B_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Z_n^j : durée de vie du système k consécutifs-sur- $L_n : G$ série à multi-états.

4.2 Le modèle

On considère un système constitué de n composants arrangés linéairement. Et soit X_i (resp. T_i) l'état (resp. la durée de vie) du composant i ($i = 1, 2, \dots, n$), on note :

$$X_i = j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$$

c'est à dire le composant i est à l'état j .

Définition 1 :

Un système k consécutifs-parmi- $n : G$ à multi-états fonctionne ssi il y a au moins k composants consécutifs dans des états de fonctionnement.

On considère que :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i \geq j \implies \text{le composant } i \text{ fonctionne} \\ X_i < j \implies \text{le composant } i \text{ est en panne} \end{array} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n, \\ j = 1, \dots, M \end{array} \right\}$$

et similairement pour le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(X) \geq j \implies \text{le système fonctionne} \\ \Phi(X) < j \implies \text{le système est en panne} \end{array} \right\}$$

Et comme j peut avoir des valeurs différentes, les termes "fonctionnement" et "panne" ont des sens dynamiques.

En considérant ceci, la définition 1 peut être reformulée comme suit :

Définition 2 :

Un système k consécutifs-parmi- $n : G$ à multi-états fonctionne (i.e $\Phi(X) \geq j, j = 1, \dots, M$) ssi il y a au moins k composants consécutifs qui sont dans des états supérieurs ou égaux à l'état j .

La fonction de structure de l'état de ce système est donnée par :

$$\Phi(X) = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \min_{i \leq l \leq i+k-1} X_l$$

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=i}^{i+k-1} X_l$$

où, X_1, X_2, \dots, X_n sont les états des composants $1, 2, \dots, n$.

La durée de vie V_n^j de ce système est donnée par :

$$V_n^j = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \min_{i \leq l \leq i+k-1} T_l \tag{53}$$

où, T_1, T_2, \dots, T_n sont les durées de vie des composants $1, 2, \dots, n$.

Hypothèses :

1) le système est monotone

- $\Phi(X)$ est non décroissante en chaque argument.

- $\Phi(j) = \Phi(j, j, \dots, j) = j$ pour $j \in S$.

2) les X_i (états du composant i) sont mutuellement indépendants .

3) les états possibles de chaque composant et du système sont ordonnés :

$$\text{état } 0 \leq \text{état } 1 \leq \dots \leq \text{état } M.$$

4) les probabilités d'états des composants sont connues.

La première hypothèse veut dire qu'une amélioration d'un composant ne peut pas conduire à une dégradation du système.

Dans ce qui suit, on donne quelques définitions concernant les liens minimaux et les coupes minimales des systèmes à multi-états.

4.2.1 Définitions des liens minimaux et coupes minimales :

Définition 1 :

Un vecteur X est dit vecteur-connection au niveau j si :

$$\Phi(X) = j, \quad j \in \{0, 1, \dots, M\}$$

Définition 2 :

Un vecteur X est dit vecteur-connection supérieur au niveau j si :

$$\Phi(X) = j \text{ et } \Phi(Y) < j \text{ pour tout } Y < X, \quad j \in \{1, \dots, M\}$$

Définition 3 :

Un vecteur X est dit vecteur-connection inférieur au niveau j si :

$$\Phi(X) = j \text{ et } \Phi(Y) > j \text{ pour tout } Y > X, \quad j \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

Remarque 1 :

L'existence, pour $j \in \{1, \dots, M\}$ de vecteur-connexions supérieurs au niveau j et pour $j \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$ de vecteur-connexions inférieurs au niveau j est garantie par le fait que Φ soit monotone croissante et que $\Phi(j) = j$ pour tout j .

Définition 4 :

Un vecteur X est dit vecteur-lien au niveau j si et seulement si

$$\Phi(X) \geq j, \quad j \in \{1, \dots, M\}.$$

Définition 5 :

X vecteur-lien au niveau j est dit minimal si et seulement si

$$\Phi(X) \geq j, \quad \Phi(Y) < j \quad \text{pour tout} \quad Y < X, \quad j \in \{1, \dots, M\}.$$

Définition 6 :

Un vecteur X est dit vecteur-coupe au niveau j si et seulement si

$$\Phi(X) < j, \quad j \in \{1, \dots, M\}.$$

Définition 7 :

X vecteur-coupe au niveau j est dit minimal si et seulement si

$$\Phi(X) < j, \quad \Phi(Y) \geq j \quad \text{pour tout} \quad Y > X, \quad j \in \{1, \dots, M\}$$

Remarque 2 :

L'existence de liens minimaux et de coupes minimales au niveau j , ($j \in \{1, \dots, M\}$) est garantie par le fait que Φ soit monotone croissante et que pour tout j , $\Phi(j) = j$.

Définition 8 :

Soit X, Y 2 vecteurs d'états de composants, on a :

$$Y < X \quad \text{si} \quad y_i \leq x_i \quad \text{pour tout } i, \quad \text{et} \quad y_i < x_i \quad \text{pour au moins un } i$$

$Y > X$ si $y_i \geq x_i$ pour tout i , et $y_i > x_i$ pour au moins un i

On traite à présent, les systèmes k consécutifs-parmi- n : G à multi-états en considérant les deux cas possibles de k :

4.2.2 Cas (a) : k constant

Dans ce cas, on traite les systèmes k consécutifs-sur- n : G à multi-états avec k constant, c'est à dire, le système fonctionne ssi au moins k composants consécutifs doivent être dans des états supérieurs ou égaux à l'état j , ($j = 1, 2, \dots, M$). Ici k est indépendant de la valeur du niveau d'état du système.

En d'autres termes, pour maintenir au moins un certain niveau d'état du système, on a besoin du même nombre de composants consécutifs qui soient supérieurs ou égaux à un certain état.

On procède maintenant à encadrer la fiabilité des systèmes k consécutifs-sur- n : G à multi-états.

4.2.3 Théorème :

Soit un système k consécutifs-sur- n : G à multi-états et soit V_n^j sa durée de vie, la fiabilité de ce système $\left(P \left(V_n^j > t \right) \right)$ est encadrée de la manière suivante :

$$\frac{S_{i,j}(t)}{1 + 2^{\frac{(M-j+1)\overline{F}(t) - (M-j+1)^k \overline{F}^k(t)}{1 - (M-j+1)\overline{F}(t)}} \left[\frac{\overline{F}(t)}{\overline{q}(t)} \right]^k + (n-k+1)(M-j+1)^k \overline{F}^k(t)} \leq P(V_n^j > t) \leq S_{i,j}(t) \quad (54)$$

où

$$S_{i,j}(t) = \sum_{i=1}^{n-k+1} P_i(t), \quad P_i(t) = \prod_{l=i}^{i+k-1} \Delta_l(t), \quad \Delta_l(t) = \sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t) \quad (55)$$

et $T_{l,h}$: la durée de vie du composant l quand il est à l'état h , ($h = j, j+1, \dots, M$), et

$t \in (0, +\infty)$, il représente le temps.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

Lemme :

Soit Z une variable aléatoire, on a :

$$\text{si } Z \geq 0 \quad \text{alors } P(Z > 0) \geq \frac{(E(Z))^2}{E(Z^2)}$$

Démonstration :

La v.a Z peut être décomposée sous la forme suivante :

$$Z = (Z) 1_{(Z=0)} + (Z) 1_{(Z>0)}$$

où $1_{(Z)}$ est la fonction indicatrice :

$$1_{(Vraie)} = 1, 1_{(Faux)} = 0$$

alors

$$\begin{aligned} E(Z) &= E[(Z) 1_{(Z=0)} + (Z) 1_{(Z>0)}] \\ E(Z) &= E[(Z) 1_{(Z>0)}] \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Schwartz, on obtient :

$$E(Z) \leq [E(Z^2)]^{\frac{1}{2}} [E(1_{(Z>0)})]^{\frac{1}{2}}$$

$$\implies [E(Z)]^2 \leq E(Z^2) E(1_{(Z>0)})$$

puisque :

$$E(1_{(Z>0)}) = P(Z > 0)$$

alors

$$[E(Z)]^2 \leq E(Z^2) P(Z > 0)$$

d'où, on a notre résultat :

$$P(Z > 0) \geq \frac{[E(Z)]^2}{E(Z^2)}$$

Démonstration du théorème :

On considère l'évènement :

$$A_{i,j} = \{X_i \geq j, X_{i+1} \geq j, \dots, X_{i+k-1} \geq j\}, \quad i = 1, 2, \dots, n - k + 1, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (56)$$

alors

$$P(A_{i,j}) = p[X_i \geq j, X_{i+1} \geq j, \dots, X_{i+k-1} \geq j]$$

or

$$\begin{aligned} [X_l \geq j] &= [X_l = j \text{ ou } X_l = j + 1 \text{ ou } \dots \text{ ou } X_l = M] \\ &= [\cup_{h=j}^M X_l = h], \quad l = i, \dots, i + k - 1 \end{aligned}$$

alors

$$P(A_{i,j}) = \prod_{l=i}^{i+k-1} P[X_l \geq j] = \prod_{l=i}^{i+k-1} P \left[\bigcup_{h=j}^M X_l = h \right] = \prod_{l=i}^{i+k-1} \sum_{h=j}^M P(X_l = h) \quad (57)$$

Il est clair que :

$X_l = j \iff$ le composant l a une durée de vie $T_{l,j}$ quand il est à l'état j .

$X_l = j + 1 \iff$ le composant l a une durée de vie $T_{l,j+1}$ quand il est à l'état $j + 1$.

.....

$X_l = M \iff$ le composant l a une durée de vie $T_{l,M}$ quand il est à l'état M .

Alors, les évènements $\{X_l = h\}$ et $\{T_{l,h} > t\}$ sont équivalents, où $T_{l,h}$ représente la durée de vie du composant l quand il est à l'état $h, t \in (0, +\infty)$.

alors

$$\begin{aligned} P(V_n^j > t) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-k+1} A_{i,j}\right) \leq \sum_{i=1}^{n-k+1} P(A_{i,j}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=i}^{i+k-1} \sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t) \end{aligned}$$

on obtient donc une borne supérieure :

En posant :

$$\Delta_l(t) = \sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t) = \sum_{h=j}^M \bar{F}_{l,h}(t)$$

on obtient :

$$P(V_n^j > t) \leq \sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=i}^{i+k-1} \Delta_l(t) = S_{i,j}(t) \quad (58)$$

pour obtenir la borne inférieure, on définit la v.a :

$$Y_{i,j}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } X_i \geq j, X_{i+1} \geq j, X_{i+k-1} \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. , \quad i = 1, 2, \dots, n-k+1, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

et

$$Y_j(t) = \sum_{i=1}^{n-k+1} Y_{i,j}(t) \quad , j = 1, 2, \dots, M$$

alors :

$$P(V_n^j > t) = P(Y_j(t) > 0) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-k+1} \{Y_{i,j}(t) = 1\}\right) \quad (59)$$

en utilisant le résultat du lemme précédent, on a :

$$P(Y_j(t) > 0) \geq \frac{[E(Y_j(t))]^2}{E(Y_j^2(t))}$$

$$\begin{aligned}
E(Y_j(t)) &= E\left[\sum_{i=1}^{n-k+1} Y_{i,j}(t)\right] = \sum_{i=1}^{n-k+1} E(Y_{i,j}(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} P_i(t) = S_{i,j}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y_j^2(t)) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} Y_{i,j}(t)\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n-k+1} Y_{i,j}^2(t) + \sum_{u \neq v}^{n-k+1} Y_{u,j}(t)Y_{v,j}(t)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} E(Y_{i,j}(t)) + \sum_{u \neq v}^{n-k+1} E(Y_{u,j}(t)Y_{v,j}(t))
\end{aligned}$$

alors, on a :

$$P(V_n^j > t) \geq \frac{\left[\sum_{i=1}^{n-k+1} P(Y_{i,j}(t) = 1)\right]^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} P(Y_{i,j}(t) = 1) + \sum_{u \neq v}^{n-k+1} P(Y_{u,j}(t) = 1, Y_{v,j}(t) = 1)} \quad (60)$$

et comme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-k+1} P(Y_{i,j}(t) = 1) &= \sum_{i=1}^{n-k+1} P(X_i \geq j, X_{i+1} \geq j, X_{i+k-1} \geq j) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=i}^{i+k-1} \left[\sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=i}^{i+k-1} \Delta_l(t) = S_{i,j}(t)
\end{aligned}$$

donc

$$\left[\sum_{i=1}^{n-k+1} P(Y_{i,j}(t) = 1)\right]^2 = S_{i,j}^2(t)$$

Or la fonction de survie est définie comme suit :

$$\bar{F}_{i,j}(t) = P(T_{i,j} > t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

et en considérant les fonctions $\bar{F}(t)$ et $\bar{q}(t)$ ($\bar{q}(t) \neq 0$) telles que :

$$\bar{F}_{i,j}(t) \leq \bar{F}(t), \quad \bar{q}(t) \leq \bar{F}_{i,j}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{u \neq v} P(Y_{u,j}(t) = 1, Y_{v,j}(t) = 1) &= \sum_{|u-v| \leq k-1} P(Y_{u,j}(t) = 1, Y_{v,j}(t) = 1) \\ &+ \sum_{|u-v| \geq k} P(Y_{u,j}(t) = 1, Y_{v,j}(t) = 1) \\ &\leq 2 \sum_{1 \leq u-v \leq k-1} P(Y_{u,j}(t) = 1, Y_{v,j}(t) = 1) \\ &+ \sum_U \sum_V P(Y_{u,j}(t) = 1) P(Y_{v,j}(t) = 1) \\ &\leq 2 \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{u-v=r} P(Y_{u,j}(t) = 1, Y_{v,j}(t) = 1) \\ &+ \sum_U \sum_V P(Y_{u,j}(t) = 1) P(Y_{v,j}(t) = 1) \\ &\leq 2(n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k \sum_{r=1}^{k-1} [(M-j+1) \bar{F}(t)]^r \\ &+ [(n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k]^2 \\ &\leq 2(n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k \frac{(M-j+1) \bar{F}(t) - [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1) \bar{F}(t)} \\ &+ [(n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k]^2 \end{aligned}$$

en remplaçant dans l'équation (50), on trouve :

$$\begin{aligned}
P(V_n^j > t) &\geq \frac{S_{i,j}^2(t)}{S_{i,j}(t) + 2(n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)}} \\
&\quad + \left[(n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k \right]^2 \\
&\geq \frac{S_{i,j}(t)}{1 + 2 \frac{(n-k+1) [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} + [(n-k+1) [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k]^2}{S_{i,j}(t)}}}
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
S_{i,j}(t) &= \sum_{i=1}^{n-k+1} P_i(t) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n-k+1} (M-j+1)^k \bar{q}^k(t) = (n-k+1) [(M-j+1) \bar{q}(t)]^k
\end{aligned}$$

donc

$$P(V_n^j > t) \geq \frac{S_{i,j}(t)}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^k + (n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^k}$$

Ceci achève la démonstration.

4.2.4 Cas de composants indépendants et identiquement distribués

Dans ce cas, on suppose que les T_i sont indépendants et identiquement distribués, alors le résultat précédent se réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} + (n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k} \\
&\leq P(V_n^j > t) \leq (n-k+1) [(M-j+1) \bar{F}(t)]^k
\end{aligned} \tag{61}$$

Exemple :

Dans cet exemple, on suppose que les v.a $T_i, i = 1, \dots, n$ sont distribuées suivant la loi de

Weibull avec les paramètres (α_i, β_i) respectivement.

Les fonctions de distribution de $T_i, i = 1, \dots, n$ sont de la forme :

$$F_i(t) = 1 - \exp\left(-\alpha_i t^{\beta_i}\right)$$

on pose : $\alpha_i = \beta_i = 1, i = 1, \dots, n, \quad k = 3, M = 3.$

on obtient les résultats suivants :

n	j	$t = 1$		$t = 2$		$t = 3$	
		L	U	L	U	L	U
5	1	0.416776	4.03275	0.0857124	0.200779	0.00738633	0.00999619
	2	0.251604	1.19489	0.0340457	0.0594901	0.00242388	0.00296183
	3	0.0692837	0.149361	0.00565607	0.00743626	0.000335079	0.000370229
10	1	0.655839	10.754	0.199996	0.535411	0.0194574	0.00266565
	2	0.472715	3.18637	0.0859137	0.15864	0.00643767	0.00789823
	3	0.165631	0.398297	0.014942	0.01983	0.0008993045	0.000987278
15	1	0.755897	17.4753	0.288884	0.870042	0.0312383	0.0433168
	2	0.592971	5.17786	0.132495	0.25779	0.0104193	0.0128346
	3	0.243901	0.647232	0.0240561	0.0322238	0.00145039	0.00160433
20	1	0.81088	24.1965	0.359995	1.20467	0.0427396	0.0599772
	2	0.668561	7.16934	0.174559	0.35694	0.0143691	0.017771
	3	0.308747	0.896167	0.0330031	0.0446175	0.00200711	0.00222138

n	j	$t = 5$		$t = 10$	
		L	U	L	U
5	1	$2.3796 \cdot 10^{-5}$	$2.47781 \cdot 10^{-5}$	$7.57761 \cdot 10^{-12}$	$7.57967 \cdot 10^{-12}$
	2	$7.1464 \cdot 10^{-6}$	$7.34166 \cdot 10^{-6}$	$2.24542 \cdot 10^{-12}$	$2.24583 \cdot 10^{-12}$
	3	$9.05423 \cdot 10^{-7}$	$9.17707 \cdot 10^{-7}$	$2.80703 \cdot 10^{-13}$	$2.80729 \cdot 10^{-13}$
10	1	$6.34536 \cdot 10^{-5}$	$6.60749 \cdot 10^{-5}$	$2.0207 \cdot 10^{-11}$	$2.02125 \cdot 10^{-11}$
	2	$1.90568 \cdot 10^{-5}$	$1.95777 \cdot 10^{-5}$	$5.98779 \cdot 10^{-12}$	$5.98888 \cdot 10^{-12}$
	3	$2.41446 \cdot 10^{-6}$	$2.44722 \cdot 10^{-6}$	$7.48542 \cdot 10^{-13}$	$7.4861 \cdot 10^{-13}$
15	1	0.000103108	0.000107372	$3.28363 \cdot 10^{-11}$	$3.28453 \cdot 10^{-11}$
	2	$3.0967 \cdot 10^{-5}$	$3.18138 \cdot 10^{-5}$	$9.73016 \cdot 10^{-12}$	$9.73193 \cdot 10^{-12}$
	3	$3.92349 \cdot 10^{-6}$	$3.97673 \cdot 10^{-6}$	$1.21638 \cdot 10^{-12}$	$1.21649 \cdot 10^{-12}$
20	1	0.000142759	0.000148669	$4.54657 \cdot 10^{-11}$	$4.5478 \cdot 10^{-11}$
	2	$4.28769 \cdot 10^{-5}$	$4.40499 \cdot 10^{-5}$	$1.34725 \cdot 10^{-11}$	$1.3475 \cdot 10^{-11}$
	3	$5.43251 \cdot 10^{-6}$	$5.50624 \cdot 10^{-6}$	$1.68422 \cdot 10^{-12}$	$1.68437 \cdot 10^{-12}$

où L représente la borne inf et U représente la borne sup.

On tire du tableau précédent que quand $t \rightarrow \infty$ et $j \rightarrow M$ alors $L \approx U$.

Et ceci nous donne donc une bonne approximation de la fiabilité du système.

4.2.5 Cas (b) : $k = k(j) = k_j$

Dans ce cas, on suppose que k (nombre de composants consécutifs qui sont $\geq j$) est non constant mais il varie avec j , c-à-d, le nombre k dépend du niveau d'état du système. En d'autres termes, on définit le système k consécutifs-sur- n : G à multi-états de la manière suivante : pour maintenir au moins un certain niveau d'état pour le système, ceci nécessite un nombre variant de composants consécutifs qui soient supérieurs ou égaux à un certain niveau. Alors, on a la définition suivante :

Définition [63] :

$\Phi(X) \geq j$ ssi au moins k_l composants consécutifs sont dans des états supérieurs ou égaux à l'état l , pour tout l ($1 \leq l \leq j$, $j = 1, \dots, M$).

Et de la même manière précédente, on donne un encadrement de la fiabilité du système.

4.2.6 Corollaire :

La fiabilité du système k consécutifs-sur- n : G à multi-états où $k = k_j, j = 1, 2, \dots, M$ est encadrée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{S'_{i,j}(t)}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^{k_j}}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^{k_j} + (n - k_j + 1) [(M - j + 1) \bar{F}(t)]^{k_j} \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^{k_j}} \\ & \leq P(V_n^j > t) \leq S'_{i,j}(t) \end{aligned} \quad (62)$$

où

$$\begin{aligned} S'_{i,j}(t) &= \sum_{i=1}^{n-k_j+1} \prod_{l=i}^{i+k_j-1} \Delta_l(t), \\ \Delta_l(t) &= \sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t) = \sum_{h=j}^M \bar{F}_{l,h}(t) \end{aligned}$$

et

$$\bar{F}_{i,j}(t) \leq \bar{F}(t), \quad \bar{q}(t) \leq \bar{F}_{i,j}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

Démonstration :

L'évènement précédent $A_{i,j}$ (théorème 4.2.3) peut être écrit sous la forme suivante :

$$A_{i,j} = \{X_i \geq j, X_{i+1} \geq j, \dots, X_{i+k_j-1} \geq j\} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n - k_j + 1$$

et le corollaire se déduit directement du théorème 4.2.3.

4.2.7 Cas de composants indépendants et identiquement distribués

Quand les $T_i : (i = 1, 2, \dots, n)$ sont i.i.d, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{(n - k_j + 1) [(M - j + 1) \bar{F}(t)]^{k_j}}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^{k_j}}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} + (n - k_j + 1) [(M - j + 1) \bar{F}(t)]^{k_j}} \leq P(V_n^j > t) \\ & \leq (n - k_j + 1) [(M - j + 1) \bar{F}(t)]^{k_j} \end{aligned} \quad (63)$$

Dans la partie qui suit, on fait une extension des systèmes multinaires k -consécutifs-parmi- $n : G$ aux systèmes multinaires k consécutifs-parmi- $L_n : G$ série. Le cas binaire de ces systèmes a été traité par [53] et le cas multi-états par [80, 81, 83]. On voit l'application de ces systèmes dans les transports, la distribution d'eau...etc.

4.3 Système k consécutifs-sur- $L_n : G$ série à multi-états

Un système k -consécutifs-parmi- $L_n : G$ série à multi-états est un système constitué de n blocs arrangés linéairement, notés B_1, B_2, \dots, B_n . Chaque bloc a la configuration k consécutifs-parmi- $L_n : G$ à multi-états. Ce système fonctionne si tous les blocs fonctionnent, et chaque bloc fonctionne ssi il y a au moins k composants consécutifs qui fonctionnent.

- si $n = 1$, on obtient un système k consécutifs-sur- $L_n : G$ à multi-états.
- si $k = 1$, on obtient un système en série à multi-états avec nL_n composants.

La fonction de structure du système Φ est définie comme suit :

$$\Phi(X) = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{(i-1)L_n+1 \leq s \leq iL_n-k+1} \min_{s \leq l \leq s+k-1} X_l \quad (64)$$

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^n \prod_{s=(i-1)L_n+1}^{iL_n-k+1} \prod_{l=s}^{s+k-1} X_l \quad (65)$$

Soit Z_n^j la durée de vie du système, puisque les n blocs sont disposés en série alors :

$$Z_n^j = \min_{1 \leq i \leq n} V_i^j \quad (66)$$

où V_i^j est la durée de vie du bloc i . $i = 1, 2, \dots, n$.

Théorème :

La fiabilité du système k consécutifs-parmi- L_n : G série à multi-états est donnée par :

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \left[\frac{R_{i,j}(t)}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^k + (n-k+1) [(M-j+1)\bar{F}(t)] \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^k} \right] \\ & \leq P(Z_n^j > t) \leq \prod_{i=1}^n R_{i,j}(t) \end{aligned} \quad (67)$$

où

$$\begin{aligned} R_{i,j}(t) &= \sum_{s=(i-1)L_n+1}^{iL_n-k+1} \prod_{l=s}^{s+k-1} \Delta_l(t), \\ \Delta_l(t) &= \sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t) = \sum_{h=j}^M \bar{F}_{l,h}(t) \end{aligned}$$

avec $T_{l,h}$ est la durée de vie du composant l quand il est à l'état h , $h = j, j+1, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, M$.

et $\bar{F}(t)$, $\bar{q}(t)$ ($\bar{q}(t) \neq 0$) sont définies de la façon suivante :

$$\bar{F}_{i,j}(t) \leq \bar{F}(t), \quad \bar{q}(t) \leq \bar{F}_{i,j}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, nL_n, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

Démonstration :

Puisque

$$Z_n^j = \min_{1 \leq i \leq n} V_i^j$$

alors

$$P(Z_n^j > t) = P\left(\min_{1 \leq i \leq n} V_i^j > t\right) = \prod_{i=1}^n P(V_i^j > t)$$

or V_i^j est la durée de vie du système k consécutifs-parmi- $L_n : G$ à multi-états.

Et en utilisant les résultats de la section précédente (théorème 4.2.3), on obtient :

$$P(V_i^j > t) \leq \sum_{s=(i-1)L_n+1}^{iL_n-k+1} \prod_{l=s}^{s+k-1} \left[\sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t) \right]$$

en posant

$$R_{i,j}(t) = \sum_{s=(i-1)L_n+1}^{iL_n-k+1} \prod_{l=s}^{s+k-1} \left[\sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t) \right] = \sum_{s=(i-1)L_n+1}^{iL_n-k+1} \prod_{l=s}^{s+k-1} \Delta_l(t)$$

alors

$$P(V_i^j > t) \leq R_{i,j}(t)$$

ainsi, on obtient une borne supérieure de la fiabilité de notre système

$$P(Z_n^j > t) = \prod_{i=1}^n P(V_i^j > t) \leq \prod_{i=1}^n R_{i,j}(t)$$

Une fois, la borne sup est établie, on essaye à présent de trouver une borne inf. i.e $P(Z_n^j > t) \geq$
?

Pour cela, on va considérer l'évènement :

$$\begin{aligned} A_{s,j} &= \{X_s \geq j, X_{s+1} \geq j, X_{s+k-1} \geq j\}, \\ s &= (i-1)L_n + 1, \dots, iL_n - k + 1, \quad j = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

Et en définissant les v.a suivantes :

$$Y_{s,j}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } X_s \geq j, X_{s+1} \geq j, X_{s+k-1} \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\}$$

et

$$Y_j(t) = \sum_{s=(i-1)L_n+1}^{iL_n-k+1} Y_{s,j}(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , j = 1, 2, \dots, M$$

D'après le théorème 4.2.3, on a :

$$P(V_i^j > t) \geq \frac{R_{i,j}(t)}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^k + (L_n - k + 1) [(M - j + 1) \bar{F}(t)]^k \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^k}$$

où $\bar{F}(t)$ et $\bar{q}(t)$ sont préalablement définies par :

$$\bar{F}_{i,j}(t) \leq \bar{F}(t), \quad \bar{q}(t) \leq \bar{F}_{i,j}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, nL_n, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

et finalement, on obtient une borne inférieure de la fiabilité de notre système :

$$P(Z_n^j > t) \geq \prod_{i=1}^n \frac{R_{i,j}(t)}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^k + (L_n - k + 1) [(M - j + 1) \bar{F}(t)]^k \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^k}$$

Cas de composants indépendants et identiquement distribués

Dans le cas où les composants sont indépendants et identiquement distribués, les bornes de la fiabilité du système en question se réduisent aux bornes suivantes :

$$\frac{\left[(L_n - k + 1) [(M - j + 1) \bar{F}(t)]^k \right]^n}{\left\{ 1 + 2 \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - [(M-j+1)\bar{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} + (L_n - k + 1) [(M - j + 1) \bar{F}(t)]^k \right\}^n}$$

$$\leq P(Z_n^j > t) \leq \left\{ (L_n - k + 1) [(M - j + 1) \bar{F}(t)]^k \right\}^n$$

4.3.1 Cas particulier $n = 1$, $M = 1$:

Dans le cas particulier où $n = 1$, $M = 1$, (un seul bloc et deux états possibles : un état de fonctionnement et un état de panne) on retrouve le cas binaire traditionnel, c.à.d, le système k consécutifs-parmi- n : G [53] :

$$\frac{(n - k + 1) [\overline{F}(t)]^k}{1 + 2 \frac{\overline{F}(t) - [\overline{F}(t)]^k}{1 - \overline{F}(t)} + (n - k + 1) [\overline{F}(t)]^k} \leq P(Z_n > t) \leq (n - k + 1) [\overline{F}(t)]^k \quad (68)$$

avec

$$\overline{F}(t) = P(T_i > t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où T_i est la durée de vie du composant i et Z_n est la durée de vie du système k consécutifs-parmi- n : G .

Remarque :

Dans la partie précédente, les blocs sont supposés avoir le même nombre de composants, chose qui n'est pas toujours réaliste. Dans ce qui suit, on va supposer que les n blocs n'ont pas tous le même nombre de composants, c.à.d que chaque bloc a son propre nombre de composants L_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), avec la condition que $k \leq L_i$. D'où on a le corollaire suivant .

Corollaire :

Sous les considérations ci-dessus, l'encadrement de la fiabilité du système k consécutifs-parmi- L_i : G série à multi-états est donné par :

$$\prod_{i=1}^n \frac{R'_{i,j}(t)}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\overline{F}(t) - [(M-j+1)\overline{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\overline{F}(t)} \left[\frac{\overline{F}(t)}{\overline{q}(t)} \right]^k + (L_n - k + 1) [(M - j + 1) \overline{F}(t)]^k \left[\frac{\overline{F}(t)}{\overline{q}(t)} \right]^k} \leq P(Z_n^j > t) \leq \prod_{i=1}^n R'_{i,j}(t) \quad (69)$$

où

$$R'_{i,j}(t) = \sum_{s=\partial_1}^{\partial_2} \prod_{l=s}^{s+k-1} \Delta_l(t),$$
$$\Delta_l(t) = \sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t) = \sum_{h=j}^M \bar{F}_{l,h}(t)$$

et

$$\partial_1 = \sum_{\theta=1}^{i-1} L_\theta + 1, \quad \partial_2 = \sum_{\theta=1}^i L_\theta - k + 1$$

Chapitre 5

Quelques modèles de systèmes à configuration complexe

5.1 Introduction

Dans cette partie, on présente quelques modèles de systèmes qui sont souvent utilisés en pratique. Parmi ces modèles, il y a les systèmes série-parallèle et les systèmes parallèle-série qui ont une grande application dans le domaine de l'industrie, les systèmes générateurs d'électricité, les machines manufacturières, les systèmes de contrôle....etc. Ces modèles de systèmes ont été traités par plusieurs chercheurs comme Levitin, Lisnianski [44, 58, 66], Kolowrocki [50], Belaloui [80, 81]. On définit ces systèmes et on donne les formules qui permettent le calcul de leur fiabilité.

On suppose que ces systèmes sont constitués de N blocs et que chaque bloc comporte m_n composants.

5.1.1 Notations :

N : nombre de blocs.

$M + 1$: nombre d'états du système et ses composants.

m_n : nombre de composants dans le bloc n .

X_{nl} : v.a indiquant l'état du composant l dans le bloc n .

Φ_n : v.a indiquant l'état du bloc n (fonction de structure du bloc n).

Φ_s : v.a indiquant l'état du système s (fonction de structure du système s).

$P_s(j)$: probabilité que le système est à l'état j , i.e $P_s(j) = P_r(\Phi_s = j)$.

$P_n(j)$: probabilité que le bloc n est à l'état j , i.e $P_n(j) = P_r(\Phi_n = j)$.

$P_{(n,l)}(j)$: probabilité que le composant l dans le bloc n est à l'état j .

i.e $P_{(n,l)}(j) = P(X_{nl} = j)$.

5.1.2 Hypothèses :

- 1- Tous les composants sont indépendants .
- 2- Chaque composant et le système peuvent être dans $M + 1$ états.
- 3- Les distributions d'états des composants sont connues.

En se basant sur la définition des systèmes à états multiples donnée par Barlow et Wu (1978) [5], l'état d'un système en parallèle est déterminé par le composant qui a le meilleur état (meilleur composant), alors que celui d'un système en série est déterminé par le composant qui a le plus mauvais état (le mauvais composant).

Alors, connaissant les distributions des composants dans les divers états possibles, on peut avoir l'expression des probabilités possibles du système qui est donnée par :

$$P_s(j) = P_r(\Phi_s = j) = P_r(\Phi_s \geq j) - P_r(\Phi_s \geq j + 1) \quad (70)$$

5.2 Modèle 1

système parallèle-série :

Un système parallèle-série est un système constitué de N blocs en série, et chaque bloc est composé de m_n composants disposés en parallèle. Ainsi, l'état du système est déterminé par le bloc qui est dans l'état le plus mauvais et l'état de ce dernier est lui même déterminé par le composant qui a le meilleur état.

on a :

$$P_r(\Phi_s \geq j) = P_r(\min_{1 \leq n \leq N} \Phi_n \geq j) = \prod_{n=1}^N P_r(\Phi_n \geq j)$$

et comme

$$P_r(\Phi_n \geq j) = P_r(\max_{1 \leq l \leq m_n} X_{nl} \geq j)$$

alors

$$\begin{aligned}
P_r(\Phi_s \geq j) &= \prod_{n=1}^N P_r(\max_{1 \leq l \leq m_n} X_{nl} \geq j) \\
&= \prod_{n=1}^N \left[1 - P_r(\max_{1 \leq l \leq m_n} X_{nl} < j) \right] = \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} P_r(X_{nl} < j) \right] \\
&= \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} P_r(X_{nl} = j-1 \cup X_{nl} = j-2 \cup \dots \cup X_{nl} = 0) \right] \\
&= \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^{j-1} P_r(X_{nl} = h) \right] = \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^{j-1} P_{(n,l)}(h) \right]
\end{aligned}$$

donc finalement :

$$P_r(\Phi_s \geq j) = \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^{j-1} P_{(n,l)}(h) \right] \quad (71)$$

Ainsi, on peut calculer la distribution d'état du système :

$$P_s(j) = P_r(\Phi_s = j) = P_r(\Phi_s \geq j) - P_r(\Phi_s \geq j+1)$$

5.3 Modèle 2

système série-parallèle :

Un système série-parallèle est un système constitué de N blocs en parallèle et chaque bloc comporte m_n composants disposés en série, ainsi l'état du système dépend du meilleur bloc, qui dépend à son tour du plus mauvais composant et alors on a :

$$\begin{aligned}
P_r(\Phi_s \geq j) &= P_r(\max_{1 \leq n \leq N} \Phi_n \geq j) = 1 - P_r \left[\max_{1 \leq n \leq N} \Phi_n < j \right] \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N P_r[\Phi_n < j] = 1 - \prod_{n=1}^N [1 - P_r(\Phi_n \geq j)]
\end{aligned}$$

or

$$P_r(\Phi_n \geq j) = P_r \left(\min_{1 \leq l \leq m_n} X_{nl} \geq j \right)$$

alors

$$\begin{aligned}
P_r(\Phi_s \geq j) &= 1 - \prod_{n=1}^N \left[1 - P_r \left(\min_{1 \leq l \leq m_n} X_{nl} \geq j \right) \right] \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} P_r(X_{nl} \geq j) \right] \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} P_r(X_{nl} = j \cup X_{nl} = j+1 \cup \dots \cup X_{nl} = M) \right] \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=j}^M P_r(X_{nl} = h) \right] \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=j}^M P_{(n,l)}(h) \right]
\end{aligned}$$

donc, finalement :

$$P_r(\Phi_s \geq j) = 1 - \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=j}^M P_{(n,l)}(h) \right] \quad (72)$$

5.4 Modèle 3

Le système a N blocs en série, chaque bloc se constitue de m_n composants en série, alors l'état du système dépend du plus mauvais bloc qui dépend lui-même du plus mauvais composant et la distribution d'état du système est donnée par :

$$\begin{aligned}
P_r(\Phi_s \geq j) &= P_r \left(\min_{1 \leq n \leq N} \Phi_n \geq j \right) = \prod_{n=1}^N P_r(\Phi_n \geq j) \\
&= \prod_{n=1}^N P_r \left(\min_{1 \leq l \leq m_n} X_{nk} \geq j \right) = \prod_{n=1}^N \prod_{l=1}^{m_n} P_r(X_{nl} \geq j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{n=1}^N \prod_{l=1}^{m_n} P_r(X_{nl} = j \cup X_{nl} = j+1 \cup \dots \cup X_{nl} = M) \\
&= \prod_{n=1}^N \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=j}^M P_r(X_{nl} = h)
\end{aligned}$$

$$P_r(\Phi_s \geq j) = \prod_{n=1}^N \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=j}^M P_{(n,l)}(h) \quad (73)$$

5.5 Modèle 4

Le système est constitué de N blocs en parallèle et chaque bloc a m_n composants en parallèle, alors l'état du système est déterminé par le meilleur bloc qui est lui-même déterminé par le meilleur composant et on a :

$$\begin{aligned}
P_r(\Phi_s \geq j) &= P_r(\max_{1 \leq n \leq N} \Phi_n \geq j) = 1 - P_r(\max_{1 \leq n \leq N} \Phi_n < j) \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N P_r(\Phi_n < j) = 1 - \prod_{n=1}^N P_r(\max_{1 \leq l \leq m_n} X_{nl} < j) \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N \left[\prod_{l=1}^{m_n} P_r(X_{nl} < j) \right] \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N \left[\prod_{l=1}^{m_n} P_r(X_{nl} = j-1 \cup X_{nl} = j-2 \dots \cup X_{nl} = 0) \right] \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N \left[\prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^{j-1} P_r(X_{nl} = h) \right] \\
P_r(\Phi_s \geq j) &= 1 - \prod_{n=1}^N \left[\prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^{j-1} P_{(n,l)}(h) \right] \quad (74)
\end{aligned}$$

5.6 Modèle 5

Le système se compose de N blocs en série, chaque bloc a la configuration k consécutifs parmi m_n (où m_n est le nombre de composants du bloc n). Pour que le système fonctionne, il faut que tous les blocs fonctionnent et chaque bloc fonctionne si et seulement si il y a au moins k composants consécutifs qui fonctionnent ($k \leq m_n$). Alors la distribution d'état du système est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
P_r(\Phi_s \geq j) &= P_r \left[\min_{1 \leq n \leq N} \left(\max_{1 \leq i \leq m_n - k + 1} \min_{i \leq l \leq i + k - 1} X_{nl} \geq j \right) \right] \\
&= \prod_{n=1}^N P_r \left(\max_{1 \leq i \leq m_n - k + 1} \min_{i \leq l \leq i + k - 1} X_{nl} \geq j \right) \\
&= \prod_{n=1}^N \left[1 - P_r \left(\max_{1 \leq i \leq m_n - k + 1} \min_{i \leq l \leq i + k - 1} X_{nl} < j \right) \right] \\
&= \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{i=1}^{m_n - k + 1} P_r \left(\min_{i \leq l \leq i + k - 1} X_{nl} < j \right) \right] \\
&= \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{i=1}^{m_n - k + 1} \left[1 - P_r \left(\min_{i \leq l \leq i + k - 1} X_{nl} \geq j \right) \right] \right] \\
&= \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{i=1}^{m_n - k + 1} \left[1 - \prod_{l=i}^{i+k-1} P_r(X_{nl} \geq j) \right] \right] \\
&= \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{i=1}^{m_n - k + 1} \left[1 - \prod_{l=i}^{i+k-1} \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+k-1} P_r(X_{nl} = j \cup X_{nl} = j + 1 \cup \dots \cup X_{nl} = M) \right\} \right] \right] \\
&= \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{i=1}^{m_n - k + 1} \left[1 - \prod_{l=i}^{i+k-1} \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+k-1} \sum_{h=j}^M P_r(X_{nl} \geq h) \right\} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$P_r(\Phi_s \geq j) = \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{i=1}^{m_n-k+1} \left[1 - \prod_{l=i}^{i+k-1} \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+k-1} \sum_{h=j}^M P_{(n,l)}(h) \right\} \right] \right] \quad (75)$$

5.6.1 Exemple :

Soit un système constitué de 3 blocs ($N = 3$) tels que le 1^{er} bloc comporte 4 composants , le 2^{ème} et le 3^{ème}comportent 5 composants i.e $m_1 = 4$, $m_2 = 5$, $m_3 = 5$. on prend $M = 3$, ($j = 0, 1, 2, 3$)

Dans les tableaux 1,2,3 on donne les distributions d'états des composants.

Tab 1

état/ composant	1	2	3	4
0	0.1	0.1	0.2	0.3
1	0.2	0.3	0.3	0.2
2	0.3	0.3	0.4	0.4
3	0.4	0.3	0.1	0.1

Tab 2

état/ composant	1	2	3	4	5
0	0.2	0.3	0.1	0.3	0.2
1	0.2	0.2	0.4	0.5	0.6
2	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1
3	0.3	0.3	0.3	0.1	0.1

Tab 3

état/ composant	1	2	3	4	5
0	0.1	0.2	0.1	0.3	0.2
1	0.4	0.5	0.7	0.4	0.4
2	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2
3	0.3	0.2	0.1	0.1	0.2

on calcule $P(\Phi_s = 2)$ i.e $j = 2$, sachant que $P(\Phi_s = 2) = P(\Phi_s \geq 2) - P(\Phi_s \geq 3)$.

Modèle 1 :

$$N = 3, m_1 = 4, m_2 = 5, m_3 = 5$$

les blocs sont en série et les composants de chaque bloc sont en parallèle.

$$\begin{aligned} P(\Phi_s \geq 2) &= \prod_{n=1}^3 \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^1 P_{(n,l)}(h) \right] \\ &= \left[1 - \prod_{l=1}^4 (P_{(1,l)}(0) + P_{(1,l)}(1)) \right] \left[1 - \prod_{l=1}^5 (P_{(2,l)}(0) + P_{(2,l)}(1)) \right] \\ &\quad \left[1 - \prod_{l=1}^5 (P_{(3,l)}(0) + P_{(3,l)}(1)) \right] \\ &= 0.801 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\Phi_s \geq 3) &= \prod_{n=1}^3 \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^2 P_{(n,l)}(h) \right] \\ &= \left[1 - \prod_{l=1}^4 (P_{(1,l)}(0) + P_{(1,l)}(1) + P_{(1,l)}(2)) \right] \left[1 - \prod_{l=1}^5 (P_{(2,l)}(0) + P_{(2,l)}(1) + P_{(2,l)}(2)) \right] \\ &\quad \left[1 - \prod_{l=1}^5 (P_{(3,l)}(0) + P_{(3,l)}(1) + P_{(3,l)}(2)) \right] \\ &= 0.26035 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\Phi_s = 2) &= P(\Phi_s \geq 2) - P(\Phi_s \geq 3) = 0.801 - 0.26035 \\ &= 0.5406 \end{aligned}$$

Modèle 2 :

$$N = 3, m_1 = 4, m_2 = 5, m_3 = 5$$

les blocs sont en parallèle et les composants de chaque bloc sont en série.

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq 2) &= 1 - \prod_{n=1}^3 \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=2}^3 P_{(n,l)}(h) \right] \\
&= 1 - \left\{ \left[1 - \prod_{l=1}^4 (P_{(1,l)}(2) + P_{(1,l)}(3)) \right] \left[1 - \prod_{l=1}^5 (P_{(2,l)}(2) + P_{(2,l)}(3)) \right] \right\} \\
&\quad \left[1 - \prod_{l=1}^5 (P_{(3,l)}(2) + P_{(3,l)}(3)) \right] \\
&= 0.11517
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq 3) &= 1 - \prod_{n=1}^3 \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=3}^3 P_{(n,l)}(h) \right] \\
&= 1 - \left\{ \left[1 - \prod_{l=1}^4 (P_{(1,l)}(3)) \right] \left[1 - \prod_{l=1}^5 (P_{(2,l)}(3)) \right] \left[1 - \prod_{l=1}^5 (P_{(3,l)}(3)) \right] \right\} \\
&= 0.00158
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s = 2) &= P(\Phi_s \geq 2) - P(\Phi_s \geq 3) = 0.11517 - 0.00158 \\
&= 0.11359
\end{aligned}$$

Modèle 3 :

$$N = 3, m_1 = 4, m_2 = 5, m_3 = 5$$

les blocs sont en série et les composants de chaque bloc sont aussi en série.

$$P(\Phi_s \geq 2) = \prod_{n=1}^3 \left[\prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=2}^3 P_{(n,l)}(h) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left[\prod_{l=1}^4 (P_{(1,l)}(2) + P_{(1,l)}(3)) \right] \left[\prod_{l=1}^5 (P_{(2,l)}(2) + P_{(2,l)}(3)) \right] \right\} \\
&\quad \left[\prod_{l=1}^5 (P_{(3,l)}(2) + P_{(3,l)}(3)) \right] \\
&= 0.0000022
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq 3) &= \prod_{n=1}^3 \left[\prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=3}^3 P_{(n,l)}(h) \right] \\
&= \left\{ \left[\prod_{l=1}^4 (P_{(1,l)}(3)) \right] \left[\prod_{l=1}^5 (P_{(2,l)}(3)) \right] \left[\prod_{l=1}^5 (P_{(3,l)}(3)) \right] \right\} \\
&= 0.00000000003888
\end{aligned}$$

$$P(\Phi_s = 2) = P(\Phi_s \geq 2) - P(\Phi_s \geq 3) = 0.0000022$$

Modèle 4 :

$$N = 3, m_1 = 4, m_2 = 5, m_3 = 5$$

les blocs sont en parallèle et les composants de chaque bloc sont aussi en parallèle.

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq 2) &= 1 - \prod_{n=1}^3 \left[\prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^1 P_{(n,l)}(h) \right] \\
&= 1 - \left\{ \left[\prod_{l=1}^4 (P_{(1,l)}(0) + P_{(1,l)}(1)) \right] \left[\prod_{l=1}^5 (P_{(2,l)}(0) + P_{(2,l)}(1)) \right] \right\} \\
&\quad \left[\prod_{l=1}^5 (P_{(3,l)}(0) + P_{(3,l)}(1)) \right] \\
&= 0.999
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq 3) &= 1 - \prod_{n=1}^3 \left[\prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^2 P_{(n,l)}(h) \right] \\
&= 1 - \left\{ \left[\prod_{l=1}^4 (P_{(1,l)}(0) + P_{(1,l)}(1) + P_{(1,l)}(2)) \right] \left[\prod_{l=1}^5 (P_{(2,l)}(0) + P_{(2,l)}(1) + P_{(2,l)}(2)) \right] \right\} \\
&\quad \left[\prod_{l=1}^5 (P_{(3,l)}(0) + P_{(3,l)}(1) + P_{(3,l)}(2)) \right] \\
&= 0.9657
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s = 2) &= P(\Phi_s \geq 2) - P(\Phi_s \geq 3) = 0.9657 - 0.999 \\
&= 0.0333
\end{aligned}$$

Modèle 5 :

$$N = 3, m_1 = 4, m_2 = 5, m_3 = 5, k = 2$$

les blocs sont en série et chaque bloc a la configuration k consécutifs parmi m_n .

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq 2) &= \prod_{n=1}^3 \left[1 - \prod_{i=1}^{m_n-1} \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+1} \sum_{h=2}^3 P_{(n,l)}(h) \right\} \right] \\
&= \left[1 - \prod_{i=1}^3 \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+1} (P_{(1,l)}(2) + P_{(1,l)}(3)) \right\} \right] \left[1 - \prod_{i=1}^4 \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+1} (P_{(2,l)}(2) + P_{(2,l)}(3)) \right\} \right] \\
&\quad \left[1 - \prod_{i=1}^4 \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+1} (P_{(3,l)}(2) + P_{(3,l)}(3)) \right\} \right] \\
&= 0.1288
\end{aligned}$$

$$P(\Phi_s \geq 3) = \prod_{n=1}^3 \left[1 - \prod_{i=1}^{m_n-1} \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+1} \sum_{h=3}^3 P_{(n,l)}(h) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 - \prod_{i=1}^3 \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+1} (P_{(1,l)}(3)) \right\} \right] \left[1 - \prod_{i=1}^4 \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+1} (P_{(2,l)}(3)) \right\} \right] \\
&\quad \left[1 - \prod_{i=1}^4 \left\{ 1 - \prod_{l=i}^{i+1} (P_{(3,l)}(3)) \right\} \right] \\
&= 0.00336
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s = 2) &= P(\Phi_s \geq 2) - P(\Phi_s \geq 3) = 0.1288 - 0.00336 \\
&= 0.1254
\end{aligned}$$

5.6.2 Cas particulier : cas i.i.d

Si on suppose que tous les composants ont la même distribution, i.e :

$$P_{(n,l)}(h) = P_n, \quad l = 1, \dots, m_n, \quad h = 0, \dots, M$$

dans ce cas, le calcul se fait de la manière suivante :

Modèle 1 :

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq j) &= \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} \sum_{h=0}^{j-1} P_{(n,l)}(h) \right] = \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} (jP_n) \right] \\
&= \prod_{n=1}^N [1 - (jP_n)^{m_n}]
\end{aligned}$$

$$P(\Phi_s \geq j+1) = \prod_{n=1}^N [1 - ((j+1)P_n)^{m_n}]$$

$$P(\Phi_s = j) = \prod_{n=1}^N [1 - (jP_n)^{m_n}] - \prod_{n=1}^N [1 - ((j+1)P_n)^{m_n}] \quad (76)$$

et si tous les blocs ont le même nombre de composants i.e : $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$

alors :

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq j) &= [1 - (jP_n)^m]^N \\
P(\Phi_s \geq j+1) &= [1 - ((j+1)P_n)^m]^N \\
P(\Phi_s = j) &= [1 - (jP_n)^m]^N - [1 - ((j+1)P_n)^m]^N
\end{aligned} \tag{77}$$

Modèle 2 :

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq j) &= 1 - \prod_{n=1}^N \left[1 - \prod_{l=1}^{m_n} ((M-j+1)P_n) \right] \\
&= 1 - \prod_{n=1}^N [1 - ((M-j+1)P_n)^{m_n}] \\
P(\Phi_s \geq j+1) &= 1 - \prod_{n=1}^N [1 - ((M-j)P_n)^{m_n}] \\
P(\Phi_s = j) &= \prod_{n=1}^N [1 - ((M-j)P_n)^{m_n}] - \prod_{n=1}^N [1 - ((M-j+1)P_n)^{m_n}]
\end{aligned} \tag{78}$$

et si tous les blocs ont le même nombre de composants i.e : $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$
alors :

$$P(\Phi_s = j) = [1 - ((M-j)P_n)^m]^N - [1 - ((M-j+1)P_n)^m]^N \tag{79}$$

Modèle 3 :

$$\begin{aligned}
P(\Phi_s \geq j) &= \prod_{n=1}^N [((M-j+1)P_n)^{m_n}] \\
P(\Phi_s \geq j+1) &= \prod_{n=1}^N [((M-j)P_n)^{m_n}] \\
P(\Phi_s = j) &= \prod_{n=1}^N [((M-j+1)P_n)^{m_n}] - \prod_{n=1}^N [((M-j)P_n)^{m_n}]
\end{aligned} \tag{80}$$

et si tous les blocs ont le même nombre de composants i.e : $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$

alors :

$$P(\Phi_s = j) = [((M - j + 1) P_n)^m]^N - [((M - j) P_n)^m]^N \quad (81)$$

Modèle 4 :

$$P(\Phi_s \geq j) = 1 - \prod_{n=1}^N [(j P_n)^{m_n}]$$

$$P(\Phi_s \geq j + 1) = 1 - \prod_{n=1}^N [((j + 1) P_n)^{m_n}]$$

$$P(\Phi_s = j) = \prod_{n=1}^N [((j + 1) P_n)^{m_n}] - \prod_{n=1}^N [(j P_n)^{m_n}] \quad (82)$$

et si tous les blocs ont le même nombre de composants i.e : $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$
alors :

$$P(\Phi_s = j) = [((j + 1) P_n)^m]^N - [(j P_n)^m]^N \quad (83)$$

Modèle 5 :

$$P(\Phi_s \geq j) = \prod_{n=1}^N \left[1 - \left\{ 1 - \left((M - j + 1) P_n^k \right) \right\}^{m_n - k + 1} \right]$$

$$P(\Phi_s \geq j + 1) = \prod_{n=1}^N \left[1 - \left\{ 1 - \left((M - j) P_n^k \right) \right\}^{m_n - k + 1} \right]$$

$$\begin{aligned} P(\Phi_s = j) &= \prod_{n=1}^N \left[1 - \left\{ 1 - \left((M - j + 1) P_n^k \right) \right\}^{m_n - k + 1} \right] \\ &\quad - \prod_{n=1}^N \left[1 - \left\{ 1 - \left((M - j) P_n^k \right) \right\}^{m_n - k + 1} \right] \end{aligned} \quad (84)$$

et si tous les blocs ont le même nombre de composants i.e : $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$

alors :

$$P(\Phi_s = j) = \left[1 - \left\{ 1 - \left((M - j + 1) P_n^k \right) \right\}^{m_n - k + 1} \right]^N - \left[1 - \left\{ 1 - \left((M - j) P_n^k \right) \right\}^{m_n - k + 1} \right]^N \quad (85)$$

Chapitre 6

Utilité de performance des systèmes à multi-états

6.1 Introduction

6.1.1 Importance d'un composant

”Intuitivement, il semblerait raisonnable de mesurer l'importance d'un composant dans sa contribution à la fiabilité du système par le taux d'amélioration de la fiabilité du système suivant l'amélioration de la fiabilité du composant”

R.E.Barlow, Proschan p.26

Un système est constitué de plusieurs composants assurant diverses fonctions. Une des plus importantes mesures de la performance d'un système est sa fiabilité. Pour que ce système acquiesse un haut niveau de performance, (i.e grande fiabilité), il est nécessaire d'identifier les composants qui contribuent le plus à sa fiabilité, et ceci en utilisant des outils de mesure, qui sont les mesures d'importance.

Les mesures d'importance quantifient la répercussion d'un composant particulier dans un système. Elles fournissent aussi une bonne information pour la maintenance et l'opération (fonctionnement) du système.

Ainsi, un composant est plus important qu'un autre, si une amélioration dans sa fiabilité se traduit par une amélioration dans la fiabilité du système meilleure qu'elle ne l'aurait été par

le fait de la même amélioration sur l'autre composant. Mesurer l'importance d'un composant revient ainsi à quantifier la répercussion sur la fiabilité du système d'une perturbation de la fiabilité du composant, tenant compte des diverses situations possibles et de leurs probabilités de réalisation pour le reste des composants, ce qui se traduit par la définition de l'importance en fiabilité.*

*L'importance en fiabilité d'un composant est le taux d'amélioration de la fiabilité du système suivant l'amélioration de la fiabilité du composant.

Cette information peut être utilisée pour déterminer lequel des composants doit être le premier à améliorer dans le but d'avoir une large amélioration dans la fiabilité du système.

Dans la théorie binaire, une bibliographie riche et intensive sur les mesures d'importance [3, 24, 25, 31, 32, 37, 40, 45], parmi celles qui sont utilisées dans la théorie de la fiabilité :

- L'importance de Birnbaum : mesure la contribution de la fiabilité d'un composant à la fiabilité du système.

- L'importance en structure : mesure l'importance d'une position particulière du composant dans le système.

- L'importance conjointe : mesure l'interaction et la contribution des composants dans la fiabilité du système.

- Importance critique : correspond à la probabilité conditionnelle de la panne d'un composant sachant que le système est en panne.

Quelques extensions des mesures de l'importance des systèmes binaires aux systèmes multinaires ont été investies. El-Neweihi et al. [4] ont analysé la relation théorique entre le comportement de la fiabilité du système multinaire et la performance des composants multinaires.

Barlow et Wu [5] caractérisent l'état critique d'un composant comme une mesure qui montre comment un état particulier du composant affecte un état spécifique du système.

Griffith [7] a formulé le concept de performance des systèmes à multi-états et a étudié l'influence de l'amélioration d'un composant sur le comportement de la fiabilité du système. En plus, il a introduit le concept du vecteur de l'importance en fiabilité pour chaque composant du système, à travers ce concept, une généralisation de l'importance de Birnbaum du cas binaire au cas multinaire .

Levitin et Lisnianski [46] ont proposé des mesures d'importance pour des mesures multinaires

avec des composants ayant des capacités binaires. Ces mesures d'importance sont obtenues à partir de la fonction génératrice universelle (UMGF).

Zio et podofilini [70 – 72] présentent l'extension de RAW, RRW, FV et l'importance de Birnbaum dans le cas multinaire.

J.R.Marquez et Coit [76] présentent et évaluent les mesures d'importance composées sous forme de type 1, qui montre comment un composant spécifique affecte la fiabilité d'un système, et de type 2, qui montre comment un état particulier ou une suite d'états affectent la fiabilité du système. Pour plusieurs besoins d'utilisation, les mesures du type 2 doivent être appliquées. Alors que, dans d'autres modèles, il est nécessaire d'identifier le composant le plus critique, incluant tous ses états. Par exemple, pour améliorer une partie d'un système, il est nécessaire d'identifier et de privilégier les composants qui doivent être remplacés par de nouveaux composants.

Peu d'articles discutent comment des états particuliers d'un composant contribuent à l'état général du système, et comment la présence d'un composant dans un état particulier agit à la contribution des autres composants à la fiabilité du système. Une telle investigation a une importance aussi théorique que pratique, car elle permet de prévoir quel est le modèle qui va engendrer un système efficace.

Récemment, S.W et L.Chan (2003) [68] ont développé le vecteur d'importance au sens de Griffith d'un composant spécifique, l'extension est basée sur la définition de la fonction d'utilité qui peut montrer quels sont les composants qui contribuent d'une façon significative à la fiabilité du système à multi-états. Ils ont introduit une nouvelle définition de l'importance en utilité pour mesurer la contribution des différents états des composants à la performance du système et l'ont comparée à la définition donnée par Griffith et ont prouvé qu'à partir de l'architecture (configuration) du système, le processus d'identifier l'impact des composants sur la fiabilité du système est d'une importance extrême.

En conclusion, des chercheurs se sont concentrés sur la généralisation et l'adaptation des mesures d'importance du cas binaire au cas multinaire. Ces approches caractérisent, pour un composant donné, l'état le plus important selon son impact sur la fiabilité du système. Pour plusieurs modèles et les problèmes de fiabilité, la détermination de l'état le plus critique du composant est primordiale. Cependant, il y a d'autres applications, où il est important d'iden-

tifier le composant le plus critique. Cette identification doit être déterminée en considérant les états en perspective. L'état le plus critique d'un composant dans un système ne correspond pas nécessairement au composant le plus critique du système.

6.2 Généralisation des mesures d'importance [76] :

Les mesures d'importance ont été développées en reformulant les mesures d'importance du cas binaire au cas multinaire. Ceci est similaire à l'approche de Zio et Podofillini [70], excepté que les nouvelles mesures font part au composant lui-même et non à son état.

Le système est supposé assurer une demande d qui est soit constante, soit dépendante de conditions dans différentes périodes du fonctionnement. Si la demande est constante, la fiabilité du système est donnée par :

$$R_d = P[\Phi(X) \geq d] \quad (86)$$

pour d'autres systèmes, la demande peut varier. Comme pour l'indice *LOLP* (loss of load probability) qui est généralement utilisé comme une métrique pour la fiabilité des systèmes à multi-états. Cet indice représente la probabilité que le système ne peut assurer la même demande durant une période, et donc elle est divisée en k intervalles.

Les vecteurs $T = (T_1, T_2, \dots, T_k)$ et $d = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ définissent la durée T_ω et le niveau de la demande d_ω dans l'intervalle ω .

Lisnianski et al [44] définissent *LOLP* comme :

$$LOLP = \frac{\sum_{\omega=1}^k P[G < d_\omega] T_\omega}{\sum_{\omega=1}^k T_\omega} \quad (87)$$

où G : capacité totale du système.

pour ces systèmes, la fiabilité (R_d) peut être interprétée comme la probabilité que durant l'intervalle total du temps, le système peut assurer une demande d_ω (pour $\omega = 1, \dots, k$) à partir des capacités des composants, alors :

$$R_d = \frac{\sum_{\omega=1}^k P[\Phi(X) \geq d_\omega] T_\omega}{\sum_{\omega=1}^k T_\omega} \quad (88)$$

La probabilité que la capacité totale du système, $G = \Phi(X)$, est plus grande ou égale à un

niveau spécifique de la demande d_ω est donnée par :

$$P[G \geq d_\omega] = P[\Phi(X) \geq d_\omega]$$

Etant donné que les mesures d'importance dépendent de la fiabilité des systèmes, les méthodes permettant le calcul efficace de cette dernière sont extrêmement importantes. Quelques chercheurs ont développé des approches pour cela, mais reste celles ont été appliquées à des systèmes relativement petits.

A présent, on donne quelques mesures d'importance généralisées.

6.2.1 *Importance de Birnbaum :

L'importance de Birnbaum d'un composant donné est définie comme la probabilité que ce composant soit critique au fonctionnement du système [40] . Dans le cas binaire, il est exprimé par :

$$\mathbf{I}_i = P[\Phi(X) = 1/X_i = 1] - P[\Phi(X) = 1/X_i = 0] \quad (89)$$

comme le cas binaire est un cas particulier du cas multinaire, I_i peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i &= P[\Phi(X) = 1/X_i = 1] - P[\Phi(X) = 1] + P[\Phi(X) = 1] - P[\Phi(X) = 1/X_i = 0] \\ &= |P[\Phi(X) = 1/X_i = 1] - P[\Phi(X) = 1]| + |P[\Phi(X) = 1/X_i = 0] - P[\Phi(X) = 1]| \\ &= \sum_{j=0}^1 |P[\Phi(X) = 1/X_i = b_{ij}] - P[\Phi(X) = 1]| \\ &= \frac{\sum_{j=0}^1 |P[\Phi(X) = 1/X_i = b_{ij}] - P[\Phi(X) = 1]|}{|b_i| - 1} \end{aligned} \quad (90)$$

où :

X_i : état du composant i .

X : état du système.

b_i : espace d'état du composant i .

Donc la généralisation de I_i au cas multinaire, peut être exprimée comme :

$$\mathbf{MI}_i = \frac{\sum_{j=1}^{\omega_i} |P[\Phi(X) \geq d/X_i = b_{ij}] - P[\Phi(X) \geq d]|}{\omega_i - 1} \quad (91)$$

quand la demande d est constante et

$$\mathbf{MI}_i = \frac{\sum_{\omega} \sum_{j=1}^{\omega_i} |P[\Phi(X) \geq d_{\omega}/X_i = b_{ij}] - P[\Phi(X) \geq d_{\omega}]| T'_{\omega}}{\omega_i - 1} \quad (92)$$

quand la demande d varie, et où

$$\omega_i = |b_i| = \text{nombre d'états du composant } i$$

et T'_{ω} est donné par :

$$T'_{\omega} = \frac{T_{\omega}}{\sum_{i=1}^k T_i}$$

6.2.2 *Importance de la valeur d'accomplissement de la fiabilité (Reliability Achievement Worth CIM) :

La mesure **RAW** quantifie le pourcentage de croissance maximum dans la fiabilité du système générée par un composant particulier.

A partir de perspective binaire, avec $b_i = (0, 1)$, elle est définie par :

$$\mathbf{RAW}_i = \frac{P[\Phi(X) = 1/X_i = 1]}{P[\Phi(X) = 1]} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \max\left(0, \frac{P[\Phi(X) = 1/X_i = 1]}{P[\Phi(X) = 1]} - 1\right) \\ &= 1 + \sum_{j=0}^1 \max\left(0, \frac{P[\Phi(X) = 1/X_i = b_{ij}]}{P[\Phi(X) = 1]} - 1\right) \end{aligned} \quad (94)$$

L'extention au cas multinaire est de la forme :

$$\mathbf{MRAW}_i = 1 + \frac{1}{\omega_i - 1} \sum_{j=1}^{\omega_i} \max(0, \beta_{ij}) \quad (95)$$

pour une demande constante d .

$$\mathbf{MRAW}_i = 1 + \frac{1}{\omega_i - 1} \sum_{j=1}^{\omega_i} \sum_{\omega} \max(0, \beta_{ij}^{\omega}) \quad (96)$$

pour une demande d_{ω} qui varie.

où :

$$\beta_{ij} = \frac{P[\Phi(X) \geq d/X_i = b_{ij}] - P[\Phi(X) \geq d]}{P[\Phi(X) \geq d]}$$

$$\beta_{ij}^{\omega} = \frac{\sum_{\omega} P[\Phi(X) \geq d_{\omega}/X_i = b_{ij}] T'_{\omega} - P[\Phi(X) \geq d_{\omega}] T'_{\omega}}{\sum_{\omega} P[\Phi(X) \geq d_{\omega}] T'_{\omega}}$$

6.2.3 *Limportance de Fussell-Vesely :

C'est une mesure qui quantifie la décroissance maximale dans la fiabilité du système causée par un composant particulier .

L'expression binaire est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{FV}_i &= \frac{P[\Phi(X) = 1] - P[\Phi(X) = 1/X_i = 0]}{P[\Phi(X) = 1]} \quad (97) \\ &= \max\left(0, \frac{P[\Phi(X) = 1] - P[\Phi(X) = 1/X_i = 0]}{P[\Phi(X) = 1]}\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^1 \max\left(0, \frac{P[\Phi(X) = 1] - P[\Phi(X) = 1/X_i = b_{ij}]}{P[\Phi(X) = 1]}\right) \quad (98)$$

et l'extention au cas multinaire est donnée par :

$$\mathbf{MFV}_i = \frac{1}{\omega_i - 1} \sum_{j=1}^{\omega_i} \max(0, -\beta_{ij}) \quad (99)$$

pour une demande constante d .

$$\mathbf{MFV}_i = \frac{1}{\omega_i - 1} \sum_{j=1}^{\omega_i} \sum_{\omega} \max(0, -\beta_{ij}^{\omega}) \quad (100)$$

pour une demande d_{ω} qui varie.

6.2.4 Importance de la valeur de réduction de la fiabilité (Reliability Reduction Worth CIM) :

Levitin et al [71] ont défini **RRW** comme étant l'indice de mesurer le dommage potentiel causé au système par un composant particulier. L'expression binaire est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{RRW}_i &= \frac{P[\Phi(X) = 1]}{P[\Phi(X) = 1/X_i = 0]} \\ &= \frac{1}{\frac{P[\Phi(X)=1/X_i=0]}{P[\Phi(X)=1]}} \end{aligned} \quad (101)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{P[\Phi(X)=1] - P[\Phi(X)=1/X_i=0]}{P[\Phi(X)=1]}} = \frac{1}{1 - \mathbf{FV}_i} \quad (102)$$

La généralisation au cas multinaire est donnée par :

$$\mathbf{MRRW}_i = \frac{1}{1 - \mathbf{MFV}_i} \quad (103)$$

6.3 Notion d'utilité

Sachant que la définition de la fiabilité donnée dans le cas binaire n'est plus valide dans le cas des systèmes à plusieurs états, donc la notion d'utilité s'impose.

6.3.1 Espérance de l'utilité :

On utilise usuellement l'espérance de la valeur de l'état du système $E[\Phi(X)]$ pour faire état de sa performance, ce qui est exclusivement le cas en binaire où $R(p) = E[\Phi(X)]$ est la fiabilité du système.

Dans le cas multinaire, l'état du système est représenté par une valeur j prise dans l'ensemble

$\{0, 1, 2, \dots, M\}$. Cette valeur peut, dans certaines situations, ne pas traduire exactement l'intérêt accordé à tel ou tel état d'où l'idée d'introduire le concept d'utilités attachées aux différents états du système.

Ainsi, au lieu d'utiliser la suite d'entiers $0, 1, 2, \dots, M$, on utilisera la suite a_0, a_1, \dots, a_M avec $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_M$ et qui représentera les utilités accordées aux divers états du système.

Le terme "**utilité**" désignera la mesure quantitative de "**l'intérêt**" accordé par l'utilisateur à tel ou tel état de performance du système. A chaque état correspond une utilité de la sorte, nous pouvons utiliser l'espérance de l'utilité plus générale en théorie et mieux ajustable en application que l'espérance de la valeur.

Si on note

$$R_j(p) = E[\Phi(X) = j] \quad \text{pour } j \geq 0 \quad (104)$$

et si on pose $a_0 = 0$ (cette supposition n'est pas restrictive) alors l'espérance de l'utilité $U(p)$ s'écrit :

$$U(p) = \sum_{j=1}^M a_j R_j(p) = \sum_{j=1}^M a_j P[\Phi(X) = j] \quad (105)$$

Il existe deux moyens de la faire coïncider avec l'espérance de la valeur (ou la fonction de performance ou la fiabilité)

a) on pose : $a_j = j$ pour tout j , et donc :

$$U(p) = E_p[\Phi(X)] = \sum_{j=1}^M j P[\Phi(X) = j]$$

b) on affecte à la fonction Φ des valeurs a_j à la place des valeurs j , et donc :

$$U(p) = \sum_{j=1}^M a_j R_j(p) = \sum_{j=1}^M a_j P[\Phi(X) = a_j] = E_p[\Phi(X)]$$

$U(p)$ étant ainsi plus générale que $E[\Phi(X)]$. Tout résultat établi pour $U(p)$ est évidemment valable pour $E[\Phi(X)]$, la fonction usuelle de performance (fiabilité).

Pour toute la suite, on va considérer ces notations.

6.3.2 Notations :

n : nombre de composants dans le système.

$S = \{0, 1, 2, \dots, M\}$, M : le fonctionnement parfait, 0 : la panne totale .

a_j : niveau d'utilité du système quand il est à l'état j .

$$0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_M$$

X_i : variable aléatoire représentant l'état du composant i dans le système.

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$: vecteur des états des composants.

$\Phi(X)$: fonction de structure du système. $\Phi(X) \in S$.

k_j : nombre minimum de composants consécutifs avec $X_i \geq j, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

$$p_{i,j} = P \{X_i = j\}.$$

$$R_{s,j} = P \{\Phi(X) = j\}.$$

$$U = \sum_{j=0}^M a_j P \{\Phi(X) = j\}, \text{ fonction d'utilité de performance du système.}$$

$I^G(i)$: vecteur de l'importance du composant i au sens de Griffith .

$I^{UI}(i)$: vecteur de l'importance en utilité du composant i .

Nomenclature :

* vecteur lien minimal à états multiples : $Y \in S^n$ est un vecteur lien minimal au niveau j pour le système ssi

$$\Phi(Y) \geq j \quad \text{et} \quad \Phi(X) < j \quad \text{pour tout} \quad X < Y$$

* vecteur coupe minimale à états multiples : $Y \in S^n$ est un vecteur coupe minimale au niveau j pour le système ssi

$$\Phi(Y) < j \quad \text{et} \quad \Phi(X) \geq j \quad \text{pour tout} \quad X > Y$$

* L'utilité du système quand il est à l'état j est représentée par a_j .

a_j représente le bénéfice net ou la perte nette générés par le système quand il est à l'état j .

6.3.3 Hypothèses :

1) Le système est monotone.

· $\Phi(X)$ est non-décroissante en chaque argument.

$\cdot \Phi(j, j, \dots, j) = j$ pour $j \in S$.

- 2) Les X_i sont mutuellement indépendants.
- 3) Le système et ses composants ont $M + 1$ états.
- 4) Les états possibles de chaque composant et du système sont ordonnés :

état $0 \leq$ état $1 \leq \dots \leq$ état M .

5) les distributions d'états des composants sont connues.

A présent, on donne le vecteur de l'importance d'un composant.

6.3.4 L'importance au sens de Griffith [68] :

Griffith a proposé le vecteur de l'importance du composant i ($i = 1, 2, \dots, n$) dans un système à plusieurs états comme suit :

$$I^G(i) = (I_1^G(i), I_2^G(i), \dots, I_M^G(i)), \quad (106)$$

$$\begin{aligned} I_m^G(i) &= \sum_{j=1}^M (a_j - a_{j-1}) [P\{\Phi(m_i, X) \geq j\} - P\{\Phi((m-1)_i, X) \geq j\}] \\ m &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (107)$$

Le $I_m^G(i)$ dans le vecteur de l'importance au sens de Griffith peut être interprété comme le changement de performance du système suite à une détérioration du composant i de l'état m à l'état $m - 1$. Un inconvénient de $I^G(i)$ est qu'il mesure seulement comment le changement d'un composant particulier affecte la performance du système, mais ne mesure pas qu'el est le composant qui l'affecte le plus, ou qu'el état d'un certain composant qui contribue le plus. Bien que, la connaissance de composant et de ses états qui affectent le plus le système est un problème majeur. Alors, Wu et Chan (2003) [68] ont développé le vecteur de l'importance au sens de Griffith, en se basant sur la définition de la fonction d'utilité de performance du système et ils ont introduit une nouvelle fonction de l'importance en utilité de la performance

du système de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
I_m^{UI}(i) &= \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(X) = j, X_i = m \} \\
&= \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(X) = j / X_i = m \} . P \{ X_i = m \} \\
&= p_{i,m} \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(m_i, X) = j \}
\end{aligned} \tag{108}$$

$I_m^{UI}(i)$ peut être interprété comme la contribution de l'état m du composant i au système, et l'importance en utilité du composant i peut être définie par le vecteur :

$$I^{UI}(i) = (I_0^{UI}(i), I_1^{UI}(i), \dots, I_M^{UI}(i))$$

Une relation entre $I_m^{UI}(i)$ et une coordonnée $I_m^G(i)$ est déduite et donnée par :

$$\frac{\partial I_m^{UI}(i)}{\partial p_{i,m}} - \frac{\partial I_{m-1}^{UI}(i)}{\partial p_{i,m-1}} = I_m^G(i), \quad m = 1, 2, \dots, M \tag{109}$$

et la fonction d'utilité de performance U peut être exprimée en termes de $I_m^{UI}(i)$:

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(X) = j \} \\
&= \sum_{j=0}^M a_j \left[\sum_{m=0}^M . P \{ \Phi(X) = j / X_i = m \} P \{ X_i = m \} \right] \\
&= \sum_{m=0}^M \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(m_i, X) = j \} p_{i,m} = \sum_{m=0}^M I_m^{UI}(i)
\end{aligned} \tag{110}$$

L'équation (110) ci-dessus montre qu'un état m d'un composant i ayant une grande valeur $I_m^{UI}(i)$ contribue appréciablement à l'utilité de performance du système.

6.3.5 L'importance en utilité d'un composant d'un système en série à multi-états [68].

Un système en série à multi-états est un système constitué de n composants en série, il fonctionne si et seulement si tous ses composants fonctionnent. Sa fonction de structure Φ est définie de la manière suivante :

$$\Phi(X) = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (111)$$

L'importance en utilité de l'état m ($0 \leq m \leq M$) du composant i ($i = 1, 2, \dots, n$) dans le système est donnée par

Théorème :

$$\begin{aligned} I_m^{UI}(i) &= p_{i,m} \left[\sum_{j=0}^{m-1} a_j (\Psi_{n,j}(i) - \Psi_{n,j+1}(i)) + a_m \Psi_{n,m}(i) \right] \quad \text{pour } m > 0 \\ I_m^{UI}(i) &= p_{i,m} [a_m \Psi_{k,n}] = a_0 p_{i,0} \quad \text{pour } m = 0 \end{aligned} \quad (112)$$

avec

$$\Psi_{n,j}(i) = \prod_{k=1, k \neq i}^n R_{k,j} \quad , \quad R_{k,j} = P\{X_k \geq j\} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (113)$$

Démonstration :

On a :

$$P\{\Phi(X) \geq j\} = P\{X_1 \geq j, X_2 \geq j, \dots, X_n \geq j\} = \prod_{k=1}^n R_{k,j}$$

et par définition on a :

$$I_m^{UI}(i) = p_{i,m} \sum_{j=0}^M a_j P\{\Phi(m_i, X) = j\}$$

Quand $0 < m < M$, la somme dans $I_m^{UI}(i)$ peut être décomposée comme suit :

$$\sum_{j=0}^M = \sum_{j=0}^{m-1} + \sum_{j=m}^m + \sum_{j=m+1}^M$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} + \sum_{j=m} \quad \text{où } \sum_{j=m} \text{ désigne un seul terme}$$

et chaque terme de $\sum_{j=m+1}^M$ est nul, car $P\{\Phi(m_i, X) = j\} = 0$ pour tout $j > m$

donc :

$$I_m^{UI}(i) = p_{i,m} \left[\sum_{j=0}^{m-1} a_j P\{\Phi(m_i, X) = j\} + a_m P\{\Phi(m_i, X) = m\} \right]$$

$$I_m^{UI}(i) = p_{i,m} \left[\sum_{j=0}^{m-1} a_j P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) = j\} \right. \\ \left. + a_m P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \geq m\} \right]$$

or

$$P\{\Phi(m_i, X) = j\} = P\{\Phi(m_i, X) \geq j\} - P\{\Phi(m_i, X) \geq j+1\}$$

$$P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) = j\} = P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \geq j\} \\ - P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \geq j+1\}$$

$$= P\{(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \geq j\} - P\{(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \geq j+1\} \\ = \prod_{k=1, k \neq i}^n P\{X_k \geq j\} - \prod_{k=1, k \neq i}^n P\{X_k \geq j+1\} \\ = \prod_{k=1, k \neq i}^n R_{k,j} - \prod_{k=1, k \neq i}^n R_{k,j+1} = \Psi_{n,j}(i) - \Psi_{n,j+1}(i)$$

$P\{\Phi(m_i, X) = m\}$ ceci veut dire que le système est à l'état m sachant que le $i^{\text{ème}}$ composant est à l'état m

donc les autres composants sont dans des états supérieurs ou égaux à l'état m .

$$\begin{aligned}
P\{\Phi(m_i, X) = m\} &= P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \geq m\} \\
&= P\{(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \geq m\} \\
&= \prod_{k=1, k \neq i}^n P\{X_k \geq m\} \\
&= \prod_{k=1, k \neq i}^n R_{k,m} = \Psi_{n,m}(i)
\end{aligned}$$

ainsi, on a

$$I_m^{UI}(i) = p_{i,m} \left[\sum_{j=0}^{m-1} a_j (\Psi_{n,j}(i) - \Psi_{n,j+1}(i)) + a_m \Psi_{n,m}(i) \right] \quad \text{si } 0 < m < M$$

Quand $0 < m = M$, le même raisonnement précédent nous donne :

$$I_M^{UI}(i) = p_{i,M} \left[\sum_{j=0}^{M-1} a_j (\Psi_{n,j}(i) - \Psi_{n,j+1}(i)) + a_M \Psi_{n,M}(i) \right]$$

car

$$I_M^{UI}(i) = p_{i,M} \left[\sum_{j=0}^{M-1} a_j P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) = j\} + a_M P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) = M\} \right]$$

avec

$$P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) = j\} = \Psi_{n,j}(i) - \Psi_{n,j+1}(i)$$

et

$$P\{\min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) = M\} = \prod_{k=1, k \neq i}^n P\{X_k = M\} = \Psi_{n,M}(i)$$

Quand $0 = m < M$, la somme dans $I_m^{UI}(i)$ se réduit à un seul terme :

$$\sum_{j=0}^M = \sum_{j=m}^M = \sum_{j=0}^M$$

qui s'écrit :

$$I_0^{UI}(i) = p_{i,0} [a_0 P \{\Phi(0_i, X) = 0\}]$$

on déduit que

$$X_1 \geq 0, \dots, X_{i-1} \geq 0, X_{i+1} \geq 0, \dots, X_n \geq 0$$

alors

$$P \{\Phi(0_i, X) = 0\} = \prod_{k=1, k \neq i}^n P \{X_k \geq 0\} = 1$$

ainsi, on obtient :

$$I_0^{UI}(i) = p_{i,0} a_0 \quad \text{si } 0 = m < M$$

6.3.6 L'importance en utilité d'un composant d'un système en parallèle à multi-états [68].

Un système en parallèle à multi-états est un système constitué de n composants en parallèle, il fonctionne si et seulement si il y a au moins un composant qui fonctionne. Sa fonction de structure Φ est définie de la manière suivante :

$$\Phi(X) = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (114)$$

L'importance en utilité de l'état m ($0 \leq m \leq M$) du composant i ($i = 1, 2, \dots, n$) dans le système est donnée par

Théorème :

$$\begin{aligned} I_m^{UI}(i) &= p_{i,m} \left[a_m \Psi_{n,m+1}^*(i) + \sum_{j=m+1}^M a_j (\Psi_{n,j+1}^*(i) - \Psi_{n,j}^*(i)) \right] \quad \text{pour } m < M \\ I_m^{UI}(i) &= p_{i,m} (a_m \Psi_{n,m+1}^*(i)) = p_{i,M} a_M \quad \text{pour } m = M \end{aligned} \quad (115)$$

avec :

$$\Psi_{n,j}^*(i) = \prod_{k=1, k \neq i}^n (1 - R_{k,j}) \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (116)$$

Démonstration :

Pour un système en parallèle, on a :

$$\begin{aligned} P \{ \Phi(X) \geq j \} &= P \{ \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq j \} \\ &= 1 - P \{ \max(X_1, X_2, \dots, X_n) < j \} \\ &= 1 - P \{ X_1 < j, X_2 < j, \dots, X_n < j \} \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n P \{ X_k < j \} \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P \{ X_k \geq j \}) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n (1 - R_{k,j}) \end{aligned}$$

on pose

$$\Psi_{n,j}^*(i) = \prod_{k=1, k \neq i}^n (1 - R_{k,j})$$

donc

$$P \{ \Phi(m_i, X) \geq j \} = 1 - \Psi_{n,j}^*(i)$$

et comme on a par définition :

$$I_m^{UI}(i) = p_{i,m} \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(m_i, X) = j \}$$

Quand $0 < m < M$, la somme dans $I_m^{UI}(i)$ se décompose comme suit :

$$\sum_{j=0}^M = \sum_{j=0}^{m-1} + \sum_{j=m} + \sum_{j=m+1}^M$$

pour un système en parallèle, chaque terme de $\sum_{j=0}^{m-1}$ est nul car $P \{ \Phi(m_i, X) = j \} = 0$ pour

tout $j < m$, alors :

$$\begin{aligned}
I_m^{UI}(i) &= p_{i,m} \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(m_i, X) = j \} \\
&= p_{i,m} \left[a_m P \{ \Phi(m_i, X) = m \} + \sum_{j=m+1}^M a_j P \{ \Phi(m_i, X) = j \} \right] \\
&= p_{i,m} \left[\begin{array}{c} a_m P \{ \max(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \leq m \} \\ \sum_{j=m+1}^M a_j P \{ \max(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) = j \} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

calculons

$$P \{ \max(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \leq m \} = ?$$

$$\begin{aligned}
P \{ \max(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \leq m \} &= \prod_{k=1, k \neq i}^n P \{ X_k \leq m \} \\
&= \prod_{k=1, k \neq i}^n [1 - P \{ X_k > m \}] \\
&= \prod_{k=1, k \neq i}^n [1 - P \{ X_k \geq m + 1 \}] \\
&= \prod_{k=1, k \neq i}^n [1 - R_{k, m+1}] \\
&= \Psi_{n, m+1}^*(i)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P \{ \Phi(m_i, X) = j \} &= P \{ \Phi(m_i, X) \geq j \} - P \{ \Phi(m_i, X) \geq j + 1 \} \\
&= (1 - \Psi_{n, j}^*(i)) - (1 - \Psi_{n, j+1}^*(i)) = \Psi_{n, j+1}^*(i) - \Psi_{n, j}^*(i)
\end{aligned}$$

ainsi, on obtient

$$I_m^{UI}(i) = p_{i,m} \left[a_m \Psi_{n,m+1}^*(i) + \sum_{j=m+1}^M a_j (\Psi_{n,j+1}^*(i) - \Psi_{n,j}^*(i)) \right] \quad \text{si } 0 < m < M$$

Quand $0 = m < M$, la somme dans $I_m^{UI}(i)$ s'écrit comme suit :

$$\sum_{j=0}^M = \sum_{j=m}^M + \sum_{j=m+1}^M = \sum_{j=0}^M + \sum_{j=1}^M$$

$$I_0^{UI}(i) = p_{i,0} \left[a_0 P\{\Phi(0_i, X) = 0\} + \sum_{j=1}^M a_j P\{\Phi(0_i, X) = j\} \right]$$

$P\{\Phi(0_i, X) = 0\}$ ceci implique que $X_k = 0, k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} P\{\Phi(0_i, X) = 0\} &= \prod_{k=1}^n P\{X_k = 0\} \\ &= \prod_{k=1, k \neq i}^n P\{X_k < 1\} = \prod_{k=1, k \neq i}^n (1 - P\{X_k \geq 1\}) \\ &= \prod_{k=1, k \neq i}^n (1 - R_{k,1}) \\ &= \Psi_{n,1}^*(i) \end{aligned}$$

et

$$P\{\Phi(0_i, X) = j\} = \Psi_{n,j+1}^*(i) - \Psi_{n,j}^*(i)$$

alors

$$I_0^{UI}(i) = p_{i,0} \left[a_0 \Psi_{n,1}^*(i) + \sum_{j=1}^M a_j (\Psi_{n,j+1}^*(i) - \Psi_{n,j}^*(i)) \right] \quad \text{si } 0 = m < M$$

Quand $0 < m = M$, la somme dans $I_m^{UI}(i)$ s'écrit comme suit :

$$\sum_{j=0}^M = \sum_{j=0}^{M-1} + \sum_{j=M}$$

alors

$$I_M^{UI}(i) = p_{i,M} \left[\sum_{j=0}^{M-1} a_j P \{ \Phi(M_i, X) = j \} + a_M P \{ \Phi(M_i, X) = M \} \right]$$

il est clair que

$$P \{ \Phi(M_i, X) = j \} = 0, j = 0, \dots, M-1$$

car le système ne peut pas être dans un état $< M$ avec un composant qui est à l'état M .

et

$$P \{ \Phi(M_i, X) = M \} \text{ ceci implique que } X_k \leq M, k = 1, \dots, n, k \neq i$$

donc

$$P \{ \Phi(M_i, X) = M \} = P \{ X_k \leq M, k = 1, \dots, n, k \neq i \} = \prod_{k=1, k \neq i}^n P \{ X_k \leq M \} = \prod_{k=1, k \neq i}^n 1 = 1$$

finalement, on obtient :

$$I_M^{UI}(i) = a_M p_{i,M} \quad \text{si } 0 < m = M$$

6.3.7 L'importance en utilité d'un composant d'un système k consécutifs-sur- n : G à multi-états

Un système k consécutifs-parmi- n : G est un système constitué de n composants disposés linéairement . Ce système fonctionne si et seulement si il y a au moins k composants consécutifs qui fonctionnent.

La fonction de structure de l'état du système Φ est donnée par :

$$\Phi(X) = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \min_{i \leq l \leq i+k-1} X_l$$

La fiabilité du système est définie comme suit :

$$P\{\Phi(X) \geq j\} = \sum_{\alpha=j}^M P\{\Phi(X) = \alpha\} = \sum_{\alpha=j}^M R_{s,\alpha} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, M$$

Dans cette partie, on suppose que k est constant, i.e k est indépendant de la valeur d'état du système. En d'autres termes, on garde le même nombre de composants consécutifs, qui doivent fonctionner, pour tous les états de fonctionnement du système. Ainsi, la distribution d'état du système qui a été établie dans le Chap.3 formule (22) s'écrit comme suit :

$$R_{s,j} = P\{\Phi(X) = j\} = \sum_{k'=k}^n \left[R_j(k', n) + \sum_{h=j+1}^M H_k^j(h) \right] \quad (117)$$

en se basant sur cette formule et la définition de l'importance en utilité d'un composant du système, donnée par Wu & Chan (2003) [68], on calcule la fonction d'utilité de ce système.

Théorème :

L'importance en utilité de l'état $m(0 \leq m \leq M)$ du composant i du système est donnée par :

$$\begin{aligned} I_m^{UI}(i) &= p_{i,m} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{m-1} a_j \Delta_{n,m,m}^j + a_m [L_{n,m}^m + \Delta_{n,m,m+1}^*] \\ + \sum_{j=m+1}^M a_j [L_{n-1,m}^j + \Delta_{n-1,m,j+1}^j] \end{array} \right\} \quad \text{si } 0 < m < M \\ &= p_{i,M} \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} a_j \Delta_{n,M,M}^j + a_M L_{n,M}^M \right\} \quad \text{si } m = M \\ &= p_{i,0} \left\{ a_0 [L_{n,0}^0 + \Delta_{n,0,1}^*] + \sum_{j=1}^M a_j [L_{n-1,0}^j + \Delta_{n-1,0,j+1}^j] \right\} \quad \text{si } m = 0 \end{aligned} \quad (118)$$

Démonstration :

La distribution d'état du système k consécutifs-sur- n : G est donnée par :

$$P \{ \Phi(X) = j \} = \sum_{k'=k}^n \left[R_j(k', n) + \sum_{h=j+1}^M H_k^j(h) \right]$$

On peut distinguer les cas suivants :

$$* m = j = M \implies P \{ \Phi(m_i, X) = j \} = \sum_{k'=k}^n \left[R_j(m_i, k', n) \right]$$

$$\begin{aligned} * m = j < M &\implies P \{ \Phi(m_i, X) = j \} = \sum_{k'=k}^n \left[R_j(m_i, k', n) + \sum_{h=j+1}^M H_{k'}^j(m_i, h) \right] \\ &= \sum_{k'=k}^n \left[R_j(m_i, k', n) + \sum_{h=m+1}^M H_{k'}^j(m_i, h) \right] \end{aligned}$$

$$* m < j (j = M) \implies P \{ \Phi(m_i, X) = j \} = \sum_{k'=k}^{n-1} \left[R_j(m_i, k', n) \right]$$

$$* m < j (j < M) \implies P \{ \Phi(m_i, X) = j \} = \sum_{k'=k}^{n-1} \left[R_j(m_i, k', n) + \sum_{h=j+1}^M H_{k'}^j(m_i, h) \right]$$

$$* m > j (j = M) \implies P \{ \Phi(m_i, X) = j \} = 0$$

$$* m > j (j < M) \implies P \{ \Phi(m_i, X) = j \} = \sum_{k'=k}^n \left[\sum_{h=m}^M H_{k'}^j(m_i, h) \right]$$

Le but est de calculer la fonction d'utilité de performance du système qui est définie par :

$$U = \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(X) = j \} = \sum_{m=0}^M I_m^{UI}(i)$$

or d'après la définition de $I_m^{UI}(i)$:

$$I_m^{UI}(i) = p_{i,m} \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(m_i, X) = j \}$$

il reste maintenant à décomposer la somme dans $I_m^{UI}(i)$ de la manière suivante :

$$\sum_{j=0}^M = \sum_{j=0}^{m-1} + \sum_{j=m} + \sum_{j=m+1}^M$$

or $\sum_{j=m}$ est constitué d'un seul terme, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(m_i, X) = j \} &= \sum_{j=0}^{m-1} a_j \sum_{k'=k}^n \sum_{h=m}^M H_{k'}^j(m_i, h) + \\ & a_m \sum_{k'=k}^n \left[R_j(m_i, k', n) + \sum_{h=m+1}^M H_{k'}^m(m_i, h) \right] + \\ & \sum_{j=m+1}^M a_j \sum_{k'=k}^{n-1} \left[R_j(m_i, k', n) + \sum_{h=j+1}^M H_{k'}^j(m_i, h) \right] \end{aligned}$$

si $0 < m < M$

$$\sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(m_i, X) = j \} = \sum_{j=0}^{M-1} a_j \sum_{k'=k}^n H_{k'}^j(M_i, M) + a_M \sum_{k'=k}^n R_j(M_i, k', n) \quad \text{si } m = M$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi(m_i, X) = j \} &= a_0 \sum_{k'=k}^n \left[R_j(0_i, k', n) + \sum_{h=1}^M H_{k'}^0(0_i, h) \right] \\ &+ \sum_{j=1}^M a_j \sum_{k'=k}^{n-1} \left[R_j(0_i, k', n) + \sum_{h=j+1}^M H_{k'}^j(0_i, h) \right] \end{aligned}$$

si $m = 0$

En posant :

$$\Delta_{s,w,j+1}^j = \sum_{k'=k}^s \sum_{h=j+1}^M H_{k'}^j(w_i, h); \quad s = n-1, n; \quad w = 0, m$$

$$\Delta_{n,m,m}^j = \sum_{k'=k}^n \sum_{h=m}^M H_{k'}^j(m_i, h), \quad \Delta_{n,M,M}^j = \sum_{k'=k}^n \sum_{h=M}^M H_{k'}^j(m_i, h) = \sum_{k'=k}^n H_{k'}^j(M_i, M)$$

$$L_{s,w}^j = \sum_{k'=k}^s R_j(w_i, k', n); \quad s = n-1, n; \quad w = 0, m, M$$

$$\Delta_{s,w,w+1}^* = \sum_{k'=k}^s \sum_{h=w+1}^M H_{k'}^w(w_i, h); \quad s = n; \quad w = 0, m$$

il suit que :

$$\begin{aligned} I_m^{UI}(i) &= p_{i,m} \sum_{j=0}^M a_j P\{\Phi(m_i, X) = j\} \\ &= p_{i,m} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{m-1} a_j \Delta_{n,m,m}^j + a_m [L_{n,m}^m + \Delta_{n,m,m+1}^*] \\ + \sum_{j=m+1}^M a_j [L_{n-1,m}^j + \Delta_{n-1,m,j+1}^j] \end{array} \right\} \quad \text{si } 0 < m < M \\ &= p_{i,M} \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} a_j \Delta_{n,M,M}^j + a_M L_{n,M}^M \right\} \quad \text{si } m = M \\ &= p_{i,0} \left\{ a_0 [L_{n,0}^0 + \Delta_{n,0,1}^*] + \sum_{j=1}^M a_j [L_{n-1,0}^j + \Delta_{n-1,0,j+1}^j] \right\} \quad \text{si } m = 0 \end{aligned}$$

Une fois, $I_m^{UI}(i)$ est calculée, on obtient donc la fonction d'utilité de performance de notre

système.

$$U = \sum_{m=0}^M I_m^{UI} (i)$$

Remarque :

On peut considérer le cas où un composant i peut appartenir à tous les liens minimaux d'un système k consécutifs-sur- $n : G$ à multi-états, alors le théorème précédent peut être reformulé comme suit :

Corollaire :

Si le composant i appartient à tous les liens minimaux du système k consécutifs-sur- $n : G$ à multi-états, alors l'importance en utilité de l'état m ($0 \leq m \leq M$) de ce composant dans le système est donnée par :

$$\begin{aligned} I_m^{UI} (i) &= p_{i,m} \left\{ \sum_{j=0}^M a_j \Delta_{n,m,m}^j + a_m [L_{n,m}^m + \Delta_{n,m,m+1}^*] \right\} \quad \text{si } 0 < m < M \\ &= p_{i,M} \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} a_j \Delta_{n,M,M}^j + a_M L_{n,M}^M \right\} \quad \text{si } m = M \\ &= p_{i,0} \{ a_0 [L_{n,M}^0 + \Delta_{n,0,1}^*] \} \quad \text{si } m = 0 \end{aligned} \quad (119)$$

Démonstration :

On a par définition :

$$I_m^{UI} (i) = p_{i,m} \sum_{j=0}^M a_j P \{ \Phi (m_i, X) = j \}$$

la somme dans $I_m^{UI} (i)$ peut être décomposée comme :

$$\sum_{j=0}^M = \sum_{j=0}^m + \sum_{j=m}^M + \sum_{j=m+1}^M$$

le dernier terme dans cette somme est 0 car :

$$P \{ \Phi (m_i, X) = j \} = 0 \quad , \quad j = m + 1, \dots, M$$

et comme précédemment, on distingue les cas suivants :

$$* m = j = M \implies P[\Phi(m_i, X) = j = m] = \sum_{k'=k}^n \left[R_j(m_i, k', n) \right]$$

$$* m = j < M \implies P[\Phi(m_i, X) = j] = \sum_{k'=k}^n \left[R_j(m_i, k', n) + \sum_{h=m+1}^M H_{k'}^m(m_i, h) \right]$$

$$* m < j(j = M, j < M) \implies P[\Phi(m_i, X) = j] = 0$$

$$* m > j(j = M) \implies P[\Phi(m_i, X) = j] = 0$$

$$* m > j(j < M) \implies P[\Phi(m_i, X) = j] = \sum_{k'=k}^n \sum_{h=m}^M H_{k'}^m(m_i, h)$$

alors :

$$\begin{aligned} I_m^{UI}(i) &= \sum_{j=0}^M a_j P\{\Phi(m_i, X) = j\} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j P\{\Phi(m_i, X) = j\} + \sum_{j=m}^M a_j P\{\Phi(m_i, X) = j\} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} a_j \sum_{k'=k}^n \sum_{h=m}^M H_{k'}^j(m_i, h) + a_m \sum_{k'=k}^n \left[R_j(m_i, k', n) + \sum_{h=m+1}^M H_{k'}^m(m_i, h) \right] \quad \text{si } m < M \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} a_j \sum_{k'=k}^n H_{k'}^j(M_i, M) + a_M \sum_{k'=k}^n \left[R_j(M_i, k', n) \right] \quad \text{si } m = M \\ &= a_0 \sum_{k'=k}^n \left[R_j(0_i, k', n) + \sum_{h=1}^M H_{k'}^0(0_i, h) \right] \quad \text{si } m = 0 \end{aligned}$$

et en utilisant les notations du théorème précédent, on obtient le résultat.

6.3.8 Exemple

Soit un système de 4 composants ayant la configuration k consécutifs-parmi- n : G avec $k = 3$.

Le système et ses composants peuvent avoir 5 états possibles : 0, 1, 2, 3, 4.

$$n = 4, \quad k = 3, \quad M = 4$$

on attribue les probabilités suivantes aux composants d'être dans chaque état

état/ composant	1	2	3	4
0	0.1	0.1	0.1	0.1
1	0.1	0.2	0.2	0.1
2	0.2	0.2	0.2	0.3
3	0.4	0.3	0.2	0.2
4	0.2	0.2	0.3	0.3

Ce système a 2 liens minimaux : $\{123\}, \{234\}$, on remarque que les composants 2 et 3 appartiennent aux deux liens minimaux.

Pour $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 100, 1000, 2000, 8000)$, on calcule l'importance en utilité du composant 2 qui est dans les 2 liens minimaux, et du composant 1 qui est dans un seul lien minimal.

Cas 1 :

$$2 \in \{123\}, 2 \in \{234\}$$

En utilisant le corollaire, l'importance en utilité du composant 2 se calcule de la manière suivante :

* Au niveau : $m = M = 4$

$$I_4^{UI}(2) = p_{2,4} \left\{ \sum_{j=0}^3 a_j \Delta_{4,4,4}^j + a_4 L_{4,4}^4 \right\}$$

$$\Delta_{4,4,4}^1 = \sum_{k=3}^4 H_k^1(4_2, 4) = H_3^1(4_2, 4) + H_4^1(4_2, 4)$$

$$H_3^1(4) = \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=0}^{2-i_1} \sum_{i_3=0}^{2-(i_1+i_2)} R \left[\left(4^{i_1}, 3^{i_2}, 2^{i_1}, 1^{3-(i_1+i_2+i_3)} \right), 4 \right]$$

$$H_3^1(4) = R \left[(4^1, 3^0, 2^0, 1^2), 4 \right] + R \left[(4^1, 3^0, 2^1, 1^1), 4 \right]$$

$$+ R \left[(4^1, 3^1, 2^0, 1^1), 4 \right] + R \left[(4^2, 3^0, 2^0, 1^1), 4 \right]$$

$$H_3^1(4_2, 4) = [(1410, 0411)] + [(2410, 1420, 0421, 0412)] + [(3410, 1430, 0413, 0431)]$$

$$+ [(4410, 1440, 0441, 0414)]$$

$$H_4^1(4) = R \left[(4^1, 3^0, 2^0, 1^3), 4 \right] + R \left[(4^1, 3^0, 2^1, 1^2), 4 \right]$$

$$+ R \left[(4^1, 3^1, 2^0, 1^2), 4 \right] + R \left[(4^2, 3^0, 2^0, 1^2), 4 \right]$$

$$H_4^1(4_2, 4) = [(1411)] + [(2411, 1421, 1412)] + [(3411, 1431, 1413)] + [(4411, 1441, 1414)]$$

$$\Delta_{4,4,4}^2 = H_3^2(4_2, 4) + H_4^2(4_2, 4)$$

$$H_3^2(4) = R \left[(4^1, 3^0, 2^2), 4 \right] + R \left[(4^1, 3^1, 2^1), 4 \right] + R \left[(4^2, 3^0, 2^1), 4 \right]$$

$$H_3^2(4_2, 4) = [(\times 422, 242 \times)] + [(342 \times, 243 \times, \times 432, \times 423)] + [(442 \times, 244 \times, \times 424, \times 442)]$$

× peut être 0 ou 1

$$\begin{aligned}
H_4^2(4) &= R[4^1, 3^0, 2^3], 4] + R[4^1, 3^1, 2^2], 4] + R[4^2, 3^0, 2^2], 4] \\
H_4^2(4_2, 4) &= [(2422)] + [(3422, 2432, 2423)] + [(4422, 2442, 2424)]
\end{aligned}$$

$$\Delta_{4,4,4}^3 = H_3^3(4_2, 4) + H_4^3(4_2, 4)$$

$$\begin{aligned}
H_3^3(4) &= R[4^1, 3^2], 4] + R[4^2, 3^1], 4] \\
H_3^3(4_2, 4) &= [(343 \times, \times 433)] + [(443 \times, 344 \times, \times 443, \times 434)] \quad \times \text{ peut être } 0,1,2
\end{aligned}$$

$$H_4^3(4_2, 4) = R[4^1, 3^3], 4] + R[4^2, 3^2], 4] = [(3433)] + [(4433, 3443, 3434)]$$

$$\begin{aligned}
L_{4,4}^4 &= \sum_{k=3}^4 R_4(4_2, k, 4) = R_4(4_2, 3, 4) + R_4(4_2, 4, 4) \\
R_4(4_2, 3, 4) &= [(444 \times, \times 444)], \quad R_4(4_2, 4, 4) = [(4444)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1, 2, 3
\end{aligned}$$

alors :

$$I_4^{UI}(2) = 71.532$$

* Au niveau : $m = 3 < M = 4$

$$I_3^{UI}(2) = p_{2,3} \left\{ \sum_{j=0}^2 a_j \Delta_{4,3,3}^j + a_3 [L_{4,3}^3 + \Delta_{4,3,4}^*] \right\}$$

$$\Delta_{4,3,3}^1 = H_3^1(3_2, 3) + H_3^1(3_2, 4) + H_4^1(3_2, 3) + H_4^1(3_2, 4)$$

$$\begin{aligned}
H_3^1(3) &= R[(3^1, 2^0, 1^2), 4] + R[(3^1, 2^1, 1^1), 4] + R[(3^2, 2^0, 1^1), 4] \\
H_3^1(3_2, 3) &= [(0311, 1310)] + [(0321, 0312, 1320, 2310)] + [(3310, 1330, 0331, 0313)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4^1(3) &= R[(3^1, 2^0, 1^3), 4] + R[(3^1, 2^1, 1^2), 4] + R[(3^2, 2^0, 1^2), 4] \\
H_4^1(3_2, 3) &= [(1311)] + [(2311, 1321, 1312)] + [(3311, 1331, 1313)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3^1(4) &= R[(4^1, 3^0, 2^0, 1^2), 4] + R[(4^1, 3^0, 2^1, 1^1), 4] + \\
&\quad R[(4^1, 3^1, 2^0, 1^1), 4] + R[(4^2, 3^0, 2^1, 1^1), 4] \\
H_3^1(3_2, 4) &= R[(4^1, 3^1, 2^0, 1^1), 4] = [(4310, 1340, 0314, 0341)]
\end{aligned}$$

$$H_4^1(3_2, 4) = [R(4^1, 3^1, 2^0, 1^2), 4] = [(4311, 1341, 1314)]$$

$$\Delta_{4,3,3}^2 = H_3^2(3_2, 3) + H_3^2(3_2, 4) + H_4^2(3_2, 3) + H_4^2(3_2, 4)$$

$$\begin{aligned}
H_3^2(3) &= R[(3^1, 2^2), 4] + R[(3^2, 2^1), 4] \\
H_3^2(3_2, 3) &= [(\times 322, 232 \times)] + [(\times 332, \times 323, 332 \times, 233 \times)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3^2(4) &= R[(4^1, 3^0, 2^2), 4] + R[(4^1, 3^1, 2^1), 4] + R[(4^2, 3^0, 2^1), 4] \\
H_3^2(3_2, 4) &= R[(4^1, 3^1, 2^1), 4] = [(432 \times, 234 \times, \times 324, \times 342)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1
\end{aligned}$$

$$H_4^2(3_2, 3) = R[(3^1, 2^3), 4] + R[(3^2, 2^2), 4] = [(2322)] + [(3322, 2332, 2323)]$$

$$\begin{aligned} H_4^2(4) &= R[(4^1, 3^0, 2^3), 4] + R[(4^1, 3^1, 2^2), 4] + R[(4^2, 3^0, 2^2), 4] \\ H_4^2(3_2, 4) &= R[(4^1, 3^1, 2^2), 4] = [(4322, 2342, 2324)] \end{aligned}$$

$$L_{4,3}^3 = R_3(3_2, 3, 4) + R_3(3_2, 4, 4) = [(333\times, \times 333)] + [(3333)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1, 2$$

$$\Delta_{4,3,4}^* = H_3^3(3_2, 4) + H_4^3(3_2, 4)$$

$$\begin{aligned} H_3^3(4) &= R[(4^1, 3^2), 4] + R[(4^2, 3^1), 4] \\ H_3^3(3_2, 4) &= [(\times 334, \times 343, 334\times, 433\times)] + [(\times 344, 434\times)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1, 2 \end{aligned}$$

$$H_4^3(3_2, 4) = R[(4^1, 3^3), 4] + R[(4^2, 3^2), 4] = [(3334, 3343, 4333)] + [(3344, 4343, 4334)]$$

alors :

$$I_3^{UI}(2) = 52.626$$

* Au niveau : $m = 0$

$$I_0^{UI}(2) = p_{2,0} \{a_0 [L_{4,0}^0 + \Delta_{4,0,1}^*]\}$$

$$I_0^{UI}(2) = 0$$

On peut voir d'après les résultats obtenus que :

$$I_4^{UI}(2) > I_3^{UI}(2) > I_0^{UI}(2)$$

Donc, du point de vue de l'utilisateur, des efforts doivent être faits pour garder le composant 2 à l'état 4, car c'est à cet état que le composant 2 a la plus grande contribution au système.

Cas 2 :

En utilisant le théorème, l'importance en utilité du composant 1 est comme suit :

* Au niveau : $m = M = 4$

$$I_4^{UI}(1) = p_{1,4} \left\{ \sum_{j=0}^3 a_j \Delta_{4,4,4}^j + a_4 L_{4,4}^4 \right\}$$

$$\Delta_{4,4,4}^1 = H_3^1(4_1, 4) + H_4^1(4_1, 4)$$

$$\begin{aligned} H_3^1(4_1, 4) &= R[(4^1, 3^0, 2^0, 1^2), 4] + R[(4^1, 3^0, 2^1, 1^1), 4] + R[(4^1, 3^1, 2^0, 1^1), 4] \\ &\quad + R[(4^2, 3^0, 2^0, 1^1), 4] \end{aligned}$$

$$H_3^1(4_1, 4) = [(4110)] + [(4210, 4120)] + [(4310, 4130)] + [(4410, 4140)]$$

$$\begin{aligned} H_4^1(4) &= R[(4^1, 3^0, 2^0, 1^3), 4] + R[(4^1, 3^0, 2^1, 1^2), 4] + R[(4^1, 3^1, 2^0, 1^2), 4] \\ &\quad + R[(4^2, 3^0, 2^0, 1^2), 4] \end{aligned}$$

$$H_4^1(4_1, 4) = [(4111)] + [(4211, 4121, 4112)] + [(4311, 4131, 4113)] + [(4411, 4141, 4114)]$$

$$\Delta_{4,4,4}^2 = H_3^2(4_1, 4) + H_4^2(4_1, 4)$$

$$\begin{aligned}
H_3^2(4) &= R[(4^1, 3^0, 2^2), 4] + R[(4^1, 3^1, 2^1), 4] + R[(4^2, 3^0, 2^1), 4] \\
H_3^2(4_1, 4) &= [(422\times)] + [(432\times, 423\times)] + [(442\times, 424\times)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4^2(4) &= R[(4^1, 3^0, 2^3), 4] + R[(4^1, 3^1, 2^2), 4] + R[(4^2, 3^0, 2^2), 4] \\
H_4^2(4_1, 4) &= [(4222)] + [(4322, 4232, 4223)] + [(4422, 4242, 4224)]
\end{aligned}$$

$$\Delta_{4,4,4}^3 = H_3^3(4_1, 4) + H_4^3(4_1, 4)$$

$$H_3^3(4_1, 4) = R[(4^1, 3^2), 4] + R[(4^2, 3^1), 4] = [(433\times)] + [(443\times, 434\times)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1, 2$$

$$H_4^3(4_1, 4) = R[(4^1, 3^3), 4] + R[(4^2, 3^2), 4] = [(4333)] + [(4433, 4343, 4334)]$$

$$L_{4,4}^4 = R_4(4_1, 3, 4) + R_4(4_1, 4, 4) = [(444\times)] + [(4444)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1, 2, 3$$

donc :

$$I_4^{UI}(1) = 37.104$$

* Au niveau : $m = 0$

$$\begin{aligned}
I_0^{UI}(1) &= p_{1,0} \left\{ a_0 [L_{4,0}^0 + \Delta_{4,0,1}^*] + \sum_{j=1}^4 a_j [L_{3,0}^j + \Delta_{3,0,j+1}^j] \right\} \\
I_0^{UI}(1) &= p_{1,0} \left\{ \begin{aligned} &a_0 [L_{4,0}^0 + \Delta_{4,0,1}^*] + a_1 [L_{3,0}^1 + \Delta_{3,0,2}^1] + a_2 [L_{3,0}^2 + \Delta_{3,0,3}^2] + \\ &a_3 [L_{3,0}^3 + \Delta_{3,0,4}^3] + a_4 [L_{3,0}^3] \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$L_{3,0}^1 = R_1(0_1, 3, 4) = [(0111)] \quad , \quad L_{3,0}^2 = R_2(0_1, 3, 4) = [(0222)]$$

$$L_{3,0}^3 = R_3(0_1, 3, 4) = [(0333)] \quad , \quad L_{3,0}^4 = R_4(0_1, 3, 4) = [(0444)]$$

$$\Delta_{3,0,2}^1 = H_3^1(0_1, 2) + H_3^1(0_1, 3) + H_3^1(0_1, 4)$$

$$H_3^1(2) = R[(2^1, 1^2), 4] + R[(2^2, 1^1), 4]$$

$$H_3^1(0_1, 2) = [(0211, 0121, 0112)] + [(0221, 0212, 0122)]$$

$$H_3^1(3) = R[(3^1, 2^0, 1^2), 4] + R[(3^1, 2^1, 1^1), 4] + R[(3^2, 2^0, 1^1), 4]$$

$$\begin{aligned}
H_3^1(0_1, 3) &= [(0311, 0131, 0113)] + [(0321, 0312, 0132, 0123, 0213, 0231)] \\
&+ [(0331, 0313, 0133)]
\end{aligned}$$

$$H_3^1(4) = R[(4^1, 3^0, 2^0, 1^2), 4] + R[(4^1, 3^0, 2^1, 1^1), 4] +$$

$$R[(4^1, 3^1, 2^0, 1^1), 4] + R[(4^2, 3^0, 2^0, 1^1), 4]$$

$$H_3^1(0_1, 4) = [(0411, 0141, 0114)] + [(0421, 0241, 0142, 0412, 0124, 0214)]$$

$$+ [(0431, 0341, 0143, 0413, 0134, 0314)] + [(0441, 0414, 0144)]$$

$$\Delta_{3,0,3}^2 = H_3^2(0_1, 3) + H_3^2(0_1, 4)$$

$$\begin{aligned} H_3^2(3) &= R[(3^1, 2^2), 4] + R[(3^2, 2^1), 4] \\ H_3^2(0_1, 3) &= [(0322, 0232, 0223)] + [(0332, 0323, 0233)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3^2(4) &= R[(4^1, 3^0, 2^2), 4] + R[(4^1 3^1, 2^1), 4] + R[(4^2, 3^0, 2^1), 4] \\ H_3^2(0_1, 4) &= [(0422, 0242, 0224)] + [(0432, 0423, 0342, 0324, 0234, 0243)] \\ &\quad + [(0442, 0424, 0244)] \end{aligned}$$

$$\Delta_{3,0,3}^3 = H_3^3(0_1, 4)$$

$$\begin{aligned} H_3^3(4) &= R[(4^1, 3^2), 4] + R[(4^2, 3^1), 4] \\ H_3^3(0_1, 4) &= [(0433, 0343, 0334)] + [(0443, 0434, 0344)] \end{aligned}$$

alors :

$$I_0^{UI}(1) = 6.551$$

* Au niveau : $m = 3 < M = 4$

$$\begin{aligned} I_3^{UI}(1) &= p_{1,3} \left\{ \sum_{j=0}^2 a_j \Delta_{4,3,3}^j + a_3 [L_{4,3}^3 + \Delta_{4,3,4}^*] + \sum_{j=4}^4 a_j [L_{3,3}^j + \Delta_{3,3,j+1}^j] \right\} \\ &= p_{1,3} \{ a_0 \Delta_{4,3,3}^0 + a_1 \Delta_{4,3,3}^1 + a_2 \Delta_{4,3,3}^2 + a_3 [L_{4,3}^3 + \Delta_{4,3,4}] + a_4 L_{3,3}^4 \} \end{aligned}$$

$$\Delta_{4,3,3}^1 = [H_3^1(3_1, 3) + H_3^1(3_1, 4)] + [H_4^1(3_1, 3) + H_4^1(3_1, 4)]$$

$$\begin{aligned} H_3^1(3) &= R[(3^1, 2^0, 1^2), 4] + R[(3^1, 2^1, 1^1), 4] + R[(3^2, 2^0, 1^1), 4] \\ H_3^1(3_1, 3) &= [(3110)] + [(3210, 3120)] + [(3310, 3130)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3^1(4) &= R[(4^1, 3^0, 2^0, 1^2), 4] + R[(4^1, 3^0, 2^1, 1^1), 4] + \\ &\quad R[(4^1, 3^1, 2^0, 1^1), 4] + R[(4^2, 3^0, 2^0, 1^1), 4] \\ H_3^1(3_1, 4) &= R[(4^1, 3^1, 2^0, 1^1), 4] = [(3410, 3140)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4^1(3) &= R[(3^1, 2^0, 1^3), 4] + R[(3^1, 2^1, 1^2), 4] + R[(3^2, 2^0, 1^2), 4] \\ H_4^1(3_1, 3) &= [(3111)] + [(3211, 3121, 3112)] + [(3311, 3131, 3113)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4^1(4) &= R[(4^1, 3^0, 2^0, 1^3), 4] + R[(4^1, 3^0, 2^1, 1^2), 4] + \\ &\quad R[(4^1, 3^1, 2^0, 1^2), 4] + R[(4^2, 3^0, 2^0, 1^2), 4] \\ H_4^1(3_1, 4) &= R[(4^1, 3^1, 2^0, 1^2), 4] = [(3411, 3141, 3114)] \end{aligned}$$

$$\Delta_{4,3,3}^2 = [H_3^2(3_1, 3) + H_3^2(3_1, 4)] + [H_4^2(3_1, 3) + H_4^2(3_1, 4)]$$

$$\begin{aligned} H_3^2(3_1, 3) &= R[(3^1, 2^2), 4] + R[(3^2, 2^1), 4] \\ H_3^2(3_1, 3) &= [(322 \times)] + [(332 \times, 323 \times)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1 \end{aligned}$$

$$H_3^2(3_1, 4) = R[(4^1, 3^1, 2^2), 4] = [(342\times, 324\times)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1$$

$$H_4^2(3_1, 3) = R[(3^1, 2^3), 4] + R[(3^2, 2^2), 4] = [(3222)] + [(3322, 3232, 3223)]$$

$$H_4^2(3_1, 4) = R[(4^1, 3^1, 2^2), 4] = [(3422, 3242, 3224)]$$

$$L_{4,3}^3 = R_3(3_1, 3, 4) + R_3(3_1, 4, 4) = [(333\times)] + [(3333)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1, 2$$

$$\Delta_{4,3,4}^* = H_3^3(3_1, 4) + H_4^3(3_1, 4)$$

$$H_3^3(3_1, 4) = R[(4^1, 3^2), 4] + R[(4^2, 3^1), 4] = [(334\times, 343\times)] + [(344\times)] \quad \times \text{ peut être } 0, 1, 2$$

$$H_4^3(3_1, 4) = R[(4^1, 3^3), 4] + R[(4^2, 3^2), 4] = [(3334, 3343, 3433)] + [(3344, 3434, 3443)]$$

$$L_{3,3}^4 = R_4(3_1, 3, 4) = [(3444)]$$

donc :

$$I_3^{UI}(1) = 328.576$$

Et on trouve :

$$I_3^{UI}(1) > I_4^{UI}(1) > I_0^{UI}(1)$$

Donc, pour le composant 1, et du point de vue de l'utilisateur, des efforts doivent être faits pour le garder à l'état 3, car c'est à cet état 3 qu'il contribue le plus au système.

Dans cet exemple, avec les données telles que :

$$p_{2,3} > p_{2,4} > p_{2,0} , \quad p_{1,3} > p_{1,4} > p_{1,0}$$

et

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 100, 1000, 2000, 8000)$$

on a trouvé que :

$$I_4^{UI}(2) > I_3^{UI}(2) > I_0^{UI}(2) \quad \text{et} \quad I_3^{UI}(1) > I_4^{UI}(1) > I_0^{UI}(1)$$

Donc, on remarque que malgré que les composants 1 et 2 ont la plus grande probabilité d'être à l'état 3 ($p_{2,3} = 0.3$, $p_{1,3} = 0.4$), mais le calcul de leur importance en utilité recommande au composant 2 d'être à l'état 4. Car ce composant appartient à tous les liens minimaux de ce système, donc il faut qu'il soit très performant. Et ceci nous permet de déduire et confirmer que la position d'un composant avec un état spécifique dans un système k -consécutifs-sur- n : G à multi-états est importante.

Chapitre 7

Les indices de la fiabilité dynamique

7.1 Introduction :

Dans cette partie, on va parler de la fiabilité dynamique, ou plutôt des indices de la fiabilité dynamique, c'est à dire, le passage pour le système d'un niveau de performance à un autre, soit une amélioration ou une dégradation, suivant le changement d'états des composants.

Dans la littérature, 4 approches ont été adoptées pour l'analyse de la fiabilité des systèmes à plusieurs états :

- a) l'approche de la fonction de structure [4, 5].
- b) l'approche des processus stochastiques (Bo Henry Lindqvist) [65].
- c) l'approche de la fonction génératrice universelle (UMGF) (Ushakov, Levitin, Lisnianski) [43, 44, 46, 52, 62].
- d) la technique de la simulation de Monté-Carlo (Zio, Podofillini) [70, 72].

Historiquement, l'approche (a) a été la première à être développée et appliquée (Barlow et El-Newehi [4, 5])

elle comporte 2 directions :

- la première direction consiste à généraliser quelques résultats du cas binaire au cas multinaire mais dont l'application est restreinte aux systèmes multinaires simples (des systèmes comportant un petit nombre de composants).

- la deuxième direction consiste à utiliser la fonction de structure du système et l'interpréter comme une fonction à plusieurs valeurs (Multiple-valued Logic MLV).

Boedigheimer et Kapur (1994) [30] ont proposé la méthode de la fonction de structure qui a permis d'analyser l'influence du changement d'états des composants sur la fiabilité du système. Néanmoins, cette approche est incapable de s'investir dans le comportement dynamique du système, c'est à dire, elle est incapable de donner des précisions sur le comportement dynamique du système. Et pour répondre à cette difficulté, Zaitseva et Levashenko [54 – 57, 60, 75] ont développé les résultats de [30] en utilisant le calcul différentiel logique.

Ainsi, des concepts de base ont été établis en utilisant les dérivées partielles directes logiques pour l'analyse de la fiabilité du système. Et une classe d'indices de la fiabilité appelée classe d'indices de la fiabilité dynamique (**DRI**) a été déterminée.

Le caractère dynamique des **DRI** consiste à déterminer l'état de panne du système ou dans d'autres cas l'état de réparation, suite à un changement d'état d'un composant, en d'autres termes, cette classe définit les états limites du système. Ces états limites du système sont obtenus à partir d'un concept fondamental pour l'évaluation de la fiabilité des systèmes à multi-états, qui est celui des liens minimaux et des coupes minimales du système.

Dans la littérature, il ya trois groupes d'indices pour un système à multi-états, le 1^{er} groupe comporte les indices déterministes de la fiabilité, le 2^{ème} groupe comporte les indices stochastiques et ceux-la permettent d'estimer la fiabilité du système sans analyser les influences externes (sans prendre en compte des influences externes) (Ushakov, Levitin, Lisnianski, Boedigheimer et Kapur) [58, 30], alors que le 3^{ème} groupe comporte des indices qui caractérisent l'opération d'un système en tenant compte des influences externes(Pouret, collet, Bon (1999) [47]) .

Ce chapitre sera basé sur la classe des **DRI** comportant des indices déterministes qui définissent l'ensemble des états limites du système et des indices probabilistes qui calculent les probabilités de panne ou de réparation du système.

7.2 Le modèle mathématique :

Soit un système à n composants, le système est ses composants peuvent avoir plusieurs états différents.

Sa fonction de structure est définie par :

$$\begin{aligned} \Phi & : \{0, 1, \dots, M_1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, M_n\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, M\} \text{ en général } M_i \neq M_l \neq M \\ i, l & \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \Phi(X) & = \Phi(X_1, X_2, \dots, X_n) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } X \text{ est un état de panne du système} \\ s \text{ si } X \text{ est un état de fonctionnement du système} \end{array} \right\} \\ s & \in \{1, 2, \dots, M\} \text{ , } X_i \in \{0, 1, \dots, M_i\} \text{ , } \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

7.2.1 Hypothèses :

le système est cohérent :

a) la fonction de structure est non décroissante en chaque argument :

$$\Phi(s, s, \dots, s) = s \text{ , } \Phi(0, 0, \dots, 0) = 0 \text{ et } \Phi(X) \leq \Phi(X') \text{ si } X \leq X'$$

b) les états des composants sont mutuellement indépendants.

c) chaque composant est utile dans le système.

d) les probabilités des différents états pour chaque composant sont connues.

Dans quelques travaux [30, 48, 49, 86], la fonction de structure a été utilisée pour l'estimation de la probabilité des différents états du système ie :

$$P\{\Phi(X) = l\} \text{ , } l \in \{0, 1, \dots, M\}$$

mais dans d'autres papiers [54 – 57, 60, 75], l'approche mathématique adoptée se focalise sur le comportement dynamique du système à multi-états et à calculer la probabilité du changement d'état du système,

ie

$$P\{\Phi(X) = j\} \longrightarrow P\{\Phi(X) = l\} \text{ , } j \neq l$$

cette approche est fondée sur le calcul différentiel logique et en particulier, les dérivées

partielles logiques directes.

La dérivée partielle logique directe $\frac{\partial \Phi(j \rightarrow l)}{\partial X_i(a \rightarrow b)}$ de la fonction Φ reflète le changement de la fonction de structure de l'état j vers l'état l quand le composant i change de l'état a vers l'état b , ceci peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(j \rightarrow l)}{\partial X_i(a \rightarrow b)} &= \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, a, X_{i+1}, \dots, X_n) \circ \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, b, X_{i+1}, \dots, X_n) \\ \text{où } j, l &\in \{0, 1, \dots, M\} \quad , \quad a, b \in \{0, 1, \dots, M_i\} \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \circ &: \quad \text{symbole de comparaison} \end{aligned} \tag{121}$$

Mais les dérivées partielles directes logiques qui ont un intérêt pour l'analyse de la fiabilité du système à multi-états sont :

$$\begin{aligned} \star \frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_i(a \rightarrow b)} &\text{ pour } a \in \{1, \dots, M_i\} \quad , \quad b \in \{0, 1, \dots, M_i - 1\} \quad , \quad b < a \\ \star \star \frac{\partial \Phi(0 \rightarrow l)}{\partial X_i(c \rightarrow d)} &\text{ pour } l \in \{1, \dots, M\} \quad , \\ &d \in \{1, \dots, M_i\} \quad , \quad c \in \{0, 1, \dots, M_i - 1\} \quad , \quad c < d \end{aligned}$$

les dérivées du type (\star) représentent la panne du système suite à une dégradation du composant i de l'état a vers l'état b , et en supposant que la dégradation se fait par étapes d'où les dérivées du type(\star) sont de la forme :

$$\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_i(a \rightarrow a - 1)} \quad ; \quad a \in \{1, \dots, M_i\}$$

Mais en pratique, on s'intéresse aux dérivées

$$\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_i(1 \rightarrow 0)}$$

les dérivées du type ($\star\star$) décrivent le renouvellement du système. Il ya deux variantes pour

cela ; réparer le système en remplaçant le composant défaillant par un composant neuf, cette situation est représentée par :

$$\frac{\partial \Phi (0 \longrightarrow l)}{\partial X_i (0 \longrightarrow M_i)}, \quad l \in \{1, \dots, M\}$$

ou bien l'amélioration d'état du composant i qui est représentée par :

$$\frac{\partial \Phi (0 \longrightarrow l)}{\partial X_i (c \longrightarrow c + 1)}, \quad c \in \{0, 1, \dots, M_i - 1\}$$

Cependant, la 1^{ère} variante est la plus importante en application et puisque la fonction de structure est non décroissante, cette dérivée peut être assimilée à

$$\frac{\partial \Phi (0 \longrightarrow l)}{\partial X_i (0 \longrightarrow M_i)}$$

donc pour l'analyse du comportement dynamique du système à multi-états on a besoin d'utiliser :

$$\frac{\partial \Phi (1 \longrightarrow 0)}{\partial X_i (1 \longrightarrow 0)}, \quad \frac{\partial \Phi (0 \longrightarrow 1)}{\partial X_i (0 \longrightarrow M_i)}$$

Et pour cela, une classe d'indices de la fiabilité a été déterminée et appelée :

7.3 Les indices de la fiabilité dynamique (DRI) :

C'est une classe constituée de **DRI** déterministes et de **DRI** probabilistes. Et elle contient 3 groupes.

7.3.1 Indices de la fiabilité dynamique déterministe (DDRI) :

Les **DDRI** évaluent l'influence du changement d'état d'un composant sur la fiabilité du système, ils sont définis comme des ensembles d'états limites du système et qui sont calculés à partir des dérivées partielles logiques directes (V.Shmerko, V.Levashenko (1996) [41]).

Définition 1 :

Les DDRI sont des ensembles d'états limites du système notés $\{G_f\}$ pour la panne et $\{G_r\}$

pour la réparation et sont définis par :

$$\{G_f\} = \{G_f/X_1\} \cup \{G_f/X_2\} \cup \dots \cup \{G_f/X_n\} = \bigcup_{i=1}^n \{G_f/X_i\} \quad (122)$$

$$\{G_r\} = \{G_r/X_1\} \cup \{G_r/X_2\} \cup \dots \cup \{G_r/X_n\} = \bigcup_{i=1}^n \{G_r/X_i\} \quad (123)$$

où : $\{G_\alpha/X_i, \alpha = f, r\}$ = ensemble d'états pour lequel un changement d'état dans le composant i cause un changement de performance dans le système.

Alors :

$$\{G_f/X_i\} \Leftrightarrow \left\{ G_f / \frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_i(1 \rightarrow 0)} \neq 0 \right\} \quad (124)$$

$$\{G_r/X_i\} \Leftrightarrow \left\{ G_r / \frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_i(0 \rightarrow M_i)} \neq 0 \right\} \quad (125)$$

En d'autres termes, un composant i affecte la performance du système si la dérivée partielle logique par rapport à ce composant est non nulle.

7.3.2 Les indices de la fiabilité dynamique du composant (CDRI)

Les **CDRI** permettent d'évaluer la probabilité d'influence du $i^{\text{ème}}$ composant sur la possibilité de panne ou de réparation du système, ils permettent de déterminer d'un point de vue de fiabilité, les composants instables.

Définition 2 [57, 60] :

Les CDRI sont des probabilités de panne ou de réparation du système suite à une modification d'état d'un composant. Ils sont définis comme suit :

$$P_f(i) = P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} P_1(i) \quad (126)$$

$$P_r(i) = P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1} P_{M_i}(i) \quad (127)$$

où :

$P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$ = probabilité que le système tombe en panne si le composant i tombe en panne.

$P_1(i)$ = probabilité que le composant i est à l'état 1.

$P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$ = probabilité que le système est réparé si le composant i
est remplacé par un composant neuf.

$P_{M_i}(i)$ = probabilité que le composant i est à l'état M_i .

et les probabilités $P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$, $P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$ sont calculées de la façon suivante :

$$P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = \frac{\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1) \dots (M_n + 1)} \quad (128)$$

$$P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1} = \frac{\rho(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1) \dots (M_n + 1)} \quad (129)$$

où :

$\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$: nombre d'états de panne du système suite à la panne du $i^{\text{ème}}$
composant.

$\rho(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$: nombre d'états de réparation du système suite au remplacement
du $i^{\text{ème}}$ composant par un composant neuf.

En d'autres termes, $\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$ et $\rho(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$ sont les cardinaux des sous ensembles $\{G_f/X_i\}$, $\{G_r/X_i\}$
(respectivement), ils sont obtenus des dérivées partielles $\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_i(1 \rightarrow 0)}$ et $\frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_i(0 \rightarrow M_i)}$ qui
sont non nulles.

7.3.3 Les indices de la fiabilité dynamique intégrée DIRI

Les **DIRI** sont une généralisation de **DDRI**

Comme il s'avère que les **DDRI** sont complexes pour le calcul et causent certaines difficultés,
d'où le recours aux probabilités analogues de ces indices et qui sont toujours utilisées en pratique.

Définition 3 [56, 60] :

Les **DIRI** déterminent la probabilité de panne (ou de réparation) du système si l'un de ses

composants tombe en panne (ou restauré). Cette probabilité est définie par :

$$P_f = \sum_{i=1}^n P_f(i) \prod_{q=1, q \neq i}^n (1 - P_f(q)) \quad (130)$$

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_r(i) \prod_{q=1, q \neq i}^n (1 - P_r(q)) \quad (131)$$

où : $P_f(i)$, $P_r(i)$ sont définies dans les **CDRI**.

Un algorithme est établi pour le calcul de ces indices.

7.3.4 Un algorithme pour le calcul des DRI :

étape 1 : le calcul de **DDRI** : $\{G_f\}$ et $\{G_r\}$.

étape 1.1 : le calcul des dérivées $\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_i(1 \rightarrow 0)}$.

étape 1.2 : obtenir les sous ensembles $\{G_f/X_i\}$.

étape 1.3 : former l'ensemble d'états limites $\{G_f\}$.

étape 1.4 : le calcul des dérivées $\frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_i(0 \rightarrow M_i)}$.

étape 1.5 : obtenir les sous ensembles $\{G_r/X_i\}$.

étape 1.6 : obtenir l'ensemble $\{G_r\}$.

étape 2 : le calcul de $P_f(i)$ et $P_r(i)$.

étape 2.1 : calculer les nombres $\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$ et $\rho(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$.

étape 2.2 : calculer les probabilités structurelles $P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$ et $P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$.

étape 2.3 : obtenir les **CDRI**.

étape 3 : obtenir les **DIRI** par leur formules.

ainsi, en effectuant toutes les étapes de cet algorithme on arrive à estimer l'influence de chaque composant sur la panne ou la réparation du système.

7.3.5 Cas particulier :

On suppose que le système est constitué de n composants qui ont M états (i.e tous les composants ont le même nombre de niveaux de performance ainsi que le système), dans ce cas

la fonction de structure Φ est définie par :

$$\Phi(X) = \Phi(X_1, X_2, \dots, X_n) : \{0, 1, \dots, M\}^n \longrightarrow \{0, 1, \dots, M\} \quad (132)$$

alors :

$$\frac{\partial \Phi(0 \longrightarrow 1)}{\partial X_i(0 \longrightarrow M_i)} \text{ devient } \frac{\partial \Phi(0 \longrightarrow 1)}{\partial X_i(0 \longrightarrow M)} \quad (133)$$

$$P(i)_{a \longrightarrow b}^{j \longrightarrow l} = \frac{\rho(i)_{a \longrightarrow b}^{j \longrightarrow l}}{(M+1)^n} \quad (134)$$

7.4 Exemples

Dans les exemples qui suivent, on traite un système de 3 composants, tel que le 1^{er} a 4 états, le 2^{ème} a 2 états et le 3^{ème} a 3 états

$$M_1 = 3, \quad M_2 = 1, \quad M_3 = 2 \text{ i.e } X_1 : (0, 1, 2, 3), \quad X_2 : (0, 1), \quad X_3 : (0, 1, 2)$$

les probabilités d'états des composants sont données dans le tableau suivant :

composant /état	0	1	2	3
X_1	0.20	0.15	0.23	0.42
X_2	0.31	0.69	-	-
X_3	0.16	0.34	0.50	-

et dans chaque exemple, on considère une configuration donnée pour le système. Le but est de comparer et de préciser quels sont les composants qui ont une grande (petite) influence sur la panne ou la réparation du système.

7.4.1 Exemple "2 consécutifs-sur-3" :

Les composants du système sont disposés en série. Le système fonctionne ssi au moins 2 composants consécutifs sur 3 fonctionnent.

La fonction de structure du système est donnée dans le tableau suivant :

X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$
0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	3	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0
0	0	2	0	1	0	2	0	2	0	2	0	3	0	2	0
0	1	0	0	1	1	0	1	2	1	0	1	3	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1
0	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	1	3	1	2	1

étatpe 1 : on commence par donner les DDRI qui sont calculés par $\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_i(1 \rightarrow 0)}$ et $\frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_i(0 \rightarrow M_i)}$:

-étatpe 1.1 : le calcul de $\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_i(1 \rightarrow 0)}$:

⊗ pour le 1^{er} composant, on a :

$$\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_1(1 \rightarrow 0)} = \Phi(1, X_2, X_3) \circ \Phi(0, X_2, 0, X_3)$$

avec :

$$\Phi(1, X_2, X_3) = 1 \quad \text{si} \quad (1, X_2, X_3) = (1, 1, 0)$$

$$\Phi(0, X_2, X_3) = 0 \quad \text{si} \quad (0, X_2, X_3) = (0, 1, 0)$$

donc pour le 1^{er} composant, on a un seul lien critique : $\{(1, 1, 0)\}$.

⊗ pour le 2^{ème} composant, on a :

$$\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_2(1 \rightarrow 0)} = \Phi(X_1, 1, X_3) \circ \Phi(X_1, 0, X_3)$$

avec :

$$\Phi(X_1, 1, X_3) = 1 \quad \text{si} \quad (X_1, 1, X_3) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), \\ (1, 1, 2), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 2), \\ (3, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 1, 2) \end{array} \right\}$$

$$\Phi(X_1, 0, X_3) = 0 \quad \text{si} \quad (X_1, 0, X_3) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 1), (0, 0, 2), (1, 0, 0), (1, 0, 1), \\ (1, 0, 2), (2, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 2), \\ (3, 0, 0), (3, 0, 1), (3, 0, 2) \end{array} \right\}$$

donc pour le 2^{ème} composant, on a 11 liens critiques : $\left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), \\ (1, 1, 2), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 2), \\ (3, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 1, 2) \end{array} \right\}$

⊗ pour le 3^{ème} composant, on a :

$$\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_3(1 \rightarrow 0)} = \Phi(X_1, X_2, 1) \circ \Phi(X_1, X_2, 0)$$

avec :

$$\Phi(X_1, X_2, 1) = 1 \quad \text{si} \quad (X_1, X_2, 1) = (0, 1, 1)$$

$$\Phi(X_1, X_2, 0) = 0 \quad \text{si} \quad (X_1, X_2, 0) = (0, 1, 0)$$

donc pour le 3^{ème} composant, on a un seul lien critique : $\{(0, 1, 1)\}$.

-étape 1.2 : obtenir les sous ensembles $\{G_f/X_i\}$:

$$\{G_f/X_1\} = \{(1, 1, 0)\}$$

$$\{G_f/X_2\} = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), \\ (1, 1, 2), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 2), \\ (3, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 1, 2) \end{array} \right\}$$

$$\{G_f/X_3\} = \{(0, 1, 1)\}$$

-**étape 1.3** : former l'ensemble $\{G_f\}$:

$$\{G_f\} = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), \\ (1, 1, 2), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 2), \\ (3, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 1, 2) \end{array} \right\}$$

étape 2 : le calcul de $P_f(i)$:

-**étape 2.1** : le calcul de $\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$.

$$\rho(1)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = 1, \quad \rho(2)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = 11, \quad \rho(3)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = 1$$

-**étape 2.2** : le calcul de la probabilité structurelle du composant i .

$$P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = \frac{\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$P(1)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = \frac{\rho(1)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)} = \frac{1}{4.2.3} = 0.042$$

$$P(2)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = \frac{\rho(2)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)} = \frac{11}{4.2.3} = 0.46$$

$$P(3)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = \frac{\rho(3)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)} = \frac{1}{4.2.3} = 0.042$$

-**étape 2.3** : le calcul des **CDRI** :

$$P_f(i) = P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} P_1(i), \quad P_1(i) = P(X_i = 1), \quad i = 1, 2, 3$$

$$P_f(1) = P(1)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} P_1(1) = (0.042)(0.15) = 0.0063$$

$$P_f(2) = P(2)_{1 \rightarrow 0}^1 P_1(2) = (0.46)(0.69) = 0.3174$$

$$P_f(3) = P(3)_{1 \rightarrow 0}^1 P_1(3) = (0.042)(0.34) = 0.0143$$

étape 3 : obtenir les **DIRI** :

La dernière étape qui consiste à trouver les **DIRI** pour estimer la probabilité de panne du système :

$$\begin{aligned} P_f &= P\{G_f\} = \sum_{i=1}^n P_f(i) \prod_{q=1, q \neq i}^n (1 - P_f(q)) = \sum_{i=1}^3 P_f(i) \prod_{q=1, q \neq i}^3 (1 - P_f(q)) \\ &= P_f(1) \prod_{q=1, q \neq 1}^3 (1 - P_f(q)) \\ &\quad + P_f(2) \prod_{q=1, q \neq 2}^3 (1 - P_f(q)) + P_f(3) \prod_{q=1, q \neq 3}^3 (1 - P_f(q)) \\ &= P_f(1)(1 - P_f(2))(1 - P_f(3)) + P_f(2)(1 - P_f(1))(1 - P_f(3)) \\ &\quad + P_f(3)(1 - P_f(1))(1 - P_f(2)) \\ &= (0.0063)(1 - 0.3174)(1 - 0.0143) + (0.3174)(1 - 0.0063)(1 - 0.0143) \\ &\quad + (0.0143)(1 - 0.0063)(1 - 0.3174) \end{aligned}$$

$$P_f = P\{G_f\} = 0.3248$$

On calcule à présent $P_r = P(\text{réparation du système}) = P\{G_r\}$.

On reprend les mêmes étapes précédentes :

-étape 1.4 : le calcul de $\frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_i(0 \rightarrow M_i)}$

$$\frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_1(0 \rightarrow 3)} = \Phi(0, X_2, X_3) \circ \Phi(3, X_2, 0, X_3)$$

$$\Phi(0, X_2, X_3) = 0 \quad \text{si} \quad (0, X_2, X_3) = (0, 1, 0)$$

$$\Phi(3, X_2, X_3) = 1 \quad \text{si} \quad (3, X_2, X_3) = (3, 1, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_2(0 \rightarrow 1)} = \Phi(X_1, 0, X_3) \circ \Phi(X_1, 1, X_3)$$

$$\Phi(X_1, 0, X_3) = 0 \quad \text{si} \quad (X_1, 0, X_3) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 1), (0, 0, 2), (1, 0, 0), (1, 0, 1), \\ (1, 0, 2), (2, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 2), \\ (3, 0, 0), (3, 0, 1), (3, 0, 2) \end{array} \right\}$$

$$\Phi(X_1, 1, X_3) = 1 \quad \text{si} \quad (X_1, 1, X_3) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), \\ (1, 1, 2), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 2), \\ (3, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 1, 2) \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_3(0 \rightarrow 2)} = \Phi(X_1, X_2, 0) \circ \Phi(X_1, X_2, 2)$$

$$\Phi(X_1, X_2, 0) = 0 \quad \text{si} \quad (X_1, X_2, 0) = (0, 1, 0)$$

$$\Phi(X_1, X_2, 2) = 1 \quad \text{si} \quad (X_1, X_2, 2) = (0, 1, 2)$$

-étape 1.5 : obtenir $\{G_r/X_i\}, i = 1, 2, 3$.

on a :

$$\{G_r/X_1\} = \{(0, 1, 0)\}$$

$$\{G_r/X_2\} = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 1), (0, 0, 2), (1, 0, 0), (1, 0, 1), \\ (1, 0, 2), (2, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 2), \\ (3, 0, 0), (3, 0, 1), (3, 0, 2) \end{array} \right\}$$

$$\{G_r/X_3\} = \{(0, 1, 0)\}$$

-étape 1.6 : former l'ensemble $\{G_r\}$:

$$\{G_r\} = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 1), (0, 0, 2), (1, 0, 0), (1, 0, 1), \\ (1, 0, 2), (2, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 2), \\ (3, 0, 0), (3, 0, 1), (3, 0, 2), (0, 1, 0) \end{array} \right\}$$

étape 2 : calcul de $P_r(i)$

-étape 2.1 : le calcul de $\rho(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$.

$$\rho(1)_{0 \rightarrow 3}^{0 \rightarrow 1} = 1, \quad \rho(2)_{0 \rightarrow 1}^{0 \rightarrow 1} = 11, \quad \rho(3)_{0 \rightarrow 2}^{0 \rightarrow 1} = 1$$

-étape 2.2 : calcul de $P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$

$$P(1)_{0 \rightarrow 3}^{0 \rightarrow 1} = \frac{\rho(1)_{0 \rightarrow 3}^{0 \rightarrow 1}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)} = \frac{1}{24} = 0.042$$

$$P(2)_{0 \rightarrow 1}^{0 \rightarrow 1} = \frac{\rho(2)_{0 \rightarrow 1}^{0 \rightarrow 1}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)} = \frac{11}{24} = 0.46$$

$$P(3)_{0 \rightarrow 2}^{0 \rightarrow 1} = \frac{\rho(3)_{0 \rightarrow 2}^{0 \rightarrow 1}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)} = \frac{1}{24} = 0.042$$

-étape 2.3 : le calcul des **CDRI** :

$$P_r(i) = P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1} P_{M_i}(i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$P_r(1) = P(1)_{0 \rightarrow 3}^{0 \rightarrow 1} P_3(1) = (0.042)(0.42) = 0.018$$

$$P_r(2) = P(2)_{0 \rightarrow 1}^{0 \rightarrow 1} P_1(2) = (0.46)(0.69) = 0.3174$$

$$P_r(3) = P(3)_{0 \rightarrow 2}^{0 \rightarrow 1} P_2(3) = (0.042)(0.50) = 0.021$$

étape 3 : obtenir les **DIRI** :

$$P_r = P\{G_r\} = \sum_{i=1}^3 P_r(i) \prod_{q=1, q \neq i}^3 (1 - P_r(q))$$

$$\begin{aligned} P_r &= P_r(1)(1 - P_r(2))(1 - P_r(3)) + P_r(2)(1 - P_r(1))(1 - P_r(3)) \\ &\quad + P_r(3)(1 - P_r(1))(1 - P_r(2)) \\ &= (0.018)(1 - 0.3174)(1 - 0.021) + (0.3174)(1 - 0.018)(1 - 0.021) \\ &\quad + (0.021)(1 - 0.018)(1 - 0.3174) \end{aligned}$$

$$P_r = P\{G_r\} = 0.3312$$

On résume les résultats précédents dans le tableau suivant :

	$\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$	$\rho(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$	$P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$	$P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$	$P_f(i)$	$P_r(i)$
X_1	1	1	0.042	0.042	0.0063	0.018
X_2	11	11	0.46	0.46	0.3174	0.3174
X_3	1	1	0.042	0.042	0.0143	0.021

Dans cet exemple, on remarque que le 2^{ème} composant a une grande influence sur la panne et la réparation du système, car ($P_f(2) = 0.3174$) et ($P_r(2) = 0.3174$), alors que le 1^{er} composant a la petite influence sur la panne et la réparation du système du fait que ($P_f(1) = 0.0063$) et ($P_r(1) = 0.018$).

7.4.2 Exemple "2-sur-3" :

Le système fonctionne ssi au moins 2 composants fonctionnent. La fonction de structure de ce système est donnée par :

X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$
0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	3	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	2	0	1	1	3	0	1	1
0	0	2	0	1	0	2	1	2	0	2	2	3	0	2	2
0	1	0	0	1	1	0	1	2	1	0	1	3	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1
0	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	2	3	1	2	2

on reprend les étapes de l'algorithme pour calculer P_f et P_r

étatpe 1 : on commence par donner les **DDRI** qui sont calculés par $\frac{\partial\Phi(1\rightarrow 0)}{\partial X_i(1\rightarrow 0)}$ et $\frac{\partial\Phi(0\rightarrow 1)}{\partial X_i(0\rightarrow M_i)}$:

-étatpe 1.1 : le calcul de $\frac{\partial\Phi(1\rightarrow 0)}{\partial X_i(1\rightarrow 0)}$:

⊗ pour le 1^{er} composant, on a :

$$\frac{\partial\Phi(1\rightarrow 0)}{\partial X_1(1\rightarrow 0)} = \Phi(1, X_2, X_3) \circ \Phi(0, X_2, X_3)$$

avec

$$\Phi(1, X_2, X_3) = 1 \quad \text{si } (1, X_2, X_3) = \{(1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0)\}$$

$$\Phi(0, X_2, X_3) = 0 \quad \text{si } (0, X_2, X_3) = \{(0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0)\}$$

donc pour le 1^{er} composant, on a 3 liens critiques : $\{(1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0)\}$.

⊗ pour le 2^{ème} composant, on a :

$$\frac{\partial\Phi(1\rightarrow 0)}{\partial X_2(1\rightarrow 0)} = \Phi(X_1, 1, X_3) \circ \Phi(X_1, 0, X_3)$$

avec

$$\Phi(X_1, 1, X_3) = 1 \quad \text{si } (X_1, 1, X_3) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 0), \\ (2, 1, 0), (3, 1, 0) \end{array} \right\}$$

$$\Phi(X_1, 0, X_3) = 0 \quad \text{si } (X_1, 0, X_3) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 1), (0, 0, 2), (1, 0, 0), \\ (2, 0, 0), (3, 0, 0) \end{array} \right\}$$

donc pour le 2^{ème} composant, on a 5 liens critiques : $\{(0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 0), (2, 1, 0), (3, 1, 0)\}$

⊗ pour le 3^{ème} composant, on a :

$$\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_3(1 \rightarrow 0)} = \Phi(X_1, X_2, 1) \circ \Phi(X_1, X_2, 0)$$

avec

$$\Phi(X_1, X_2, 1) = 1 \quad \text{si } (X_1, X_2, 1) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 1), \\ (3, 0, 1) \end{array} \right\}$$

$$\Phi(X_1, X_2, 0) = 0 \quad \text{si } (X_1, X_2, 0) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), \\ (3, 0, 0) \end{array} \right\}$$

donc pour le 3^{ème} composant, on a 4 liens critiques : $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 1), (3, 0, 1)\}$.

étape 1.2 : obtenir les sous ensembles $\{G_f/X_i\}$:

$$\{G_f/X_1\} = \{(1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0)\}$$

$$\{G_f/X_2\} = \{(0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 0), (2, 1, 0), (3, 1, 0)\}$$

$$\{G_f/X_3\} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 1), (3, 0, 1)\}$$

-étape 1.3 : former l'ensemble $\{G_f\}$:

$$\begin{aligned} \{G_f\} &= \{G_f/X_1\} \cup \{G_f/X_2\} \cup \{G_f/X_3\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), \\ (2, 1, 0), (3, 1, 0), (2, 0, 1), (3, 0, 1) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

étape 2 : le calcul de $P_f(i)$:

$$P_f(i) = P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} P_1(i)$$

-étape 2.1 : le calcul de $\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$.

$$p(1)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = 3, \quad p(2)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = 5, \quad p(3)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = 4$$

-étape 2.2 : le calcul de la probabilité structurelle du composant i , $i = 1, 2, 3$.

$$P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = \frac{\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1) \dots (M_n + 1)}$$

$$P(1)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = \frac{\rho(1)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)} = \frac{3}{4.2.3} = 0.125$$

$$P(2)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = \frac{\rho(2)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)} = \frac{5}{4.2.3} = 0.208$$

$$P(3)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} = \frac{\rho(3)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)} = \frac{4}{4.2.3} = 0.167$$

-étape 2.3 : le calcul des **CDRI** :

$$P_f(i) = P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} P_1(i)$$

$$P_f(1) = P(1)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} P_1(1) = (0.125)(0.15) = 0.019$$

$$P_f(2) = P(2)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} P_1(2) = (0.208)(0.69) = 0.144$$

$$P_f(3) = P(3)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0} P_1(3) = (0.167)(0.34) = 0.057$$

étape 3 : obtenir les **DIRI** :

la dernière étape qui consiste à calculer

$$\begin{aligned}
P_f &= P\{G_f\} = \sum_{i=1}^n P_f(i) \prod_{q=1, q \neq i}^n (1 - P_f(q)) = \sum_{i=1}^3 P_f(i) \prod_{q=1, q \neq i}^3 (1 - P_f(q)) \\
&= P_f(1) \prod_{q=1, q \neq 1}^3 (1 - P_f(q)) + P_f(2) \prod_{q=1, q \neq 2}^3 (1 - P_f(q)) + P_f(3) \prod_{q=1, q \neq 3}^3 (1 - P_f(q)) \\
&= P_f(1) [1 - P_f(2)] [1 - P_f(3)] + P_f(2) [1 - P_f(1)] [1 - P_f(3)] \\
&\quad + P_f(3) [1 - P_f(1)] [1 - P_f(2)] \\
&= (0.019) (1 - 0.144) (1 - 0.057) + (0.144) (1 - 0.019) (1 - 0.057) \\
&\quad + (0.057) (1 - 0.019) (1 - 0.144) \\
&= 0.0153 + 0.1332 + 0.0478 = 0.196
\end{aligned}$$

enfin, nous avons

$$P_f = P\{G_f\} = 0.196$$

On reprend les étapes précédentes pour calculer $P_r = P\{G_r\}$
on commence par trouver $\{G_r\}$ et pour cela, il faut calculer

$$\frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_i(0 \rightarrow M_i)}, \quad i = 1, 2, 3$$

de la même façon que précédemment, on trouve

$$\{G_r/X_1\} = \{(0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0)\}$$

$$\{G_r/X_2\} = \{(0, 0, 1), (0, 0, 2), (1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0)\}$$

$$\{G_r/X_3\} = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0)\}$$

d'où :

$$\{G_r\} = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (1, 0, 0), \\ (2, 0, 0), (3, 0, 0) \end{array} \right\}$$

passons au calcul des **CDRI** :

$$P_r(i) = P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1} P_{M_i}(i)$$

avec

$$P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1} = \frac{\rho(1)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}}{(M_1 + 1)(M_2 + 1) \dots (M_n + 1)}$$

$$\rho(1)_{0 \rightarrow 3}^{0 \rightarrow 1} = 3, \quad \rho(2)_{0 \rightarrow 1}^{0 \rightarrow 1} = 5, \quad \rho(3)_{0 \rightarrow 2}^{0 \rightarrow 1} = 4$$

$$P(1)_{0 \rightarrow 3}^{0 \rightarrow 1} = \frac{\rho(1)_{0 \rightarrow 3}^{0 \rightarrow 1}}{4.2.3} = 0.125$$

$$P(2)_{0 \rightarrow 1}^{0 \rightarrow 1} = \frac{\rho(2)_{0 \rightarrow 1}^{0 \rightarrow 1}}{4.2.3} = 0.208$$

$$P(3)_{0 \rightarrow 2}^{0 \rightarrow 1} = \frac{\rho(2)_{0 \rightarrow 2}^{0 \rightarrow 1}}{4.2.3} = 0.167$$

$$P_r(1) = P(1)_{0 \rightarrow 3}^{0 \rightarrow 1} P_3(1) = (0.125)(0.42) = 0.0525$$

$$P_r(2) = P(2)_{0 \rightarrow 1}^{0 \rightarrow 1} P_1(2) = (0.208)(0.69) = 0.144$$

$$P_r(3) = P(3)_{0 \rightarrow 2}^{0 \rightarrow 1} P_2(3) = (0.167)(0.50) = 0.083$$

ainsi, on trouve

$$P_r = P\{G_r\} = \sum_{i=1}^3 P_r(i) \prod_{q=1, q \neq i}^3 (1 - P_r(q))$$

$$\begin{aligned}
&= P_r(1) [1 - P_r(2)] [1 - P_r(3)] + P_r(2) [1 - P_r(1)] [1 - P_r(3)] \\
&\quad + P_r(3) [1 - P_r(1)] [1 - P_r(2)] \\
&= (0.052) (1 - 0.144) (1 - 0.083) + (0.144) (1 - 0.052) (1 - 0.083) \\
&\quad + (0.083) (1 - 0.052) (1 - 0.144) \\
&= 0.041 + 0.125 + 0.067 = 0.233
\end{aligned}$$

et enfin, nous avons

$$P_r = P \{G_r\} = 0.233$$

On résume les résultats trouvés dans le tableau suivant :

	$\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$	$\rho(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$	$P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$	$P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$	$P_f(i)$	$P_r(i)$
X_1	3	3	0.125	0.125	0.019	0.0525
X_2	5	5	0.208	0.208	0.144	0.144
X_3	4	4	0.167	0.167	0.057	0.083

Dans cet exemple, on remarque que le 2^{ème} composant a une grande influence sur la panne et la réparation du système, car ($P_f(2) = 0.144$) et ($P_r(2) = 0.144$), alors que le 1^{er} composant a la petite influence sur la panne et la réparation du système du fait que ($P_f(1) = 0.019$) et ($P_r(1) = 0.0525$).

7.4.3 Exemple "Système en série" :

Les composants du système sont disposés en série. Le système fonctionne si tous ses composants fonctionnent.

la fonction de structure du système est donnée par :

X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$
0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	3	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0
0	0	2	0	1	0	2	0	2	0	2	0	3	0	2	0
0	1	0	0	1	1	0	0	2	1	0	0	3	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1
0	1	2	0	1	1	2	1	2	1	2	1	3	1	2	1

étape 1 : calcul des **DDRI** i.e : de $\{G_f\}$ et $\{G_r\}$

-**étape 1.1** : calcul des dérivées $\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_i(1 \rightarrow 0)}$

* $i = 1$

$$\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_1(1 \rightarrow 0)} = \Phi(1, X_2, X_3) \circ \Phi(0, X_2, X_3)$$

avec

$$\Phi(1, X_2, X_3) = 1 \quad \text{si } (1, X_2, X_3) = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2)\}$$

$$\Phi(1, X_2, X_3) = 0 \quad \text{si } (0, X_2, X_3) = \{(0, 1, 1), (0, 1, 2)\}$$

donc pour le 1^{er} composant, le système a 2 liens minimaux critiques : $\{(1, 1, 1), (1, 1, 2)\}$.

* $i = 2$

$$\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_2(1 \rightarrow 0)} = \Phi(X_1, 1, X_3) \circ \Phi(X_1, 0, X_3)$$

avec

$$\Phi(X_1, 1, X_3) = 1 \quad \text{si } (X_1, 1, X_3) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1), \\ (2, 1, 2), (3, 1, 1), (3, 1, 2) \end{array} \right\}$$

$$\Phi(X_1, 0, X_3) = 0 \quad \text{si } (X_1, 0, X_3) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 1), (1, 0, 2), (2, 0, 1), \\ (2, 0, 2), (3, 0, 1), (3, 0, 2) \end{array} \right\}$$

donc pour le 2^{ème} composant, le système a 6 liens minimaux critiques

$$\{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (3, 1, 1), (3, 1, 2)\}$$

* $i = 3$

$$\frac{\partial \Phi(1 \rightarrow 0)}{\partial X_3(1 \rightarrow 0)} = \Phi(X_1, X_2, 1) \circ \Phi(X_1, X_2, 0)$$

avec

$$\Phi(X_1, X_2, 1) = 1 \quad \text{si } (X_1, X_2, 1) = \{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1)\}$$

$$\Phi(X_1, X_2, 0) = 0 \quad \text{si } (X_1, X_2, 0) = \{(1, 1, 0), (2, 1, 0), (3, 1, 0)\}$$

donc pour le 3^{ème} composant, le système a 3 liens minimaux critiques : $\{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1)\}$.

-étape 1.2 : obtenir les sous ensembles $\{G_f / X_i, i = 1, 2, 3\}$,

$$\{G_f / X_1\} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2)\}$$

$$\{G_f / X_2\} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (3, 1, 1), (3, 1, 2)\}$$

$$\{G_f / X_3\} = \{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1)\}$$

-étape 1.3 : former l'ensemble d'états limites $\{G_f\}$

Les **DDRI** du système sont :

$$\{G_f\} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (3, 1, 1), (3, 1, 2)\}$$

et en effectuant les étapes restantes de l'algorithme, i.e :

-étape 1.4 : calcul des dérivées $\frac{\partial \Phi(0 \rightarrow 1)}{\partial X_i(0 \rightarrow M_i)}$

-étape 1.5 : obtenir les sous ensembles $\{G_r / X_i\}$

on trouve

$$\{G_r\} = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 2), \\ (3, 0, 1), (3, 0, 2), (3, 1, 0) \end{array} \right\}$$

puis calculer les **CDRI** du système. Et on résume les résultats obtenus dans le tableau suivant :

	$\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$	$\rho(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$	$P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$	$P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$	$P_f(i)$	$P_r(i)$
X_1	2	2	0.083	0.083	0.013	0.035
X_2	6	6	0.25	0.25	0.173	0.173
X_3	3	3	0.125	0.125	0.043	0.063

On remarque que ($P_f(2) = 0.173$) c.à.d que la panne du 2^{ème} composant cause la panne du système avec une probabilité maximale. Le 1^{er} composant a la plus petite influence sur la panne du système car ($P_f(1) = 0.013$). La réparation du système se fait avec une grande probabilité lors du remplacement du 2^{ème} composant ($P_r(2) = 0.173$).

ainsi, on obtient :

$$P_f = P\{G_f\} = 0.208, \quad P_r = P\{G_r\} = 0.233$$

7.4.4 Exemple "Système en parallèle" :

Les composants du système sont disposés en parallèle. Le système fonctionne si au moins un composant fonctionne.

La fonction de structure du système est représentée dans le tableau suivant :

X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$	X_1	X_2	X_3	$\Phi(X)$
0	0	0	0	1	0	0	1	2	0	0	1	3	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	2	0	1	2	3	0	1	2
0	0	2	1	1	0	2	2	2	0	2	2	3	0	2	2
0	1	0	1	1	1	0	1	2	1	0	2	3	1	0	2
0	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	3	1	1	2
0	1	2	2	1	1	2	2	2	1	2	2	3	1	2	2

Les **DDRI** du système sont :

$$\{G_f\} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

$$\{G_r\} = \{(0, 0, 0)\}$$

Les **CDRI** du système sont donnés dans le tableau suivant :

	$\rho(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$	$\rho(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$	$P(i)_{1 \rightarrow 0}^{1 \rightarrow 0}$	$P(i)_{0 \rightarrow M_i}^{0 \rightarrow 1}$	$P_f(i)$	$P_r(i)$
X_1	1	1	0.042	0.042	0.006	0.018
X_2	1	1	0.042	0.042	0.029	0.029
X_3	1	1	0.042	0.042	0.014	0.021

on remarque que : ($P_f(2) = 0.029$) i.e la panne du 2^{ème} composant cause la panne du système avec une probabilité maximale, comme les systèmes précédents. Ainsi que la réparation du système se fait lors du remplacement du 2^{ème} composant ($P_r(2) = 0.029$).

Et on obtient :

$$P_f = P\{G_f\} = 0.049,$$

$$P_r = P\{G_r\} = 0.064$$

Ainsi, avec les mêmes distributions d'états des composants pour les différents systèmes étudiés, on remarque que le système en parallèle a la plus faible probabilité de tomber en panne ($P_f = 0.049$) si l'un de ses composants tombe en panne.

Dans les exemples précédents, on a trouvé que $P_f(2) = P_r(2)$, car pour ce composant, l'état du fonctionnement parfait est exactement 1, ($P_{M_2}(2) = P_1(2) = 0.69$), et on remarque aussi que $P_f(2), P_r(2)$, pour le système "2 consécutifs-sur-3", ont la plus grande valeur (0.3174) par rapport aux autres systèmes étudiés car le composant 2 appartient à tous les liens minimaux de ce système, donc il a une grande influence sur la panne et la réparation du système. Et ceci nous permet, encore une fois, de confirmer que la position d'un composant avec un état spécifique dans un système k consécutifs-sur- n à multi-états a une importance majeure.

Conclusion

Ce travail a été consacré à l'étude des systèmes à multi-états et la majorité de cette étude porte sur les systèmes k consécutifs-sur- $n : G$, vu leur importance due à leur application dans des domaines diversifiés. On s'est concentré sur le calcul de la fiabilité de ces systèmes.

Nous avons commencé par proposer une formule non récursive, basée sur une approche combinatoire, permettant le calcul de la distribution d'état du système et donc déduire sa fiabilité. Puis, nous avons établi un encadrement de la valeur de la fiabilité de ces systèmes. Des expressions pour calculer la fiabilité de quelques modèles de systèmes rencontrés dans la pratique ont été établies.

La notion de la fonction d'utilité de performance et l'importance en utilité des composants a été aussi notre but dans cette thèse, ainsi que les indices de la fiabilité dynamique des systèmes à multi-états. Les résultats établis dans notre travail sont basés essentiellement sur la fonction de structure du système et le concept des liens minimaux. Parmi les hypothèses posées, celle de l'indépendance des composants, or la notion d'indépendance peut-être rencontrée dans les systèmes matures qui ont fonctionné et ont été maintenus pour de longues périodes, alors qu'il y a d'autres systèmes, où cette hypothèse n'est plus raisonnable. Dans ce cas, une approche analytique basée sur la fonction génératrice des moments (UMGF) a été suggérée par Levitin [74]. Mais, il serait intéressant de considérer l'hypothèse de **dépendance** et s'investir plus dans ce cas, pour établir des résultats qui permettront le calcul de la fiabilité des systèmes à multi-états ayant de différentes configurations.

Notons aussi que nous avons traité seulement les systèmes non réparables, or en réalité, un système est conçu pour subir des réparations. Mais l'étude des systèmes réparables est peu rencontrée dans la littérature, même pour les systèmes binaires [1, 18, 26] et inexistante pour les systèmes à multi-états. Et donc l'étude des systèmes **réparables à multi-états** est aussi un bon créneau pour la recherche et sa résolution apportera beaucoup pour la théorie et l'application.

Nous signalons aussi que beaucoup de problèmes utiles et intéressants, dans la théorie des systèmes à multi-états, restent en perspective comme :

- l'étude du **comportement asymptotique** des systèmes à multi-états.
- Le cas **circulaire** des systèmes k consécutifs-sur- n à plusieurs états.

Bibliographie

- [1] D. P. Gaver, "Time to failure and availability of paralleled systems with repair," IEEE Trans. Reliability, vol. R-11, pp. 30-39, (1963).
- [2] Z. W. Birnbaum, "On the importance of different components in a multicomponent system," in P.R.Krishnaiah (ed), Multivariate Analysis-II, Academic Press, New York, pp. 581-592, (1969).
- [3] J. Fussell, "How to calculate system reliability and safety characteristics," IEEE Trans. Reliab., vol. 24, N° 3, pp. 169-174, (1975).
- [4] E. El-Newehi, F. Proschan, and J. Sethuraman, "Multi-state coherent systems," J. Appl. Prob., vol. 15, pp. 675-688, (1978).
- [5] W. Barlow and A. Wu, "Coherent systems with multi-state components," Math. Oper. Res., vol. 3, N° 4, pp. 275-281, (1978).
- [6] S. M. Ross, "Multivalued state component systems," Ann. Probability, vol. 17, pp. 379-383, (1979).
- [7] W. Griffith, "Multi-state Reliability models," J. Appl. Prob., vol. 17, pp. 735-744, (1980).
- [8] J. M. Kontoléon, "Reliability determination of a r -successive-out-of- n : F systems," IEEE Trans. Reliab. vol. R-29, p. 437. Dec. (1980).
- [9] D. Chiang and S. Niu, "Reliability of consecutive-k-out-of-n :F systems," IEEE Trans. Reliability, vol. 30, pp. 87-89. (1981).
- [10] C. Derman, J. Lieberman, S. Ross, "On the consecutive-k-out-of-n :F system", IEEE Trans. Reliability, vol. R-31, pp. 57-63, (1982).
- [11] J. Wu and R. Chen, "An algorithm for computing the reliability of weithed-k-out-of-n systems," IEEE Trans. Reliability, vol. R-31, pp.57-63, April (1982).

- [12] J. Shanthikumar, "A recursive algorithm to evaluate the reliability of a consecutive- k -out-of- n : F system," IEEE Trans. Reliability, vol. 31, pp. 442-443, (1982).
- [13] B. Natvig, "Two suggestions of how to define a multistate coherent system," Advance in applied probability, vol. 14, N° 2, pp. 434-455, (1982).
- [14] A. Aggarwal and R. Barlow, "A survey on network reliability and domination theory," Oper. Res., vol. 32, N° 2, pp. 478-492, (1984).
- [15] H. Block, T. Savits, "Decomposition for multistate monotone systems", Journ. Appl. Prob. vol. 19, pp. 391-402, (1982).
- [16] A. P. Wood, "Multistate block diagrams and fault trees," IEEE Trans. Reliab., vol. R-34, N° 3, pp. 236-240, (1985).
- [17] I. Ushakov, "universal generating function", Sov. J. Computing system science, vol. 24, N° 5, pp. 118-129, (1986).
- [18] N. Jack, " Analysis of a repairable two-unit parallel redundant system with dependent failures," IEEE Trans. Reliab., vol. R-35, (1986).
- [19] J. Shanthikumar, "Reliability of system with consecutive minimal cutsets," IEEE Trans. Reliability, vol.36, pp. 546-550. (1987).
- [20] F. Hwang and Y. Yao, "Multistate consecutively-connected systems," IEEE Trans. Reliab. vol.38, pp. 472-474, (1989).
- [21] W. Kuo, W. Zhang and M. Zuo, "A consecutive k -out-of- n : G system : The mirror image of consecutive k -out-of- n : F system," IEEE Tran. Reliab. vol. 39, N° 2 pp. 244-253, (1990).
- [22] M. Haim and Z. Porat, "Bayes reliability modeling of a multistate consecutive- k -out-of- n : F system," Proceeding Annual Reliab. and Maintainability Symposium. pp. 582-586, (1991).
- [23] K. B. Misra, " Reliability analysis and prediction," Amsterdam : Elsevier, (1992).
- [24] M. Zuo, "Reliability and component importance of a consecutive k -out-of- n systems," Microelectron. Reliab. vol.33, N° 2 , pp. 243-258, (1993).
- [25] J.S. Hong and C.H. Lie, "Joint reliability-importance of two edges in an undirected network," IEEE Trans. Reliab., vol. 42, N° 1, pp.17-23, (1993).

- [26] B. Ksir, S. Belaloui, "Analysis of a repairable two-unit parallel redundant system with failure and repair times arbitrarily distributed," *Microelectr. Reliab.*, vol. 33, pp. 307-312, (1993).
- [27] T. Aven, " On measures for multistate monotone systems," *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 41, pp. 259-266, (1993).
- [28] M. J. Zuo and M. Liang, "Reliability of multistate consecutively-connected systems," *Reliab. Engineering and System Safety*. vol. 44 . pp.173-176, (1994).
- [29] A. Hoyland and M. Rausand, *System Reliability Theory : Models and Statistical Methods* : John Wiley & Sons, (1994).
- [30] R. A. Boedigheimer and K.C. Kapur, "Customer-driven reliability models for multi-state coherent systems", *IEEE Trans. Reliab.* vol. 43, pp. 46-50, Mar. (1994).
- [31] F. C. Meng, "Some further results on ranking the importance of system components," *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 47, pp. 97-101, (1995).
- [32] M. J. Armstrong, "Joint reliability-importance of components," *IEEE Trans. Reliab.*, vol. 44, N^o. 3, pp. 408-412, (1995).
- [33] J. Xue, K. Yang, "Dynamic reliability analysis of coherent multi-state systems", *IEEE Transactions on reliability*. vol.44, N^o 4, pp. 683-688, (1995).
- [34] A. Kossov and W. Preuss, "Reliability of linear consecutively-connected systems with multistate components," *IEEE. Trans. Reliab.* vol.44, N^o 3 , pp. 518-522, (1995).
- [35] J. Malinowski, W. Preuss, "Reliability of circular consecutively -connected systems with multi-state components," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 44, N^o 3, pp. 532-534, (1995).
- [36] A. Chibat, B. Ksir, "Théorie des systèmes cohérents à états multiples de performance," *Thèse de Magister, université de Constantine*, (1995).
- [37] F. C. Meng, "Comparing the importance of system components by some structural characteristics," *IEEE Trans. Reliab.*, vol. 45, N^o 1, pp. 59-65, (1996).
- [38] H. Pham, A. Suprasad, KB. Misra, "Reliability analysis of k -out-of- n systems with partially repairable multi-state components," *Microelect. Reliab.*, vol. 36, pp. 1407-1415, (1996).

- [39] J. Malinowski and W. Preuss, "Reliability of reverse-Tree-Structured systems with multi-state components," *Microelectron. Reliab.* vol. 36, N° 1, pp. 1-7, (1996).
- [40] E. Elsayed, *Reliability Engineering* : Addison Wesley Longman Inc., (1996).
- [41] V. Shmerko, V. Levashenko, S. Yanushkevich, "Technique of computing logic derivatives for MLV-functions," *Proc. IEEE 26 th Int. Symp. On Multiple-Valued Logic*, Spain, pp. 267-272, (1996).
- [42] M. V. Koutras, "Consecutive- k, r -out-of- n : DFM systems," *Microelectron. Reliab.* vol. 37, N° 4, pp.597-603, (1997).
- [43] I. Ushakov, "Optimal standby problems and a universal generating function", *Sov. J. Comput System Sciences*, vol 25, N° 4, pp. 79-82, (1997).
- [44] G. Levitin, A. Lisnianski, H. Ben-Haim, D. Elmakis, "Redundancy optimization for series-parallel multi-state system", *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 47, N° 2, pp. 165-172, (1998).
- [45] M. Cheok, G. Parry, and R. Sherry, "Use of importance measures in risk informed applications," *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 60, pp. 213-226, (1998).
- [46] G. Levitin and A. Lisnianski, "Importance and sensitivity analysis of multi-state systems using the universal generating function," *Reliab.Eng. Syst.Saf.*, vol. 65, pp. 271-282, (1999).
- [47] O. Pouret, J. Collet, J.L. Bon, "Evaluation of the unavailability of a multistate component system using a binary model," *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 66, pp. 13-17, (1999).
- [48] J. Huang, M. J. Zuo and Y. Wu, "Generalized multi-state k-out-of-n : G systems," *IEEE Trans.Reliability*, vol. 49, N°. 1, pp. 105-111, March. (2000).
- [49] J. Huang, M. J. Zuo, "Multi-state k-out-of-n System Model and its applications", *Proceeding International Symposium on Annual Reliability and Maintainability*, pp. 264-268, (2000).
- [50] K. Kolowrocki, " On limit reliability functions of large multi-state systems with ageing components," *Appl. Math. Comput.*,vol. 121, pp. 313-361, (2001).

- [51] G. Levitin, "Reliability evaluation for linear consecutively-connected systems with multistate elements and retransmission delays," *Quality and Reliability Eng'g.Int.*, vol. 17, (2001).
- [52] G. Levitin, A. Lisnianski, "A new approach to solving problems of multi-state system reliability optimization", *Quality and Reliability Engineering international*, vol. 47, N° 2, pp. 93-104.(2001).
- [53] S. Bouhadjar, B. Ksir, "Fiabilité des systèmes k consécutifs-sur- L_n -série," thèse de Magister, univesité Mentouri, Constantine, Juin (2001).
- [54] E. N. Zaitseva, V. G. Levashenko, "New Reliability Indices for Multi-state system". Proceedings IEEE of the 15th European conferences on circuit theory and design, pp. 345-349, (2001).
- [55] E. N. Zaitseva, V. G. Levashenko, "Dynamic Deterministic Reliability Indices for Multi-state system", Proceeding 6th International Conferences on Pattern Recognition and Information Processing, Minsk, Belarus, pp. 147-154, May (2001).
- [56] E. N. Zaitseva, V. G. Levashenko, "New dynamyc Reliability Indices for Multi-state System", Proceeding 3th International Conferences on mathematical methods in reliability : methodology and practice, pp. 687-690, (2002).
- [57] E. N. Zaitseva, V. Levashenko, "Design of Dynamic Reliability Indices", Proceedings IEEE of the 32th International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp. 144-148, (2002).
- [58] I. Ushakov, G. Levitin and A. Lisnianski, "Multi-state system reliability : from theory to practice", Proc. of 3rd Int. Conf. on mathematical methods in reliability, MMR, Trondheim, Norway, pp. 635-638, (2002).
- [59] E. N. Zaitseva, "Dynamic Reliability Indices for Multi-state System", *Journal of dynamic system and geometric theories*. vol. 1, N° 2, pp. 213-222, (2003).
- [60] E. N. Zaitseva, "Dynamic Reliability Indices for Multi-state System", Proceedings of the 33rd International Symposium on Multiple-Valued Logic, IEEE, (2003)..
- [61] G. Levitin, "Linear multi-state sliding-window systems," *IEEE Trans.Reliability*, vol. 52, N° 2, pp. 263-269, June (2003).

- [62] G. Levitin, "Optimal allocation of multistate elements in a linear consecutively-connected system," IEEE Trans.Reliability, vol.52, N°. 2, pp. 192-198. (2003).
- [63] J. Huang, M. J. Zuo and Z. Fang, "Multi-state consecutive-k-out-of-n systems", IIE Trans. On Quality and Reliability Engineering, vol. 35, pp. 527-534, (2003).
- [64] M. J. Zuo, Z. Fang, J. Huang and X. Xu, "Performance evaluation of decreasing Multi-state consecutive-k-out-of-n :G systems", International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, vol. 10, N° 3, pp. 345-358, (2003).
- [65] B. H. Lindqvist,"Bounds for the reliability of Multistate systems with partially ordered state spaces and stochastically monotone Markov transitions", International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, vol. 10, N° 3, pp. 235-248, (2003).
- [66] A. Lisnianski, G. Levitin," multi-state system reliability. Assessment, Optimization and Applications", World Scientific, (2003).
- [67] W. Kuo, M.J. Zuo, Optimal reliability modeling : principles and applications. New York : John Wiley & sons, (2003).
- [68] S. Wu and L.Y. Chan, "Performance Utility-Ananalysis of Multi-State Systems," IEEE.Trans.Reliab.,vol. 52, N°. 1, pp.14-21, March (2003).
- [69] G. Levitin and A. Lisnianski, Multi-state System Reliability. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics-vol. 6 : World Scientific Publishing, (2003).
- [70] E. Zio and L. Podofillini, "Monte-Carlo simulation analysis of the effects on different system performance levels on the importance on multi-state components," Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 82, pp. 63-73, (2003).
- [71] G. Levitin, L. Podofillini, E. Zio, " Generalized importance measures for multi-state elements based on performance level restrictions," Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 82, pp. 287-298, (2003).
- [72] E. Zio, L. Podofillini," A Monte Carlo approach to the estimation of importance measures of multi-state components", RAMS, IEEE, (2004).
- [73] S. Belaloui, "Fiabilité des systèmes k -consécutifs-parmi- n : G à plusieurs états," 2nd International Workshop on Probability And Stochastic Analysis. Biskra, Algeria, December 11-16, (2004).

- [74] G. Levitin, " A universal generating function approach for the analysis of multi-state systems with dependent elements," Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 84, pp. 285, (2004).
- [75] E. N. Zaitseva, S. Kovalik, V. Levashenko, K. Matiasko, "Reliability Analysis of the k-out-of-n Multi-state System", Proceedings IEEE of the 34rd International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp. 51-57, (2004).
- [76] J. E. Ramirez-Marquez and D. W. Coit, "Composite Importance Measures for Multi-state Systems with Multi-state Components," IEEE Trans. Reliab., vol.54, N° 3, pp.517–529, September (2005).
- [77] J. A. Li, Yu. Wu, Ke. Liu, "Reliability estimation and prediction of M.S components and coherent system", Reliability Engineering System Safety, pp. 93-98, (2005).
- [78] S. Belaloui, "lifetime of Multi-state consecutive k-out-of-n : G systems," Colloque Equations aux dérivées partielles non linéaires. Tipaza, Algeria, May 23-26, (2005).
- [79] S. Belaloui, "Reliability of Multi-state systems," Modélisation mathématique des marchés financiers, Ecole CIMPA-UNESCO-JORDANIE, Irbid, Jordanie, September 11-22, (2005).
- [80] S. Belaloui, " Reliability of Multi-state consecutive k-out-of- L_n series " Journées Mathématiques Algéro-Française, Constantine, Algeria, November, 26-28, (2005).
- [81] S. Belaloui, "Bounds of the reliability of multi-state consecutive k -out-of- L_n series," 3rd International Workshop on Probability And Stochastic Analysis. Biskra, Algeria, December 17-19, (2005).
- [82] S. Belaloui, "Utility function of Multi-state consecutive k -out-of- n systems," ECSYMATH06, Ecole-Symposium Sur les Mathématiques Discrètes. Oran, Algeria, November 20-22, (2006).
- [83] S. Belaloui, " The multi-state consecutive k -out-of- L_n series," 4th International Workshop on Probability And Stochastic Analysis. Biskra, Algeria, December 16-18, (2006).
- [84] H. Yamamoto, M.J.Zuo, T.Akiba, Z.Tian, " Recursive formulas for the reliability of multi-state consecutive- k -out-of- n : G systems", IEEE Trans. on Reliability, vol. 55, N° 1, pp. 98-104, (2006).
- [85] S. Belaloui, " Performance utility of a multi-state consecutive k -out-of- n : G system," Sciences & Technologie, soumis en Mai (2006) et révisé en Juillet (2007).

- [86] S. Belaloui, B.Ksir, "Reliability of multi-state consecutive k -out-of- n : G systems" International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, vol.14, N° 4, pp. 361-377, (2007).

Abstract

The object of our work is a study of multi-state systems with complex configurations, specially, the consecutive k-out-of-n:G systems, which are defined as follows : the system has n linearly arranged components, it works iff at least k consecutive components work. And since the system and its components can assume more than two states, then the system works if it is at a state j or above ($j = 0,1,\dots, M$). We expose briefly, the binary systems then a generalization to multi-state systems. Then we give a non recursive formula which compute the multi-state consecutive k-out-of-n:G system state distribution, and so deduce its reliability, and we establish bounds of this system reliability. We propose expressions to compute the reliability of some multi-state systems as series-parallel systems, parallel-series systems....etc which are used in different engineering areas. The component importance is investigated and the performance utility function is provided for some multi-state systems. In the last section, we discuss the dynamic reliability indices where we calculate the failure probability and the reparation probability of the multi-state systems. Examples are treated in each section to illustrate the given results.

Key words : Reliability, Multi-state systems, consecutive k-out-of-n:G system, Component importance, Performance utility function, Dynamic reliability indices.

تلخيص :

نتطرق في هذا العمل إلى دراسة أنظمة (أجهزة) متعددة الحالات ذات هيئات معقدة. من بين هذه الأنظمة نظام k متوالية من بين n عنصر المعرف كما يلي:

هذا النظام مشكل من n عنصر موضوع على التسلسل و هو يعمل إذا و فقط إذا كان على الأقل k عنصر على التوالي يعمل و بما أن النظام و عناصره تكون لهم عدة حالات فاشتغال النظام يعني أنه في حالة أكبر أو تساوي من الحالة z (z : قيمة تعبر عن حالات النظام و عناصره $M, \dots, 1, 0$) بدأنا بإعطاء بصفة قصيرة الأنظمة الثنائية ثم تطرقنا إلى تعميمها للأنظمة متعددة الحالات. قدمنا قانونا مباشرا لحساب إمكانية الاشتغال (وثوقية) لنظام k متوالية من بين n عنصر و اقترحنا حصرا لذلك .

ثم اقترحنا حساب إمكانية الاشتغال لبعض الأنظمة متعددة الحالات و المستعملة في عدة ميادين. كما قمنا بمناقشة المساهمة الفردية لعنصر إلى منفعة تجلية النظام و هذه المناقشة كانت على أساس منفعة الأهمية لحالة عنصر متعدد الحالات في نظام متعدد الحالات . في الأخير ، تطرقنا إلى دلائل إمكانية الاشتغال الديناميكية حيث قمنا بحساب احتمال التعطل و احتمال التصليح لبعض الأنظمة متعددة الحالات و المستعملة بكثرة. و في كل جزء من العمل عالجنا أمثلة توضيحية للنتائج المحصل عليها.

الكلمات المفتاحية :

إمكانية الاشتغال (وثوقية) - نظام متعدد الحالات - أهمية العناصر - دالة المنفعة - نظام k متوالية من بين n - دلائل إمكانية الاشتغال الديناميكية .

Résumé

L'objet de notre travail est l'étude des systèmes à multi-états ayant des configurations complexes, et plus précisément, les systèmes k consécutifs-parmi- n : G . Ces systèmes sont constitués de n composants disposés linéairement, et sont définis comme suit : ils fonctionnent ssi il y a au moins k composants consécutifs qui fonctionnent. Et puisque ces systèmes et leurs composants peuvent avoir plusieurs états, alors le fonctionnement est fixé à partir d'une certaine valeur de j (j est une valeur d'état du système et ses composants, $j = 0, 1, \dots, M$). Nous avons commencé par exposer, d'une façon brève, les systèmes binaires puis leur généralisation aux systèmes à multi-états. Nous avons établi une formule non récursive permettant le calcul direct de la distribution d'état des systèmes k consécutifs-parmi- n : G à multi-états et donc de déduire leur fiabilité. Puis nous avons proposé un encadrement de celle-ci. Ensuite, nous avons élaboré le calcul de la fiabilité de quelques modèles de systèmes rencontrés et très utilisés dans différents domaines, comme les systèmes série-parallèle et les systèmes parallèle-série....etc. Une autre partie a été consacrée à l'étude de l'importance des composants et à calculer la fonction d'utilité de performance des systèmes à multi-états. Enfin, une partie qui porte sur les indices de la fiabilité dynamique a été développée et où il est question de calculer la probabilité de panne et la probabilité de réparation du système. Dans chaque partie, nous avons traité des exemples, illustrant les résultats obtenus.

Mots clés : Fiabilité, Systèmes à multi-états, Systèmes k consécutifs-parmi- n : G , Importance des composants, Fonction d'utilité de performance, Indices de la fiabilité dynamique.