Soutenue Łe : ..../..../2008

RÉPUBŁIQUE AŁGÉRIÈNNE ĐÉMOCRATIQUE ET POPUŁAIRE
MINISTÈRE ĐE Ł'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET ĐE ŁA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ "MENTOURI" ĐE CONSTANTINE
FACUŁTÉ ĐES SCIENCES EXACTES
ĐÉPARTEMENT ĐE MATHÉMATIQUES

Numéro Đ'ORĐRE : ....
Numéro ĐE SÉRIE : ....

THÈSE

Présentée Pour Ł'obtention Đu Điplôme Đe :
ĐOCTORAT EN SCIENCE

Thème

ETUĐE ĐES PROBŁÈMES PARABOŁIQUES À ĐONNÉES MANQUANTES

Option
EQUATIONS AUX ĐÉRIVÉES PARTIEŁŁES
Par :

Mohamed ĐAŁAH

ĐEVANT ŁE JURY

Mr **M. ĐENCHE**	*Prof à Ł'université "Mentouri" de Constantine-Algérie*	**Président**
Mr **M. SOFONEA**	*Prof à Ł'université de Perpignan-France*	**Rapporteur**
Mr **A. AYAĐI**	*Prof à Ł'université "Mentouri" de Constantine-Algérie*	**Co-Rapporteur**
Mr **M.Z. AISSAOUI**	*Prof à Ł'université de Guelma-Algérie*	**Examinateur**
Mr **A.Ł. MARHOUNE**	*MC à Ł'université "Mentouri" de Constantine-Algérie*	**Examinateur**
Mr **S. ĐJEZZAR**	*MC à Ł'université "Mentouri" de Constantine-Algérie*	**Examinateur**

Thèse de Đoctorat de Mathématiques Appliquées.
Mohamed ĐAŁAH, Université "Mentouri" de Constantine, 2008.

Titre :

ETUĐE ĐES PROBŁÈMES PARABOŁIQUES À ĐONNÉES MANQUANTES

Résumé

Ł’objet de cette thèse est l’étude de quelques problèmes aux limites de contact, avec ou sans frottement, entre un corps déformable et une fondation. Nous nous plaçons dans le cadre des déformations antiplanes et nous étudions des processus statiques et quasistatiques pour des matériaux électro-élastiques et électro-viscoélastiques. Les résultats que nous obtenons concernant l’existence et l’unicité des solutions faibles ainsi que le comportement des solutions électro-viscoélastiques lorsque la viscosité converge vers zéro. La thèse est structurée en Trois Parties. Dans la première partie nous présentons une modélisation détaillée du contact piézoélectrique et nous décrivons les hypothèses et les équations qui modélisent les problèmes antiplans ainsi que les conditions aux limites avec frottement. La deuxième partie est destinée à l’étude des problèmes antiplans électro-élastiques et électro-viscoélastiques de contact avec frottement modélisés à l’aide des différentes lois de frottement de type Tresca et Coulomb. Dans la troisième partie nous présentons une annexe contenant des rappels sur quelques outils de l’analyse fonctionnelle; ainsi que l’étude des inéquations variationelles elliptiques et d’évolution.

Mots-Clés: matériau électro-élastique, matériau électro-viscoélastique, frottement de Tresca, frottement de Coulomb, problèmes antiplans, inéquations variationnelles, solution faible, point fixe.

Thèse de Ðoctorat de Mathématiques Appliquées.
Mohamed ÐAŁAH, Université "Mentouri" de Constantine, 2008.

Title :

STUÐY OF PARABOŁIC PROBŁEMES WITH MISSING ÐATA

Abstract

The aim of this thesis is the study of some boundary value contact problems, with or without friction, between a body and a foundation. We consider the case of antiplane deformations and we study static and quasistatic process for electro-elastic and electro-viscoelastic materials. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solutions as well as the behaviour of the viscoelastic solutions as the viscosity converges to zero. The thesis is structured in Three Parts. In the first part we present a detailed modelling of the piezoelectric contact and we describe the hypotheses and the equations which models the antiplans problems and as well as the conditions in the limits with friction. The second part is dedicated to the study of antiplane electro-elastic and electro-viscoelastic problems with version of Tresca and Coulomb friction. In the third part we presente an appendix which contain some tools of functional analysis. Finally we present two categories of elliptic and evolutionary variational inequalities.

Key Words: electro-elastic material, electro-viscoelastic material, Tresca's friction, Coulomb's friction, antiplane problem, variational inequality, weak solution, fixed point.

Titre:

ETUĐE ĐES PROBŁÈMES PARABOŁIQUES À ĐONNÉES MANQUANTES

Résumé Ł'objet de cette thèse est l'étude de quelques problèmes aux limites de contact, avec ou sans frottement, entre un corps déformable et une fondation. Nous nous plaçons dans le cadre des déformations antiplanes et nous étudions des processus statiques et quasistatiques pour des matériaux électro-élastiques et viscoélectro-élastiques. Les résultats que nous obtenons concernant l'existence et l'unicité des solutions faibles ainsi que le comportement des solutions viscoélectro-élastiques lorsque la viscosité converge vers zéro. La thèse est structurée en Trois Parties. Dans la première partie nous présentons une modélisation détaillée du contact piézoélectrique et nous décrivons les hypothèses et les équations qui modélisent les problèmes antiplans ainsi que les conditions aux limites avec frottement. La deuxième partie est destinée à l'étude des problèmes antiplans électro-élastiques et viscoélectro-élastiques de contact avec frottement modélisés à l'aide des différentes lois de frottement de type Tresca et Coulomb. Dans la troisième partie nous présentons une annexe contenant des rappels sur quelques outils de l'analyse fonctionnelle; ainsi que l'étude des inéquations variationelles elliptiques et d'évolution.

Mots-Clés: matériau électro-élastique, matériau électro-viscoélastique, frottement de Tresca, frottement de Coulomb, problèmes antiplans, inéquations variationnelles, solution faible, point fixe.

Title:

STUĐY OF PARABOŁIC PROBŁEMS WITH MISSING ĐATA

Abstract The aim of this thesis is the study of some boundary value contact problems, with or without friction, between a body and a foundation. We consider the case of antiplane deformations and we study static and quasistatic process for electro-elastic and viscoelectro-elastic materials. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solutions as well as the behaviour of the viscoelastic solutions as the viscosity converges to zero. The thesis is structured in Three Parts. In the first part we present a detailed modelling of the piezoelectric contact and we describe the hypotheses and the equations which models the antiplans problems and as well as the conditions in the limits with friction. The second part is dedicated to the study of antiplane electro-elastic and electro-viscoelectroelastic problems with version of Tresca and Coulomb friction. In the third part we presente an appendix which contain some tools of functional analysis. Finally we present two categories of elliptic and evolutionary variational inequalities.

Key-Words: electro-elastic material, electro-viscoelastic material, Tresca's friction, Coulomb's friction, antiplane problem, variational inequality, weak solution, fixed point.

À Mes Grands Parents

À Mes Parents

" À Ła Mémoire Đe Mon Père, Qui a Eu Foi En Moi "

À Mes Frères et Soeures

*Je Dédié Cette Thèse à " **Yasmine** "...*

" Compte Tous Les Poissons Dans L'océan...

Il n'y en a pas autant

Que Les Jours Où Je Veux Taimer. "

Remerciements

Mes premiers remerciements vont, comme il se doit, à Mr le Professeur "Mircea Sofonea" qui a dirigé cette thèse. C'est très difficile en quelques lignes de remercier mon directeur de thèse. Tout d'abord, je le remercie de m'avoir permis de le suivre dans cette aventure de la Recherche en Mathématiques Appliquées où j'ai pu apprécier tant son dynamisme que sa rigueur scientifique. Je tiens ensuite à lui exprimer mes plus vifs remerciements pour tous les précieux conseils qu'il m'a donnés en orientant et en guidant mon travail. Outre sa compétence, la patience et la confiance qu'il m'a accordées, travailler sous sa direction fût pour moi un grand plasir. Par son exceptionel enthousiasme et par sa constante disponibilité, il m'a consacré beaucoup de son temps précieux et m'a prodigué ses encouragements qui ont rendu ce travail possible. La naissance de cette thèse lui doit tout et je tiens à lui exprimer toute ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement Monsieur A. Ayadi pour leurs aide et ses encouragements à terminer cette thèse. Je lui exprime ses éclaircissements continus qui ont guidé mes recherches tout au long de ce travail. je tiens à le remercie spécialement pour l'obtention de cette bourse d'études.

Ma reconnaissance va à Monsieur M. Denche pour avoir accepté d'être président de ce jury. Je le remercie profondédement pour les suggestions importante qu'il m'a faits.

Je remercie également Monsieurs M. Z. Aissaoui, S. Djezzar et A. L. Marhoune de m'avoir l'honneur de participer au jury. Je les remercies trés chaleureusement.

Mes remerciements vont à tous les collègue du Laboratoire de Théorie des Systèmes MEPS de l'université de Perpignan, qui ont, de près ou de loin, contribué à la réalisation de ce travail, et pour leurs acceuil. Je remercie plus particulièrement Y. Maurissen, M. Ventou pour leurs secours et leurs aides.

Je tien enfin à exprimer mes remerciements à tous les miens qui m'ont soutenue par leur amour et leur confiance. À mes amis qui trouveront ici toute ma reconnaissance pour leurs aide et ses encouragements à terminer cette thèse plus particulièrement Y. Ouafik, R. El-Mir, R. Arhab, R. Slimi, J. Ayyad, R. Taraf.

Dalah Mohamed

TABLE DES MATIÈRES

Thèse de Ðoctorat de Mathématiques Appliquées.
Mohamed ÐAŁAH, Université "Mentouri" de Constantine, 2008.

Introduction

Łes problèmes de contact avec ou sans frottement entre un corps cylindrique et une fondation sont abondants en idustrie et dans la vie de tous les jours. Le frottement entre les plaques techniques, le piston avec la chemise sont quelques exemples parmi bien d'autres. Du fait de l'importance du phénomène, des études considérables ont été consacrées à ce domaine important qu'est *la Mécanique du Contact*. La littérature concerne la modélisation, l'analyse mathématiques ainsi que l'approximation numérique des problèmes.

L'objet de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude de quelques *problèmes antiplans électro-élastiques et électro-viscoélastiques de contact*. En effet, nous considérons des lois de comportement non linéaires pour des matériaux électro-élastiques et électro-viscoélastiques, dans le processus statique et quasistatique. Diverses loi de frottement sont envisagées, elles sont définies par des versions de la loi de Tresca ou de Coulomb et ses versions régularisées. Nous avons étudiés dans cette thèse plusieurs problèmes avec différents conditions de contact avec frottement.
Nous commençons par décrire le problème antiplan de contact piézoélectrique de départ et, après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème posé pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution par rapport aux données et aux paramètres. Cette thèse se compose de deux grandes parties, dont chacune d'elle contient deux chapitres. Nous cloturons cette thèse par un annexe et une bibliographie qui touche le domaine. Afin d'en faciliter la lecture, nous les avons rendus indépendants en rappelant brièvement les outils nécessaires à leur compréhension.
Le premier chapitre introduit la modélisation du contact piézoélectrique. On rappelle le cadre physique et le modèle mathématique contenant les différents équations et conditions de contact concernant le champ des déplacements, le champ des déplacements électrique et le champ des contaraintes, ainsi que des constructions des lois de frottement et des lois de frottement régularisées.
Dans le second chapitre on présente une modélisation des problèmes antiplans. Nous citons tout d'abord des hypothèses et des équations, puis nous faisons un rappel sur les espaces fonctionnels et leurs propriétés et, nous terminons par une présentation des conditions aux limites avec frottement.
Dans la deuxième partie, dite *Analyse des modèles*, nous commençons par le premier chapitre qui touche les problèmes électro-élastiques; plus précisément, on s'intéresse à l'étude de six problèmes aux limites qui décrivent l'evolution statique et quasistatique d'un corps électro-élastique soumis à des forces surfacique, des forces volumiques et, des charges 'electriques, en contact avec frottement.

Dans la première et la deuxième section, on considère un problème statique avec des conditions aux limites avec frottement de Tresca et frottement régularisé. Par la suite, nous présentons dans chaque section une formulation variationnelle du problème et, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution. La troisième section présente un problème statique avec loi de frottement de type puissance. Au premier point, nous construisons une formulation variationnelle associée au problème posé à l'étude puis, nous établissons les résultats d'existence et d'unicité. Dans la quatrième section, nous étudions un problème statique avec frottement dépendant du glissement, cést à dire, le condition de frottement est présentée avec une version statique de la loi de Coulomb dépendant du glissement. Par la suite, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution. Dans la cinquième et la sixième section, nous avons étudié un problème quasistatique avec frottement de type Tresca et frottement régularisé. Le matériel est électro-élastique, le processus est quasistatique, le frottement est modélisé par la loi de Tresca et, la fondation est connectée par un champ électrique. Nous dérivons dans un premier temps la formulation variationnelle qui est sous la forme d'un système couplé des inéquations variationnelles dévolution pour le champ des déplacements avec une équation variationnelle dépendant du temps pour le champs électrique. Ensuite, nous prouvons l'existence de la solution faible pour ce modèle. Finalement, nous étudions la dépendance de la solution avec une perpturbation dans la condition de frottement et, nous prouvons dans ce cas là un résultat de convergence. *La rédaction de cette section s'inspire de l'article [43].*

Dans le deuxième chapitre de la partie II on considère un modèle mathématique qui décrit une phénomène électro-mécanique qui se conclue dans une déformation d'un cylindre en contact avec frottement avec une fondation régide. Cette fois ci, le matériel est supposé électro-viscoélastique, le processus est quasistatique, le frottement est modélisé par la loi de Tresca et, la fondation est connectée par un champ électrique. Nous dérivons la formulation variationnelle de ce modèle qui est sous la forme d'un système couplé en premier temps; une inéquation variationelle d'evolution pour le champ des déplacements avec une equation variationnelle dépendant du temps pour le champ électrique. Alors, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible pour ce modèle. La démonstration est basée sur les arguments des inéquations variationnelles d'evolution et l'opérateur de point fixe. *La rédaction de cette section s'inspire de l'article [44].*

Nous concluons que la solution du problème antiplan électro-élastique de contact de type Tresca peut être approximée par la solution du problème antiplan électro-viscoélastique de contact avec frottement de type Tresca, quand *le coefficient de viscosité* est suffisamment petit. Ce résultat indique que, dans le contexte des problèmes antiplans, l'électro-élasticité avec frottement de type Tresca peut être considérée comme cas limite de l'électro-viscosité avec frottement de type Tresca.

Thèse de Ðoctorat de Mathématiques Appliquées.
Mohamed ÐAŁAH, Université "Mentouri" de Constantine, 2008.

Notations

Ω :	est un domaine de $I\!R^d\,(d=2.3)$, on note par :
Γ :	l'adhérence de Ω.
$\Gamma_i(i=1-3)$:	la frontière de Ω supposée régulière.
$mes\Gamma_1$:	la mesure de Lebesgue de Γ_1.
ν :	la normale unitaire sortante à Γ.
$\upsilon_\nu,\upsilon_\tau$:	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel ν.
$C^1(\Omega)$:	espace des fonctions réelles continumenet différentiable sur Ω.
$X=V\times W$:	l'espace produit de deux espaces V et W.
$x_\rho \longrightarrow x$:	la convergence forte de la suite x_ρ vers x dans l'espace X.
$x_\rho \rightharpoonup x$:	la convergence faible de la suite x_ρ vers x dans l'espace$X$

Si de plus $[0,T]$ un intervalle de temps, $k\in N$ et $1\le p\le +\infty$, on note par :

$C(0,T;X)$:	l'espace des fonctions continues de $[O,T]$ dans X.
$\|.\|_{C(0,T;X)}$:	la norme de $C(0,T;X)$.
$L^p(0,T;X)$:	l'espace des fonctions f mesurables de $]0,T[$ dans X.
$\|.\|_{L^p(0,T;X)}$:	la norme de $L^p(0,T;X)$.
$W^{k,p}(0,T;X)$:	l'espace de Sobolev de paramètre k et p.
$W^{k,p}(0,T;X)$:	l'espace de Sobolev de paramètre k et p.

Pour une fonction f, on note par :

dom :	le domaine de la fonction f.
$\partial_i f$:	la dérivée partielle de f par rapport au temps.
∇f :	le gradient de la fonction f.
$Divf$:	la divergence de la fonction f.

Autres notations :

S^d :	l'espace des tenseurs symétrique du second ordre sur $I\!R^d$.
$p.p$:	presque partout.

Les exposants dans les natations suivantes $P_1^{I.V.ELL.T}$, $P_V^{I.V.ELL.T}$, $P_{VG}^{I.V.ELL.T}$, $P_{2,\rho}^{I.V.ELL.R}$, $P_1^{I.V.ELL.P}$, $P_{3,\rho}^{I.V.ELL.T}$, $P_4^{I.V.ELL.DG}$, $P_5^{I.QV.ELL.T}$ et $P_6^{I.QV.ELL.R}$ signifient :

$I.V.T$:	inéquation variationnelle avec frottement de Tresca.
$I.V.R$:	inéquation variationnelle avec frottement régularisé.
$I.V.P$:	inéquation variationnelle avec frottement de type puissance.
$I.V.DG$:	inéquation variationnelle avec frottement dépend de glissement.
$I.QV.T$:	inéquation quasivariationnelle avec frottement de Tresca.
$I.QV.R$:	inéquation quasivariationnelle avec frottement régularisé.

Partie I : Modélisation

Thèse de Doctorat de Mathématiques Appliquées,
Université "Mentouri" de Constantine, 2008

Première partie

Modélisation

Partie I

Modélisation

Dans la première partie de cette thèse nous présentons une description générale d'un modèle mathématiques qui décrit le contact entre un corps piézoélectrique et un obstacle dit fondation. Un tel genre de processus est rencontré dans l'industrie et la vie quotidiènne et, pour cela, un éffort considérable a été fait du côté analyse et simulations numériques. Nous précisons dans le premier chapitre le cadre physique, les variables qui déterminent l'état du système, les lois de comportement, les équations de bilan et les conditions aux limites. Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous considérons le modèle mathématique d'un processus particulier dit problème antiplan. On peut introduire des états de déformations antiplanes dans un solide en le chargeant dans une manière spéciale. Nous commençons par une description détaillée des hypothèses de base et nous particularisons les équations d'équilibre et constitutives dans le contexte antiplan. Finalemet, nous présentons une particularisation des conditions de contact et les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION DU CONTACT PIÉZOÉLECTRIQUE

1.1 Cadre physique et modèles mathématiques

Nous présentons dans cette section le cadre physique et les modèles mathématiques associés à l'étude des problèmes de contact impliquant des corps piézoélectrique.

Cadre physique. Une grande variété des phénomènes de contact rencontré dans différents processus industriels ainsi que dans la vie de tous les jours peut être considérée dans le cadre physique suivant. Un corps piézoélectrique occupe dans la configuration de références un ouvert borné connexe noté $\mathcal{B}$ de $I\!R^3$ avec une frontière $\partial\mathcal{B}$. Nous notons les vecteurs et les tenseurs par des lettres en caractère gras, tel que le vecteur de position que l'on note $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathcal{B} \cup \partial\mathcal{B}$. Ici les indices i, j, k et l variés de 1 à 3. Nous notons aussi par S^3 l'espace de tenseurs symétrique de deuxième ordre de $I\!R^3$ qui est équivalent à l'espace des matrices symétriques d'ordre 3. Nous désignons par $< \cdot,\cdot >$ et $\| \cdot \|$ respectivement le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $I\!R^3$ et S^3 définis par

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i\, v_i, \qquad \|\boldsymbol{v}\| =< \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} >^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in I\!R^3,$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij}\, \tau_{ij}, \qquad \|\boldsymbol{\tau}\| =< \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} >^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \ S^3.$$

Ici et partout dans ce travail on utilise la convention de "l'indice muet". Nous supposons que $\partial\mathcal{B}$ est partitionnée en trois parties mesurables Γ_D, Γ_F et Γ_C telles que $mes(\Gamma_D) > 0$. On suppose par ailleurs que $\partial\mathcal{B}$ est de Lipschitiz, et par conséquent le vecteur unitaire de la normale extérieure noté $\boldsymbol{\nu}$ existe presque partout sur $\partial\mathcal{B}$. Le corps est encastré sur Γ_D. Nous nous intéressons à l'étude de l'évolution du corps matérial due à l'application des forces volumiques de densité $\boldsymbol{f}_0$ dans $\mathcal{B}$ et de traction surfacique de densité $\boldsymbol{f}_2$ sur la frontière Γ_F. Le corps est en contact sur la frontière Γ_C avec l'obstacle, dit fondation. Nous supposons que les deux forces $\boldsymbol{f}_0$ et $\boldsymbol{f}_2$ varient très lentement par rapport au temps d'intervalle du $[0,T]$ avec $T > 0$. Nous supposons aussi qu'une partition $\Gamma_A \cup \Gamma_B$ de $\partial\mathcal{B}$ est donnée et celle-ci est associée aux conditions électriques. Le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_A de la frontière et des charges électriques de densité surfaciques q_2 agissant sur Γ_B. De plus on exerce sur le corps des charges électrique de densité volumique q_0. Nous utiliserons ce cadre physique dans toute la partie II de cette thèse.

Modèle mathématique. Nous nous intéressons maintenant au modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps liée au cadre physique ci-dessus. Nous notons par $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t))$ et $\boldsymbol{D} = (D_i(x,t))$ respectivement le champ des contraintes et le vecteur des déplacements électriques tel que $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$ et $t \in [0,T]$. Soient $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = (u_i(\boldsymbol{x},t))$ et $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x},t)$ respectivement le champ des déplacements et le potentiel électrique. Nous désignons par $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ et $\boldsymbol{E}(\varphi)$ respectivement le champ des déformations linéarisées et le champ électrique. Les fonctions $\boldsymbol{u} : \mathcal{B}\times[0,T] \to I\!R^3$, $\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{B}\times[0,T] \to \boldsymbol{S}^3$, $\varphi : \mathcal{B}\times[0,T] \to I\!R^3$ et $\boldsymbol{D} : \mathcal{B}\times[0,T] \to \boldsymbol{S}^3$ vont jouer le rôle de inconnues dans le problème de contact. Pour un vecteur $\boldsymbol{v}$ nous désignons par $\boldsymbol{v}_\nu$ et $\boldsymbol{v}_\tau$ les composantes normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\text{(I.1.1)} \qquad \begin{cases} v_\nu = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - v_\nu\boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

Les composantes normale et tangentielle du champ des contraintes, notées respectivement σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ sont définies par les égalités

$$\text{(I.1.2)} \qquad \begin{cases} \sigma_\nu = \boldsymbol{\sigma\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma\nu} - \sigma_\nu\cdot\boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

Nous utilisons (I.1.1) et (I.1.2), pour obtenir la relation suivante

$$\text{(I.1.3)} \qquad \boldsymbol{\sigma\nu}\cdot\boldsymbol{v} = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau\cdot\boldsymbol{v}_\tau,$$

qui va intervenir tout le long de cette thèse. En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation d'une fonction par rapport au temps; par exemple

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \qquad \ddot{\boldsymbol{u}} = \frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2},$$

où $\dot{\boldsymbol{u}}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{\boldsymbol{u}}$ désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses $\dot{\boldsymbol{u}}$ les notations $\dot{\boldsymbol{u}}_\nu$ et $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau$ désignent respectivement la vitesse normale et la vitesse tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{u}_\nu = \dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\nu}, \\ \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = \dot{\boldsymbol{u}} - \dot{u}_\nu\boldsymbol{\nu}. \end{array}\right. \tag{I.1.4}$$

Rappelons que le tenseur des déformations linéarisées est donné par

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})), \\ \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}), \quad 1\leq i,j\leq 3 \end{array}\right. \tag{I.1.5}$$

le champ électrique est défini par l'égalité

$$\boldsymbol{E}(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i}). \tag{I.1.6}$$

Nous précisons par ailleurs que l'indice qui suit une virgule signifie une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale.

Les équations de bilan qui décrivent l'évolution du corps piézoélectrique sont

$$Div\ \boldsymbol{\sigma} + f_0 = 0 \qquad dans \quad \mathcal{B}\times(0,T) \tag{I.1.7}$$

$$div\ \boldsymbol{D} = q_0 \qquad dans \quad \mathcal{B}\times(0,T). \tag{I.1.8}$$

Remarquons que ces équations décrivent les processus statiques et quasistatiques. Puisque le corps est encastré sur la frontière Γ_1, le champ des déplacements s'y annule, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad dans \quad \Gamma_D\times(0,T). \tag{I.1.9}$$

La condition aux limites en traction est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = f_2 \qquad dans \quad \Gamma_F\times(0,T). \tag{I.1.10}$$

Les conditions électriques aux bords sont de la forme suivante:

$$\varphi = 0 \qquad dans \quad \Gamma_A \times (0,T) \tag{I.1.11}$$

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \qquad dans \quad \Gamma_B \times (0,T). \tag{I.1.12}$$

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique, il faut préciser la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions aux limites sur la forntière Γ_3, c'est-à-dire des conditions de contact. Ceci fera l'objet des deux sections suivantes.

1.2 Lois de comportement

Nous décrivons dans ce paragraphe les lois de comportement des matériaux électro-élastiques et électro-viscoélastiques. Par loi de comportement nous comprenons dans ce qui suit une relation entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(u)$ d'un côté, et le champ des déplacements électrique $\boldsymbol{D}$ et le champ électrique $\boldsymbol{E}(\varphi)$ d'un autre côté. Par la suite, nous décrivons les lois des comportement qui interviennent dans cette thèse.

Lois de comportement des matériaux électro-élastiques. Le comportement des corps électro-élastique est décrit par les équations suivantes :

$$\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \mathcal{E}^{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{E}(\varphi), \tag{I.1.13}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathcal{E}\varepsilon(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{E}(\varphi). \tag{I.1.14}$$

Ici $\mathcal{F} = (f_{ijkh})$ est le tenseur des coefficients élastiques, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique et $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_{ij})$ est le tenseur permitivité électrique. Par ailleurs la transposée du tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$ est notée par $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\tau}} = (e^{\boldsymbol{\tau}}_{ijk})$ où $e^{\boldsymbol{\tau}}_{ijk} = e_{kij}$ tel que

$$\mathcal{E}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{E}^{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{v}, \qquad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^3, \quad \forall \boldsymbol{v} \in I\!R^3. \tag{I.1.15}$$

En composantes les équations (I.1.12) et (I.1.13) peuvent être écrites sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{f}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\boldsymbol{u}) - e^{\boldsymbol{\tau}}_{ijk}\boldsymbol{E}_k(\varphi), \tag{I.1.16}$$

$$\boldsymbol{D}_{i,i} = e_{ijk}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) - \beta_{ij}\varphi_{,k}. \tag{I.1.17}$$

Le tenseur $\mathcal{F} = (f_{ijkh})$ est un tenseur d'ordre quatre. Ces composantes (f_{ijkh}) s'appellent coefficients d'élasticité et $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur des constantes piézoélectrique; c'est un tenseur d'ordre trois. Par ailleurs le tenseur $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_{ij})$ de la permitivité électrique est un tenseur d'ordre deux.

Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques. Les lois de comportement pour les matériaux électro-viscoélastiques sont utilisées pour d'écrire le comportement des différents matériaux comme les métaux, les polymères et les roches. Ces lois peuvent s'écrire sous la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{F}\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \mathcal{E}^{\tau}\boldsymbol{E}(\varphi), \tag{I.1.18}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathcal{E}\varepsilon(\boldsymbol{u}) + \beta\boldsymbol{E}(\varphi). \tag{I.1.19}$$

Dans ces équations $\mathcal{A} = (a_{ijkh})$ est le tenseur des coefficients viscoélasiques, $\mathcal{F}$ est le tenseur des coefficients élastiques, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ le tenseur des constantes piézoélectriques et, $\beta = (\beta_{ij})$ est le tenseur de la primitivité électrique.

1.3 Conditions de contact

Nous présentons dans cette section quelques conditions aux limites de contact utilisées dans la littérature; les lois de frottement asociées seront présentées dans la section suivante. De façons générale, nous comprenons par condition de contact une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes et nous comprenons par loi de frottement une relation entre la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ et la vitesse tangentielle $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau$ ou bien le déplacement tangentiel $\boldsymbol{u}_\tau$. La contrainte $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ s'appelle aussi force de frottement.

a- Contact bilatéral. Le contact se fait d'une façon bilatérale c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement et il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle. La compsante normale du champ des déplacements s'annule sur la surface de contact et donc

$$u_\nu = 0. \tag{I.1.20}$$

b- Condition de contact unilatéral. Cette condition modélise le contact avec une fondation rigide. Puisque la fondation est considérée rigide, elle ne subira donc pas de déformation. Le corps ne pourra pas donc y pénétrer. Cette propriété se traduit par la relation mathématique

$$u_\nu \leq 0. \tag{I.1.21}$$

Aux points de Γ_3 tel que $u_\nu < 0$ le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent nous obtenons

$$u_\nu < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0. \tag{I.1.22}$$

Aux points de Γ_3 tel que $\boldsymbol{u}_\nu = 0$ le contact est maintenu et la base régide exerce une réaction normale orienté vers Ω et donc nous pouvons écrire

$$u_\nu = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0. \tag{I.1.23}$$

Les conditions de contacts d'écrit par (I.1.21), (I.1.22) et (I.1.23) s'appellent "*conditions de contact unilatéral*" ou bien "*conditions de contact de Signorini*". Elle peuvent être regroupées sous la forme :

$$\begin{cases} u_\nu \leq 0, \\ \sigma_\nu \leq 0, \\ \sigma_\nu u_\nu = 0. \end{cases} \tag{I.1.24}$$

c- Condition avec compliance normale. La fondation est supposée déformable. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite "compliance normale", c'est -à-dire

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu). \tag{I.1.25}$$

Ici p est une fonction positive donnée, telle que $p(u_\nu) = 0$ si $u_\nu < 0$. Cette condition montre que lorsqu'il y a pénétration la fondation exerce une réaction vers le corps déformable ($u_\nu \geq 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0$) et lorsque il y a séparation la contrainte normale s'annule ($u_{nu} < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0$).

1.4 Lois de frottement

Nous décrivons dans cette section les conditions dans la direction tangentielle appelées généralement conditions de frottement ou lois de frottement.

a- Contact sans frottement. Nous supposons qu'on a un glissement parfait, ou sans frottement. Ceci se traduit par la relation

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0}. \tag{I.1.26}$$

b- Loi de Coulomb. Dans le cas ou la force de frottement $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ ne s'anule pas sur la surface de contact, alors le contact est avec frottement. Le contact en frottement est souvent modélisé avec la loi de Coulomb; dans cette loi la traction tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ peut atteindre la borne g qui est appelée seuil de frottement. On a

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq g, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -g\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|} \qquad \text{si} \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\tau \neq 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T). \end{cases} \tag{I.1.27}$$

Ici $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau$ est la vitesse tangentielle relative. Nous notons que la loi de Coulomb (I.1.27) est caractérisée par l'existence d'une zone d'adhérence et de glissement sur la région frontière de contact à chaque moment $t \in [0,T]$. Il suit de (I.1.27) que, lorsque $\boldsymbol{x}$ est un point de la frontière Γ_C et l'inégalité $\|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{x},t)\| < g(\boldsymbol{x})$ est vérifiée, alors $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(\boldsymbol{x},t) = \mathbf{0}$ et le point matériel $\boldsymbol{x}$ se trouve dans la zone d'adhérence. Maintenant si $\|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{x},t)\| = g(\boldsymbol{x})$ alors le point $\boldsymbol{x}$ est se trouve dans la zone de glissement. Nous concluons que la loi de frottement de Coulomb (I.1.27) modélise des phénomènes que le glissement se produit seulement quand la force de frottement atteint une valeur critique.

c- Version de la loi de Coulomb. Dans certaines applications, particulièrement où le frottement est très large, la fonction g dans (I.1.27) ne dépend pas des variables de processus et se comporte comme une fonction donnée. En considérant

$$g = g(\boldsymbol{x}) \tag{I.1.28}$$

dans (I.1.27) qui mène à la loi de frottement de Tresca; ceci simplifie considérablement l'analyse des problèmes de contact.

Souvent, particulièrement en littérature téchnologique, le seuil de frottement g est choisit comme suit

$$g = g(\sigma_\nu) = \bar{\mu}|\sigma_\nu|, \tag{I.1.29}$$

$\bar{\mu} \geq 0$ étant le coefficient de frottement. Le choix (I.1.29) dans (I.1.27) mène vers la version classique de la loi de frottement de Coulomb. Récemment, les modèles mathématiques pour le contact avec frottement ont employés un coefficient de frottement variable et la dépendance du coefficient à l'égard des paramètres de processus a été incorporée aux modèles. Par exemple, le choix

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\|\boldsymbol{u}_\tau\|) \tag{I.1.30}$$

a été considére en plusièures publications en géophysiques pour modéliser le mouvements des plates tectoniques voir [31], [32]; souvent le choix

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|) \tag{I.1.31}$$

a été considéré par plusieurs auteurs, voir pour plus de détails [27].

Nous tenons compte de la dépendance de (I.1.30) ou (I.1.31) en (I.1.29) pour obtenir que le seuil de frottement g satisfait

$$g = g(\|\boldsymbol{u}_\tau\|) \tag{I.1.32}$$

ou

$$g = g(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|). \tag{I.1.33}$$

Les deux égalités ci-dessus montrent que la borne de frottement g dépend du glissement $\boldsymbol{u}_\tau$ ou $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau$.

1.5 Lois de frottement régularisées

Dans une formulation variationnelle, le problème de contact avec frottement avec la loi de Coulomb nous amène aux inégalités variationnelles impliquant des fonctionnels non différentiable. Pour éviter cette difficulté, plusières régularisation de la loi de Coulomb sont utilisés dans la littérature, principalement pour des raisons numériques. Quelques exemples sont donnés par :

$$\text{(I.1.34)} \qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -g\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau}{\sqrt{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|^2+\rho^2}} \qquad \text{dans} \quad \Gamma_C \times (0,T),$$

ou

$$\text{(I.1.35)} \qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \begin{cases} 0 & \\ -g\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|^{\rho-1}\dot{\boldsymbol{u}}_\tau & \text{si} \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\tau \neq 0 \end{cases} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T).$$

La loi de frottement (I.1.34) ou (I.1.35) décrive des situations quand le glissement apparait même pour une contrainte tangentielle petite ce qui est le cas lorsque les surfaces de contact sont lubrifiées. La relation (I.1.35) s'appelle aussi une loi de frottement puissance; effectivement dans ce cas la contrainte tangentielle est proportionelle à une puissance de la vitesse tangentielle. Dans le cas particulier $\rho = 1$, la relation (I.1.35) implique que la contrainte tangentielle est proportionnelle à la vitesse tangentielle. Par ailleurs, la relation (I.1.27) est obtenue formellement à partir des lois de frottement (I.1.34) et (I.1.35) lorsque $\rho \to 0$.

Une comparaison instructive de la loi de frottement (I.1.27), (I.1.34) et (I.1.35) peut être faite dans la cas bidimentionel; dans ce cas à chaque point de la surface de contact il existe une seule direction tangentielle. Notons par $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ son vecteur unitaire; nous avons $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \sigma_\tau \boldsymbol{\tau}$ et $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau = \dot{u}_\tau \boldsymbol{\tau}$ ou σ_τ et u_τ sont des scalaires. Supposons qu'un seuil de frottement est donné alors ce cas particulier (I.1.27) conduit à relation multivoque

$$\text{(I.1.36)} \qquad |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g, \qquad -\sigma_\tau = \begin{cases} [-g,+g] & \text{si} \quad \dot{u}_\tau = 0 \\ -g & \text{si} \quad \dot{u}_\tau < 0 \\ g & \text{si} \quad \dot{u}_\tau > 0 \end{cases} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T)$$

alors (I.1.34) et (I.1.35) sont données par

$$\text{(I.1.37)} \qquad -\sigma_\tau = g\frac{\dot{u}_\tau}{\sqrt{\dot{u}_\tau^2+\rho^2}} \qquad \text{dans} \quad \Gamma_C \times (0,T).$$

La loi de frottement dite "puissance" est caractérisée par la relation

$$\text{(I.1.38)} \qquad -\sigma_\tau = \begin{cases} 0 & \\ -g|\dot{u}_\tau|^{\rho-1}.\dot{u}_\tau & \text{si} \quad \dot{u}_\tau \neq 0 \end{cases} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T).$$

Maintenant, il est facile de remarquer que (I.1.36) est vérifiée si et seulement si

$$-\sigma_\tau(v_\tau - \dot{u}_\tau) \leq g|v_\tau| - g|\dot{u}_\tau| \quad \forall v_\tau \in I\!R, \tag{I.1.39}$$

ce qui prouve que la relation (I.1.36) peut être écrite sous la forme

$$-\sigma_\tau \in \partial\varphi(\dot{u}_\tau), \tag{I.1.40}$$

où $\varphi : I\!R \to I\!R^3$ est la fonction définie par

$$\varphi(s) = g|s|. \tag{I.1.41}$$

Nous notons que la fonction φ est une fonction convexe et continue mais elle n'est pas différentiable au point $s = 0$. Souvent les relations (I.1.37) et (I.1.38) peuvent êtres écrites sous la formes :

$$-\sigma_\tau = \varphi'(\dot{u}_\tau) \tag{I.1.42}$$

ou φ' représente la dérivée de la fonction $\varphi : I\!R \to I\!R$ donnée par :

$$\varphi(s) = g(\sqrt{s^2 + \rho^2} - \rho) \tag{I.1.43}$$

et respectivement

$$\varphi(s) = \frac{g}{\rho + 1}|s|^{\rho+1}. \tag{I.1.44}$$

Il est clair que les fonctions φ ci-dessous sont convexes et différentiables. Nous concluons que les lois de frottement (I.1.36), (I.1.37), (I.1.38) ont une caractéristique commune, car elles peuvent être écrites sous la forme (I.1.40) avec un choix convenable pour la fonction φ.

Dans le cas du processus d'équilibre, nous considérerons une version statique de ces lois qui sont obtenues par remplacement de la vitesse tangentielle avec le déplacement tangentiel. Alors, la version statique de la loi de frottement (I.1.27) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq g, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -g\frac{\boldsymbol{u}_\tau}{\|\boldsymbol{u}_\tau\|} \qquad \text{si} \quad \boldsymbol{u}_\tau \neq 0 \qquad \text{dans} \quad \Gamma_C \times (0,T). \end{array}\right. \tag{I.1.45}$$

La version statique pour la loi de frottement régularisée (I.1.38) est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = -g\frac{\boldsymbol{u}_\tau}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_\tau\|^2 + \rho^2}} \qquad \text{dans} \quad \Gamma_C \times (0,T). \tag{I.1.46}$$

Finallement, la version statique pour les lois de frottement régularisées (I.1.39) est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ -g\|\boldsymbol{u}_\tau\|^{\rho-1}\boldsymbol{u}_\tau \text{ si } \boldsymbol{u}_\tau \neq 0 \end{array}\right. \qquad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0,T). \tag{I.1.47}$$

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DES PROBLÈMES ANTIPLANS

Dans ce chapitre nous considérons le modèle mathématique pour les problèmes antiplans de contact piézoélectrique. Nous commençons par une description détaillée des hypothèses de base et des équations. Nous présentons l'équation d'équilibre et l'équation électrostatique dans le contexte antiplan piézoéletrique. En outre, nous considérons deux modèles des problémes antiplans piézoélectriques dans le cas électro-élastique et électro-viscoélastique. Ensuite, nous présentons tous les types des conditions aux limites de frottement dans le contexte antiplan.

2.1 Hypothèses et équations

Nous nous basons sur l'étude présentée dans le cadre physique du chapitre 1; nous supposons qu'on a un corps piézoélectrique cylindrique $\mathcal{B}$ de $I\!R^d$ (d = 2,3). Nous supposons que le cylindre $\mathcal{B}$ a des génératrices parallèles à l'axe Ox_3 et soit Ω sa section transversale. Ω est un domaine régulier dans le plan Ox_1x_2, $Ox_1x_2x_3$ représentent un système en cordoonnées cartésiènne . Alors $\mathcal{B}$=$\Omega\times(-\infty,+\infty)$. Soit $\partial\Omega$=Γ; nous supposons que Γ est partitionnée en trois parties disjointes mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 tel que mes $\Gamma_1 > 0$. Nous choisissons Γ_D=$\Gamma_1\times(-\infty,+\infty)$, Γ_F=$\Gamma_2\times(-\infty,+\infty)$ et Γ_C=$\Gamma_3\times(-\infty,+\infty)$, et nous supposons que le cylindre est encastré sur $\Gamma_1\times(-\infty,+\infty)$ et il est en contact avec la fondation rigide sur $\Gamma_3\times(-\infty,+\infty)$ durant le processus. De plus, le cylindre est soumis aux forces volumiques de densité $\boldsymbol{f}_0$ sur $\mathcal{B}$ et de tractions surfaciques de densité $\boldsymbol{f}_2$ sur $\Gamma_2\times(-\infty,+\infty)$ voir les figures 1.1 et 1.2. Nous supposons aussi qu'une partition de Γ=$\Gamma_a\cup\Gamma_b$ de Γ est donnée, telle que $\Gamma_3\subset\Gamma_b$ et *mes* $\Gamma_a > 0$ et celle-ci est associée aux conditions électriques. Nous choisissons Γ_A=$\Gamma_a\times(-\infty,+\infty)$ et Γ_B=$\Gamma_b\times(-\infty,+\infty)$. Le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a de la frontière ainsi qu'à

FIG. 2.1 – *Cadre physique - section transversale*

FIG. 2.2 – *Cadre physique*

l'action des charges électriques de densité surfaciques q_2 agissant sur Γ_b. De plus on exerce sur le corps un champ électrique de densité volumique q_0. Nous notons par $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,0)$ la normale sortant à Γ. Soit $T > 0$ et soit $[0,T]$ désigne l'intervalle du temps dans lequel nous étudions l'évolution du corps matériel.

Nous supposons que les forces $\boldsymbol{f}_0$ et $\boldsymbol{f}_2$ sont telles que

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{f}_0 = (0,0,f_0), \\ \boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{f}_0(x_1,x_2,t) : \Omega \times [0,T] \to I\!R, \end{array}\right\} \tag{I.2.1}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{f}_2 = (0,0,f_2), \\ \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_2(x_2,x_2,t) : \Gamma_2 \times [0,T] \to I\!R. \end{array}\right\} \tag{I.2.2}$$

La charge surfacique de densité q_2 appliquée sur Γ_b est telle que

$$q_2 = q_2(x_1,x_2,t) : \Gamma_b \times [0,T] \to I\!R. \tag{I.2.3}$$

On exerce sur le corps un champ électrique de densité volumique q_0 tel que

$$q_0 = q_0(x_1,x_2,t) : \Omega \times [0,T] \to I\!R. \tag{I.2.4}$$

Nous supposons que les deux forces $\boldsymbol{f}_0$ et $\boldsymbol{f}_2$ définies par (I.2.1) et (I.2.2) et les charges q_0 et q_2 définies par (I.2.3) et (I.2.4) engendrent une déformation sur le cylindre avec un déplacement $\boldsymbol{u}$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{u} = (0,0,u), \\ u = u(x_1,x_2,t) : \Omega \times [0,T] \to I\!R \end{array}\right\} \tag{I.2.5}$$

ainsi qu'un potentiel électrique $\varphi = \varphi(x_1,x_2,t)$ donné par

$$\varphi = \varphi(x_1,x_2,t) : \Omega \times [0,T] \to I\!R. \tag{I.2.6}$$

Nous nous rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites déformations

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})), \\ &\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad 1 \leq\ i,j \leq d. \end{aligned}\right\} \tag{I.2.7}$$

Par conséquent, en utilisant (I.2.5) il résulte que dans le cas antiplan, le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ peut se mettre sous la forme

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,2} \\ \frac{1}{2}u_{,1} & \frac{1}{2}u_{,2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.2.8}$$

Par ailleurs rappelons la définition du champ électrique

$$\boldsymbol{E}(\varphi) = -\nabla\varphi, \tag{I.2.9}$$

avec

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{I.2.10}$$

Supposons que le tenseur électrique $\mathcal{E} : S^3 \to I\!R^3$ d'ordre trois défini par

$$\mathcal{E}(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} e(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) \\ e(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) \\ e(\varepsilon_{33}) \end{pmatrix}. \tag{I.2.11}$$

Soit l'opérateur adjoint que l'on note $\mathcal{E}^T : I\!R^3 \to S^3$ qui est aussi d'ordre. Puis on peut vérifier que l'opérateur adjoint $\mathcal{E}^T$ est définie par

$$\mathcal{E}^T \nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e\nu_1 \\ 0 & 0 & e\nu_2 \\ e\nu_1 & e\nu_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.2.12}$$

En effet, il est facile de vérifier que l'égalité

$$\mathcal{E} \cdot \varepsilon\nu = \varepsilon \cdot \mathcal{E}^T \nu \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \in S^3, \quad \boldsymbol{\nu} \in I\!R^3$$

est satisfaite.

Dans le cas électro-élastique, on sait que le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \mathcal{E}^T \boldsymbol{E}(\varphi). \tag{I.2.13}$$

On choisit $\mathcal{F}$ l'opérateur de l'élasticité linéaire et isotrope, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(\varepsilon(u)) = (2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda(\varepsilon_{kk}(u))\delta_{ij})$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Nous remplaçons (I.2.8) et (I.2.10) dans (I.2.13) pour obtenir

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} \\ \mu u_{,1} & \mu u_{,2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & e\varphi_{,2} \\ e\varphi_{,1} & e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}$$

et alors

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} \\ \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.2.14}$$

Nous rappelons que l'équation d'équilibre est donnée par

$$Div \;\; \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{0}$$

et alors, d'après (I.2.14) il vient

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T), \tag{I.2.15}$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T), \tag{I.2.16}$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_0 = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T). \tag{I.2.17}$$

En utilisant (I.2.14) nous remarquons que les équations (I.2.15) et (I.2.16) sont identiquement, par ailleurs l'équation (I.2.17) donne

$$div(\mu\nabla u) + div(e\nabla\varphi) + f_0 = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T). \tag{I.2.18}$$

Soit $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur unitaire normale sur $\Gamma \times (0,T)$ donné par

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,0), \tag{I.2.19}$$

et soit

$$\partial_\nu Z = \nabla Z \cdot \nu$$

la dérivée normale de la fonction Z. On a alors

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \boldsymbol{f}_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T), \tag{I.2.20}$$

et ceci est équivalent à

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} \\ \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2 \end{pmatrix}. \tag{I.2.21}$$

En faisant le produit nous avons alors

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\mu u_{,1} + e\varphi_{,1})\nu_1 + (\mu u_{,2} + e\varphi_{,2})\nu_2 \end{pmatrix},$$

en tenant compte que

$$\mu\partial_\nu u = \mu u_{,1}\nu_1 + \mu u_{,2}\nu_2, \qquad \partial_\nu \varphi = e\varphi_{,1}\nu_1 + e\varphi_{,2}\nu_2,$$

on a

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T). \tag{I.2.22}$$

Par conséquent, d'après (I.2.21) nous obtenons

$$\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = f_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T). \tag{I.2.23}$$

On sait que le champ des déplacements électriques D est donné par

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \beta\nabla\varphi. \tag{I.2.24}$$

Nous remplaçons maintenant $\mathcal{E}$ et $\varepsilon(\boldsymbol{u})$ dans (I.2.24) pour obtenir

$$D = \begin{pmatrix} e(\varepsilon_{13}+\varepsilon_{31}) \\ e(\varepsilon_{23}+\varepsilon_{32}) \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

et par la suite

$$D = e \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_{,1}+u_{,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{,2}+u_{,2}) \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

et alors

$$D = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta\varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta\varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{I.2.25}$$

Nous passons maintenant à l'équation électrique

$$div\, D = q_0. \tag{I.2.26}$$

Nous tenons compte de (I.2.25) et (I.2.26) nous obtenons

$$D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3} - q_0 = 0 \tag{I.2.27}$$

et donc l'équation électrique s'écrite sous la forme

$$div(e\nabla u) - div(\beta\nabla\varphi) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T). \tag{I.2.28}$$

D'autre part on a

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0,T)$$

ceci est équivalent à l'écriture matricielle suivante

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta\varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta\varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

et ceci donne

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = eu_{,1}\nu_1 - \beta\varphi_{,1}\nu_{,1} + eu_{,2}\nu_2 - \beta\varphi_{,2}\nu_2 = e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2$$

et alors

$$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0,T). \tag{I.2.29}$$

En conclusion, en réunissant les équations et les conditions aux limites ci-dessus, nous obtenons que dans un processus antiplan d'un corps électro-élastique, le champ des déplacements u et le déplacement électrique φ satisfont le problème suivant :

Problème. *Trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ *et le potentiel électrique* $\varphi : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ *tel que*

$$div(\mu\nabla u) + div(\rho\nabla\varphi) + f_0 = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \times (0,T), \tag{I.2.30}$$

$$div(e\nabla u) - div(\beta\nabla\varphi) = q_0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \times (0,T), \tag{I.2.31}$$

$$u = 0 \qquad \textit{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \tag{I.2.32}$$

(I.2.33) $$\varphi = 0 \qquad sur \quad \Gamma_a \times (0,T),$$

(I.2.34) $$\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu \varphi = f_2 \qquad sur \quad \Gamma_2 \times (0,T),$$

(I.2.35) $$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu \varphi = q_2 \qquad sur \quad \Gamma_b \times (0,T).$$

Ce système sera complété ultérieurement par les conditions aux limites de contact avec frottement.

Dans le cas électro-viscoélastique, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{F}\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \mathcal{E}^T \boldsymbol{E}(\varphi).$$

On procède de la même façon précédente dans le cas ou la loi constitutive est électro-viscoélastique pour obtenir

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} \\ 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} \\ \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} & \theta\dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & e\varphi_{,2} \\ e\varphi_{,1} & e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par la suite on obtient

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} \\ \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} & \theta\dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous rappelons que l'équation d'équilibre est donnée par

$$Div\ \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{0}$$

et alors

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_0 = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T).$$

Nous remarquons que les deux premières équations sont identiques, par ailleurs la dernière équation du système donne :

$$div(\theta\nabla\dot{u} + \mu\nabla u) + div(e\nabla\varphi) + f_0 = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T).$$

Soit $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur unitaire normale sur $\Gamma \times (0,T)$ donné par

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,0)$$

et soit

$$\partial_\nu Z = \nabla Z \cdot \nu$$

la dérivée normale de la fonction Z.

On a alors

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \boldsymbol{f}_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T),$$

et ceci donne

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} \\ \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} & \theta\dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Aprés un simple calcul nous obtenons

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1})\nu_1 + (\theta\dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2})\nu_2 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = f_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T).$$

On sait que le champ des déplacements électriques D est donné par

$$\boldsymbol{D} = \mathcal{E}\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \beta\boldsymbol{E}(\varphi).$$

En faisant un changement de $\mathcal{E}$ et $\varepsilon(\boldsymbol{u})$ dans la relation précédente pour obtenir

$$D = \begin{pmatrix} e(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) \\ e(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

et par la suite

$$D = e\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_{,1} + u_{,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{,2} + u_{,2}) \\ 0 \end{pmatrix} - \beta\begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

et alors

$$D = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta\varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta\varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous passons maintenant à l'équation électrique

$$div\ \ D = q_0.$$

Cette dernière équation donne

$$D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3} - q_0 = 0$$

et donc l'équation électrique peut se mettre sous la forme

$$div(e\nabla u) - div(\beta\nabla\varphi) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T).$$

D'autre part on a

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0,T)$$

ceci est équivalent à l'écriture matricielle suivante

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta\varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta\varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

et ceci donne

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = eu_{,1}\nu_1 - \beta\varphi_{,1}\nu_{,1} + eu_{,2}\nu_2 - \beta\varphi_{,2}\nu_2 = e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2$$

et alors

$$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0,T).$$

En conclusion, en réunissant les équations et les conditions aux limites ci-dessus, nous obtenons que dans un processus antiplan d'un corps électro-viscoélastique, le champ des déplacements u et le déplacement électrique φ satisfont le problème suivant :

Problème. *Trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ *et le potentiel électrique* φ : $\Omega \times [0,T] \to I\!R$ *tel que*

$$div(\theta\nabla\dot{u} + \mu\nabla u) + div(\rho\nabla\varphi) + f_0 = 0 \quad \textit{dans} \ \ \Omega \times (0,T),$$

$$div(e\nabla u) - div(\beta\nabla\varphi) = q_0 \quad dans \quad \Omega \times (0,T),$$
$$u = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \times (0,T),$$
$$\varphi = 0 \quad sur \quad \Gamma_a \times (0,T),$$
$$\theta\partial_\nu \dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = f_2 \quad sur \quad \Gamma_2 \times (0,T),$$
$$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2 \quad sur \quad \Gamma_b \times (0,T).$$

Ce système sera complété dans la deuxième partie de cette thèse par les conditions aux limites de contact avec frottement.

2.2 Les espaces fonctionnels

Après ce bref rappel de mécanique des milieux continu, nous continuons par les espaces de type "Sobolev" associés aux opérateurs utilisés dans la partie II. Nous citons leurs propriétés principales pour cela nous considérons souvent $\Omega \subset I\!R^2$ un domaine Lipschitzien. Par ailleurs, nous considérons aussi une subdivision de la frontière Γ, c'est-à-dire Γ_1, Γ_2 et Γ_3 tels que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$ telle que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont mesurables et $mes\,\Gamma_1 > 0$. Pour les conditions électriques nous considérons une deuxième partition Γ_a et Γ_b telle que $mes\,\Gamma_b > 0$. On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ par:

(I.2.36) $$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,|\, \partial_i\, u \in L^2(\Omega), i = 1{,}2\}.$$

Par la suite l'espace $H^1(\Omega)$ est *un espace de Hilbert* muni par le produit scalaire

(I.2.37) $$< u\,, v >_{H^1(\Omega)} = < u\,, v >_{L^2(\Omega)} + < \partial_i\, u\,, \partial_i\, v >_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme

(I.2.38) $$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = < u\,, u >_{H^1(\Omega)}\ .$$

Soient V et W deux espaces fonctionnels définit par

(I.2.39) $$V = \{v \in H^1(\Omega) \,|\, v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

et

(I.2.40) $$W = \{\psi \in H^1(\Omega) \,|\, \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}.$$

L'égalité $v = 0$ sur Γ_1 respectivement $\psi = 0$ sur Γ_b est prise au sens des traces. Puisque l'opérateur trace est linéaire et continu, il est aisé de voir que l'espace V est un sous espace fermé de l'espace de

Sobolev $H^1(\Omega)$; et alors, V est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $< \cdot,\cdot >_{H^1(\Omega)}$ et la norme associée $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$. Il en est de même pour l'espace W.

Il est facile de remarquer que les deux espaces V et W sont *des espaces de Hilbert* muni par les produits scalaires suivants :

(I.2.41) $$< u\,, v >_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \qquad \forall \;\, u\,, v \,\in V,$$

et

(I.2.42) $$< \varphi\,, \psi >_W = \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \qquad \forall \;\, \varphi\,, \psi \in W.$$

Inégalité de Friedrichs-Poincaré

Théorème I.2.1. *Soit V un espace de Hilbert définit par (I.2.39) muni par le produit scalaire (II.1.41), où ∇ représente l'opérateur gradient, c'est-à-dire $\nabla u = (\partial_i u)$. Alors, il existe une constante $c(\Omega) > 0$ telle que*

(I.2.43) $$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega) \;\; \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^2} \qquad \forall \;\, v \,\in V.$$

Formule de Green

Théorème I.2.2. *Soit $\boldsymbol{\tau}$ un élément dans $H^1(\Omega)^2$. Alors*

(I.2.44) $$\int_\Omega \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla v \;\; dx + \int_\Omega div\tau \;\; v \;\; dx = \int_\Gamma \tau \cdot \boldsymbol{\nu} \;\; v \;\; da \qquad \forall \;\, v \,\in H^1(\Omega).$$

Pour étudier les problèmes antiplans piézoélectriques, il est utile de définir le produit sclaire et la norme sur l'espace produit X. Soit $X = V \times W$ l'espace produit de deux espaces V et W défini par

(I.2.45) $$X = \{x = (v\,, \psi) \;\text{ tel que }\; v \in V \;\text{ et }\; \psi \in W\,\}.$$

On définit le produit scalaire que l'on note $< \cdot,\cdot >_X$ et la norme associée notée par $\| \cdot \|_X$ comme suit

(I.2.46) $$< x,y >_X = < u,v >_V + < \varphi,\psi >_W \quad \forall \; (x,y) \in V \times W,$$

(I.2.47) $$\|x\|_X^2 = < x,x >_X^2 = (\|u\|_V^2 + \|v\|_W^2).$$

Nous remarquons que l'espace X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire (I.2.46).

2.3 Conditions aux limites avec frottement

Nous tournons maintenant vers la description des diverses conditions sur la surface de contact. Pour les d'écrires nous dénotons par u_ν et $\boldsymbol{u}_\tau$ la composante normale et la composante tangentielle du champ des déplacements $\boldsymbol{u}$ sur le bord sont données par

$$\text{(I.2.48)} \qquad \begin{cases} u_\nu = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{u} - u_\nu\boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

Nous tenons compte du contexte antiplan dans lequel

$$\text{(I.2.49)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{u} = (0,0,u(x_1,x_2,t)) \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x_1,x_2,t) : \Omega\times[0,T] \to I\!R, \end{cases}$$

$$\text{(I.2.50)} \qquad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,0)$$

ou $\boldsymbol{\nu}$ représente le vecteur unitaire normale sur $\Gamma\times(0,T)$. Par la suite nous déduisons que

$$\text{(I.2.51)} \qquad u_\nu = 0 \qquad \text{dans} \quad \Gamma_3\times(0,T)$$

et

$$\text{(I.2.52)} \qquad u_\nu = (0,0,u).$$

L'égalité $u_\nu = 0$ nous montre que le contact est bilatéral, c'est-à-dire il n'existe pas une séparation entre le corp et la fondation durant le procesus. Ensuite, nous rappelons que la composante normale σ_ν et la composante tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ du champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sont données par

$$\text{(I.2.53)} \qquad \begin{cases} \sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu\cdot\boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

Par conséquent, le champ des contraintes

$$\text{(I.2.54)} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

nous obtenons

$$\text{(I.2.55)} \qquad \begin{cases} \sigma_\nu = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

La première égalité dans (I.2.55) nous montre que la contrainte normale est nulle sur la région de contact durant le processus; alors, le vecteur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma\nu}$ sera réduit à la composante tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ et ceci d'aprés la deuxième égalité dans (I.2.55). En utilisant maintenant (I.2.55) pour voir que

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = (0{,}0{,}\mu\partial_\nu + e\partial_\nu\varphi), \tag{I.2.56}$$

dans le cas ou la loi constitutive est électro-élastique on a

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} \\ \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.2.57}$$

Par ailleurs, dans le cas ou la loi constitutive est électro-viscoélastique, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est le champ des déplacements électrique $\boldsymbol{D}$ sont donnés par

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \theta\dot{u}_{,1} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} \\ \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} & \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta\varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta\varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant (I.2.55) pour obtenir

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = (0{,}0{,}\theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi). \tag{I.2.58}$$

Avec ces préliminaires nous pouvons décrire les conditions principales sans frottement utilisées dans la partie II de ce mémoire. Tout d'abord, nous employons (I.2.49), (I.2.52) et (I.2.54) pour voir que la loi de Coulomb se réduit aux relations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} |\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi| \leq g, \\ \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = -g\dfrac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \qquad \text{si} \quad \dot{u} \neq 0 \end{cases} \tag{I.2.59}$$

dans le cas d'un matériel électro-viscoélastique on a

$$\begin{cases} |\theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi| \leq g, \\ \theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = -\, g\dfrac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \qquad \text{si} \quad \dot{u} \neq 0. \end{cases} \tag{I.2.60}$$

Nous rappelons que la fonction g dans (I.2.59) et (I.2.60) est appelée *seuil de frottement*, et elle peut dépendre des variables des processus. La cas ou

$$g = g(x) \tag{I.2.61}$$

correspond à la loi de frottement de Tresca non homogène (I.2.59); aussi, en employant (I.2.49) nous voyons que la loi de frottement (I.1.32) est caractérisée par l'égalité

$$g = g(\boldsymbol{x}, |u(\boldsymbol{x}, t)|) \tag{I.2.62}$$

et le taux de glissement de la loi de frottement (I.1.33) est caractérisée par
l'égalité

$$g = g(\boldsymbol{x}, |\dot{u}(\boldsymbol{x}, t)|). \tag{I.2.63}$$

Aprés, nous employons encore les égalités (I.2.53), (I.2.54) et (I.2.55) pour voir que, dans le contexte antiplan piézoélectrique, la loi régularisée (I.1.34) de frottement dans pour un matériel électro-élastique réduit aux relation scalaires suivantes

$$\mu \partial_\nu \ u + e \partial_\nu \varphi = -g \frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u^2} + \rho^2}} \tag{I.2.64}$$

dans le cas d'un matériel électro-viscoélastique ,

$$\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu \ u + \rho \partial_\nu \varphi = -g \frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u^2} + \rho^2}}. \tag{I.2.65}$$

En outre, la loi de frottement puissance (I.1.35) pour un matériel électro-élastique se réduit aux relation scalaires suivantes :

$$(\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi) = \begin{cases} 0 & \\ -g|\dot{u}|^{p-1}\dot{u} & \text{si} \quad u \neq 0 \end{cases} \tag{I.2.66}$$

dans le cas d'un matérial électro-viscoélastique on a

$$(\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu \ u + e \partial_\nu \varphi) = \begin{cases} 0 & \\ -g|\dot{u}|^{p-1}\dot{u} & \text{si} \quad u \neq 0. \end{cases} \tag{I.2.67}$$

Nous notons également que les conditions de frottement ci-dessus sont formulées dans le cas d'évolution. Le cas statique peut également être considéré en remplaçant la vitesse par le déplacement u dans les formules correspondantes. Pour donner quelques exemples, nous voyons que la version statique de (I.2.60) dans le cas élastique est donnée par

$$\text{(I.2.68)} \qquad \begin{cases} |\mu\partial_\nu\ u + e\partial_\nu\varphi| \leq\ g, & \\ \mu\partial_\nu\ u + e\partial_\nu\varphi\ =-\ g\dfrac{u}{|u|} & \text{si} \quad u \neq 0 \end{cases}$$

dans le cas d'un matérial électro-viscoélastique on a

$$\begin{cases} |\theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu\ u + e\partial_\nu\varphi| \leq\ g, & \\ \theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu\ u + e\partial_\nu\varphi\ =-\ g\dfrac{u}{|u|} & \text{si} \quad u \neq 0. \end{cases}$$

La version statique de (I.2.64) est donnée par

$$\text{(I.2.69)} \qquad \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = -g\frac{u}{\sqrt{u^2+\rho^2}},$$

et la version statique de (I.2.66) est donnée par

$$\text{(I.2.70)} \qquad (\mu\partial_\nu\ u\ + e\partial_\nu\varphi) = \begin{cases} 0 & \\ -g|u|^{p-1}u & \text{si} \quad u \neq 0. \end{cases}$$

Les égalités (I.2.68), (I.2.69) et (I.2.70) sont satisfaites sur Γ_3. Nous notons que la version statique des lois de frottement devrait être vue comme un modèle approché, valable dans le cas d'un processus de chargement monotone.

Nous introduisons ces lois de frottement cas par cas dans la seconde partie de cette thèse pour étudier les problèmes statiques et quasistatiques avec frottement de Tresca, ainsi que les problèmes statiques et quasistatiques avec frottement régularisés; dans lequel on remplaçe la loi de frottement de Tresca par ses versions régularisées.

Partie II : Analyse des modèles

Thèse de Doctorat de Mathématiques Appliquées,
Université "Mentouri" de Constantine, 2008

Deuxième partie

Analyse des modèles

Partie II

Analyse des modèles

Dans cette partie, nous présentons la formulation variationnelle des problèmes électro-élastiques et électro-viscoélastiques, qui sont traités cas par cas, suivant la loi de frottement. Puis, nous présentons des résultats d'existence et d'unicité de la solution. Cette partie est constituée de deux chapitres.

Le premier chapitre comporte six sections.

Dans la première section, on considère un problème statique avec frottement de Tresca. Nous présentons une formulation variationnelle du problème pour laquelle, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La seconde section est destinée à l'étude d'un problème statique avec frottement régularisé dans lequel on remplaçe la loi de frottement de Tresca par ses versions régularisées. La formulation variationnelle de ce problème peut être dérivée en utilisant les mêmes arguments et hypothèses utilisées dans la première section. Nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution et nous montrons que la suite des solutions faibles converge vers la solution du problème posé dans la première section, quand le paramètre de régularisation ρ tend vers zéro. Dans la troisième et la quatrième section, nous procédons de la même maniére que dans la première et deuxième section, et ce, pour le problème statique avec frottement de type puissance et le problème statique avec frottement et le problème statique avec frottement dépendant du glissement. Finalement, nous aboutissons à la cinqième et la sixième section du premier chapitre. Nous y étudions un problème quasistatique avec frottement de Tresca et en parallèle un problème quasistatique avec frottement régularisé. Nous présentons la formulation variationnelle du problème qui est un système couplé d'une inéquation variationnelle d'evolution pour le champ des déplacements avec une équation variationnelle dépendant du temps pour le potentiel électrique. Puis, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible pour ce modèle. *La rédaction de cette section s'inspire de l'article [43].*

Le second chapitre est composé de trois sections.

Dans la première section, on considère un problème électro-viscoélastique avec frottement de

Tresca. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème posé pour lequel nous présentons deux méthodes différentes qui nous permettent de démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Le seconde section est dédiée à l'étude d'un problème électro-viscoélastique avec frottement régularisé. Nous présentons aussi une formulation variationnelle de ce modèle qui est sous la forme d'un système couplé du premier ordre, consistant d'une inéquation variationelle d'evolution pour le champ des déplacements et d'une équation variationnelle dépendant du temps pour le potentiel électrique. Puis, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible pour ce modèle. La démonstration est basée sur les arguments des inéquations variationnelles d'evolution et de point fixe. *La rédaction de cette section s'inspire de l'article [44].*

CHAPITRE 1

PROBLÈMES ÉLECTRO-ÉLASTIQUES

Dans ce chapitre nous considérons des problèmes antiplans de contact avec frottement pour les matériaux électro-élastiques. Dans ce qui suit et partout dans ce chapitre nous utilisons l'espace V et W avec le produit scalaire scalaire $< \cdot,\cdot >_V$ et $< \cdot,\cdot >_W$ et la norme associée $\|\cdot\|_V$ et respectivement $\|\cdot\|_W$.

1.1 Problème statique avec frottement de Tresca

Nous considérons dans cette section le problème antiplan piézoélectrique avec frottement modélisé par la loi de " Tresca ". Le modèle classique de ce processus est le suivant :

Problème $(\mathbf{P_1^{I.V.T}})$**.** *Trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \to I\!R$ *et le potentiel électrique* $\varphi : \Omega \to I\!R$ *tel que*

$$div(\mu \nabla u) + div(e \nabla \varphi) + f_0 = 0 \quad dans \quad \Omega, \tag{II.1.1}$$

$$div(e \nabla u) - div(\beta \nabla \varphi) = q_0 \quad dans \quad \Omega, \tag{II.1.2}$$

$$u = 0 \quad sur \quad \Gamma_1, \tag{II.1.3}$$

$$\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = f_2 \quad sur \quad \Gamma_2, \tag{II.1.4}$$

$$\begin{cases} |\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi| \leq g, \\ \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = -g \dfrac{u}{|u|} \quad si \quad u \neq 0 \quad sur \quad \Gamma_3, \end{cases} \tag{II.1.5}$$

(II.1.6) $$\varphi = 0 \qquad sur \quad \Gamma_a,$$

(II.1.7) $$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2 \qquad sur \quad \Gamma_b.$$

Nous notons que (II.1.1) et (II.1.2) représentent les équations d'équilibre, (II.1.3) représente la condition aux limites pour le champ de déplacement, (II.1.4) représente la condition aux limites de traction, (II.1.5) représente la version statique de la loi de frottement de Tresca, (II.1.6) la condition aux limites pour le potentiel électrique et (II.1.7) représente la condition aux limites pour les charges électriques.

Nous passons maintenant à la construction de la formulation variationnelle du problème $(P_1^{I.V.T})$. A cet effet nous supposons dans ce qui suit que les forces volumiques de densité f_0 et les tractions surfaciques de densité f_2 ont la régularité

(II.1.8) $$f_0 \in L^2(\Omega) \quad et \quad f_2 \in L^2(\Gamma_2).$$

Nous supposons également que les coefficients de Lamé μ et le seuil de frottement g staisfaitent ce qui suit :

(II.1.9) $$\mu \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et il existe} \quad \mu^* > 0 \quad \text{tel que} \quad \mu(\boldsymbol{x}) \geq \mu^* \quad \text{p.p.} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

(II.1.10) $$g \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad g(x) \geq 0 \quad \text{p.p.} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_3.$$

Les densités des charges électriques satisfont :

(II.1.11) $$q_0 \in L^2(\Omega),$$

(II.1.12) $$q_2 \in L^2(\Gamma_b) \quad et \quad q_2 = 0 \ p.p. \ \boldsymbol{x} \in \Gamma_b.$$

Cette dernière condition résulte du fait que la base est un corp isolateur, donc aucune charge électrique ne traverse pas la surface de contact $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$.

Le coefficient de permitivité électrique et le coefficient piézoélectrique satisfont :

(II.1.13) $$\beta \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \beta^* > 0 \text{ tel que } \beta(\boldsymbol{x}) \geq \beta^* \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

(II.1.14) $$e \in L^\infty(\Omega).$$

Nous tournons maintenant vers la formulation variationnelle du problème $(P_1^{I.V.T})$, et pour cela nous introduisons l'espace $X = V \times \ W$ défini par (I.2.45) où V et W sont définis par (I.2.39) et respectivement (I.2.40). Nous supposons que le problème antiplan de contact piézoélectrique ($P_1^{I.V.T}$) admet une solution (u,φ) régulière, et soit $(v,\psi) \in X$. Nous multiplions l'équation (II.1.1) par l'élement $(v-u) \in V$, de même pour l'équation (II.1.2) par l'élement $\psi \in W$ puis nous intégrons sur Ω et nous tenons compte de la formule de Green (I.2.44); nous avons alors pour tout $v \in V$ et pour tout $\psi \in W$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mu\nabla u\nabla(v-u)dx + \int_\Omega e\nabla\varphi\nabla(v-u)dx = \\ &\int_\Omega f_0(v-u)dx + \int_\Gamma (\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)(v-u)da,\end{aligned} \tag{II.1.15}$$

$$\int_\Omega \beta\nabla\varphi\nabla\psi dx - \int_\Omega e\nabla u\nabla\psi dx = \int_\Gamma (e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi)\psi da - \int_\Omega q_0\psi dx. \tag{II.1.16}$$

D'après la loi de frottement (II.1.5) nous pouvons remarquer que

$$-(\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)u = g|u| \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3,$$

et donc, en tenant compte du fait que

$$xy \geq -|x||y|$$

nous avons

$$(\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)(v-u) \geq g|u| - g|v| \qquad \text{sur} \quad \Gamma_3.$$

Par intégration sur la frontière Γ_3 nous obtenons

$$\int_{\Gamma_3} (\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)(v-u)da \geq \int_{\Gamma_3} (g|u| - g|v|)da. \tag{II.1.17}$$

De plus il est facile de remarquer que $\int_\Gamma (\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)(v-u)da$ peut se diviser en trois intégrales; sur la forntière Γ_1 l'intégrale précédente vaut zéro car $v = 0$ et $u = 0$; sur la frontière Γ_2 l'intégrale ci-dessus vaut $\int_{\Gamma_3} f_2(v-u)da$ et ceci d'après la condition (II.1.4); et sur Γ_3, l'intégrale est majorée par la valeur $\int_{\Gamma_3}(g|u| - g|v|)da$ d'après la condition (II.1.17). Par conséquent, en utilisant (II.1.15) on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mu\nabla u\nabla(v-u)dx + \int_\Omega e\nabla\varphi\nabla(v-u)dx + \int_{\Gamma_3} g|v|da - \int_{\Gamma_3} g|u|da \geq \\ &\qquad\qquad \int_\Omega f_0(v-u)dx + \int_{\Gamma_2} f_2(v-u)da.\end{aligned} \tag{II.1.18}$$

D'autre part, l'intégrale sur Γ dans le second membre de la relation (II.1.16) peut subdiviser en deux parties; sur Γ_a elle vaut zéro car $u \in V$ et $\psi \in W$; par contre sur la forntière Γ_b cette intégrale vaut $\int_{\Gamma_b} q_2\psi da$ et ceci d'après (II.1.7); en conclusion

$$\int_\Gamma (e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi)\psi da = \int_{\Gamma_b} q_2\psi da.$$

De la même manière on procède pour l'égalité (II.1.16), c'est-à-dire, on combine la dernière égalité avec (II.1.16) pour obtenir

(II.1.19) $$\int_\Omega \beta\nabla\varphi\nabla\psi dx - \int_\Omega e\nabla u\nabla\psi dx = \int_{\Gamma_b} q_2\psi da - \int_\Omega q_0\psi dx.$$

Pour tout $u,v \in H^1(\Omega)$, nous définissons les formes bilinéaires suivantes

(II.1.20) $$\begin{cases} a_\mu(u,v) = \int_\Omega \mu\nabla u\nabla v dx, \\ a_e(u,v) = \int_\Omega e\nabla u\nabla v dx, \\ a_\beta(u,v) = \int_\Omega \beta\nabla u\nabla v dx. \end{cases}$$

Donc, en général, nous définissons la forme bilinéaire $a_z(\cdot,\cdot)$ par

(II.1.21) $$a_z(u,v) = \int_\Omega z\nabla u\nabla v dx \quad \forall z \in L^\infty(\Omega); \quad u,v \in H^1(\Omega).$$

Soit la fonctionnelle $j(\cdot) : V \to I\!R$ définie par

(II.1.22) $$j(v) = \int_{\Gamma_3} g|v|da \qquad \forall v \in V.$$

D'après l'hypothèse (II.1.10) il est facile de voir que les intégrales dans (II.1.21)-(II.1.22) sont bien définies. Par la suite, nous utilisons (II.1.8) et le Théorème de représentation de Riesz (III.1.1); on peut alors définir un élément $f \in V$ par l'égalité

(II.1.23) $$< f,v >_V = \int_{\Gamma_2} f_2 v da + \int_\Omega f_0 v dx \qquad \forall v \in V.$$

De la même façon, d'après (II.1.11)-(II.1.12) et le Théorème de représentation de Riesz (III.1.1), on peut définir un élément $q \in W$ par l'égalité

(II.1.24) $$< q,\psi >_W = \int_{\Gamma_b} q_2\psi da - \int_\Omega q_0\psi dx \qquad \forall \psi \in W.$$

Avec les relations (II.2.20)-(II.1.24) dans (II.1.18)-(II.1.19) il suit que la formulation variationnelle du problème antiplan de contact piézoélectrique ($P_1^{I.V.T}$), que l'on note problème ($P_V^{I.V.T}$), est la suivante :

Problème ($\mathbf{P_V^{I.V.T}}$). *Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \to I\!R$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \to I\!R$ tel que*

(II.1.25) $$a_\mu(u,v-u) + a_e(\varphi,v-u) + j(v) - j(u) \;\geq\; < f,v-u >_V \quad \forall v \in V,$$

(II.1.26) $$a_\beta(\varphi,\psi) - a_e(u,\psi) = < q,\psi >_W \quad \forall \psi \in W.$$

Soient maintenant la forme bilinénaire $a(\cdot,\cdot) : X \times X \to I\!R$, la fonctionnelle $J(\cdot) : X \to I\!R$ et l'élément F définies par

(II.1.27) $$a(x,y) = a_\mu(u,v) + a_\beta(\varphi,\psi) - a_e(u,\psi) + a_e(\varphi,v)$$

$$\forall x = (u,\varphi) \in X, \quad \forall y = (v,\psi) \in X,$$

(II.1.28) $$J(x) = j(u) \quad \forall x = (u,\varphi) \in X,$$

(II.1.29) $$F = (f,q) \in X.$$

On utilise maintenant les notations (II.1.27)-(II.1.29) dans le problème électro-élastique avec frottement $(P_V^{I.V.T})$ pour construire le problème suivant :

Problème $(\mathbf{P_{VG}^{I.V.T}})$. *Trouver $x \in X$ tel que*

(II.1.30) $$a(x,y-x) + J(y) - J(x) \;\geq\; < F,y-x >_X \qquad \forall y \in X.$$

Le rapport entre les problèmes $(P_{VG}^{I.V.T})$ et $(P_V^{I.V.T})$ est donné par le résultat suivant :

Théorème II.1.1. *Le problème $(P_{VG}^{I.V.T})$ est équivalent au problème $(P_V^{I.V.T})$.*

Démonstration.

• Montrons que le problème $(P_V^{I.V.T})$ implique le problème $(P_{VG}^{I.V.T})$:

Nous supposons que (u,φ) est solution du problème $(P_V^{I.V.T})$. Nous remplaçons dans (II.1.26) l'élément ψ par l'élément $(\psi - \varphi)$ et nous faisons la somme avec (II.1.25) nous obtenons comme résultat

$$\begin{aligned} a_\mu(u,v-u) + a_e(\varphi,v-u) + a_\beta(\varphi,\psi-\varphi) - a_e(u,\psi-\varphi) + \\ +j(v) - j(u) \;\geq\; < f,v-u >_V + < q,\psi-\varphi >_W . \end{aligned}$$

En utilisant maintenant les notations précédentes on obtient, pour tout $\psi \in W$ et $y \in X$,

$$a(x,y-x) + J(y) - J(x) \;\geq\; < F,y-x >_X .$$

Donc, il résulte que $(P_V^{I.V.T})$ implique $(P_{VG}^{I.V.T})$.

• Montrons par la suite que le problème $(P_{VG}^{I.V.T})$ implique le problème $(P_V^{I.V.T})$.

Nous supposons que $x = (u,\varphi)$ est solution de (II.1.30) et en même temps nous remplaçons $a(.,.)$ par (II.1.27), $< F,y-x >_X$ par (II.1.29) et la fonctionnelle $J(.)$ par (II.1.28); nous obtenons pour tout $(v,\psi) \in X$

$$\begin{aligned} & a_\mu(u,v-u) + a_e(\varphi,\psi-\varphi) + a_\beta(u,\psi-\varphi) + \\ & +j(v) - j(u) \;\; \geq \;\; < f,v-u >_V + < q,\psi-\varphi >_W \;. \end{aligned}$$

Nous testons dans l'inégalité précédente avec $\psi = \varphi$ pour obtenir (II.1.25). Puis, nous prenons $v = u$ dans la même inégalité pour obtenir $\psi - \varphi = \varphi \pm \psi - \varphi = \pm\psi$ nous obtenons pour tout $\psi \in W$

$$a_\beta(\varphi, \pm\,\psi) - a_e(u, \pm\,\psi) \;\; \geq \;\; (q, \pm\,\psi),$$

ce qui donne (II.1.26). Il en résulte que le problème $(P_{VG}^{I.V.T})$ implique le problème $(P_V^{I.V.T})$, ce qui achève la démonstration. □

Théorème II.1.2. *Supposons que les hypothèses (II.1.8)-(II.1.14) sont satisfaites. Alors le problème $(P_{VG}^{I.V.T})$ possède une et seule solution $x = (u,\varphi) \in X$.*

Démonstration. En tenant compte de (II.2.91) nous obtenons que la forme bilinéaire $a(.,.)$ définie par (II.1.27) satisfait :

$$|a(x,y)| \leq (\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)} + 2\|e\|_{L^\infty((\Omega))})\|x\|_X \cdot \|y\|_X \quad \forall x,y \in X,$$

c'est-à-dire elle est continue. Il suit que $a(.,.)$ est elliptique car

$$a(x,x) \geq \mu^*\|u\|_V^2 + \beta^*\|\varphi\|_W^2 \quad \forall x \in X,$$

ce qui donne

$$a(x,x) \geq min(\mu^*,\beta^*)(\|u\|_V^2 + \|\varphi\|_W^2) \quad \forall x \in X,$$

et alors

$$a(x,x) \geq min(\mu^*,\beta^*)\|x\|_X^2 \quad \forall x \in X.$$

En conclusion

$$\text{(II.1.31)} \qquad \begin{cases} |a(x,y)| \leq (\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)} + 2\|e\|_{L^\infty((\Omega))})\|x\|_X \cdot \|y\|_X \quad \forall x,y \in X, \\ a(x,x) \geq min(\mu^*,\beta^*)\|x\|_X^2 \quad \forall x \in X. \end{cases}$$

Nous utilisons l'hypothèse (II.1.10) pour obtenir

$$\text{(II.1.32)} \qquad J(x) = j(u) \leq c\|u\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\|u\|_V \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

ou $c > 0$ dépend de g; il en résulte que la fonctionnelle J définie par (II.1.28) est une semi-norme continue sur X, ce qui implique qu'elle est convexe et semi-continue inférieurement et, en utilisant le Théorème (III.1.21) il résulte que le problème $(P_{VG}^{I.V.T})$ possède une solution unique $x = (u,\varphi) \in X$. En couplant les Théorèmes (II.1.1) et (II.1.2), il résulte que le problème $(P_V^{I.V.T})$ possède une solution unique $(u,\varphi) \in X$. Cette solution peut-être interprété comme solution faible du problème de contact électro-élastique $(P_1^{I.V.T})$. □

1.2 Problème statique avec frottement régularisé

Nous étudions maintenant le problème dans le cas ou la loi de frottement de Tresca définie par (II.1.5) sera remplacée par ses versions régularisées. Nous commençons l'étude en considérant le problème suivant :

Problème ($\mathbf{P_{2,\rho}^{I.V.R}}$). *Trouver le champ des déplacements $u_\rho : \Omega \to I\!R$ et le potentiel électrique $\varphi_\rho : \Omega \to I\!R$ tel que*

$$div(\mu \nabla u_\rho) + div(e \nabla \varphi_\rho) + f_0 = 0 \quad dans \quad \Omega, \tag{II.1.33}$$

$$div(e \nabla u_\rho) - div(\beta \nabla \varphi_\rho) = q_0 \quad dans \quad \Omega, \tag{II.1.34}$$

$$u_\rho = 0 \quad sur \quad \Gamma_1, \tag{II.1.35}$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = f_2 \quad sur \quad \Gamma_2, \tag{II.1.36}$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = -g \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + \rho^2}} \quad sur \quad \Gamma_3, \tag{II.1.37}$$

$$\varphi_\rho = 0 \quad sur \quad \Gamma_a, \tag{II.1.38}$$

$$e \partial_\nu u_\rho - \beta \partial_\nu \varphi_\rho = q_2 \quad sur \quad \Gamma_b\,. \tag{II.1.39}$$

Les équations et les conditions aux limites utilisées dans le problème électrostatique avec frottement $(P_{2,\rho}^{I.V.R})$ ont les mêmes formes que celles utilisées dans le problème $(P_1^{I.V.T})$. La seule différence résulte ici le fait que la loi de frottement de Tresca définie par (II.1.5) est remplaçée par une version régularisée (II.1.37) ou ρ est un paramètre de régularisation.

Nous notons ici que u_ρ et φ_ρ sont les deux inconnues souhaitées à chercher. La formulation variationnelle du problème antiplan de contact piézoélectrique $(P_{2,\rho}^{I.V.R})$ peut être dérivée en utilisant les mêmes arguments et les hypothèses utilisées pour dériver la formulation variationnelle du problème $(P_1^{I.V.T})$; plus précisement, nous avons pour tout $(v,\psi) \in X$,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mu \nabla u_\rho \nabla (v - u_\rho) dx + \int_\Omega e \nabla \varphi_\rho \nabla (v - u_\rho) dx = \\ &\int_\Omega f_0 (v - u_\rho) dx + \int_\Gamma (\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho)(v - u_\rho) da,\end{aligned} \tag{II.1.40}$$

et

$$\int_\Omega \beta\nabla\varphi_\rho\nabla\psi dx - \int_\Omega e\nabla u_\rho\nabla\psi dx = \int_\Gamma (e\partial_\nu u_\rho - \beta\partial_\nu\varphi_\rho)\psi da - \int_\Omega q_0\psi dx. \tag{II.1.41}$$

Calculons tout d'abord la dernière intégrale du second membre de (II.1.40). Pour ce fait nous partageons cette dernière sur trois parties; sur Γ_1 l'intégrale vaut zéro car $v \in V$ de même pour $u_\rho \in V$; sur la frontière Γ_2 l'intégrale vaut $\int_{\Gamma_2} f_2(v-u_\rho)da$; et sur la dernière fontière Γ_3 l'intégrale sera estimée par la manière suivante :

Il est facile de voir que

$$(u_\rho - v)^2 = u_\rho^2 + v^2 - 2u_\rho v \geq 0 \qquad \textit{pour tout} \quad u_\rho, v \in V,$$

ce qui donne

$$(u_\rho^2 + v^2) \geq 2u_\rho v^2.$$

Nous rajoutons $(\rho^4 + u_\rho^2 v^2)$ au deux côtés de l'inégalité précédente nous avons alors

$$(\rho^2 + u_\rho^2).(\rho^2 + v^2) \geq (\rho^2 + u_\rho v)^2, \tag{II.1.42}$$

et donc

$$u_\rho v \leq \sqrt{\rho^2 + v^2}.\sqrt{\rho^2 + u_\rho^2} - \rho^2.$$

Nous rajoutons le terme u_ρ^2 au deux côtés de l'inégalité ci-dessus et nous multiplions par $-g$ nous obtenons

$$-g.u_\rho(v - u_\rho) \geq g(\rho^2 + u_\rho^2) - g\sqrt{\rho^2 + v^2}.\sqrt{\rho^2 + u_\rho^2}. \tag{II.1.43}$$

Nous divisons les deux côtés de cette dernière par $\sqrt{\rho^2 + u_\rho^2}$ et donc

$$-g\frac{u_\rho}{\sqrt{\rho^2 + u_\rho^2}}(v - u_\rho) \geq g\sqrt{\rho^2 + u_\rho^2} - g\sqrt{\rho^2 + v^2}. \tag{II.1.44}$$

Le terme à gauche de l'inégalité précédente n'est que la "loi de frottement" définie par (II.1.37) et par la suite l'intégrale sur la frontière Γ_3 devient

$$\int_{\Gamma_3} (\mu\partial_\nu u_\rho + e\partial_\nu\varphi)(v - u_\rho)da \geq \int_{\Gamma_3} g\sqrt{\rho^2 + u_\rho^2}da - \int_{\Gamma_3} g\sqrt{\rho^2 + v^2}da. \tag{II.1.45}$$

Posons

$$j_\rho(v) = \int_{\Gamma_3} g(\sqrt{\rho^2 + v^2} - \rho^2)da \quad \forall v \in V. \tag{II.1.46}$$

Nous remplaçons (II.1.46) dans (II.1.40) nous obtenons pour tout $v \in V$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mu\nabla u_\rho\nabla(v - u_\rho)dx + \int_\Omega e\nabla\varphi\nabla(v - u_\rho)dx + \\ &+ j_\rho(u_\rho) - j_\rho(v) \geq \int_\Omega f_0(v - u_\rho)dx + \int_{\Gamma_2} f_2 v da. \end{aligned} \tag{II.1.47}$$

Nous revenons à l'équation (II.1.41) pour calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\Gamma}(e\partial_\nu u_\rho - \beta\partial_\nu\varphi)\psi da.$$

On procède de la même façon, c'est-à-dire, on subdivise l'intégrale en deux parties; sur la frontière Γ_a l'intégrale vaut zéro d'après la condition (II.1.38) et sur la fontière Γ_b l'intégrale vaut q_2 d'après la condition (II.1.39), par conclusion l'égalité (II.1.41) prend la forme

$$\int_{\Omega}\beta\nabla\varphi_\rho\nabla\psi dx - \int_{\Omega}e\nabla u_\rho\nabla\psi dx = \int_{\Gamma_b}q_2\psi da - \int_{\Omega}q_0\psi dx \quad \forall\psi \in W. \tag{II.1.48}$$

Nous utilisons les relations dans (II.2.20) dans les relations (II.1.47) et (II.1.48) pour obtenir le problème suivant :

Problème $(\mathbf{P}^{\mathbf{I.V.R}}_{\mathbf{V},\rho})$. *Trouver $(u_\rho,\varphi_\rho) \in X$ tel que*

$$a_\mu(u_\rho,v-u_\rho) + a_e(\varphi_\rho,v-u_\rho) + j(v) - j(u_\rho) \;\geq\; < f,v-u_\rho >_V \quad \forall v \in V, \tag{II.1.49}$$

$$a_\beta(\varphi_\rho,\psi) - a_e(u_\rho,\psi) = < q,\psi >_W \quad \forall\psi \in W. \tag{II.1.50}$$

Soit maintenant la fonctionnelle $J_\rho : X \longrightarrow I\!R$ définie par

$$J_\rho(x) = j_\rho(u) \quad \forall x = (u,\varphi) \in X.$$

Nous utilisons les relations (II.1.27)-(II.1.29) dans (II.1.49)-(II.1.50) pour obtenir le problème suivant :

Problème $(\mathbf{P}^{\mathbf{I.V.R}}_{\mathbf{VG},\rho})$. *Trouver $x_\rho \in X$ tel que*

$$a(x_\rho,y-x_\rho) + J_\rho(y) - J_\rho(x_\rho) \;\geq\; < F,y-x_\rho >_X \qquad \forall y \in X. \tag{II.1.51}$$

Nour étudions par la suite l'existence et l'unicité de la solution du problème $(P^{I.V.R}_{VG,\rho})$ et, nous établissons un résultat de convergence.

Théorème II.1.3. *Supposons que (II.1.8)-(II.1.14) sont satisfaites. Alors pour tout $\rho > 0$, le problème $(P^{I.V.R}_{VG,\rho})$ admet une et seule solution $x_\rho = (u_\rho,\varphi_\rho) \in X$. De plus, la suite $(x_\rho)_{\rho>0} = (u_\rho,\varphi_\rho)_{\rho>0}$ converge vers la solution $x = (u,\varphi)$ du problème $(P^{I.V.T}_{VG})$ lorsque ρ tendre vers 0.*

Pour démontrer le Théorème (II.1.3) nous avons besoin du Lemme suivant.

Lemme II.1.4. *Supposons que (II.1.10) est satisfaite. Alors:*

(1) Pour tout $\rho > 0$, la fonctionnelle J_ρ définie par (II.1.28) et (II.1.46) est convexe et Gâteaux différentiable.

(2) Pour tout $\rho > 0$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$J_\rho(y_\rho) - J_\rho(y) = \rho \int_{\Gamma_3} g da. \tag{II.1.52}$$

Démonstration.

(1) Soit $\rho > 0$ et notons que, $J_\rho(.)$ est une fonctionnelle convexe. De plus, pour tout $x = (u,\varphi) \in X$ et $y = (v,\psi) \in X$ et soit $t \neq 0$ et tenons compte de (II.1.28) on a, pour tout $x,y \in X$

$$\frac{J_\rho(x_\rho + ty) - j_\rho(x_\rho)}{t} = \frac{j_\rho(u_\rho + tv) - j_\rho(u_\rho)}{t} = \int_{\Gamma_3} g \frac{\sqrt{(u+tv)^2 + \rho^2} - \sqrt{u^2 + \rho^2}}{t} da$$

Nous notons que lorsque $t \longrightarrow 0$, la convergence suivante est satisfaite:

$$g \frac{\sqrt{(u+tv)^2 + \rho^2} - \sqrt{u^2 + \rho^2}}{t} \longrightarrow g \frac{uv}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} \quad p.p. \ sur \quad \Gamma_3$$

et donc

$$|g \frac{\sqrt{(u+tv)^2 + \rho^2} - \sqrt{u^2 + \rho^2}}{t}| \leq |g \frac{(u+tv)^2 - u^2}{\sqrt{(u+tv)^2 + \rho^2} + \sqrt{u^2 + \rho^2}}|$$

Pour t suffisamment petit on obtient:

$$|g \frac{\sqrt{(u+tv)^2 + \rho^2} - \sqrt{u^2 + \rho^2}}{t}| \leq \frac{1}{2\rho} \|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (2\|u\|_X \|v\|_X + \|v\|_X^2).$$

On sait que $\|u\|_X \leq \|x\|_X$ et $\|v\|_X \leq \|y\|_X$ et alors on obtient

$$|g \frac{\sqrt{(u+tv)^2 + \rho^2} - \sqrt{u^2 + \rho^2}}{t}| \leq \frac{1}{2\rho} \|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (2\|x\|_X \|y\|_X + \|y\|_X^2).$$

Donc en utilisant le Théorème de Lebesgue nous déduisons que:

$$\frac{J_\rho(x_\rho + ty) - j_\rho(x_\rho)}{t} = \frac{j_\rho(u_\rho + tv) - j_\rho(u_\rho)}{t} = \int_{\Gamma_3} g \frac{uv}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} da \tag{II.1.53}$$

$$p.p. \ sur \quad \Gamma_3.$$

Considérons la fonctionnelle

$$v \longmapsto \int_{\Gamma_3} g \frac{uv}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} da \quad pour \ tout \quad v \in V.$$

Il est claire que cette dernière application est linéaire sur V, et de (II.1.6) et la définition (III.1.11) nous déduisons que $j_\rho(.)$ est Gâteaux différentiable; nous tenons compte de (II.1.28) et nous concluons que la fonctionnelle $J_\rho(.)$ est Gâteaux différentiable et, de plus, on a

$$(\nabla j_\rho(u), v)_V = \int_{\Gamma_3} g \frac{uv}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} da \quad \forall u,v \in V,$$

et alors

$$(\nabla J_\rho(x),y)_X = (\nabla j_\rho(u),v)_V \quad \forall x = (u,\varphi) \in X, y = (v,\psi) \in X.$$

Il suit de cette égalité que

$$(\nabla J_\rho(x),y)_X \leq \int_{\Gamma_3} g \frac{|u|.|v|}{\sqrt{u^2+\rho^2}} da,$$

Par la suite on obtient:

$$(\nabla J_\rho(x),y)_X \leq \int_{\Gamma_3} g|v| da \leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|v\|_{L^2(\Gamma_3)}.$$

Nous tenons compte de (II.1.32) on obtient:

$$(\nabla J_\rho(x),y)_X \leq c_0 \|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|y\|_X \quad \forall x,y \in X.$$

Nous prenons $y = \nabla J_\rho(x)$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\|\nabla J_\rho(x)\|_X \leq c_0 \|g\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad \forall x \in X.$$

Ce qui conclue la démonstration de la première partie du Lemme (II.1.4).

(2) Nous notons pour tout $y = (v,\psi) \in X$ l'inégalité suivante est vérifiée:

$$|\sqrt{(v^2+\rho^2)} - \rho - |v|| = \rho + |v| - \sqrt{(v^2+\rho^2)} \leq \rho \quad p.p. \ sur \quad \Gamma_3,$$

ce qui implique

$$\int_{\Gamma_3} |\sqrt{(v^2+\rho^2)} - \rho - |v|| da \leq \int_{\Gamma_3} \rho g da. \tag{II.1.54}$$

D'un autre côté, en utilisant la définition de $j_\rho(.)$ et $j(.)$ nous obtenons :

$$|j_\rho(v) - j(v)| \leq \int_{\Gamma_3} |\sqrt{(v^2+\rho^2)} - \rho - |v|| da. \tag{II.1.55}$$

Nous tenons compte de (II.1.28) et (II.1.59) on obtient :

$$|j_\rho(v) - j(v)| \leq \int_{\Gamma_3} \rho g da. \tag{II.1.56}$$

Alors l'inégalité (II.1.52) est satisfaite. □

Nous prouvons maintenant le Théorème (II.1.3).

Démonstration. L'unique solvabilité du problème $(P^{I.V.R}_{VG,\rho})$ suit du Théorème (III.1.3). En effet, en tenant compte du Lemme (III.1.14), il suit que la fonctionnelle J_ρ définie par (II.1.28) et (II.1.46) est convexe et s.c.i. Egalement, nous déduisons de (II.1.52) et (II.1.57) que les fonctionnelles J_ρ et j satisfaitent la condition (III.1.36) sur V avec le choix:

$$F(\rho) = \rho \int_{\Gamma_3} g da \geq 0.$$

Alors, la convergence de la suite $(x_\rho)_{\rho>0}$ vers l'élement x est une équivalence du Théorème (III.1.22), ce qui conclue la démonstration. □

Nous concluons d'après le Théorème (II.1.3) et (II.1.4) que le problème $(P_2^{I.V.R})$ admet une solution unique faible, qui converge vers la solution faible du problème $(P_1^{I.V.T})$ quand $\rho \longrightarrow 0$.

1.3 Problème statique avec loi de frottement de type puissance

Nous présentons dans ce paragraphe un problème similaire à $(P_1^{I.V.T})$, la seule différence du fait qu'ici, nous remplaçons la version de frottement de type (II.1.5) de Tresca par la loi de frottement dite de type "puissance" qui est sous la forme

$$(\mu\partial_\nu u_\rho + e\partial_\nu\varphi_\rho) = \begin{cases} 0 \\ -g|u_\rho|^{p-1}u_\rho \;\; si \;\;\; u_\rho \neq 0. \end{cases}$$

Par conséquent, le problème que nous considérons ici est le suivant :

Problème $(\mathbf{P_{3,\rho}^{I.V.P}})$. *Trouver le champ des déplacements* $u_\rho : \Omega \to I\!R$ *et le potentiel électrique* $\varphi_\rho : \Omega \to I\!R$ *tel que*

$$div(\mu\nabla u_\rho) + div(e\nabla\varphi_\rho) + f_0 = 0 \quad dans \quad \Omega, \tag{II.1.57}$$

$$div(e\nabla u_\rho) - div(\beta\nabla\varphi_\rho) = q_0 \quad dans \quad \Omega, \tag{II.1.58}$$

$$u_\rho = 0 \quad sur \quad \Gamma_1, \tag{II.1.59}$$

$$\mu\partial_\nu u_\rho + e\partial_\nu\varphi_\rho = f_2 \quad sur \quad \Gamma_2, \tag{II.1.60}$$

$$(\mu\partial_\nu u_\rho + e\partial_\nu\varphi_\rho) = \begin{cases} 0 \\ -g|u_\rho|^{p-1}u_\rho \quad si \quad u_\rho \neq 0 \quad sur \quad \Gamma_3, \end{cases} \tag{II.1.61}$$

$$\varphi_\rho = 0 \quad sur \quad \Gamma_a, \tag{II.1.62}$$

$$e\partial_\nu u_\rho - \beta\partial_\nu\varphi_\rho = q_2 \quad sur \quad \Gamma_b\,. \tag{II.1.63}$$

Nous commençons cette étude par la recherche d'une formulation variationnelle asociée au problème $(P_{3,\rho}^{I.V.P})$. Pour cela nous conservons les mêmes arguments et les mêmes notations utilisées dans l'étude du problème $(P_1^{I.V.T})$; nous obtenons alors pour tout $v \in V$ et pour tout $\psi \in W$ on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mu\nabla u_\rho \nabla(v-u_\rho)dx + \int_\Omega e\nabla\varphi_\rho\nabla(v-u_\rho)dx = \\ &\int_\Omega f_0(v-u_\rho)dx + \int_\Gamma(\mu\partial_\nu u_\rho + e\partial_\nu\varphi_\rho)(v-u_\rho)da, \end{aligned} \tag{II.1.64}$$

(II.1.65) $$a_\beta(\varphi_\rho,\psi) - a_e(u_\rho,\psi) =< q,\psi >_W \ .$$

Nous calculons l'intégrale $\int_{\Gamma_3}(\mu\partial_\nu\ u_\rho\ + e\partial_\nu\varphi_\rho)(v - u_\rho)da$ sur la frontière Γ_3 par la manière suivante.

(II.1.66) $$|u_\rho|^{\rho-1}u_\rho(v-u_\rho) \leq |u_\rho|^\rho.|v| - |u_\rho|^{\rho+1} \quad \forall \rho > 0.$$

Posons $a = |v|$ et $b = |u_\rho|$ dans (II.1.66) pour obtenir

(II.1.67) $$|u_\rho|^{\rho+1}u_\rho(v-u_\rho) \leq \frac{|v|^{\rho+1}}{\rho+1} - \frac{|u_\rho|^{\rho+1}}{\rho+1}.$$

Nous multiplions les deux côtés de l'inégalité précédente par $-g$ et nous tenons compte de la loi de frottement (II.1.61) et par intégration sur la frontière Γ_3 nous avons

(II.1.68) $$\int_{\Gamma_3}(\mu\partial_\nu u_\rho + e\partial_\nu\varphi)(v-u_\rho)da \geq \int_{\Gamma_3} g\frac{|u_\rho|^{\rho+1}}{\rho+1}da - \int_{\Gamma_3} g\frac{|v|^{\rho+1}}{\rho+1}da.$$

Soit la fonctionnelle $j_\rho(.) : V \to I\!R$ définie par

(II.1.69) $$j_\rho(v) = \frac{1}{\rho+1}\int_{\Gamma_3} g|v|^{\rho+1}da \quad \forall v \in V.$$

Nous remplaçons maintenant (II.1.69) dans (II.1.64) nous obtenons le problème antiplan de contact piézoélectrique suivant

Problème ($\mathbf{P^{I.V.P}_{V,\rho}}$). *Trouver* $(u_\rho,\varphi_\rho) \in X$ *tel que*

(II.1.70) $$a_\mu(u_\rho,v-u_\rho) + a_e(\varphi_\rho,v-u_\rho) + j_\rho(v) - j_\rho(u_\rho) \ \geq \ < f,v-u_\rho >_V \quad \forall v \in V,$$

(II.1.71) $$a_\beta(\varphi_\rho,\psi) - a_e(u_\rho,\psi) =< q,\psi >_W \quad \forall \psi \in W.$$

Il es facile de remarquer que le problème ($\mathbf{P^{I.V.P}_{V,\rho}}$) est équivalant au probème ($\mathbf{P^{I.V.P}_{VG,\rho}}$) défini ci-dessus. Nous remplaçons les relations (II.1.27)-(II.1.29) dans (II.1.70)-(II.1.71) nous obtenons le problème antiplan de contact piézoélectrique suivant

Problème ($\mathbf{P^{I.V.P}_{VG,\rho}}$). *Trouver* $x_\rho = (u_\rho,\varphi_\rho) \in X$ *tel que*

(II.1.72) $$a(x_\rho,y-x_\rho) + J_\rho(y) - J_\rho(x_\rho) \ \geq \ < F,y-x_\rho >_X \qquad \forall y \in X.$$

On a les résultats de convergences suivants:

Théorème II.1.5. *Supposons que (II.1.8)-(II.1.14) sont vérifiées. Alors pour tout* $\rho \in]0,1]$ *le problème* $(P^{I.V.P}_{VG,\rho})$ *admet une et seule solution* $x_\rho = (u_\rho,\varphi_\rho) \in X$. *De plus la suite* $(x_\rho)_{\rho>0} = (u_\rho,\varphi_\rho)_{\rho>0}$ *converge vers la solution* $x = (u,\phi)$ *du problème* $(P^{I.V.T}_{VG})$, *c'est-à-dire*

(II.1.73) $$x_\rho = (u_\rho,\varphi_\rho) \rightharpoonup x = (u,\varphi) \quad \textit{dans } X \quad \textit{quand} \quad \rho \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho \in (0,1]$ et, soit $\phi_\rho : I\!R \longrightarrow I\!R$ une fonction définie par

$$\phi_\rho(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = 0 \\ |v|^{\rho-1}v & \text{si } v \neq 0. \end{cases}$$

Nous utilisons le Théorème de convergence de Lebesgue pour voir que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{j_\rho(x_\rho + ty) - j_\rho(x_\rho)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{j_\rho(u_\rho + tv) - j_\rho(u_\rho)}{t} = \int_{\Gamma_3} g\phi_\rho(u)v da \quad \forall u,v \in V,$$

et alors, puisque l'application

$$v \longmapsto \int_{\Gamma_3} g\phi_\rho(u)v da$$

est linéaire et continue sur V, nous déduisons que j_ρ est Gâteaux différentiable et donc, J_ρ l'est aussi. De plus, on a

$$(\nabla J_\rho(x),y)_X = (\nabla j_\rho(u),v)_V = \int_{\Gamma_3} g\phi_\rho(u)v da \quad \forall x,y \in X.$$

Puisque la fonctionnelle $J_\rho(.)$ est convexe, nous déduisons d'après le Théorème (III.1.9) la fonctionnelle $J_\rho(.)$ définie par (II.1.69) est s.c.i, et alors, l'existence et l'unicité de la solution dans le théroème (II.1.5) est une conséquence du théroème (III.1.21), le problème posé admet une solution donc unique (u_ρ,φ_ρ).

Nous tournons maintenant la convergence de la suite $(u_\rho,\varphi_\rho)_{\rho>0}$ vers (u,φ) solution du problème $(P^{I.V.T}_{VG})$. A cet effet; on voit que la fonctionnelle $J_\rho(.)$ satisfaite la condition (III.1.37) sur X. Notons que l'ypothèse (II.1.10) implique que $J_\rho(y) = j_\rho(v) \geq 0$, pour tout $v \in V$ et, puisque $J_\rho(0_X) = j_\rho(0_V) = 0$, nous concluons que $J_\rho(.)$ satisfait la condition (III.1.36).

Notons également que pour tout $y = (v,\psi) \in X$ on a:

$$\frac{1}{\rho+1} g|v|^{\rho+1} \longrightarrow g|v| \;\; \textit{p.p. sur } \Gamma_3 \;\; \textit{lorsque} \quad \rho \longrightarrow 0,$$

et donc

$$\frac{1}{\rho+1} g|v|^{\rho+1} \leq g(|v|^2 + 1) \quad \forall v \in V,$$

ce qui nous montre que (3.18)(b) est satisfaite .

Finalement, pour prouver (3.18)(a), nous considérons une suite $(y_\rho)_{\rho>0} = (v_\rho,\psi_\rho)_{\rho>0}$ dans X tel que $y_\rho \rightharpoonup y$ dans X lorsque $\rho \longrightarrow 0$, c'est-à-dire, $v_\rho \rightharpoonup v$ dans V et $\psi_\rho \rightharpoonup \psi$ dans W lorsque $\rho \longrightarrow 0$;

nous utilisons l'inégalité de Young (III.0.18) pour obtenir

$$J_\rho(y_\rho) - J_\rho(y) = j_\rho(v_\rho) - j_\rho(v) = \frac{1}{\rho+1}\int_{\Gamma_3} g|v_\rho|^{\rho+1}da - \frac{1}{\rho+1}\int_{\Gamma_3} g|v|^{\rho+1}da \quad \forall v \in V. \tag{II.1.74}$$

Après, nous notons que $v_\rho \rightharpoonup v$ dans V implique que $v_\rho \rightharpoonup v$ dans $L^2(\Gamma_3)$ et $\psi_\rho \rightharpoonup \psi$ dans W implique ausi que $\psi_\rho \rightharpoonup \psi$ dans $L^2(\Gamma_3)$, et alors, $|\phi_\rho(v)| \leq |v|+1$ p.p. sur Γ_3, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons que

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma_3} g\phi_\rho(v)(v_\rho - v)da = 0. \tag{II.1.75}$$

Nous combinons entre (II.1.74) et (II.1.75) pour voir que

$$\liminf_{\rho\to 0}(j_\rho(v_\rho) - j_\rho(v)) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\liminf_{\rho\to 0}(J_\rho(y_\rho) - J_\rho(y)) \geq 0. \tag{II.1.76}$$

D'autre part,rappelons que (3.18)(b) implique que

$$\lim_{\rho\to 0}(j_\rho(v_\rho) = j_\rho(v)),$$

et donc,

$$\lim_{\rho\to 0}(J_\rho(y_\rho) = J_\rho(y)). \tag{II.1.77}$$

Nous combinons entre (II.1.76) et (III.0.37) pour trouver que

$$\liminf_{\rho\to 0}(J_\rho(y_\rho) - J_\rho(y) + J_\rho(y)) \geq J(y)$$

ce qui montre que la fonctionnelle J_ρ satisfait (III.1.37), et alors, la convergence de (II.1.75) est une conséquence du Théorème (III.1.22), ce qui conclue la démonstration. □

Nous remarquons que les problèmes $(P_2^{I.V.R})$ et $(P_{3,\rho}^{I.V.P})$ ont une solution unique faible, qui converge vers la solution faible du problème $(P_1^{I.V.T})$ quand $\rho \longrightarrow 0$. Au delà de l'intérêt mathématique pour ce résultat, il est important de point de vue mécanique car on peut remarquer que la solution du problème de contact antiplan piézoélectrique avec la loi de Tresca peut approchée aussi étroitement qu'on souhaite par la solution du problème de contact antiplan avec la loi régularisée de frottement ou avec la loi puissance de frottement, avec un paramètre suffisamment petit ρ. Ce résultat est également important du point de vue numérique, depuis les fonctionnelles j_ρ définies par (II.1.46) et (II.1.69) sont Gâteaux différentiable et alors, en utilisant les arguments précédents, la résolution de l'inéquation variationnelle (II.1.49)-(II.1.50) et (II.1.70)-(II.1.71) implique la résolution d'une équation non-linéaire dans l'espace X.

1.4 Problème statique avec frottement dépendant du glissement

Pour le genre des problèmes considérés dans cette section, la condition de frottement est présentée avec une version statique de la loi de Coulomb dépendant du glissement. Cette loi est de la forme (I.2.63) dans laquelle le seuil de frottement dépendant de $|u|$, c'est-à-dire $g = g(|u|)$. Alors la formulation variationnelle classique de ce genre des problèmes statiques est comme suit

Problème ($\mathbf{P_4^{I.V.DG}}$). *Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \to I\!R$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \to I\!R$ tel que*

(II.1.78) $$div(\mu\nabla u) + div(e\nabla\varphi) + f_0 = 0 \quad dans \quad \Omega,$$

(II.1.79) $$div(e\nabla u) - div(\beta\nabla\varphi) = q_0 \quad dans \quad \Omega,$$

(II.1.80) $$u = 0 \quad sur \quad \Gamma_1,$$

(II.1.81) $$\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = f_2 \quad sur \quad \Gamma_2,$$

(II.1.82) $$\begin{cases} |\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi| \leq g(|u|), \\ \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = -g(|u|)\dfrac{u}{|u|} \quad si \quad u \neq 0 \quad sur \quad \Gamma_3, \end{cases}$$

(II.1.83) $$\varphi = 0 \quad sur \quad \Gamma_a,$$

(II.1.84) $$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2 \quad sur \quad \Gamma_b\,.$$

Pour étudier ce problème, nous gardons les mêmes les hypothèses (II.1.8)-(II.1.14) Nous supposons aussi que la fonction g vérifiée les hypothèses suivantes

(II.1.85) $$\begin{cases} (a) \quad g : \Gamma_3 \times I\!R \to I\!R_+; \\ (b) \quad Il\ existe\ L_p > 0\ \ tel\ que \\ \qquad |g(\boldsymbol{x},r_1) - g(\boldsymbol{x},r_2)| \leq L_p|r_1 - r_2| \quad \forall r_1,r_2 \in I\!R\ \ p.p.\boldsymbol{x}\ \in \Gamma_3; \\ (c) \quad L'application\ \ \boldsymbol{x} \longmapsto g(\boldsymbol{x},r)\ \ est\ mesurable\ sur\ \ \Gamma_3; \\ (d) \quad \text{L'application} \quad \boldsymbol{x} \longmapsto g(\boldsymbol{x},0)\ \ est\ appartient\ à\ L^2(\Gamma_3). \end{cases}$$

Nous utilisons la forme bilinéaire $a(.,.)$ donnée par (II.1.27), l'élément F est donné par (II.1.29). Il est facile de voir que

$$(\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)(v-u) = (\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)v - (\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)u,$$

ce qui implique

$$(\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)(v-u) \geq -|\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi||v| - (\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)u,$$

et donc

$$(\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi)(v-u) \geq (g(|u|)|v| - g(|u|)|u|).$$

Soit la fonctionnelle $J(\cdot) : X \times X \to I\!R$ définie par

$$J(x,y) = j(u,v) = \int_{\Gamma_3} g(|u|)|v|da \tag{II.1.86}$$

$$\forall x = (u,\varphi) \in X \quad et \quad \forall y = (v,\psi) \in X.$$

Nous notons que l'hypothèse (II.1.85) avec le seuil de frottement dépendant de $|u|$, c'est-à-dire $g = g(|u|)$ implique que pour tout $v \in V$, la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto g(\boldsymbol{x},|v(\boldsymbol{x})|)$ est prolongeable dans $L^2(\Gamma_3)$ et alors, l'intégrale (II.1.86) est bien définie.

Nous utilisons les mêmes arguments présentés dans la première section. Nous dérivons dans ce qui suit la formulation variationnelle du problème statique ($P_4^{I.V.DG}$). Il es facile de remarquer que le problème ($P_4^{I.V.DG}$) est équivalant au probème ($P_{VG}^{I.V.DG}$) défini par

Problème ($\mathbf{P_{VG}^{I.V.DG}}$). *Trouver $x \in X$ tel que*

$$a(x,y-x) + J(x,y) - J(x,x) \;\; \geq \;\; (F,y-x)_X \qquad \forall y \in X. \tag{II.1.87}$$

Nous concluons que la formulation variationnelle du problème statique avec frottement dépendant du glissement est donnée par une inéquation quasivariationnelle elliptique et alors, nous tournons vers les résultats présentés dans l'annexe pour résoudre ce problème.

Notre premier résultat pour étudier ce problème statique ($P_{VG}^{I.V.DG}$) est le suivant.

Théorème II.1.6. *Nous supposons que (II.1.8)-(II.1.14) et (II.1.85) sont satisfaites. Alors il existe une constante L_0 qui est dépend de Ω, Γ_1, Γ_3 et μ tel que si $L_g < L_0$, alors le problème ($P_{VG}^{I.V.DG}$) admet une et seule solution.*

Démonstration. Pour tout $\eta \in X$ la fonctionnelle $j(\eta,.) : V \to V$ est une seminorme continue, et alors, elle est convexe et s.c.i. De plus si $u_1,u_2,v_1,v_2 \in V$ et nous tenons compte de (II.1.86) et (II.1.85) pour obtenir

$$j(u_1,v_2) - j(v_1,v_2) + j(u_2,v_1) - j(u_2,v_2) = \int_{\Gamma_3} (g|u_1| - g|u_2|)(|v_2| - |v_1|)\,da$$

ce qui implique

$$j(u_1,v_2) - j(v_1,v_2) + j(u_2,v_1) - j(u_2,v_2) \leq \int_{\Gamma_3} L_g|u_1 - u_2||v_1 - v_2|da$$

et donc

$$j(u_1,v_2) - j(v_1,v_2) + j(u_2,v_1) - j(u_2,v_2) \leq \tag{II.1.88}$$
$$L_g \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_1 - v_2\|_{L^2(\Gamma_3)}.$$

Puisque $\|v\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_0 \|v\|_V$, l'inégalité (II.1.88) devient

$$j(u_1,v_2) - j(v_1,v_2) + j(u_2,v_1) - j(u_2,v_2) \leq \tag{II.1.89}$$
$$c_0^2 L_g \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V .$$

Posons

$$L_0 = \frac{\mu^*}{c_0^2} > 0. \tag{II.1.90}$$

Il est claire que la constante L_0 dépend effectivement du Ω, Γ_1, Γ_3 et μ, et si $L_g < L_0$ nous obtenons $c_0^2 L_g < \mu^*$; il suit de (II.1.89) que la fonctionnelle $j(.)$ satisfait la condition

$$\begin{cases} \text{Il existe } \alpha \geq 0 \text{ tel que} \\ |j(\eta_1,\eta_2) - j(\eta_1,v_1) + j(\eta_2,v_1) - j(\eta_2,v_2) \leq \alpha ||\eta_1 - \eta_2||_V ||v_1 - v_2||_V \end{cases} \tag{II.1.91}$$
$$\forall \eta_1,\eta_2,v_1,v_2 \in \ X,$$

avec $\alpha = c_0^2.L_g$ et de plus, il suit de (II.1.32) que la forme bilinéaire $a(.,.)$ satisfaite la condition (III.1.31) avec $m = \mu^*$. Le Théorème (II.1.5) résulte maintenant en utilisant le Théorème (III.1.23).

Nous prouvons maintenant l'existence d'une solution de l'inéquation quasivariationnelle (II.1.87) sans aucune hypothèse de politesse pour L_g. □

Théorème II.1.7. *Sous les hypothèses (II.1.8)-(II.1.14) et (II.1.85) il existe une solution du problème (II.1.87).*

Démonstration. Nous appliquons le Théorème (III.1.24). Nous notons que la fonctionnnelle définie par (II.1.86) satisfait la condition (III.1.39). Soient maintenant les suites $(\eta_n)_{n\geq 0}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que η_n converge faiblement vers $\eta \in V$ et u_n converge faiblement vers $u \in V$. Nous utilisons la propriété de compacité de l'opérateur trace, l'hypothèse (II.1.85), et l'inégalité (II.1.32) nous obtenons

$$g(|\eta_n|) \to g(|\eta|) \quad dans \quad L^2(\Gamma_3), \tag{II.1.92}$$

et donc

$$J(\eta_n,v) \to J(\eta,v) \quad \forall v \in V,$$

et

$$J(u_n,v) \to J(u,v).$$

Ce qui montre que la fonctionnelle $J(\cdot)$ satisfait la condition (III.1.42). Le Théorème (II.1.7) est une conséquence du Théorème (III.1.24). □

Nous notons que le Théorème (II.1.24) peut utiliser pour prouver l'unicité de la solution du problème (II.1.87) ainsi que la dépendance Lipschitzienne par rapport aux données, sous l'hypothèse de politesse du Théorème (II.1.6). Prenant $u_1 = v_1 = u$ et $u_2 = v_2 = v$ dans (II.1.89) pour obtenir

$$j(u,v) - j(u,u) + j(v,u) - j(v,v) \leq c_0^2 L_g \|u - v\|_V^2, \tag{II.1.93}$$

et choisissant $L_g < L_0$ ou L_0 est donné par (II.1.90), par la suite, nous déduisons que la fonctionnelle j satisfait (III.1.44). Nous concluons d'après le Théorème (III.1.24) que, si $L_g < L_0$, alors la solution du problème statique avec frottement dépendant du glissement ($P_{VG}^{I.V.DG}$) est unique, et sa dépendance par rapport aux données f et q est Lipschitzienne.

1.5 Problème quasistatique avec frottement de Tresca

Dans cette section nous allons présenter une étude complète pour une version des problèmes quasistatique avec frottement. Nous appliquons les résultats présentés dans les sections 1.2 et 1.3 pour démontrer l'existence et l'unicité de la soultion faible du problème posé à l'étude.

La version quasistatique du problème est obtenue en utilisant une version évolutionnaire de la loi de frottement de Tresca (I.2.55) au lieu de (II.1.5), et en rajoutant une condition initiale sur le champ des déplacements. Ce genre de problème peut se formuler comme suit.

Problème ($\mathbf{P_5^{I.QV.T}}$)**.** *Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ tel que*

$$div(\mu \nabla u) + div(e \nabla \varphi) + f_0 = 0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T], \tag{II.1.94}$$

$$div(e \nabla u) - div(\beta \nabla \varphi) = q_0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T], \tag{II.1.95}$$

$$u = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \times [0,T], \tag{II.1.96}$$

$$\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = f_2 \quad sur \quad \Gamma_2 \times [0,T], \tag{II.1.97}$$

$$\begin{cases} |\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi| \leq g, \\ \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi = -g \dfrac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \quad si \quad \dot{u} \neq 0 \quad sur \quad \Gamma_3 \times [0,T], \end{cases} \tag{II.1.98}$$

$$\varphi = 0 \quad sur \quad \Gamma_a \times [0,T], \tag{II.1.99}$$

(II.1.100) $$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2 \quad sur \quad \Gamma_b \times [0,T],$$

(II.1.101) $$u(0) = u_0 \quad sur \quad \Omega \times [0,T].$$

Ici l'intervalle $[0,T]$ représente le temps avec $T > 0$. Pour étudier ce problème quasistatique avec frottement, nous suppsons que le coefficient de Lamé μ et le seuil de frottement g satisfaisant les conditions (II.1.10); de plus, les forces volumiques de densité f_0 et la traction surfacique de densité f_2 satisfaisant

(II.1.102) $$f_0 \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \quad et \quad f_2 \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma_2)),$$

et supposons que

(II.1.103) $$q_0 \in L^2(\Omega),$$

(II.1.104) $$q_2 \in L^2(\Gamma_b) \quad et \quad q_2 = 0 \quad p.p.\ \boldsymbol{x} \in \Gamma_b.$$

Nous utilisons les notations (II.2.20)-(II.1.21) pour la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, (II.1.22) pour la fonctionnelle j, et de plus, nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz pour définir les fonctions $f : [0,T] \longrightarrow V$ et $q : [0,T] \longrightarrow W$ respectivement par les deux égalités

(II.1.105) $$< f(t),v >_V = \int_\Omega f_0(t)vdx + \int_{\Gamma_2} f_2(t)vda \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0,T],$$

et

(II.1.106) $$< q(t),v >_W = \int_{\Gamma_b} q_2(t)\psi dx - \int_\Omega q_0(t)\psi da \quad \forall \psi \in W, \quad \forall t \in [0,T].$$

Il suit de (II.1.102), (II.2.20)-(II.1.21) et (II.1.22) que les intégrales dans (II.1.105) et (II.1.106) sont bien définies, et de plus on a

(II.1.107) $$f \in W^{1,2}(0,T;V) \quad et \quad q \in W^{1,2}(0,T;W).$$

Finalement, nous supposons que le déplacement initial u_0 satisfait

(II.1.108) $$a_\mu(u_0,v) + a_e(\varphi_0,v) + j(v) \ \geq\ < f(0),v >_V \qquad \forall v \in V,$$

(II.1.109) $$u_0 \in V,$$

ou φ_0 est l'unique élément dans W qui satisfait la condition initiale suivante:

(II.1.110) $$a_\beta(\varphi_0,\psi) - a_e(u_0,\psi) =< q(0),\psi >_W \qquad \forall \psi \in W.$$

La définition de φ_0 résulte en utilisant le Lemme de Lax-Milgram.

La condition (II.1.110) représente une condition de compatibilité sur la donnée initiale qui est nécessaire dans les problèmes quasistatique.

En utilisant la formule de Green (I.2.44) ou on dérive forttement la formulation variationnelle pour le problème quasistatique avec frottement ($P_5^{I.QV.T}$).

Problème ($\mathbf{P_V^{I.QV.T}}$). *Trouver* $u : [0,T] \longrightarrow V$ *et* $\varphi : [0,T] \longrightarrow W$ *tel que*

$$a_\mu(u(t),v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t),v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq < f(t),v - \dot{u}(t) >_V \tag{II.1.111}$$

$$\forall v \in V, \quad p.p. \quad t \in [0,T],$$

$$a_\beta(\varphi(t),\psi) - a_e(u(t),\psi) = < q(t),\psi >_W \quad \forall \psi \in W \quad \forall t \in [0,T], \tag{II.1.112}$$

$$u(0) = u_0.$$

Soit la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ définie par:

$$a(u,v) = a_\mu(u,v) + a_\beta(\varphi,\psi) + a_e(\varphi,v) - a_e(u,\psi)$$

$$\forall u,v \in V, \quad \forall \psi \in W.$$

Il est clair que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ définie ci-dessus n'est pas symétrique. Par conséquent, vu que la symétrie de la forme $a(\cdot,\cdot)$ est nécessaire dans le Théorème (III.1.27), on ne peut pas utiliser la méthode présentée dans les sections précédentes, qui était basée sur l'étude d'une inéquation variationnelle sur l'espace produit $X = V \times W$, gouvernée par la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$. Donc pour omettre cet obstacle on utilise d'autres techniques.

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème II.1.8. *On suppose que les relations (II.1.8)-(II.1.14), (II.1.102)-(II.1.104) et (II.1.107)-(II.1.109) sont vérifiées. Alors il existe une solution unique du problème ($P_V^{I.QV.T}$) ayant la régularité*

$$u \in W^{1,2}(0,T;V) \quad et \quad \varphi \in W^{1,2}(0,T;W). \tag{II.1.113}$$

Un élément (u,φ) qui résout le problème ($P_V^{I.QV.T}$) est appelé solution faible du problème quasistatique avec frottement ($P_5^{I.QV.T}$). Nous concluons du Théorème (II.1.8) que le problème quasistatique avec frottement ($P_5^{I.QV.T}$) admet une solution faible. La démonstration du Théorème (II.1.8) se fait en plusièures étapes. Pour les présentées nous supposons que les relations (II.1.8)-(II.1.14), (II.1.102)-(II.1.104) et (II.1.107)-(II.1.109) sont satisfaites. Dans la première étape nous allons construire un problème auxiliaire pour le champ des déplacements.

Lemme II.1.9. *Soit* (u,φ) *une solution du problème* $(P_V^{I.QV.T})$ *ayant la régularité (II.1.113). Alors il existe une forme bilinéaire notée* $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow I\!R$ *qui est symétrique et V-elliptique ainsi qu'une fonction* $\bar{f} \in W^{1,2}(0,T;V)$ *telle que*

(II.1.114) $$a(u(t),v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \ \geq \ < \bar{f}(t),v - \dot{u}(t) >_V$$

$$\forall v \in V, \quad p.p. \ t \in [0,T],$$

(II.1.115) $$u(0) = u_0.$$

Par ailleurs, la condition initiale u_0 *vérifiée*

(II.1.116) $$u_0 \in V,$$

et

(II.1.117) $$a(u_0,v) + j(v) \ \geq \ < barf(0),v >_V \quad \forall v \in V.$$

Démonstration. Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz pour définir les opérateurs $B : W \longrightarrow W$ et $C : V \longrightarrow W$ par:

(II.1.118) $$< B\varphi,\psi >_W = a_\beta(\varphi,\psi) \quad \forall \varphi,\psi \in W,$$

et

(II.1.119) $$< Cv,\psi >_W = a_e(v,\varphi) \quad \forall \varphi,\psi \in W, \quad \forall v \in V.$$

Il résulte de (II.1.118) que l'opérateur B vérifie les points suivants:

(a) B est un opérateur symétrique.

(b) B est positivement défini sur W car pour tout $\varphi \in W$,

$$< B\varphi,\varphi >_W = a_\beta(\varphi,\varphi) = \int_\Omega \beta \nabla\varphi \nabla\varphi dx \geq \beta \|\nabla\varphi\|_W^2 \geq 0.$$

(c) B est un opérateur linéaire.

De plus, de la relation (II.1.119) il résulte que l'opérateur C lui aussi vérifie les points suivants:

(d) C est un opérateur linéaire.

(e) C est un opérateur continu.

En remplaçant (II.1.118) et (II.1.119) dans (II.2.115) on obtient:

(II.1.120) $$B\varphi(t) = Cu(t) + q(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T].$$

Puisque l'opérateur B est inversible, alors l'égalité (II.1.120) implique

(II.1.121) $$\varphi(t) = B^{-1}Cu(t) + B^{-1}q(t) \quad p.p. \quad t \in [0,T],$$

où $B^{-1} : W \longrightarrow W$ représente l'inverse de l'opérateur B. En utilisant (II.1.121) dans (II.2.114) on a:

$$\begin{aligned} & a_\mu(u,v-\dot u) + a_e(B^{-1}Cu + B^{-1}q(t),v-\dot u) + \\ & +j(v) - j(\dot u) \;\geq\; < f(t),(v-\dot u) >_V \\ & \forall v \in V, \quad p.p. \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{II.1.122}$$

et par la suite obtient:

$$\begin{aligned} & a_\mu(u,v-\dot u) + a_e(B^{-1}Cu,v-\dot u) + j(v) - j(\dot u) \geq \\ & < f(t),(v-\dot u) >_V - a_e(B^{-1}q(t),v-\dot u) \\ & \forall v \in V, \quad p.p. \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{II.1.123}$$

Soit $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow I\!R$ la forme bilinéaire définie par

$$a(u,v) = a_\mu(u,v) + a_e(B^{-1}Cu,v) \quad \forall u,v \in V, \tag{II.1.124}$$

et soit $\bar f(\cdot) : [0,T] \longrightarrow V$ la fonction définie par:

$$< \bar f(t),v >_V = < f(t),v >_V - a_e(B^{-1}q(t),v) \quad \forall v \in V. \tag{II.1.125}$$

Il est clair que $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur V et ceci résulte de la continuité des opérateurs B^{-1} et C respectivement.

Soient maintenant $u,v \in V$ et soit $B^{-1}Cu = w \in W$, $B^{-1}Cv = z \in W$, c'est-à-dire $Cu = Bw$ et $Cv = Bz$ respectivement; en utilisant (II.1.118)-(II.1.119) il résulte :

$$\int_\Omega \beta \nabla w \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega e \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in W, \tag{II.1.126}$$

$$\int_\Omega \beta \nabla z \cdot \nabla \psi dx = \int_\Omega e \nabla v \cdot \nabla \psi dx \quad \forall \psi \in W, \tag{II.1.127}$$

Par la suite, en utilisant (II.1.126)-(II.1.127) il vient

$$a_e(w,v) = a_e(u,z), \qquad B^{-1}Cu = w \quad et \quad B^{-1}Cv = z, \tag{II.1.128}$$

car :

$$a_e(B^{-1}Cu,v) = a_e(w,v) = \int_\Omega e \nabla w \cdot \nabla v dx,$$

En remplaçant v par ψ dans l'égalité précédente et en utilisant (II.1.127) on obtient

$$a_e(B^{-1}Cu,v) = \int_\Omega e \nabla w \cdot \nabla \psi dx = \int_\Omega \beta \nabla z \cdot \nabla w dx,$$

En utilisant (II.1.128) pour $w = \varphi$ on obtient

$$a_e(B^{-1}Cu,v) = \int_\Omega \beta \nabla z \cdot \nabla u dx, \tag{II.1.129}$$

ce qui donne le résultat suivant $a_e(B^{-1}Cu,v) = a_e(u,B^{-1}Cv)$ et donc, la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique. Par ailleurs, pour tout $u \in V$ on a:

$$a_e(B^{-1}Cu,v) = a_e(w,v) = \int_\Omega e \nabla w \cdot \nabla v dx,$$

et en utilisant (II.1.126) et (II.1.129) avec $\varphi = v$ il vient

$$a_e(B^{-1}Cu,v) = \int_\Omega e \nabla w \cdot \nabla w dx \geq 0. \tag{II.1.130}$$

Donc

$$a(u,u) = a_\mu(u,u) + a_e(B^{-1}Cu,u) \geq \mu^* \|u\|_V^2$$

ce qui nous permet d'écrire

$$a(u,u) \;\; \geq \;\; \mu^* \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V, \tag{II.1.131}$$

ce qui prouve que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est *V-elliptique*.

Finalement, nous remarquons que la régularité $f \in W^{1,2}(0,T;V)$ et $q \in W^{1,2}(0,T;W)$ combinée avec la définition (II.1.125) montrent que

$$\bar{f} \in W^{1,2}(0,T;V). \tag{II.1.132}$$

L'inégalité (II.1.123) combinée avec les égalités (II.1.124) et (II.1.125) prouvent que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ satisfait (II.1.114) et (II.1.115).

Par ailleurs, en utilisant (II.1.110) il vient que

$$B\varphi_0 = Cu_0 + q(0), \tag{II.1.133}$$

ce qui implique

$$\varphi_0 = B^{-1}Cu_0 + B^{-1}q(0). \tag{II.1.134}$$

Nous combinons (II.1.134) et (II.1.108) pour obtenir

$$a_\mu(u_0,v) + a_e(B^{-1}Cu_0,v) + j(v) \;\; \geq \; < f(0),v >_V \, - a_e(B^{-1}q(0),v) \tag{II.1.135}$$

$$\forall v \in V,$$

et, en utilisant les définitions (II.1.124) et (II.1.125) il résulte que u_0 satisfait (II.1.116) et (II.1.117). □

Dans la deuxième étape nous démontrons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme II.1.10. *Il existe une fonction $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ unique qui vérifiée (II.1.114) et (II.1.115).*

Démonstration. L'existence et l'unicité de la solution du problème (II.1.114)-(II.1.115) résulte du Théorème (III.1.27) appliqué pour l'espace $X = V$. En effet, d'après le Lemme (II.1.9), il résulte que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ définie par (II.1.124) est continue, symétrique et V-*elliptique*; par ailleurs la fonction $\bar{f}(\cdot)$ définie par (II.1.125) a la régularité $\bar{f} \in W^{1,2}(0,T;V)$, et le déplacement initiale u_0 satisfait (II.1.116) et (II.1.117). Pour finir, rappelons que la fonctionnelle de frottement $j(\cdot)$ définie par (II.1.22) est convexe, semicontinue inférieurement sur V.

En conclusion, les hypothèses du Théorème (III.1.27) sont satisfaites, ce qui conclut la démonstration du Lemme (II.1.10). □

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour présenter la démonstration du Théorème (II.1.8).

Démonstration. Soit $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ la solution du problème (II.1.114) et (II.1.115) obtenue dans le Lemme (II.1.10), et soit $\varphi : [0,T] \longrightarrow W$ la fonction définie par (II.1.121). Moyenant les régularités $W^{1,2}$ des fonctions u et q, il résulte $\varphi \in W^{1,2}(0,T;W)$. Par ailleurs,

$$B\varphi(t) = Cu(t) + q(t) \quad p.p.\ t \in [0,T], \tag{II.1.136}$$

il vient de (II.1.136) que

$$< B\varphi,\psi >_W - < Cu,\psi >_W = < q(t),\psi >_W \quad \forall \psi \in W, \quad p.p.\ t \in [0,T], \tag{II.1.137}$$

et, en utilisant la définition (II.1.118) et (II.1.119) des opérateurs B et C il résulte que (u,φ) satisfait l'égalité (II.2.115).

Des arguments similaires combinés avec la définition (II.1.124) de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et de la définition (II.1.125) de la fonction $\bar{f}(\cdot)$ prouvent que le couple (u,φ) satisfait (II.1.114), il en résulte que (u,φ) est solution du problème (P14) avec la régularité (II.1.113), ce qui prouve la partie d'existence du Théorème.

L'unicité de la solution résulte du problème en déplacements (II.1.114) et (II.1.115) garantie par le Lemme (II.1.9), combiné avec l'expression (II.1.121) de φ. Elle peut aussi se démontrer directement à partir de (II.2.114) et (II.2.115), en utilisant le Lemme de Gronwall. □

1.6 Problème quasistatique avec frottement régularisé

Nous étudions maintenant le probème $(P_{5,\rho}^{I.QV.T})$ dans le cas ou la loi de Tresca (II.1.98) est remplaçée par sa version régularisée (II.1.37). La formulation du problème est la suivante.

Problème $(\mathbf{P_{6,\rho}^{I.QV.R}})$. *Trouver le champ des déplacements $u_\rho : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ et le potentiel électrique $\varphi_\rho : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ tel que*

(II.1.138) $$div(\mu \nabla u_\rho) + div(e \nabla \varphi_\rho) + f_0 = 0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T],$$

(II.1.139) $$div(e \nabla u_\rho) - div(\beta \nabla \varphi_\rho) = q_0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T],$$

(II.1.140) $$u_\rho = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \times [0,T],$$

(II.1.141) $$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = f_2 \quad sur \quad \Gamma_2 \times [0,T],$$

(II.1.142) $$\mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = -g \frac{\dot{u}_\rho}{\sqrt{\dot{u}_\rho^2 + \rho^2}} \quad sur \quad \Gamma_3 \times [0,T],$$

(II.1.143) $$\varphi_\rho = 0 \quad sur \quad \Gamma_a \times [0,T],$$

(II.1.144) $$e \partial_\nu u_\rho - \beta \partial_\nu \varphi_\rho = q_2 \quad sur \quad \Gamma_b \times [0,T],$$

(II.1.145) $$u_\rho(0) = u_0 \quad sur \quad \Omega \times [0,T].$$

Dans l'étude de ce problème nous utilisons les notations précédentes auxquelles nous rajoutons la fonctionnelle $j_\rho(\cdot) : V \longrightarrow I\!R$ définie par

(II.1.146) $$j_\rho(v) = \int_{\Gamma_3} g(\sqrt{v^2 + \rho^2} - \rho) \; da \quad \forall v \in V.$$

Les hypothèses sont celles du Théorème (II.1.8). Par la suite, la formulation variationnelle du problème $(P_{6,\rho}^{I.QV.R})$ est la suivante.

Problème $(\mathbf{P_{VG,\rho}^{I.QV.R}})$. *Trouver le champ des déplacements $u_\rho : [0,T] \to I\!R$ et le potentiel électrique $\varphi_\rho : [0,T] \to I\!R$ tel que*

(II.1.147) $$a(u_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(v) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \;\; \geq \; < \bar{f}(t), v - \dot{u}_\rho(t) >_V$$

$$\forall v \in V, \quad p.p.\ t \in [0,T],$$

(II.1.148) $$u_\rho(0) = u_0.$$

(II.1.149) $$a_\beta(\varphi(t),\psi) - a_e(u(t),\psi) =< q(t),\psi >_W \quad \forall \psi \in W \quad p.p.\ t \in [0,T].$$

Par ailleurs, la condition initiale u_0 vérifiée

(II.1.150) $$u_0 \in V,$$

et

(II.1.151) $$a(u_0,v) + j(v) \ \geq\ < \bar{f}(0),v >_V \quad \forall v \in V.$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème $(P_{VG,\rho}^{I.QV.R})$ est donné par le résultat suivant.

Théorème II.1.11. *On suppose que les relations (II.1.8)-(II.1.14), (II.1.102)-(II.1.104) et (II.1.107)-(II.1.109) sont vérifiées. Alors il existe une solution unique du problème $(P_{VG,\rho}^{I.QV.R})$ ayant la régularité*

(II.1.152) $$u_\rho \in W^{1,2}(0,T;V) \quad et \quad \varphi_\rho \in W^{1,2}(0,T;W).$$

La démonstration du Théorème (II.1.11) se fait en utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans le Théorème (II.1.8), en remplaçant la fonctionnelle $j(\cdot)$ par la fonctionnelle $j_\rho(\cdot)$.

Pour cela, il convient de rapeller que la fonctionnelle $j_\rho(\cdot)$ est convexe et Gâteaux différentiable et par conséquent, elle est convexe et s.c.i. Par ailleurs, rapellons que $j_\rho(\cdot)$ et $j(\cdot)$ satisfait l'inégalité

(II.1.153) $$|j_\rho(v) - j(v)| \leq F(\rho) = \rho \int_{\Gamma_3} \rho da \quad \forall v \in V.$$

Dans un premier temps, la démonstration consiste à prouver que (u_ρ,φ_ρ) est solution du problème $(P_{VG,\rho}^{I.QV.R})$ si et seulement si

(II.1.154) $$u_\rho \in W^{1,2}(0,T;V)$$

(II.1.155) $$a(u_\rho(t),v - \dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(v) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \ \geq\ < \bar{f}(t),v - \dot{u}_\rho(t) >_V$$

$$\forall v \in V, \quad p.p.\ t \in [0,T],$$

(II.1.156) $$\varphi_\rho(t) = B^{-1}Cu_\rho(t) + B^{-1}q(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

(II.1.157) $$u_\rho(0) = u_0.$$

Ensuite nous utilisons (II.1.117) et (II.1.153) pour obtenir

(II.1.158) $$< \bar{f}(0),v >_V -a(u_0,v) - j_\rho(v) \leq j(v) - j_\rho(v) \leq F(\rho) \qquad \forall v \in V,$$

et par conséquent

(II.1.159) $$Sup\ [< \bar{f}(0),v >_V -a(u_0,v) - j_\rho(v)] < +\infty \qquad \forall v \in V.$$

Ceci nous permet d'utiliser le Théorème (III.1.27) pour prouver l'existence et l'unicité d'une fonction u_ρ astisfait (II.1.154), (II.1.155) et (II.1.157). Puis, nous définissons la fonction $\varphi_\rho : [0,T] \longrightarrow W$ par l'égalité (II.1.156) et, nous remarquons que (u_ρ,φ_ρ) est l'unique solution du problème $(P^{I.QV.R}_{VG,\rho})$ avec la régularité (II.1.152).

Nous étudions maintenant le rapport entre les problèmes $(P^{I.QV.T}_{V})$ et $(P^{I.QV.R}_{VG,\rho})$. Nous avons le résultat suivant.

Théorème II.1.12. *Sous les hypothèses (II.1.8)-(II.1.14), (II.1.102)-(II.1.104) et (II.1.107)-(II.1.109), la solution (u_ρ,φ_ρ) du problème $(P^{I.QV.R}_{VG,\rho})$ obtenue dans le Théorème (II.1.11) converge vers la solution (u,φ) du problème $(P^{I.QV.T}_{V})$ obtenue dans le Théorème (II.1.8), c'est-à-dire*

(II.1.160) $$u_\rho \longrightarrow u \quad dans \quad C([0,T];V) \quad lorsque \quad \rho \longrightarrow 0,$$

et

(II.1.161) $$\varphi_\rho \longrightarrow \varphi \quad dans \quad C([0,T];W) \quad lorsque \quad \rho \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous testons avec $v = \dot{u}_\rho(t)$ dans (II.1.147) et $v = \dot{u}(t)$ dans (II.1.155), puis nous additionons les deux inégalités ainsi obtenues pour en déduire

$$a(u_\rho(t) - u(t),\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)) \ \leq \ j(\dot{u}_\rho(t)) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(\dot{u}(t)) - j(\dot{u}(t))$$

$$p.p.\ t \in [0,T],$$

Nous utilisons l'inégalité (II.1.153) pour voir que

$$j(\dot{u}_\rho(t)) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(\dot{u}(t)) - j(\dot{u}(t)) \ \leq \ 2\rho \int_{\Gamma_3} g da$$

$$\text{p.p. } t \in [0,T],$$

et, en combinant les deux dernière inégalités il résulte

(II.1.162) $$a(u_\rho(t) - u(t),\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)) \ \leq \ 2\rho \int_{\Gamma_3} g da$$

$$\text{p.p. } t \in [0,T],$$

Nous intégrons (II.1.158) avec la condition initiale (II.1.148) et (II.1.157) et nous utilisons la V-ellipticité de la frome bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ pour obtenir

$$\|u_\rho(s) - u(s)\|_V^2 \leq \frac{2T}{\mu^*}\rho \int_{\Gamma_3} g da \quad \forall s \in [0,T]. \tag{II.1.163}$$

Puis, d'aprés (II.1.121) et (II.1.156) il résulte

$$\|\varphi_\rho(s) - \varphi(s)\|_V \leq C\|u_\rho(s) - u(s)\|_V \quad \forall s \in [0,T], \tag{II.1.164}$$

ou C est une constante positive dépendant des opérateurs B^{-1} et C.

La convergence du Théorème (II.1.12) résulte maintenant à partir des inégalités (II.1.159) et (II.1.160). □

Il résulte du Théorème (II.1.12) que la solution du problème antiplan avec frottement de Tresca peut approcher par la solution du problème antiplan avec frottement régularisé lorsque le paramètre de régularisation ρ est assez petit.

CHAPITRE 2

PROBLÈMES ÉLECTRO-VISCOÉLASTIQUES

Dans ce chapitre nous considérons certains modèles quasistatiques pour les problèmes antiplans de contact piézoélectrique avec viscosité. Nous modélisons le frottement par des versions de la loi de Coulomb, en inculant la loi de Tresca et sa régularisation. La seule différence que l'on doit signaler ici est que les *inéquations variationnelles d'évolutions* sont générées par deux formes bilinéaires $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$ dans laquelle une forme est impliquée seulement la solution par ces dérivées. Le terme $b(\cdot,\cdot)$ est apellée *terme de viscosité*.

Nous citons dans cette partie des résultats de base d'existence et d'unicité. A cet effet, nous utilisons les arguments des *inéquations variationnelles elliptiques* dépendant du temps et le *point fixe*. Nous introduisons souvent l'espace produit X définit par (I.2.40) et, muni par le produit scalaire (I.2.41) et par la norme associée (I.2.42) respectivement.

2.1 Problème électro-viscoélastique avec frottement de Tresca

Nous considérons dans cette section le problème antiplan électro-viscoélastique avec frottement modélisé par la loi de " Tresca ". Le modèle classique de ce processus est le suivant.

Problème ($\mathbf{P_1^{I.V.EV.T}}$). *Trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ *et le potentiel électrique* $\varphi : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ *tel que*

$$div(\theta\nabla\dot{u} + \mu\nabla u) + div(e\nabla\varphi) + f_0 = 0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T], \tag{II.2.1}$$

$$div(e\nabla u) - div(\beta\nabla\varphi) = q_0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T], \tag{II.2.2}$$

(II.2.3) $$u = 0 \qquad sur \quad \Gamma_1 \times [0,T],$$

(II.2.4) $$\theta\partial_\nu \dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = f_2 \qquad sur \quad \Gamma_2 \times [0,T],$$

(II.2.5) $$\begin{cases} |\theta\partial_\nu \dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi| \leq g, \\ \theta\partial_\nu \dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = -g\dfrac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \quad si \quad \dot{u} \neq 0 \quad sur \quad \Gamma_3 \times [0,T], \end{cases}$$

(II.2.6) $$\varphi = 0 \qquad sur \quad \Gamma_a \times [0,T],$$

(II.2.7) $$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2 \qquad sur \quad \Gamma_b \times [0,T],$$

(II.2.8) $$u(0) = u_0 \quad dans \quad \Omega.$$

Notons que (II.2.11) et (II.2.2) représentent les équations d'équilibre électrique, (II.2.3) représente la condition aux limites du déplacement, (II.2.4) représente la condition aux limites de la surface de traction, (II.2.5) représente la loi de frottement de Tresca, (II.2.6) représente la condition aux limites du champ électrique, (II.2.7) représente la condition aux limites de la charge surfaciques, et finalement, (II.2.8) représente la condition initiale du champ de déplacement.

Notons également que par rapport au problème antiplan de contact piézoélectrique avec la loi de frottement de Tresca traité dans la section 3 du chapitre 1, l'équation d'équilibre (II.2.11) ainsi que la condition aux limites (II.2.4) et (II.2.5) contienent maintenant un terme additionnel impliquant le coefficient de viscosité θ; ce terme se résulte du fait qu'ici, nous emplyons une loi de comportement électro-viscoélastique au lieu de la loi constitutive électro-élastique utilisée partout dans le chapitre 1 partie II.

Nous supposons que les forces volumiques de densité f_0 et de traction surfacique de densité f_2 satisfont

(II.2.9) $$f_0 \in W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)), \quad f_2 \in W^{1,2}(0,T; L^2(\Gamma_2)).$$

Nous supposons aussi que la viscosité et satisfait :

(II.2.10) $$\theta \in L^\infty(\Omega), \quad et\ il\ existe \quad \theta^* > 0 \quad tel\ que \quad \theta(\boldsymbol{x}) \geq \theta^* \quad p.p.\ \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Le seuil de frottement g satisfait

(II.2.11) $$g \in L^\infty(\Gamma_3) \quad et \quad g(x) \geq 0 \quad p.p.\ x \in \Gamma_3.$$

Le champ électrique de densité volumique q_0 et les charges électriques de densité surfacique q_2 satisfont

(II.2.12) $$q_0 \in W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)),$$

(II.2.13) $$q_2 \in\in W^{1,2}(0,T; L^2(\Gamma_b)),$$

(II.2.14) $$q_2 = 0 \quad p.p \;\; x \in \Gamma_b.$$

Cette dernière condition résulte du fait que la base est un corp isolateur, donc aucune charge électrique ne traverse pas la surface de contact $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$.

Le coefficients de permitivité électrique satisfait:

(II.2.15) $$\beta \in L^\infty(\Omega) \;\; et \; il \; existe \; \beta^* > 0 \;\; tel \; que \;\; \beta(\boldsymbol{x}) \geq \beta^* \;\; p.p. \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Le coefficient piézoélectrique vérifie

(II.2.16) $$e \in L^\infty(\Omega)$$

et, finalement, la condition initiale u_0 est telle que

(II.2.17) $$u_0 \in V.$$

Nous tournons maintenant vers la formulation variationnelle du problème $(P_1^{I.V.EV.T})$, et pour cela nous introduisons les espaces V et W définis par (I.2.39) et (I.2.40) respectivement. Nous supposons que le problème antiplan de contact électro-viscoélastique $(P_1^{I.V.EV.T})$ a une solution $(u,\varphi) \in X$, et soit $(v,\psi) \in X$. Nous multiplions l'équation (II.2.11) par l'élement $(v - \dot{u}) \in V$, de même pour l'équation (II.2.2) par l'élement $\psi \in W$. Puis nous en utilisons la formule de Green (I.2.44) et; nous procédons de la même façon que celle utilisée pour le problème (P1) pour obtenir

(II.2.18) $$\begin{aligned} &a_\theta(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) + \\ &+ j(v) - j(\dot{u}(t)) \;\; \geq \;\; \int_\Omega f_0(v - \dot{u}(t))dx + \int_{\Gamma_2} f_2(v - \dot{u}(t))da \end{aligned}$$

$$\forall v \in V, \quad p.p. \; t \in [0,T],$$

et

(II.2.19) $$a_\beta(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) = \int_{\Gamma_b} q_2 \psi dx - \int_\Omega q_0 \psi da$$

$$\forall \psi \in W \quad p.p. \; t \in [0,T].$$

Pour tout $u,v \in V$ et pour tout $\psi \in W$, nous définissons les formes bilinéaires suivantes

$$\begin{aligned} a_\theta(u,v) &= \int_\Omega \theta \nabla u \cdot \nabla v dx, \qquad a_\mu(u,v) = \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v dx, \\ a_e(u,v) &= \int_\Omega e \nabla u \cdot \nabla v dx, \ et \qquad a_\beta(\varphi,\psi) = \int_\Omega \beta \nabla \varphi \cdot \nabla \psi dx. \end{aligned} \tag{II.2.20}$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g(|v|) da \qquad \forall v \in V. \tag{II.2.21}$$

D'après le Théorème de représentation de Riesz on peut alors définir les fonctions $f : [0,T] \longrightarrow V$ et $q : [0,T] \longrightarrow W$ respectivement par les égalités

$$< f(t),v >_V = \int_\Omega f_0(t) v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) v da, \qquad f \in W^{1,2}(0,T;V), \tag{II.2.22}$$

et

$$< q(t),v >_W = \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi dx - \int_\Omega q_0(t) \psi da, \qquad q \in W^{1,2}(0,T;W), \tag{II.2.23}$$

pour tout $v \in V$, $\psi \in W$ et $t \in [0,T]$.

Nous notons d'après les hypothèses (II.2.9), (II.2.12) (II.2.13) et (II.2.14) que les intégrales (II.2.22) et (II.2.23) sont bien définies. De plus, d'aprés l'hypothèse (II.2.11), l'intégrale (II.2.21) est bien définie.

En remplaçant maintenant (II.2.22) et (II.2.23) dans (II.2.18) et (II.2.19) pour obtenir le problème suivant :

Problème ($\mathbf{P_V^{I.V.EV.T}}$). *Trouver le champ des déplacements $u : [0,T] \longrightarrow V$ et le champ électrique $\varphi : [0,T] \longrightarrow W$ tel que*

$$\begin{aligned} &a_\theta(\dot{u}(t),v - \dot{u}(t)) + a_\mu(u(t),v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t),v - \dot{u}(t)) + \\ &\qquad + j(v) - j(\dot{u}(t)) \ \geq \ < f(t),v - \dot{u}(t) >_V \end{aligned} \tag{II.2.24}$$

$$\forall v \in V, \quad t \in [0,T],$$

et

$$a_\beta(\varphi(t),\psi) - a_e(u(t),\psi) = < q(t),\psi >_W \tag{II.2.25}$$

$$\forall \psi \in W, \quad t \in [0,T],$$

$$u(0) = u_0. \tag{II.2.26}$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème II.2.1. *Supposons que (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites. Alors il existe une solution unique du problème* $(P_V^{I.V.EV.T})$ *ayant la régularité :*

(II.2.27) $$u \in W^{2,2}(0,T;V) \quad et \quad \varphi \in W^{1,2}(0,T;W).$$

Le couple des fonctions (u,φ) qui résout le problème (II.2.24), (II.2.25) et (II.2.26) s'appelle solution faible du problème électro-mécanique $(P_V^{I.V.EV.T})$. Nous concluons d'après le Théorème (II.2.1) que le problème antiplan de contact $(P_V^{I.V.EV.T})$ admet une solution faible unique, à condition (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites.

La démonstration se faite en plusières étapes. Dans l'étape 1, nous construisons le problème auxiliaire pour le champ de déplacement u.

On présente dans cette section deux méthodes pour étudier l'existence et l'unicité de la solution.

a)- **Méthode de découplage des inconnues**

Lemme II.2.2. *Soit* (u,φ) *solution du problème* $(P_V^{I.V.EV.T})$ *ayant la régularité (II.2.27). Alors il existe une forme bilinéaire notée* $a(\cdot,\cdot)$ *qui est continue et symétrique ainsi une fonction* $\bar{f}(\cdot)$ *ayant la régularité*

(II.2.28) $$\bar{f} \in W^{1,2}(0,T;V),$$

telle que

(II.2.29) $$a_\theta(\dot{u}(t),v-\dot{u}(t)) + a(u(t),v-\dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \ \geq \ < \bar{f}(t),v-\dot{u}(t) >_V$$

$$\forall v \in V, \quad t \in [0,T],$$

(II.2.30) $$u(0) = u_0.$$

Par ailleurs, la condition initiale u_0 *satisfait*

(II.2.31) $$u_0 \in V.$$

Démonstration. Tout d'abord, d'aprés le Théorème de représentation de Riesz on peut définir les opérateurs $B : W \longrightarrow W$ et $C : V \longrightarrow W$ par :

(II.2.32) $$< B\varphi,\psi >_W = a_\beta(\varphi,\psi) \quad \forall \psi,\varphi \in W,$$

(II.2.33) $$< Cv,\psi >_W = a_e(v,\varphi) \quad \forall \psi,\varphi \in W, \quad \forall v \in V.$$

Il résulte de (II.2.32) que l'opérateur B vérifie les points suivants :

- B est linéaire.
- B est symétrique.
- B est positivement défini sur W.

Par ailleurs, de la relation (II.2.33) il résulte que l'opérateur C lui aussi vérifie les points suivants:

- C est linéaire.
- C est continu.

En remplaçant (II.2.32) et (II.2.33) dans (II.2.19) on obtient :

$$
< B\varphi(t),\psi >_W - < Cu(t),\psi >_W = < q(t),\psi >_W \quad \forall \psi \in W, \quad t \in [0,T]. \tag{II.2.34}
$$

ce qui donne

$$
B\varphi(t) - Cu(t) = q(t) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{II.2.35}
$$

Nous savons que l'opérateur B est linéaire continu, et donc, il est inversible, c'est-à-dire B^{-1} existe, et par la suite, la relation (II.2.35) devient :

$$
\varphi(t) = B^{-1}Cu(t) + B^{-1}q(t), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{II.2.36}
$$

En remplaçant (II.2.36) dans (II.2.18) on obtient

$$
\begin{aligned}
& a_\theta(\dot{u}(t),v - \dot{u}(t)) + a_\mu(u(t),v - \dot{u}(t)) + a_e(B^{-1}Cu(t),v - \dot{u}(t)) + \\
& +j(v) - j(\dot{u}(t)) \ \geq \ < f(t),v - \dot{u} >_V - a_e(B^{-1}q(t),v - \dot{u}(t)) \\
& \forall v \in V, \quad p.p. \ t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{II.2.37}
$$

Soit maintenant la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ définie par :

$$
a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow I\!R
$$

$$
a(u(t),v - \dot{u}(t)) = a_\mu(u(t),v - \dot{u}(t)) + a_e(B^{-1}Cu(t),v - \dot{u}(t)), \tag{II.2.38}
$$

et soit pour tout $u,v \in V$ la fonction $\bar{f}(\cdot) : [0,T] \longrightarrow V$ définie par :

$$
< \bar{f}(t),v - \dot{u}(t) >_V = < f(t),v - \dot{u} >_V - a_e(B^{-1}q(t),v - \dot{u}(t)). \tag{II.2.39}
$$

D'aprés l'étude présentée dans la Section 1.3 du Chapitre 1 Partie II, il est facile de voir que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue et symétrique.

Par ailleurs, la forme bilinéaire $a_\theta(\cdot,\cdot)$ est continue, symétrique et elliptique.

Nous remarquons que la régularité $f \in W^{1,2}(0,T;V)$ et $q \in W^{1,2}(0,T;W)$ combinée avec (II.2.39) montrent que

$$\bar{f} \in W^{1,2}(0,T;V). \tag{II.2.40}$$

$\square$

Dans la deuxièm étape nous démontrons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme II.2.3. *Il existe une et seule fonction $u \in W^{2,2}(0,T;V)$ satisfait (II.2.29) et (II.2.30).*

Démonstration. Il est facile de voir que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue et symétrique, la forme bilinéaire $a_\theta(\cdot,\cdot)$ est continue, symétrique et coersive, la fonctionnelle $j(\cdot)$ est propre, convexe et s.c.i sur V, la fonction $\bar{f}(\cdot)$ ayant la régularité $W^{1,2}(0,T;V)$ et le déplacement inintiale u_0 satisfait (II.2.31). L'existence et l'unicité de la solution du problème (II.2.29) et (II.2.30) résulte maintenant du Théorème (III.1.25) appliqué sur l'espace $X = V$ et de plus, $u \in W^{2,2}(0,T;V)$. $\square$

Finalement, nous avons tous les ingrédients et tous les résultats pour présenter la démonstration du Théorème (II.2.1).

Démonstration. Nous présentons dans cette partie une démonstration du Théorème (II.2.1).

Soit $u \in W^{2,2}(0,T;V)$ la solution du problème (II.2.29) et (II.2.30) obtenue dans le Lemme (II.2.3), et soit $\varphi : [0,T] \longrightarrow W$ la fonction définie par (II.2.36). Moyenant la régularité $W^{1,2}$ des deux fonctions u et q, il résulte $\varphi \in W^{1,2}(0,T;W)$.

Or, d'aprés (II.2.35) on a

$$B\varphi(t) - Cu(t) = q(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

alors, pour tout élément $\psi \in W$ on obtient

$$< B\varphi(t),\psi >_W - < Cu(t),\psi >_W = < q(t),\psi >_W \qquad \forall \psi \in W, \quad t \in [0,T].$$

Nous tenons compte des définitions des opérateurs B et C définies par (II.2.32) et (II.2.33) respectivement, il résulte que le couple (u,φ) satisfait (II.2.25).

Des arguments similaires combinés avec la définition (II.2.38) de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, et de la définition (II.2.39) de la fonction $\bar{f}(\cdot)$ prouvent que le couple (u,φ) satisfait (II.2.29); il résulte que (u,φ) est solution du problème $(P_V^{I.V.EV.T})$ défini par les relations (II.2.24)-(II.2.26) avec la régularité (II.2.27), ce qui prouve l'existence de la solution dans le Théorème (II.2.1).

Maintenant, l'unicité de la solution du problème en déplacement (II.2.29) et (II.2.30) est assurée par le Lemme (II.2.2); combiné avec l'égalité (II.2.36) définissant la fonction φ. $\square$

Nous présentons maintenant une étude complète du problème $(P_1^{I.V.EV.T})$ dans le cas ou la loi de frottement de Tresca (II.2.5) est remplaçée par sa version régularisée.

b)- **Méthode de point fixe**

Dans ce paragraphe nous allons présenter la méthode de point fixe qui nous permet de prouver encore une fois l'existence et l'unicité de la solution du problème (II.2.24), (II.2.25) et (II.2.26).

Théorème II.2.4. *Supposons que les hypothèses (II.2.9)-(II.2.17) sont vérifiées. Alors il existe une solution unique du problème (II.2.24), (II.2.25) et (II.2.26) ayant la régularité*

$$u \in W^{2,2}(0,T;V), \qquad \varphi \in W^{1,2}(0,T;W). \tag{II.2.41}$$

La démonstration du Théorème (II.2.4) se faite en plusières étapes. Nous supposons dans tout ce qui suit que les hypothèses (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites et, partout ci-dessous, nous dénotons par c diverses constantes positives qui sont indépendant du temps et dont la valeur peut changer d'un cas à un autre. Soit $\eta \in C([0,T];V)$ donné et, dans la première étape, nous considérons le problème variationnel intermédiaire suivant.

Problème ($\mathbf{P1^{I.V.EV.T}_{V,\eta}}$). *Trouver le champ des déplacemets $u_\eta : [0,T] \longrightarrow V$ tel que*

$$\begin{aligned} a_\theta(\dot u_\eta(t),v-\dot u_\eta(t)) + a_\mu(u_\eta(t),v-\dot u_\eta(t)) + a_e(\eta(t),v-\dot u_\eta(t)) +& \\ +j(v)-j(\dot u_\eta(t)) \ \geq \ < f(t),v-\dot u_\eta(t) >_V& \\ \forall v \in V, \qquad t \in [0,T],& \end{aligned} \tag{II.2.42}$$

$$u_\eta(0) = u_0. \tag{II.2.43}$$

On a le résultat suivant pour le problème ($P1^{I.V.EV.T}_{V,\eta}$).

Lemme II.2.5.

(1)- Il existe une unique solution $u_\eta \in C^1([0,T];V)$ pour le problème (II.2.42) et (II.2.43).

(2)- Si $u_1 \in C([0,T];V)$ et $u_2 \in C([0,T];V)$ sont les deux solutions du problème (II.2.42) et (II.2.43), alors il exsite $c > 0$ tel que

$$\|\dot u_1(t) - \dot u_2(t)\|_V \ \leq \ c(\|\eta_1(t)-\eta_2(t)\|_V + \|u_1(t)-u_2(t)\|_V) \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{II.2.44}$$

(3)- Si, de plus, $\eta \in W^{1,2}([0,T];V)$, alors la solution satisfait $u_\eta \in W^{2,2}([0,T];V)$.

Démonstration. Nous appliquons le Théorème (III.1.25) sur l'espace $X = V$ avec le produit scalaire $< \cdot,\cdot >_V$ et la norme associée $\| \cdot \|_V$, avec le choix $a = a_\mu$, $b = a_\theta$ et

$$< h(t),v >_V = < f(t),v >_V - a_e(\eta(t),v) \qquad \forall v \in V, \quad t \in [0,T].$$

Il est clair que les deux formes bilinéaires a_μ et a_e satisfont (III.1.45) et (III.1.46), respectivement, et nous utilisons (II.2.11) il suit que la fonctionnelle j satisfait la condition (III.1.47). De plus, nous utilisons (II.2.22) et (II.2.23) et la régularité $\eta \in C([0,T];V)$, il est facile de voir que $f - \eta \in C([0,T];V)$, c'est à dire h satisfait (III.1.48). Finalement, nous notons que (III.1.49) est lui aussi satisfait et, si $\eta \in W^{1,2}([0,T];V)$ alors $h = f - \eta \in W^{1,2}([0,T];V)$. Le Lemme (II.2.5) est conséquence directe du Théorème (II.2.4). $\square$

Dans l'étape suivante, nous utilisons la solution $u_\eta \in C^1([0,T];V)$ obtenue dans le Lemme (II.2.5) pour construire le problème variationnel pour le champ électrique.

Problème ($\mathbf{P2^{I.V.EV.T}_{V,\eta}}$). *Trouver le champ électrique $\varphi_\eta : [0,T] \longrightarrow W$ tel que*

$$a_\beta(\varphi_\eta(t),\nabla\psi) - a_e(u_\eta(t),\psi) = < q(t),\psi >_W \qquad \forall \psi \in W, \quad t \in [0,T]. \tag{II.2.45}$$

Nous avons le réultat d'existence et d'unicité pour le problème $(P2^{I.V.EV.T}_{V,\eta})$.

Lemme II.2.6. *Il existe une unique solution $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W)$ qui satisfait (II.2.45). De plus, si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont les solutions de (II.2.45) correspondant à $\eta_1,\eta_2 \in C([0,T];V)$ alors, il existe $c > 0$, telle que*

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq c\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{II.2.46}$$

Démonstration. Soit $t \in [0,T]$. nous utlisons les propriétés de la forme bilinéaire a_β et le Lemme de Lax-Milgram pour voir qu'il existe un unique élément $\varphi_\eta(t) \in W$ qui résout (II.2.45) à chaque moment $t \in [0,T]$. Nous considérons maintenant $t_1,t_2 \in [0,T]$; nous utilsons (II.2.45) et la coersivité de la forme bilináire a_β nous obtenons que

$$\begin{aligned} \beta^*\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W^2 \leq \; & \|e\|_{L^\infty(\Omega)}\|u(t_1) - u(t_2)\|_V + \\ & \|q(t_1) - q(t_2)\|_W\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W \end{aligned} \tag{II.2.47}$$

ce qui implique que

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W \leq c(\|u(t_1) - u(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W). \tag{II.2.48}$$

Nous concluons que la régularité $u_\eta \in C^1([0,T];V)$ combinée avec (II.2.22) et (II.2.23) implique que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W)$ ce qui conclue la démonstration. □

Nous utilisons maintenant le Théorème de représentation de Riesz pour définir l'élément $\Lambda\eta(t) \in V$ par l'égalité

$$< \Lambda\eta(t),v >_V = a_e(\varphi_\eta(t),v) \qquad \forall v \in V, \quad t \in [0,T]. \tag{II.2.49}$$

Il est clair pour un $\eta \in C([0,T];V)$ donné, la fonction $t \longmapsto \Lambda\eta(t)$ prolonge dans $C([0,T];V)$. Dans l'étape suivante nous montrons que l'opérateur $\Lambda : C([0,T];V) \longrightarrow C([0,T];V)$ admet un point unique fixe.

Lemme II.2.7. *Il existe un unique $\bar{\eta} \in W^{1,2}(0,T;V)$ tel que $\Lambda\bar{\eta} = \bar{\eta}$.*

Démonstration. Soient $\eta_1,\eta_2 \in C([0,T];V)$ et notons par u_i et φ_i les fonctions u_{η_i} et φ_{η_i} obtenues dans le Lemme (II.2.6), pour $i = 1,2$. Soit $t \in [0,T]$.

Nous utilisons (II.2.49) et la forme bilinéaire a_e dans la relation (II.2.20) pour obtenir

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \;\leq\; c\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W,$$

et tenons compte de (II.2.46) pour trouver

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \;\leq\; c\|u_1(t) - u_2(t)\|_V. \tag{II.2.50}$$

D'un autre côté, on sait que

$$u_i(t) = u_0 + \int_\Gamma \dot{u}_i(s)ds.$$

On a

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \;\leq\; \int_\Gamma \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \tag{II.2.51}$$

et nous utilisons cette inégalité dans (II.2.44) pour obtenir

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V \;\leq\; (\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V + \int_\Gamma \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds).$$

Il suit maintenant de l'inégalité de Gronwall que

$$\int_\Gamma \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \;\leq\; c\int_\Gamma \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V ds. \tag{II.2.52}$$

Nous combinons (II.2.50)-(II.2.52) pour obtenir

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \;\leq\; c\int_\Gamma \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V ds \tag{II.2.53}$$

et, nous réécrivons cette inégalité n fois, ce qui donne

$$\|\Lambda^n \eta_1(t) - \Lambda^n \eta_2(t)\|_V \leq \frac{C^n}{n!} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{C([0,T];V)}.$$

Cette dernière inégalité montre que sous suffisamment valeurs de n, l'opérateur Λ^n est contractante sur l'espace de Banach $C([0,T];V)$ et, alors, il existe un élément unique $\bar{\eta} \in C([0,T];V)$ tel que $\Lambda\bar{\eta} = \bar{\eta}$. Il suit du Lemme (II.2.6) que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W)$ et, donc, la définition (II.2.49) de l'opérateur Λ combiné avec les propriétés de la forme bilinéaire a_e implique que $\Lambda\bar{\eta} \in W^{1,2}(0,T;V)$; cette régularité qui est combinée avec l'égalité $\Lambda\bar{\eta} = \bar{\eta}$ montre que $\bar{\eta} \in W^{1,2}(0,T;V)$ ce qui conclut la démonstration. □

Nous avons tous les ingrédients pour prouver le Théorème (II.2.1).

Démonstration.

(a)- Existence. Soit $\bar{\eta} \in W^{1,2}(0,T;V)$ un point fixe de l'opérateur Λ, et soit $u_{\bar{\eta}}$, $\varphi_{\bar{\eta}}$ sont les deux solutions des problèmes $(P1^{I.V.EV.T}_{V,\eta})$ et $(P2^{I.V.EV.T}_{V,\eta})$, respectivement, pour $\eta = \bar{\eta}$. Il suit de (II.2.49) que

$$< \bar{\eta}(t), v >_V = a_e(\varphi_{\bar{\eta}(t)}, v) \qquad \forall v \in V, \quad t \in [0,T]$$

et, alors (II.2.42), (II.2.43) et (II.2.45) impliquent que $(u_{\bar{\eta}}, \varphi_{\bar{\eta}})$ est une solution du problème $(P2^{I.V.EV.T}_V)$. La régularité (II.2.41) de la solution suit des Lemmes (II.2.5) (3) et (II.2.6).

(b)- Unicité. L'unicité de la solution suit de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ. Il peut t'obtenir en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans [7] et [41].

□

2.2 Problème électro-viscoélastique avec frottement régularisé

Nous étudions le problème régularisé suivant :

Problème $(\mathbf{P}^{\mathbf{I.V.EV.R}}_{\mathbf{2},\rho})$. *Trouver le champ des déplacements $u_\rho : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ et le potentiel électrique $\varphi_\rho : \Omega \times [0,T] \to I\!R$ tel que*

(II.2.54) $$div(\theta \nabla \dot{u}_\rho + \mu \nabla u_\rho) + div(e \nabla \varphi_\rho) + f_0 = 0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T],$$

(II.2.55) $$div(e \nabla u_\rho) - div(\beta \nabla \varphi_\rho) = q_0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T],$$

(II.2.56) $$u_\rho = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \times [0,T],$$

(II.2.57) $$\theta \partial_\nu \dot{u}_\rho + \mu \partial_\nu u_\rho + e \partial_\nu \varphi_\rho = f_2 \quad sur \quad \Gamma_2 \times [0,T],$$

(II.2.58) $$\theta\partial_\nu \dot{u}_\rho + \mu\partial_\nu u_\rho + e\partial_\nu\varphi_\rho = -g\frac{\dot{u}_\rho}{\sqrt{\dot{u}_\rho^2+\rho^2}} \quad sur \quad \Gamma_3\times[0,T],$$

(II.2.59) $$\varphi_\rho = 0 \quad sur \quad \Gamma_a\times[0,T],$$

(II.2.60) $$e\partial_\nu u_\rho - \beta\partial_\nu\varphi_\rho = q_2 \quad sur \quad \Gamma_b\times[0,T],$$

(II.2.61) $$u_\rho(0) = u_0 \quad dans \quad \Omega.$$

Pour étudier ce problème, nous supposons que (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites et, de plus $\rho > 0$. Nous introduisons la fonctionnelle $j_\rho : V \longrightarrow I\!R$ définie par

(II.2.62) $$j_\rho(v) = \int_{\Gamma_3} g(\sqrt{\rho^2+v^2}-\rho)da \quad \forall v\in V.$$

Nous utilisons ici les mêmes arguments présentés dans la partie II du chapitre 1. Avec ces notations, un standart calcule est basé sur la formule de Green (I.2.44) et les arguments présentés dans la section 1- Partie II. Par la suite, la formulation variationnelle du problème $(P_{2,\rho}^{I.V.EV.R})$ avec frottement est la suivante.

Problème $(\mathbf{P_{V,\rho}^{I.V.EV.R}})$. *Trouver le champ des déplacements $u_\rho : [0,T]\to V$ et le potentiel électrique $\varphi_\rho : [0,T]\to W$ tel que*

(II.2.63) $$\begin{gathered} a_\theta(\dot{u}_\rho(t),v-\dot{u}_\rho(t)) + a(u_\rho(t),v-\dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(v) + \\ +j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \geq < \bar{f}(t),v-\dot{u}_\rho(t)>_V \quad \forall v\in V, \quad p.p.\ t\in[0,T], \end{gathered}$$

(II.2.64) $$u_\rho(0) = u_0,$$

(II.2.65) $$a_\beta(\varphi_\rho(t),\psi) - a_e(u_\rho(t),\psi) =< q(t),\psi>_W \quad \forall\psi\in W, \quad p.p.\ t\in[0,T].$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème $(P_{V,\rho}^{I.V.EV.R})$ est donné par ce résultat.

Théorème II.2.8. *Supposons que (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites. Alors il existe une solution unique du problème $(P_{V,\rho}^{I.V.EV.R})$ ayant la régularité :*

(II.2.66) $$u_\rho \in W^{2,2}(0,T;V)$$

et

$$\varphi_\rho \in W^{1,2}(0,T;W). \tag{II.2.67}$$

Démonstration. La démonstration se faite en passant par les mêmes étapes utilisées dans la démonstration du Théorème (II.2.1) en remplaçant la fonctionnelle $j(\cdot)$ par la fonctionnelle régularisée $j_\rho(\cdot)$.

On sait que la fonctionnelle $j_\rho(\cdot)$ est Gâteaux différentiable et par conséquent, elle est convexe et s.c.i. Par ailleurs, nous rappelons que les deux fonctionnelles $j(\cdot)$ et $j_\rho(\cdot)$ vérifiant :

$$|j_\rho(v) - j(v)| \leq F(\rho) = \rho \int_{\Gamma_3} g da \quad \forall v \in V. \tag{II.2.68}$$

Pour démontrer le Théorème, nous commençons tout d'abord à prouver que le couple (u_ρ,φ_ρ) est solution du problème $(P_{V,\rho}^{I.V.EV.R})$ si et seulement si

$$u_\rho \in W^{2,2}(0,T;V), \tag{II.2.69}$$

$$\begin{aligned} & a_\theta(\dot{u}_\rho(t),v - \dot{u}_\rho(t)) + a(u_\rho(t),v - \dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(v) + \\ & +j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \ \geq \ < \bar{f}(t),v - \dot{u}_\rho(t) >_V \quad \forall v \in V, \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \end{aligned} \tag{II.2.70}$$

$$\begin{gathered} \varphi_\rho(t) = B^{-1}Cu_\rho(t) + B^{-1}q(t) \\ \forall \psi \in W \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \end{gathered} \tag{II.2.71}$$

$$u_\rho(0) = u_0. \tag{II.2.72}$$

Puis, nous combinons (II.2.68) avec (II.2.70) pour obtenir

$$< \bar{f}(0),v >_V -a(u_0,v) - j_\rho(v) \ \leq \ j(v) - j_\rho(v) \qquad \forall v \in V, \tag{II.2.73}$$

En utilisant le Théorème (III.1.27) pour prouver l'existence et l'unicité d'une fonction u_ρ qui satisfait (II.2.69), (II.2.70) et (II.2.72). Puis, nous définissons une fonction $\varphi_\rho : [0,T] \longrightarrow W$ par (II.2.71); et alors, nous remarquons que (u_ρ,φ_ρ) est solution unique du problème $(P_{V,\rho}^{I.V.EV.R})$ ayant la régularité (II.2.67). □

2.3 Un résultat de convergence

Dans cette section, nous allons examiner le comportement de la solution faible du problème antiplan avec frottement quand la viscosité tend vers zéro. Afin de décrire la dépendance sur le coefficient de viscosité θ. Nous étudions maintenant le rapport entre les deux problèmes $(P_V^{I.V.EV.T})$ et $(P_{V,\rho}^{I.V.EV.R})$. A cet effet, nous reformulons le problème $(P_V^{I.V.EV.T})$ comme suit.

Problème $(\mathbf{P_{VG}^{I.V.EV}})$. *Trouver le champ des déplacements* $u : [0,T] \longrightarrow V$ *tel que*

$$\begin{aligned} &a_\theta(\dot{u}(t),v-\dot{u}(t)) + a(u(t),v-\dot{u}(t)) + j(v) + \\ &+j(\dot{u}(t)) \;\geq\; <\bar{f}(t),v-\dot{u}(t)>_V \quad \forall v \in V, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{II.2.74}$$

$$a_\beta(\varphi(t),\psi) - a_e(u(t),\psi) =< q(t),\psi>_W \quad \forall \psi \in W, \quad p.p.\ t \in [0,T]. \tag{II.2.75}$$

$$u(0) = u_0. \tag{II.2.76}$$

A cet effet, nous supposons dans tout ce qui suit que (III.1.45)-(III.1.49) sont satisfaites. Nous notons par $u \in C^1([0,T];V)$ et $\varphi \in C^1([0,T];W)$ les solutions du problème $(P_{VG}^{I.V.EV})$. Il est évident que le problème $(P_{VG}^{I.V.EV})$ admet une solution unique $u \in C^1([0,T];V)$ et $\varphi \in C^1([0,T];W)$ et ceci, d'après l'étude précédente.

Pour tout $\rho > 0$, nous considérons une perturbation de j qui satisfait (III.1.47) et, nous considérons le problème suivant

Problème $(\mathbf{P_{VG,\rho}^{I.V.EV.R}})$. *Trouver le champ des déplacements* $u : [0,T] \longrightarrow V$ *tel que*

$$\begin{aligned} &a_\theta(\dot{u}_\rho(t),v-\dot{u}_\rho(t)) + a(u_\rho(t),v-\dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(v) + \\ &+j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \;\geq\; <\bar{f}(t),v-\dot{u}_\rho(t)>_V \quad \forall v \in V, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{II.2.77}$$

$$a_\beta(\varphi_\rho(t),\psi) - a_e(u_\rho(t),\psi) =< q(t),\psi>_W \quad \forall \psi \in W, \quad p.p.\ t \in [0,T]. \tag{II.2.78}$$

$$u_\rho(0) = u_0. \tag{II.2.79}$$

Nous pouvons de déduire du Théorème (III.1.25) que, pour tout $\rho > 0$, le problème (II.2.74)-(II.2.76) a une solution unique $u_\rho \in C^1([0,T];V)$ et $\varphi_\rho \in C^1([0,T];W)$.

Nous avons dans cette section le résultat suivant.

Théorème II.2.9. *Sous l'hypothèse (III.1.34), la solution u_ρ et φ_ρ du problème (II.2.77)-(II.2.79) converge vers la solution u du problème (II.2.74)-(II.2.76) quand ρ tend vers 0, c'est à dire*

$$\|u_\rho - u\|_{C^1([0,T];V)} \longrightarrow 0 \qquad \textit{quand} \quad \rho \longrightarrow 0$$

et

$$\|\varphi_\rho - \varphi\|_{C^1([0,T];W)} \longrightarrow 0 \qquad quand \quad \rho \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Soir $\rho > 0$ et soit $t \in [0,T]$. Nous prenons $v = \dot{u}_\rho(t)$ dans (II.2.74) et $v = \dot{u}(t)$ dans (II.2.77) et, nous faisons la somme de deux inégalités obtenues après changement pour voir que

$$\begin{aligned} a_\theta(\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t), \dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)) \ &\leq \ a(u_\rho(t) - u(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\rho(t)) + \\ &\quad j(\dot{u}_\rho(t)) - j(\dot{u}(t)) + j_\rho(\dot{u}(t)) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)), \end{aligned}$$

ce qui donne par la suite

$$a_\theta(\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t), \dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)) \leq |j(\dot{u}_\rho(t)) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t))| + |j_\rho(\dot{u}(t)) - j(\dot{u}(t))|.$$

Nous tenons compte de la coersivité de la forme bilinéaire $a_\theta(\cdot,\cdot)$, la continuité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et, de (III.1.34) pour voir que

$$m^{'}\|\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)\|_V^2 \leq M\|u_\rho(t) - u(t)\|_V\|\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)\|_V + 2F(\rho)$$

et, nous utilisons l'inégalité

$$M\|u_\rho(t) - u(t)\|_V\|\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)\|_V \leq \frac{M^2}{2m^{'}}\|u_\rho(t) - u(t)\|_V^2 + \frac{m^{'}}{2}\|\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)\|_V^2,$$

par la suite, nous trouvons que

$$\text{(II.2.80)} \qquad \|\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)\|_V^2 \leq \frac{4}{m^{'}}F(\rho) + \frac{M^2}{m^{'2}}\|u_\rho(t) - u(t)\|_V^2.$$

Il suit de (II.2.76) et (II.2.79) que

$$\text{(II.2.81)} \qquad \|u_\rho(t) - u(t)\|_V \leq \int_{0,T}\|\dot{u}_\rho(s) - \dot{u}(s)\|_V ds$$

ce qui implique

$$\|u_\rho(t) - u(t)\|_V^2 \leq T\int_{0,T}\|\dot{u}_\rho(s) - \dot{u}(s)\|_V^2 ds$$

Nous remplaçons la dernière inégalité dans (II.2.80) pour obtenir

$$\|\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)\|_V^2 \leq \frac{4}{m^{'}}F(\rho) + \frac{M^2T}{m^{'2}}\int_{0,T}\|\dot{u}_\rho(s) - \dot{u}(s)\|_V^2 ds.$$

Nous utlisons le Lemme de Gronwall (III.1.20) pour voir que

$$\text{(II.2.82)} \qquad \|\dot{u}_\rho(t) - \dot{u}(t)\|_V^2 \leq \frac{4}{m^{'}}e^{\frac{M^2T^2}{m^{'2}}}F(\rho) \qquad \forall t \in [0,T].$$

Nous combinons maintenant les inégalités (II.2.81) avec (II.2.82) et, nous utilisons l'hypothèse (III.1.34) pour obtenir que

$$\|u_\rho - u\|_{C^1([0,T];V)} \longrightarrow 0 \qquad quand \quad \rho \longrightarrow 0.$$

Nous tournons maintenant vers la convergence de la solution de la suite $(\varphi_\rho)_{\rho>0}$ vers la fonction φ.

Nous réécrivons l'égalité (II.2.35) en fonction de φ_ρ pour tout $\rho > 0$, pour obtenir

$$B\varphi_\rho(t) - Cu_\rho(t) = q(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

et alors,

$$\varphi_\rho(t) = B^{-1}Cu_\rho(t) + B^{-1}q(t) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{II.2.83}$$

Sachant que $(u_\rho)_{\rho>0}$ converge vers la fonction u quand $\rho \longrightarrow 0$, alors par passage à la limite dans l'égalité (II.2.83) on obtient

$$\varphi_\rho(t) \longrightarrow \varphi(t) \qquad \textit{quand} \quad \rho \longrightarrow 0, \quad \forall t \in [0,T]$$

ce qui donne

$$\|\varphi_\rho - \varphi\|_{C^1([0,T];W)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \quad \rho \longrightarrow 0.$$

□

2.4 Approche de l'élasticité

Dans cette section nous étudions le comportement de la solution faible du problème antiplan de contact avec frottement quand la viscosité tend vers zéro. Afin de décrire la dépendance sur le coéfficient de viscosité θ, nous reformulons le problème $(P_V^{I.V.EV.T})$ comme suit :

Problème $(\mathbf{P^{I.V.EV}_{VG,\theta}})$. *Trouver le champ des déplacements $u_\theta : [0,T] \longrightarrow V$ et le champ électrique $\varphi_\theta : [0,T] \longrightarrow W$ tel que*

$$\begin{aligned} a_\theta(\dot u_\theta(t), v - \dot u_\theta(t)) + a_\mu(u_\theta(t), v - \dot u_\theta(t)) + a_e(\varphi_\theta(t), v - \dot u_\theta(t)) + \\ + j(v) - j(\dot u_\theta(t)) \ \geq \ < f(t), v - \dot u_\theta(t) >_V \end{aligned} \tag{II.2.84}$$

$$\forall v \in V, \quad t \in [0,T],$$

$$a_\beta(\varphi_\theta(t), \psi) - a_e(u_\theta(t), \psi) = < q(t), \psi >_W \tag{II.2.85}$$

$$\forall \psi \in W, \quad t \in [0,T],$$

$$u_\theta(0) = u_0. \tag{II.2.86}$$

Nous considérons également le problème non visqueux associé à $(P^{I.V.EV}_{VG,\theta})$, c'est à dire, le problème obtenu pour $\theta = 0$, qui sera formulé comme suit :

Problème $(\mathbf{P^{I.V.EV}_{VG,\theta\longrightarrow 0}})$. *Trouver le champ des déplacements* $u : [0,T] \longrightarrow V$ *et le champ électrique* $\varphi : [0,T] \longrightarrow W$ *tel que*

$$a_\mu(u(t),v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t),v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \;\; \geq \; < f(t),v - \dot{u}(t) >_V \tag{II.2.87}$$

$$\forall v \in V, \quad t \in [0,T],$$

$$a_\beta(\varphi(t),\psi) - a_e(u(t),\psi) =< q(t),\psi >_W \tag{II.2.88}$$

$$\forall \psi \in W, \quad t \in [0,T],$$

$$u(0) = u_0. \tag{II.2.89}$$

Il l'est clair que le problème $(P^{I.V.EV}_{VG,\theta\longrightarrow 0})$ représente la formulation variationnelle d'un modèle dans le chapitre 1, patie II. Dans le cas ou le cylindre piézoélectrique est supposé électro-élastique.

Supposons dans tout ce qui suit que (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites. Alors, il suit du Théorème (II.2.1) que le problème $(P^{I.V.EV}_{VG,\theta})$ a une unique solution $(u_\theta,\varphi_\theta)$ qui satisfaite

$$u_\theta \in W^{2,2}(0,T;V), \qquad \varphi_\theta \in W^{1,2}(0,T;W). \tag{II.2.90}$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème $(P^{I.V.EV}_{VG,\theta\longrightarrow 0})$, nous avons besoin des hypothèses supplémentaires. Nous supposons donc que le coefficient de Lâmé μ vérifie

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \mu^* > 0 \text{ tel que } \mu(\boldsymbol{x}) \geq \mu^* \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{II.2.91}$$

et notons que dans ce cas, la forme bilinéaire a_μ est coersive, c'est à dire

$$a_\mu(u,v) \geq \mu^* \|v\|_V^2 \qquad \forall v \in V. \tag{II.2.92}$$

Nous employons la coersivité de la forme bilinéaire a_β, et le Lemme de Lax-Milgram pour voir qu'il existe un élément unique $\varphi_0 \in W$ tel que

$$a_\beta(\varphi_0,\psi) - a_e(u_0,\psi) =< q(0),\psi >_W \qquad \forall \psi \in W. \tag{II.2.93}$$

Nous utilisons l'élément φ_0 définit ci-dessus pour introduire la condition

$$a_\mu(u_0,v) - a_e(\varphi_0,v) + j(v) \;\; \geq \; < f(0),v >_V \qquad \forall v \in V. \tag{II.2.94}$$

L'inégalité (II.2.94) représente une condition compatible sur la donnée initiale qui est nécessaire dans plusières problèmes quasistatique. Il suit que du Théorème (II.2.1) et, sous les hypothèses (II.2.9)-(II.2.17), (II.2.91) et (II.2.92), le problème électro-élastique $(P^{I.V.EV}_{VG,\theta\longrightarrow 0})$ a une solution unique (u,φ) ayant la régularité $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ et $\varphi \in W^{1,2}(0,T;W)$.

Considérons amintenant l'hypothèse suivante :

$$\frac{1}{\theta^*}\|\theta\|^2_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0. \tag{II.2.95}$$

Théorème II.2.10. *Supposons que (II.2.9)-(II.2.17), (II.2.91), (II.2.92) et (II.2.94) sont satisfaites. Alors la solution* $(u_\theta,\varphi_\theta)$ *du problème* $(P^{I.V.EV}_{VG,\theta})$ *converge vers la solution* (u,φ) *du problème* $(P^{I.V.EV}_{VG,\theta\longrightarrow 0})$*, c'est à dire*

$$\|u_\theta - u\|_{C([0,T];V)} \longrightarrow 0, \qquad \|\varphi_\theta - \varphi\|_{C([0,T];W)} \longrightarrow 0. \tag{II.2.96}$$

Démonstration. Les égalités et les inégalités ci-dessus sont satisfaites pour presque partout $t \in [0,T]$. Nous prenons $v = \dot{u}(t)$ dans (II.2.84), $v = \dot{u}_\theta(t)$ dans (II.2.87) et en faisant la somme des deux inégalités obtenues, ce qui donne

$$a_\theta(\dot{u}_\theta(t),\dot{u}(t)-\dot{u}_\theta(t)) + a_\mu(u_\theta(t)-u(t),\dot{u}(t)-\dot{u}_\theta(t)) + a_e(\varphi_\theta(t)-\varphi(t),\dot{u}(t)-\dot{u}_\theta(t)) \ \geq 0.$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} a_\theta(\dot{u}_\theta(t)-\dot{u}(t),\dot{u}_\theta(t)-\dot{u}(t)) + a_\mu(u_\theta(t)-u(t),\dot{u}_\theta(t)-\dot{u}(t)) \ &\leq \\ a_\theta(\dot{u}(t),\dot{u}(t)-\dot{u}_\theta(t)) + a_e(\varphi_\theta(t)-\varphi(t),\dot{u}(t)-\dot{u}_\theta(t))& \end{aligned} \tag{II.2.97}$$

Nous utilisons l'hypothèse (II.2.10) pour voir que

$$\begin{aligned} \theta^*\|\dot{u}_\theta(t)-\dot{u}(t)\|^2_V + a_\mu(u_\theta(t)-u(t),\dot{u}_\theta(t)-\dot{u}(t)) \ &\leq \\ \|\theta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\dot{u}(t)\|_V\|\dot{u}_\theta(t)-\dot{u}(t)\|_V + a_e(\varphi_\theta(t)-\varphi(t),\dot{u}(t)-\dot{u}_\theta(t))& \end{aligned} \tag{II.2.98}$$

et nous combinons cette inégalité avec l'inégalité élémentaire pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\dot{u}(t)\|_V\|\dot{u}_\theta(t)-\dot{u}(t)\|_V \ &\leq \\ \frac{\|\theta\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{4\theta^*}\|\dot{u}(t)\|^2_V + \theta^*\|\dot{u}_\theta(t)-\dot{u}(t)\|^2_V.& \end{aligned} \tag{II.2.99}$$

Comme résultat nous obtenons

$$\begin{aligned} a_\mu(u_\theta(t)-u(t),\dot{u}_\theta(t)-\dot{u}(t)) \ &\leq \\ \frac{\|\theta\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{4\theta^*}\|\dot{u}(t)\|^2_V + a_e(\varphi_\theta(t)-\varphi(t),\dot{u}(t)-\dot{u}_\theta(t))& \end{aligned} \tag{II.2.100}$$

Dand un autre côté, nous dérivons (II.2.85) et (II.2.88) par rapport au temps, en soustraire les égalités obtenues et, nous utilisons la définition de la forme bilinéaire a_e pour obtenir

$$a_\beta(\dot{\varphi}_\theta(t) - \dot{\varphi}(t),\psi) \;=\; a_e(\dot{u}_\theta(t) - u(t),\psi) = a_e(\psi,\dot{u}_\theta(t) - \dot{u}(t)) \quad \forall \psi \in W.$$

Nous prenons maintenant $\psi = \varphi(t) - \varphi_\theta(t)$ dans l'égalité précédente pour trouver

$$a_e(\varphi_\theta(t) - \varphi(t),\dot{u}(t) - \dot{u}_\theta(t)) \;=\; a_\beta(\dot{\varphi}_\theta(t) - \dot{\varphi}(t),\varphi(t) - \varphi_\theta(t)). \tag{II.2.101}$$

Par ailleurs, nous réécrivons (II.2.85) et (II.2.87) au temps $t = 0$ et, nous utilisons la consition initiale

$$u_\theta(0) = u(0)$$

et l'unicité de la solution de l'équation variationnelle (II.2.93) pour voir que

$$\varphi_0(0) = \varphi(0) = \varphi_0. \tag{II.2.102}$$

Nous combinons maintenant (II.2.100) et (II.2.101) pour obtenir

$$\begin{aligned} a_\mu(u_\theta(t) - u(t),\dot{u}_\theta(t) \;&\leq\; \frac{\|\theta\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{4\theta^*}\|\dot{u}(t)\|^2_V + \\ &+ a_\beta(\dot{\varphi}_\theta(t) - \dot{\varphi}(t),\varphi(t) - \varphi_\theta(t)). \end{aligned} \tag{II.2.103}$$

Soit $s \in [0,T]$. Nous intégrons l'inégalité précédente sur l'intervalle $[0,s]$, en tenant compte de la donnée initiale (II.2.86), (II.2.89), (II.2.102) et, nous utilisons la coersivité de la forme bilinéaire a_β et (II.2.92) pour obtenir

$$\frac{\mu^*}{2}\|u_\theta(s) - u(s)\|^2_V \;\leq\; \frac{\|\theta\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2\theta^*}\int_\Gamma \|\dot{u}(t)\|^2_V dt. \tag{II.2.104}$$

Nous réécrivons (II.2.85) et (II.2.88) avec $t = s$, $\psi = \varphi_\theta(s) - \varphi(s)$ et, en soustraire les égalités obtenues, ce qui donne

$$a_\beta(\varphi_\theta(s) - \varphi(s),\varphi_\theta(s) - \varphi(s)) \;=\; a_e(u_\theta(s) - u(s),\varphi_\theta(s) - \varphi(s)).$$

Alors, on utlise la coersivité de la forme bilinéaire a_β et, la continuité de la forme bilinéaire a_e on obtient

$$\|\varphi_\theta(s) - \varphi(s)\|_W \;\leq\; \frac{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}{\beta^*}\|u_\theta(s) - u(s)\|_V. \tag{II.2.105}$$

Supposons que (II.2.95) est satisfaite. Alors (II.2.104) et (II.2.105) donnent le résultat de convergence (II.2.96), ce qui conclut la démonstration. □

Considérons maintenant le cas ou on a une viscosité homogène, c'est à dire, le cas ou l'hypothèse (II.2.95) est remplacée par l'hypothèse

$$\theta(x) = 0 \qquad p.p. \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

ou θ est une constante positive donnée. Dans ce cas $\|\theta\|_{L^\infty(\Omega)} = \theta$, $\theta^* = \theta$ et, la convergence (II.2.95) est équivalente à $\theta \longrightarrow 0$. Alors, de (II.2.96), nous concluons que la solution faible du problème antiplan électro-viscoélastique avec la loi de frottement de Tresca peut approcher lorsque la solution faible du problème antiplan électro-élastique avec frottement de Tresca, quand la viscosité est petite.

2.5 Problème électro-viscoélastique avec frottement dépendant du glissement

Dans cette section, nous considérons le problème de contact piézoélectrique avec frottement dans le cas quand le seuil de frottement g dépend du glissement $|u|$ ou du taux du glissement $|\dot{u}|$. La formulation classique de ce genre des problèmes peut se déduire directement de (II.2.1)-(II.2.8) en changeant le seuil de frottement g par $g(|u|)$ ou par $g(|\dot{u}|)$, respectivement. Alors le problème antiplan de contact piézoélectrique avec frottement dépendant du glissement est formulé comme suit.

Problème ($\mathbf{P_1^{I.QV.EV.DG}}$). *Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \rightarrow I\!R$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0,T] \rightarrow I\!R$ tel que*

(II.2.106) $$div(\theta\nabla\dot{u} + \mu\nabla u) + div(e\nabla\varphi) + f_0 = 0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T],$$

(II.2.107) $$div(e\nabla u) - div(\beta\nabla\varphi) = q_0 \quad dans \quad \Omega \times [0,T],$$

(II.2.108) $$u = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \times [0,T],$$

(II.2.109) $$\theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = f_2 \quad sur \quad \Gamma_2 \times [0,T],$$

(II.2.110) $$\begin{cases} |\theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi| \leq g(|u|), \\ \theta\partial_\nu\dot{u} + \mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = -g(|u|)\dfrac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \quad si \quad \dot{u} \neq 0 \quad sur \quad \Gamma_3 \times [0,T], \end{cases}$$

(II.2.111) $$\varphi = 0 \quad sur \quad \Gamma_a \times [0,T],$$

(II.2.112) $$e\partial_\nu u - \beta\partial_\nu\varphi = q_2 \quad sur \quad \Gamma_b \times [0,T],$$

(II.2.113) $$u(0) = u_0 \quad dans \quad \Omega.$$

Pour étudier ce problème, nous supposons que les hypothèses (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites. Puis, nous tournons vers la formulation variationnelle du problème ($P_1^{I.QV.EV.DG}$), et pour cela, nous introduisons les espaces V et W définis par (I.2.39) et (I.2.40).

Dans un premier temps, nous supposons que le problème avec frottement dépendant du glissement $(P_1^{I.QV.EV.DG})$ a une solution $u \in V$ et $\varphi \in W$. Nous multiplions l'équation (II.2.106) par un élément $(v - \dot{u})$ et l'équation (II.2.107) par un élément $\psi \in W$. Puis, en utilisant la formule de Green (I.2.44) et, nous tenons compte des notations (II.1.18)-(II.1.20), (II.1.22)-(II.1.24) nous obtenons le problème suivant

Problème $(\mathbf{P_V^{I.QV.EV.DG}})$. *Trouver $u : [0,T] \longrightarrow I\!R$ et $\varphi : [0,T] \longrightarrow I\!R$ tel que*

$$\begin{aligned} a_\theta(\dot{u}(t),v - \dot{u}(t)) + a_\mu(u(t),v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t),v - \dot{u}(t)) + \\ j(u(t),v) - j(u(t),\dot{u}(t)) \ \geq\ < f(t),v - \dot{u}(t) >_V \\ \forall v \in V, \quad p.p.\ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{II.2.114}$$

et

$$a_\beta(\varphi(t),\psi) - a_e(u(t),\psi) =< q(t),\psi >_W \qquad \forall \psi \in W \quad p.p.\ t \in [0,T], \tag{II.2.115}$$

$$u(0) = u_0, \tag{II.2.116}$$

Les formes bilinéaires obtenues dans le problème $(P_V^{I.QV.EV.DG})$ sont données par (II.2.20), les fonctions $f(\cdot)$ et $q(\cdot)$ sont données par (II.2.22) et (II.2.23), respectivement et, la fonctionnelle $j(\cdot)$ est donnée par :

$$j(u(t),v) = \int_{\Gamma_3} g(|u|)v da \qquad \forall v \in V \quad t \in [0,T]. \tag{II.2.117}$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème II.2.11. *Supposons que (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites. Alors il existe une solution unique du problème $(P_V^{I.QV.EV.DG})$ ayant la régularité :*

$$u \in W^{2,2}(0,T;V) \quad et \quad \varphi \in W^{1,2}(0,T;W). \tag{II.2.118}$$

La démonstration du Théorème (II.2.11) se faite en plusières étapes. Nous supposons dans tout ce qui suit que les hypothèses (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites et, partout ci-dessous, nous dénotons par c diverses constantes positives qui sont indépendant du temps et dont la valeur peut changer d'un cas à un autre.

Le couple des fonctions (u,φ) qui résout le problème (II.2.114)-(II.2.116) s'appelle solution faible du problème électro-mécanique $(P_V^{I.QV.EV.DG})$. Nous concluons d'après le Théorème (II.2.11) que le problème antiplan de contact $(P_V^{I.QV.EV.DG})$ admet une solution faible unique, à condition (II.2.9)-(II.2.17) sont satisfaites.

a)- **Autre méthode**

Dans ce paragraphe nous allons présenter la méthode de point fixe qui nous permet de prouver encore une fois l'existence et l'unicité de la solution du problème (II.2.114)-(II.2.116).

Soit $\eta \in C([0,T];V)$ donné et, dans la première étape, nous considérons le problème variationnel intermédiaire suivant

Problème $(\mathbf{P1_{V,\eta}^{I.QV.EV.DG}})$. *Trouver le champ des déplacemets $u_\eta : [0,T] \longrightarrow V$ tel que*

$$\begin{aligned} & a_\theta(\dot{u}_\eta(t),v-\dot{u}_\eta(t)) + a_\mu(u_\eta(t),v-\dot{u}_\eta(t)) + (\eta(t),v-\dot{u}_\eta(t))_V + \\ & +j(u(t),v) - j(u(t),\dot{u}(t)) \;\; \geq \; < f(t),v-\dot{u}_\eta(t) >_V \qquad \text{(II.2.119)} \\ & \forall v \in V, \qquad t \in [0,T], \end{aligned}$$

$$u_\eta(0) = u_0, \qquad \text{(II.2.120)}$$

On a le résultat suivant pour le problème $(P1_{V,\eta}^{I.QV.EV.DG})$.

Lemme II.2.12.

(1)- Il existe une solution unique $u_\eta \in C^1([0,T];V)$ pour le problème $(P1_{V,\eta}^{I.QV.EV.DG})$.

(2)- Si $u_1 \in C([0,T];V)$ et $u_2 \in C([0,T];V)$ sont les deux solutions du problème $(P1_{V,\eta}^{I.QV.EV.DG})$, alors il exsite $c > 0$ tel que

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V \;\; \leq \;\; c(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V) \qquad \forall t \in [0,T]. \qquad \text{(II.2.121)}$$

(3)- Si, de plus, $\eta \in W^{1,2}([0,T];V)$, alors la solution satisfaite $u_\eta \in W^{2,2}([0,T];V)$.

Démonstration. Nous appliquons le Théorème (III.1.25) sur l'espace $X = V$ avec le produit scalaire $< \cdot,\cdot >_V$ et la norme associée $\|\cdot\|_V$, avec le choix $a = a_\theta$, $b = a_\mu$, $h_\eta = f - \eta$. Il est clair que les deux formes bilinéaires a_θ et a_μ satisfont (III.1.45) et (III.1.46), respectivement, et nous utilisons (II.2.11) il suit que la fonctionnelle j satisfait la condition (III.1.47). De plus, nous utilisons (II.2.22) et (II.2.23) et la régularité $\eta \in C([0,T];V)$, il est facile de voir que $f - \eta \in C([0,T];V)$, c'est à dire h satisfait (III.1.48). Finalement, nous notons que (III.1.49) est lui aussi satisfait et, si $\eta \in W^{1,2}([0,T];V)$ alors $h = f - \eta \in W^{1,2}([0,T];V)$. Le Lemme (II.2.12) est une conséquence directe du Théorème (II.2.11). □

Dans l'étape suivante, nous utilisons la solution $u_\eta \in C^1([0,T];V)$ obtenue dans le Lemme (II.2.12) pour construire le problème variationnel pour le champ électrique.

Problème ($\mathbf{P2^{I.QV.EV.DG}_{V,\eta}}$). *Trouver le champ électrique* $\varphi_\eta : [0,T] \longrightarrow W$ *tel que*

$$a_\beta(\varphi_\eta(t),\nabla\psi) - a_e(u_\eta(t),\psi) = < q(t),\psi >_W \qquad \forall\psi \in W, \quad t \in [0,T]. \tag{II.2.122}$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité pour le problème ($P2^{I.QV.EV.DG}_{V,\eta}$).

Lemme II.2.13. *Il existe une unique solution* $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W)$ *qui satisfait (II.2.122). De plus, si* φ_{η_1} *et* φ_{η_2} *sont les solutions de (II.2.122) correspondant à* $\eta_1,\eta_2 \in C([0,T];V)$ *alors, il existe* $c > 0$*, telle que*

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \;\leq\; c\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{II.2.123}$$

Démonstration. Soit $t \in [0,T]$. nous utilisons les propriétés de la forme bilinéaire a_β et, le Lemme de Lax-Milgram pour voir qu'il existe un unique élément $\varphi_\eta(t) \in W$ qui résout (II.2.122) à chaque moment $t \in [0,T]$. Nous considérons maintenant $t_1,t_2 \in [0,T]$; nous utilisons (II.2.122) et la coersivité de la forme bilinéaire a_β nous obtenons que

$$\begin{aligned}\beta^*\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|^2_W \;&\leq\; \|e\|_{L^\infty(\Omega)}\|u(t_1) - u(t_2)\|_V + \\ &\qquad \|q(t_1) - q(t_2)\|_W\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W\end{aligned} \tag{II.2.124}$$

ce qui implique que

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W \;\leq\; c(\|u(t_1) - u(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W). \tag{II.2.125}$$

Nous concluons que la régularité $u_\eta \in C^1([0,T];V)$ combinée avec (II.2.22) et (II.2.23) implique que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W)$ ce qui conclut la démonstration. □

Nous utilisons maintenant le Théorème de réprésentation de Riesz pour définir l'élément $\Lambda\eta(t) \in V$ par l'égalité :

$$< \Lambda\eta(t),v >_V = a_e(\varphi_\eta(t),v) \qquad \forall v \in V, \quad t \in [0,T]. \tag{II.2.126}$$

Il est clair pour un $\eta \in C([0,T];V)$ donné, la fonction $t \longmapsto \Lambda\eta(t)$ prolonge dans $C([0,T];V)$. Dans l'étape suivante nous montrons que l'opérateur $\Lambda : C([0,T];V) \longrightarrow C([0,T];V)$ admet un point unique fixe.

Lemme II.2.14. *Il existe un unique* $\bar\eta \in W^{1,2}(0,T;V)$ *tel que* $\Lambda\bar\eta = \bar\eta$.

Démonstration. Soient $\eta_1,\ \eta_2 \in C([0,T];V)$ et notons par u_i et φ_i les fonctions u_{η_i} et φ_{η_i} obtenues dans les Lemmes (II.2.12) et (II.2.13), pour $i = 1,2$. Soit $t \in [0,T]$.

Nous utilisons (II.2.126) et la forme bilinéaire a_e dans la relation (II.2.20) pour obtenir

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \;\leq\; c\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W$$

et tenons compte de (II.2.121) pour trouver

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \;\leq\; c\|u_1(t) - u_2(t)\|_V. \tag{II.2.127}$$

D'un autre côté, on sait que

$$u_i(t) = u_0 + \int_\Gamma \dot{u}_i(s)ds$$

et alors

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \;\leq\; \int_\Gamma \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \tag{II.2.128}$$

Nous utilisons l'inégalité (II.2.128) dans (II.2.121) pour obtenir

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V \;\leq\; (\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V + \int_\Gamma \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds).$$

Il suit maintenant de l'inégalité de Gronwalle que

$$\int_\Gamma \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \;\leq\; c\int_\Gamma \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V ds. \tag{II.2.129}$$

Nous combinons (II.2.127)-(II.2.129) pour obtenir

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \;\leq\; c\int_\Gamma \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V ds \tag{II.2.130}$$

et, nous réécrivons cette inégalité n fois, ce qui donne

$$\|\Lambda^n\eta_1(t) - \Lambda^n\eta_2(t)\|_V \;\leq\; \frac{C^n}{n!}\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{C([0,T];V)}.$$

Cette dernière inégalité montre que sous suffisamment valeurs de n, que Λ^n est une application contractante sur l'espace de Banach $C([0,T];V)$ et, alors, il existe un élément unique $\bar{\eta} \in C([0,T];V)$ tel que $\Lambda\bar{\eta} = \bar{\eta}$. Il suit du Lemme (II.2.13) que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W)$ et, donc, la définition (II.2.126) de l'opérateur Λ combiné avec les propriétés de la forme bilinéaire a_e implique que $\Lambda\bar{\eta} \in W^{1,2}(0,T;V)$; cette régularité qui est combinée avec l'égalité $\Lambda\bar{\eta} = \bar{\eta}$ montre que $\bar{\eta} \in W^{1,2}(0,T;V)$ ce qui conclut la démonstration. □

Nous avons tous les ingrédients pour prouver le Théorème (II.2.11).

(a)- Existence. Soit $\bar{\eta} \in W^{1,2}(0,T;V)$ un point fixe de l'opérateur Λ, et soit $u_{\bar{\eta}}$, $\varphi_{\bar{\eta}}$ sont les deux solutions des problèmes $(P1^{I.QV.EV.DG}_{V,\eta})$ et $(P2^{I.QV.EV.DG}_{V,\eta})$, respectivement, pour $\eta = \bar{\eta}$. Il suit de (II.2.126) que

$$< \bar{\eta}(t),v >_V = a_e(\varphi_{\bar{\eta}(t)},v) \qquad \forall v \in V, \quad t \in [0,T]$$

et, alors (II.2.119), (II.2.120) et (II.2.122) impliquent que $(u_{\bar{\eta}},\varphi_{\bar{\eta}})$ est une solution du problème $(P2^{I.QV.EV.DG}_{V,\eta})$. La régularité (II.2.118) de la solution suit des Lemmes (II.2.12) (3) et (II.2.13).

(b)- Unicité. L'unicité de la solution suit de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ. Il peut t'obtenir en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans [7] et [41].

Troisième partie

Annexe

Partie III

Annexe

L'objectif de cette annexe est de faciliter la lecture de ce mémoire. Elle contient quelques élément d'analyse dans les espaces de Hilbert dans lesquels on étudie les problèmes antiplans puis nous présentons des résultats d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques et d'évolutions utilisées dans la partie II de ce mémoire. Par ailleurs nous présentons quelques inégalités utilisées dans l'étude des problèmes antiplans. Pour plus de détails sur cette partie nous renvoyons aux ouvrages classiques de Brezis [9] et [10]. Nous terminons par quelques inégalités et lemmes souvent utilisés dans la partie II. Pour plus de détails sur cette partie nous indiquons Adams [1], Brezis [9], Duvaut et Lions [18], Kikuchi [29], Stromberg [46], M. Shillor et Sofonea [40], [41] et [42].

CHAPITRE 1

ANNEXE

Đans ce paragraphe nous décrivons le cadre fonctionnel dans lequel on travaille dans la deuxième partie de ce mémoire. X désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire $< \cdot,\cdot >_X$ ainsi de la norme associée $\| \cdot \|_X$. On note aussi par $X^{'}$ l'espace dual de X muni par la norme $\| \cdot \|_{X'}$ et par $< \cdot,\cdot >_{X' \times X}$ la dualité entre $X^{'}$ et X.

1.1 Quelques résultats élémentaires

Théorème III.1.1. *(* **Théorème de représentation de Riesz-Fréchet** *)*
Pour toute fonction $\varphi \in X^{'}$, il existe $f \in X$ unique tel que

(III.1.1) $$< \varphi,v >_{X' \times X} = < v,f >_X \qquad \forall v \in X.$$

En outre on a:

(III.1.2) $$\|\varphi\|_{X'} = \|f\|_X.$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter d'une manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \longmapsto f$ est une isométrie qui permet d'identifier X et son dual $X^{'}$.

Définition III.1.2. *On dit que la suite $(x_n) \subset X$ converge faiblement vers $x \in X$ et on note $x_n \rightharpoonup x$ si*

(III.1.3) $$< v,x_n >_X \ \rightharpoonup < v,x >_X \qquad \forall v \in X.$$

Dans ce cas, x s'appelle *limite faible* de la suite (x_n). En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si x_n converge fortement vers x dans X, alors la suite x_n converge faiblement vers x dans X. La réciproque n'est pas toujours vraie. De plus, puisque tout espace de Hilbert est réflexif, on a les résultats suivants :

Théorème III.1.3. *Soit (x_n) une suite bornée dans X. Il existe alors un élément $x \in X$ et une sous-suite de (x_n) notée encore (x_n) telle que $x_n \rightharpoonup x$. Un élément $x \in X$ qui est la limite faible d'une sous-suite de la suite (x_n) s'appelle point faiblement adhérent à la suite (x_n).*

Théorème III.1.4. *Si la suite $(x_n) \in X$ possède un seul point faiblement adhérent $x \in X$, alors $x_n \rightharpoonup x$ dans X. Autrement dit, le théroème précédent affirme que si toutes les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (x_n) ont la même limite faible x, alors la suite (x_n) converge faiblement vers x.*

Théorème III.1.5. *(* **Théorème de point fixe de Banach** *) Soit $f : X \longrightarrow X$ une fonction contractante, c'est-à-dire, il existe une constante positive $k \in]0,1[$ tel que*

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq k\|x - y\|_X \qquad \forall x,y \in X. \tag{III.1.4}$$

Alors il existe un seul point $\xi \in X$ tel que

$$f(\xi) = \xi. \tag{III.1.5}$$

1.2 Fonctions convexes et sous-différentiabilité

Nous présentons dans ce paragraphe quelques rappels sur les fonctions convexes et sur les fonctions semi-continues inférieurement, ensuite nous donnons une généralisation de la notion du gradient pour les fonctions convexes.

Définition III.1.6. *Soit φ une fonction définie sur un espace vectoriel réel E et à valeurs dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. La fonction φ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à ∞, c'est-à-dire, s'il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) < \infty$.*

Définition III.1.7. *La fonction φ est dite convexe si*

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u,v \in E, \quad t \in]0,1[. \tag{III.1.6}$$

Définition III.1.8. *La fonction φ est dite strictement convexe si*

$$\varphi(tu + (1-t)v) < t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u,v \in E \quad v \neq u, \quad t \in]0,1[. \tag{III.1.7}$$

Théorème III.1.9. *Soit $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est s.c.i si seulement si elle est s.c.i par rapport à la topologie faible de X.*

Définition III.1.10. *Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty,\infty]$ est dite Gâteaux différentiable au point $u \in X$, s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in X$ tel que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u)}{t} =< \varphi(u),v >_X \quad \forall v \in X. \tag{III.1.8}$$

L'élément $\nabla\phi(u)$ s'appelle le gradient de φ en u.

Définition III.1.11. *La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de X; dans ce cas l'opérateur gradient de la fonction $u \longmapsto \nabla\varphi(u) : X \longrightarrow X$ peut être caractérisé de la façon suivante.*

Lemme III.1.12. *Soit $\varphi : X \longrightarrow]-\infty,\infty]$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est convexe si et seulement si*

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq < \nabla\varphi(u),v-u >_X \quad \forall u,v \in X. \tag{III.1.9}$$

La convexité d'une fonction Gâteaux-différentiable peut suggère une généralisation de la notion du gradient aux fonctions convexes.

Définition III.1.13. *La fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty,\infty]$ est dite sous-différentiable en un point $u \in X$ s'il existe $f \in X$ tel que*

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq < f,v-u >_X \qquad \forall v \in X. \tag{III.1.10}$$

L'élément est alors appelé sous-gradient de φ en u et, l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-gradient de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X \quad tel \quad que \quad \varphi(v) - \varphi(u) \geq < f,v-u >_X \quad \forall v \in X\}. \tag{III.1.11}$$

Lemme III.1.14. *Soit $\varphi : X \longrightarrow]-\infty,\infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et le sous-différentiel est défini dans le lemme suivant.

Lemme III.1.15. *Soit $\varphi : X \longrightarrow]-\infty,\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux différentiable. Alors φ est sous-différentiable et*

$$\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\} \qquad pour\ tout \quad u \in X. \tag{III.1.12}$$

Définition III.1.16.

(**a**)- La fonction $j : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement si

$$\forall (x_n)_{n\geq 0} \subset X \quad \text{telle que} \quad x_n \longrightarrow x \quad \text{dans X on a :}$$

$$\liminf_{n\to 0}(j(x_n)) \geq j(x) \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

(**b**)- La fonction $j : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite faiblement semi-continue inférieurement si

$$\forall (x_n)_{n\geq 0} \subset X \quad \text{telle que} \quad x_n \rightharpoonup x \quad \text{dans X on a :}$$

$$\liminf_{n\to 0}(j(x_n)) \geq j(x) \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Proposition III.1.17. *Soit la fonction $j : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ convexe. Alors*

j semi-continue inférieurement $\Leftrightarrow$ j faiblement semi-continue inférieurement.

1.3 Quelques inégalités

Nous présentons dans cette section quelques inégalités élémentaires qui sont utiles dans la partie II de cette thèse. A cet effet, nous employons au-dessous la notation $C([a,b],I\!R)$ pour l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle compact $[a,b] \subset I\!R$.

Lemme III.1.18. (**Inégalité de Young**) *Soient $p,\ q \in I\!R$ deux conjugués tels que $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall a,b \geq 0. \tag{III.1.13}$$

Démonstration. Soit $a,b \geq 0$. On a deux cas à étudier:

- **Cas 1 :** Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors l'inégalité (III.1.13) est satisfaite.
- **Cas 2 :** Supposons que $a > 0$ et $b > 0$. Considérons que la fonction $f :]0,\infty] \longrightarrow I\!R$

$$f(t) = t^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}t. \tag{III.1.14}$$

Il est facile de calculer la première et la deuxième dérivée de la fonction f

$$f^{'}(t) = \frac{1}{p}(t^{\frac{1}{p}-1} - 1) \tag{III.1.15}$$

et

$$f^{''}(t) = \frac{1}{p}(\frac{1}{p} - 1)t^{\frac{1}{p}-2}. \tag{III.1.16}$$

Puisque $p > 1$, il suit que la deuxième dérivée $f^{''}(t)$ est négative sur l'intervalle $]0,\infty]$ et donc la première dérivée $f^{'}(t)$ est une fonction décroissante. L'égalité $f^{'}(t) = 0$ implique que $f^{'}(t)$ est une fonction positive sur $]0,1[$ et négative $]1,\infty[$ et ceci nous permet de déduire que la fonction $f(t)$ admet un maximum au point $t = 1$. Nous concluons que

$$f(t) \leq f(1) \qquad \forall t \geq 0,$$

donc

$$t^{\frac{1}{p}} - 1 \leq \frac{1}{p}(t-1) \qquad \forall t > 0. \tag{III.1.17}$$

On prend $t = \frac{a^p}{b^q}$ dans (III.1.17) et, après certaines manipulations en tenant compte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nous obtenons (III.1.13). □

Le lemme précédent nous permet d'obtenir le résultat suivant

Lemme III.1.19. *Soit $p > 0$. Alors*

$$|u|^{p-1}u(v-u) \leq \frac{1}{p+1}|v|^{p+1} - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} \qquad \forall u,v \in I\!R \quad u \neq 0. \tag{III.1.18}$$

Démonstration.

Soit u et v dans $I\!R$, avec $u \neq 0$. Il est facile de voir que

$$|u|^{p-1}(u-v) \leq |u|^p v - |u|^{p+1}. \tag{III.1.19}$$

Nous appliquons (III.1.13) pour $a = |v|$, $b = |u|^p$ et pour le couple $(p+1, \frac{p+1}{p})$ d'exposants conjugués; nous obtenons alors :

$$|u|^p|v| \leq \frac{1}{p+1}|v|^{p+1} + \frac{p}{p+1}|u|^{p+1}. \tag{III.1.20}$$

L'inégalité (III.1.18) est une conséquence de (III.1.19) et (III.1.20). □

Lemme III.1.20. *(**Inégalité de Gronwall**) Supposons que $f,\ g \in C([a,b])$ satisfont l'inégalité*

$$f(t) \leq g(t) + c\int_a^t f(s)ds \qquad \forall\ t \in [a,b], \tag{III.1.21}$$

avec c est une constante. Alors on a :

$$f(t) \leq g(t) + c\int_a^t g(s)e^{c(t-s)}ds \qquad \forall t \in [a,b]. \tag{III.1.22}$$

De plus, si la fonction $g(\cdot)$ est décroissante, alors nous obtenons :

$$f(t) \leq g(t)e^{c(t-a)} \qquad \forall\ t \in [a,b]. \tag{III.1.23}$$

Démonstration. Définissons la fonction $F(s)$ par :

$$F(s) \leq \int_a^s f(r)dr \qquad \forall s \in [a,b]. \tag{III.1.24}$$

Alors $F^{'}(s) = f(s)$. De l'hypothèse (III.1.21) nous avons :

$$F^{'}(s) \leq g(s) + cF(s) \qquad \forall s \in [a,b]. \tag{III.1.25}$$

Donc,

$$(e^{-cs}F(s))^{'} \leq g(s)e^{-cs} \qquad \forall s \in [a,b]. \tag{III.1.26}$$

Soit $t \in [a,b]$. Nous intégrons l'inégalité (III.1.26) entre a et t et, tenons compte que $F(a) = 0$; alors nous obtenons

$$e^{-Ct}F(t) \leq \int_a^t g(s)e^{-Cs}ds. \tag{III.1.27}$$

Et alors

$$F(t) \leq \int_a^t g(s)e^{-c(t-s)}ds. \tag{III.1.28}$$

Nous combinons maintenant (III.1.21) avec (III.1.23) pour trouver que:

$$f(t) \leq g(t) + cF(t)$$

Nous utilisons (III.1.25) pour obtenir (III.1.22).

Par ailleurs, si la fonction g est non décroissante, alors (III.1.22) implique que

$$f(t) \leq g(t) + g(t)c\int_a^t e^{-c(t-s)}ds = g(t)e^{-c(t-a)}, \tag{III.1.29}$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

1.4 Inéquations variationnelles elliptiques

Dans cette section, nous présentons une classe des inéquations variationnelles elliptiques dont laquelle notre étude est fondée sur un résumé des résultats d'existence et d'unicité de la solution de ce genre de problèmes. A cet effet, Soit X un espace de Hilbert réel muni par le produit $< \cdot,\cdot >_X$ et la norme associée $\|\cdot\|_X$ et, soient $a : X\times X \longrightarrow I\!R$ une forme bilinéaire, la fonctionnelle $j : X \longrightarrow]\infty,+\infty]$ et, la focntion $f : X \longrightarrow I\!R$ et, nous considérons le problème suivant :

Problème ($\mathbf{P_1^{I.V}}$). *Trouver $x \in X$ tel que*

$$a(x,y-x) + j(y) - j(x) \geq < f,y-x >_X \qquad \forall y \in X. \tag{III.1.30}$$

Une inéquation variationnelle sous la forme (III.1.30) est appelée *inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce*. Nous sommes intéressé à trouver des conditions satisfaisantes afin d'avoir l'existence et l'unicité de la solution pour l'inéquation variationnelle (III.1.30). Pour cela, nous posons les hypothèses suivantes

• **Hypothèses :**

$$\left.\begin{array}{l} a : X \times X \to I\!R \ \textit{ est une forme bilinéaire et} \\ \textbf{(a)} \ \textit{il exists } M > 0 \ \textit{ tel que} \\ \quad |a(x,y)| \leq M \, \|x\|_X \, \|y\|_X \quad \forall x,y \in X, \\ \textbf{(b)} \ \textit{il existe } m > 0 \ \textit{ tel que} \\ \quad a(y,y) \geq m\|y\|_X^2 \quad \forall y \in X. \end{array}\right\} \tag{III.1.31}$$

$$j : X \to]-\infty,\infty] \ \textit{ est une fonctionnelle convexe, propre et s.c.i.} \tag{III.1.32}$$

Remarquons que la condition (III.1.31) nous montre que la forme $a(.,.)$ est continue et coercive. Alors, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant

Théorème III.1.21. *Soit X un espace de Hilbert et supposons que (III.1.31) et (III.1.32) sont satisfaites. Alors, pour tout $f \in X$, l'inéquation variationnelle elliptique définie dans le problème $(P_1^{I.V})$ possède une solution unique $x \in X$. De plus, l'application $f \longmapsto u$ est de Lipschitz.*

Nous étudierons la dépendance de la solution de *l'inéquation variationnelle elliptique* définie dans le problème $(P_1^{I.V})$ par rapport à la fonctionnelle j. A cet effet, nous supposons que (III.1.31) et (III.1.32) sont satisfaites, f est dans X, et pour tout $\rho > 0$, soit j_ρ une perturbation de la fonctionnelle j qui satisfait (III.1.32). Nous considérons le problème suivant :

Problème ($\mathbf{P_2^{I.V}}$). *Trouver $x_\rho \in X$ tel que*

(III.1.33) $$a(x_\rho,y - x_\rho) + j_\rho(y) - j_\rho(x_\rho) \geq < f,y - x_\rho >_X \qquad \forall y \in X.$$

Nous déduisons du théorème (III.1.21) que *l'inéquation variationnelle elliptique* définie dans le problème ($P_1^{I.V}$) a une solution unique $x \in X$ et, pour tout $\rho > 0$, *l'inéquation variationnelle elliptique* définie dans le problème ($P_2^{I.V}$) a aussi une solution unique notée $x_\rho \in X$. Généralement la fonctionnelle j_ρ est plus régulière que la fonctionnelle j par exemple, elle est Gâteaux différentiable), et alors, pour cette raison, l'inéquation variationnelle (III.1.33) est appelée *l'inéquation variationnelle régularisée* de l'inéquation variationnelle (III.1.30) définie dans le problème ($P_1^{I.V}$).

Considérons maintenant les hypothèses suivantes :

• **Hypothèses :**

(III.1.34) $$\left.\begin{array}{l} \textit{Il existe une fonction } F \textit{ tel que } F : I\!R_+ \longrightarrow I\!R_+ \textit{ tel que} \\ \textbf{(a)}\ \ |j_\rho(y) - j(y)| \leq F(\rho) \quad \forall y \in X, \ \textit{pour tout } \rho > 0, \\ \textbf{(b)}\ \ \lim\limits_{\rho \to 0} F(\rho) = 0. \end{array}\right\}$$

(III.1.35) $$\left.\begin{array}{l} \textbf{(a)}\ \ j_\rho(y) \geq 0 \quad \forall y \in X \text{ et } j_\rho(0_X) = 0, \quad \textit{pour tout } \rho > 0, \\ \textbf{(b)}\ \ j_\rho(y) \longrightarrow j(y) \quad \textit{quand} \quad \rho \longrightarrow 0, \ \forall y \in X, \\ \textbf{(c)} \qquad \textit{pour toute suite } (y_\rho) \subset X \quad \textit{tel que } y_\rho \rightharpoonup y \in X \\ \textit{on a}:\ \liminf\limits_{\rho \to 0}(j_\rho(y_\rho)) \geq j(y). \end{array}\right\}$$

Nous avons les résultats de convergence suivant :

Théorème III.1.22. *Sous les hypothèses (III.1.34) et (III.1.35), la solution x_ρ du problème ($P_2^{I.V}$) converge vers la solution x du problème ($P_1^{I.V}$), c'est-à-dire*

(III.1.36) $$x_\rho \longrightarrow x \quad \textit{dans} \quad X \quad \textit{quand} \quad \rho \longrightarrow 0.$$

1.5 Inéquations quasivariationnelles elliptiques

Nous rappelons par la suite quelques résultats sur *les inéquations quasivariationnelles elliptiques*, dans lesquelles la fonctionnelle j dépend de la solution. Pour étudier ce genre des problèmes; nous supposons que l'espace de Hilbert X définit par (I.2.45) est muni par le produit scalaire $< \cdot,\cdot >_X$ et la norme $\| \cdot \|_X$.

Pour tout $f \in X$ considérons le problème suivant :

Problème ($\mathbf{P_1^{I.QV}}$). *Trouver $x \in X$ tel que*

$$a(x,y-x) + j(x,y) - j(x,x) \geq < f,y-x >_X \qquad \forall y \in X. \tag{III.1.37}$$

Supposons que j satisfait les hypothèses suivantes

• **Hypothèses :**

$$\left.\begin{array}{l} j : X \times X \longrightarrow I\!R \quad et \\ (\mathbf{a})\ \forall \eta \in X, \quad j(\eta,.) \ est\ convexe\ et\ s.c.i\ sur\ X\ . \\ (\mathbf{b})\ \exists \alpha \geq 0\ tel\ que \\ j(\eta_1,y_2) - j(\eta_1,y_1) + j(\eta_2,y_1) - j(\eta_2,y_2) \leq \\ \alpha\|\eta_1 - \eta_2\|_X\|y_1 - y_2\|_X \quad \forall \eta_1,\eta_1,y_1,y_2 \in X. \end{array}\right\} \tag{III.1.38}$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème III.1.23. *Soit X un espace de Hilbert et supposons que (III.1.34)-(III.1.35) et (III.1.38) sont satisfaites. Alors :*

Si, de plus, $m < \alpha$, pour tout $f \in X$, l'inéquation quasivariationnelle elliptique définie dans le problème ($P_1^{I.QV}$) possède une solution unique.

La démonstration du Théorème (III.1.21) fait appel au Théorème (III.1.19) ainsi qu'au théorème de point fixe du Banach.

Un autre résultat dans l'étude du problème ($P_1^{I.QV}$) est basé sur les hypothèses supplémentaires sur la fonctionnelle $j : X \times X \longrightarrow I\!R$

• **Hypothèses supplémentaires :**

$$(\mathbf{a}) \quad Pour\ tout \quad \eta \in X, j(\eta,.)\ \ est\ une\ semi\text{-}norme\ sur\ X\ . \tag{III.1.39}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{b}) \quad Pour\ toute\ suite \quad (\eta_n) \subset X \quad et \quad (x_n) \subset X \quad tel\ que \\ \eta_n \longrightarrow \eta \in X \text{ et } x_n \longrightarrow x \in X \quad et\ pour\ tout \quad y \in X, \quad \text{on a} \\ \limsup_{n \to 0} j(\eta_n,y) - j(\eta_n,x_n) \leq j(\eta,y) - j(\eta,x). \end{array}\right\} \tag{III.1.40}$$

$$(\mathbf{c}) \quad j(x,y) - j(x,x) + j(y,x) - j(y,y) < m\|x-y\|_X^2 \tag{III.1.41}$$

$$\forall x,\ y \in X,\ x \neq y.$$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{d}) \quad Il\ existe\ \alpha < \quad m \ \ tel\ que \\ j(x,y) - j(x,x) + j(y,x) - j(y,y) \leq \alpha\|x-y\|_X^2 \quad \forall x,y \in X. \end{array}\right\} \tag{III.1.42}$$

On a le résultat suivant

Théorème III.1.24. *Soient X un espace de Hilbert, $f \in X$ et supposons que (III.1.31) et (III.1.32) sont satisfaites. Alors:*

(**1**) *Sous les hypothèses (III.1.39) et (III.1.40) il existe une solution du problème $(P_1^{I.QV})$.*

(**2**) *Sous les hypothèses (III.1.39), (III.1.40) et (III.1.41) il existe une unique solution du problème $(P_1^{I.QV})$.*

(**3**) *Sous les hypothèses (III.1.39), (III.1.40) et (III.1.42) il existe une unique solution du problème $(P_1^{I.QV})$ de Lipschitz par rapport $f \in X$.*

1.6 Inéquations variationnelles d'évolution

Dans cette section nous allons présenter une description détaillée sur *les inéquations variationnelles d'évolution*. La différence que l'on doit signaler ici consiste dans la présence de la dérivée de l'inconnue dans la formulation du problème ce qui rajoute aussi une condition initiale.

Nous commençons par des résultats de base sur l'existence et l'unicité de la solution et, alors, nous présentons la régularité et les résulats de convergence. Pour cette étude, nous supposons que l'espace de Hilbert V définit par (I.2.39) est muni par le produit scalaire $< \cdot,\cdot >_V$ et la norme $\|\cdot\|_V$.

Soient $a(\cdot,\cdot)_V$ et $b(\cdot,\cdot)_V$ deux formes bilinéaires sur V, $j : V \longrightarrow]-\infty,+\infty]$, $f:[0,T] \longrightarrow V$ et, soit u_0 une donnée initiale. Nous considérons le problème suivant

Problème $(\mathbf{P_1^{I.V.EV}})$. *Trouver $u : [0,T] \longrightarrow V$ tel que*

(III.1.43)
$$a(u(t),v-\dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t),v-\dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq < f,v-\dot{u}(t) >_V$$
$$\forall v \in V, \quad p.p. \;\; t \in [0,T],$$

(III.1.44)
$$u(0) = u_0.$$

Remarquons que (III.1.43) représente une *inéquation variationnelle d'évolution* car cette inégalité contient la dérivée de l'inconnue u. Par conséquent, la condition initiale (III.1.44) est nécessaire. Dans l'étude du problème de Cauchy $(P_1^{I.V.EV})$, nous considérons les hypothèses suivantes

• **Hypothèses :**

(III.1.45)
$$\left.\begin{array}{l} a : V \times V \longrightarrow I\!R \;\; \textit{est une forme bilinéaire et vérifie} \\ (\mathbf{a}) \;\; \textit{il existe } M > 0 \;\; \textit{tel que} \\ |a(u,v)| \leq M||u||_V||v||_V \quad \forall u,v \in \; V, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} b : V \times V \longrightarrow I\!R \;\; \textit{est une forme bilinéaire symétrique et vérifie} \\ \textbf{(a)} \;\; \textit{il existe } M^{'} > 0 \;\; \textit{tel que} \\ |b(u,v)| \leq M^{'}||u||_V||v||_V \quad \forall u,v \in \; V; \\ \textbf{(b)} \;\; \textit{il existe } m^{'} > 0 \;\; \textit{tel que} \\ |b(v,v)| \geq m^{'}||v||_V^2 \quad \forall v \in \; V. \end{array}\right\} \tag{III.1.46}$$

$$\textit{La fonctionnelle } j : X \rightarrow]-\infty,+\infty] \;\; \textit{est convexe, propre et s.c.i .} \tag{III.1.47}$$

$$f \in W^{1,2}([0,T];V). \tag{III.1.48}$$

$$u_0 \in V. \tag{III.1.49}$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème III.1.25. *Soit V un espace de Hilbert et nous supposons que les relations (III.1.45)-(III.1.49) sont vérifiées. Alors il existe une solution unique $v \in W^{1,2}(0,T;V)$ du problème $(P_1^{I.V.EV})$.*

Par la suite, nous étudions la dépendance de la solution de l'inéquation variationnelle (III.1.43) et (III.1.44) par rapport à la fonctionnelle j. Pour cela, nous supposons que (III.1.45)-(III.1.49) sont vérifiées et, soit $u \in C^1([0,T];V)$ la solution du problème $(P_1^{I.V.EV})$ obtenue dans le Théroème (III.1.25).

Pour tout $\rho > 0$, nous considérons une perturbation j_ρ de j ainsi que le problème suivant :

Problème $(\mathbf{P_{1,\rho}^{I.V.EV}})$. *Trouver $u_\rho : [0,T] \longrightarrow V$ tel que*

$$a(u_\rho(t),v - \dot{u}_\rho(t)) + b(u_\rho(t),v - \dot{u}_\rho(t)) + +j_\rho(v) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \geq < f,v - \dot{u}_\rho(t) >_V \tag{III.1.50}$$

$$\forall v \in V, \quad p.p. \;\; t \; \in [0,T],$$

$$u_\rho(0) = u_0. \tag{III.1.51}$$

Nous rappelons maintenant le résultat suivant :

Théorème III.1.26. *Sous l'hypothèse (III.1.34), la solution u_ρ du problème $(P_{1,\rho}^{I.V.EV})$ converge vers la solution u du problème de Cauchy $(P_1^{I.V.EV})$, c'est-à-dire*

$$\|u_\rho - u\|_{C^1([0,T];V)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quand} \quad \rho \longrightarrow 0. \tag{III.1.52}$$

Considérons maintenant le cas ou $b(.,.) = 0$. Dans ce cas le problème de Cauchy $(P_1^{I.V.EV})$ devient

Problème $(\mathbf{P_2^{I.V.EV}})$. *Trouver $u : [0,T] \longrightarrow V$ tel que*

(III.1.53) $$a(u(t),v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq < f,v - \dot{u}(t) >_V$$

$$\forall v \in V, \quad p.p. \ t \in [0,T],$$

(III.1.54) $$u(0) = u_0.$$

Pour étudier ce problème nous faisons appel aux hypothèses suivantes

• **Hypothèses :**

(III.1.55) $$\left.\begin{array}{l} a : V \times V \longrightarrow I\!R \ \textit{est une forme bilinéaire symétrique et vérifie} \\ (\mathbf{a}) \ \textit{il existe } M > 0 \ \textit{tel que} \ \ |a(u,v)| \leq M||u||_V||v||_V \quad \forall u,v \in V, \\ (\mathbf{b}) \ \textit{il existe } m > 0 \ \textit{tel que} \ \ |a(v,v)| \geq m||v||_V^2 \quad \forall v \in V. \end{array}\right\}$$

(III.1.56) $$\textit{La fonctionnelle} \quad j : V \to]-\infty, +\infty] \ \textit{est convexe, propre et s.c.i et}$$

(III.1.57) $$f \in W^{1,2}(0,T;V).$$

(III.1.58) $$u_0 \in V.$$

(III.1.59) $$\left.\begin{array}{l} \textit{Il existe} \quad c_0 \geq 0 \ \textit{tel que} \\ a(u_0,v) + j(v) \geq < f(0),v >_V - c_0 \quad \forall v \in V. \end{array}\right\}$$

Théorème III.1.27. *Sous les hypothèses (III.1.55)-(III.1.59) il existe une solution unique pour le problème $(P_2^{I.V.EV})$ ayant la régularité $u \in W^{1,2}(0,T;V)$.*

Dans cette section nous étudions le comportement de la solution de *l'inéquation variationnelle d'évolution* définie par le problème de Cauchy $(P_1^{I.V.EV})$ lorsque le terme de viscosité s'anulle et nous prouvons qu'elle converge vers la solution de *l'inéquation variationnelle d'évolution* (III.1.53) et (III.1.54). Nous supposons que les hypothèses (III.1.55)-(III.1.59) sont satisfaites et, alors, nous déduisons du Théorème (III.1.25) que le problème $(P_2^{I.V.EV})$ admet une solution unique u avec la régularité $u \in W^{1,2}(0,T;V)$.

Soit maintenant Θ une famille des paramètres donnés; pour tout $\theta \in \Theta$ nous considérons une forme bilinéaire notée b_θ qui satisfait les hypothèses suivantes :

$$\text{(III.1.60)}\qquad \left.\begin{array}{l} b_\theta : V \times V \longrightarrow I\!R \;\; \textit{est une forme bilinéaire symétrique et vérifie} \\ (\mathbf{a}) \;\; \textit{il existe } M^{'}(\theta) > 0 \;\; \textit{tel que} \\ |b_\theta(u,v)| \leq M^{'}(\theta)||u||_V||v||_V \;\; \forall u,v \in V; \\ (\mathbf{b}) \;\; \textit{il existe } m^{'}(\theta) > 0 \;\; \textit{tel que } |b_\theta(v,v)| \geq m^{'}(\theta)||v||_V^2 \;\; \forall v \in V. \end{array}\right\}$$

En outre, pour tout $\theta \in \Theta$ nous considérons le problème suivant :

Problème ($\mathbf{P_{1,\theta}^{I.V.EV}}$). *Trouver* $u : [0,T] \longrightarrow V$ *tel que*

$$\text{(III.1.61)}\qquad a(u_\theta(t),v - \dot{u_\theta}(t)) + b(u_\theta(t),v - \dot{u_\theta}(t)) + j(v) \geq -j(\dot{u_\theta}(t)) + < f,v - \dot{u_\theta}(t) >_V$$

$$\forall v \in V, \quad p.p. \;\; t \;\in [0,T],$$

$$\text{(III.1.62)}\qquad u_\theta(0) = u_0.$$

Nous déduisons du Théorème (III.1.25) que le problème $(P_{1,\theta}^{I.V.EV})$ admet une solution unique $u_\theta \in W^{2,2}(0,T;V)$.

Le résultat suivant nous montre la condition qu'assure la convergence de la solution u_θ du problème $(P_{1,\theta}^{I.V.EV})$ vers la solution u du problème $(P_1^{I.V.EV})$.

Théorème III.1.28. *Sous les hypothèses précédentes on a*

$$\text{(III.1.63)}\qquad \frac{M^{'}(\theta)}{m^{'}(\theta)} \longrightarrow 0 \Rightarrow \|u_\theta - u\|_{C([0,T];V)} \longrightarrow 0.$$

Nous concluons du Théorème (III.1.26) qu'on peut approcher la solution de *l'inéquation variationnelle d'evolution* définie dans le problème $(P_1^{I.V.EV})$ par la solution de *l'inéquation variationnelle d'evolution* avec viscosité $(P_{1,\theta}^{I.V.EV})$; si le rapport $\frac{M^{'}(\theta)}{m^{'}(\theta)}$ est suffisamment petit. Finallement une brève comparaison entre les résultats présentés dans la section concernant l'étude des *inéquations variationnelles d'évolution* avec viscosité et les résultats obtenus dans la section concernant l'étude des *inéquations variationnelles d'evolution* nous amène aux remarques suivantes :

(a) Sous la même régularité (c'est-à-dire $f \in W^{1,2}(0,T;V)$ et $u_0 \in V$), la régularité de la solution du problème $(P_1^{I.V.EV})$ est supérieure que la régularité de la solution du problème $(P_2^{I.V.EV})$ ($W^{2,2}(0,T;V)$ au lieu de $W^{1,2}(0,T;V)$, respectivement).

(b) Pour résoudre le problème $(P_2^{I.V.EV})$ nous avons besoin à d'une hypothèse de compatibilité sur la donnée initiale (III.1.58), tandis que la résolution du problème $(P_1^{I.V.EV})$ n'a pas besoin d'aucune hypothèse suplémentaire sur la donnée initiale.

Les deux remarques ci-dessus mènent à la conclusion suivante :

Si on ajoute le terme de viscosité on aura automatiquement un effet de régularisation sur la solution de *l'inéquation variationnelle d'evolution*. Ceci combiné avec un résultat de convergence de la forme (III.1.63) justifié l'utilisation des méthodes numériques dans l'étude du problèmes $(P_2^{I.V.EV})$, basées sur la perturbation de *l'inéquation variationnelle d'evolution* avec le terme de viscosité.

1.7 Inéquations quasivariationnelles d'evolution avec viscosité

Dans cette section nous étudions *une inéquation quasivariationnelle d'evolution avec viscosité*, c'est à dire la fonctionnelle $j(\cdot,\cdot)$ dépend explicitement de la solution u ou de sa dérivée $\dot{u}$. Nous commençons par des résultats de base sur l'exsitence et l'unicité de la solution et, alors, nous prouvons la régularité et les résulats de convergence. Pour cette étude, nous supposons que l'espace de Hilbert V définit par (I.2.39) est muni par le produit scalaire $< \cdot,\cdot >_V$ et la norme $\| \cdot \|_V$.

Soient $a(\cdot,\cdot)_V$ et $b(\cdot,\cdot)_V$ deux formes bilinéaires sur V, $j : V \times V \longrightarrow I\!R$, $f : [0,T] \longrightarrow V$ et, soit u_0 une donnée initiale. Nous considérons le problème suivant :

Problème $(P_1^{I.QV.EV})$**.** *Trouver* $u : [0,T] \longrightarrow V$ *tel que*

(III.1.64) $$a(u(t),v-\dot{u}(t)) + b(u(t),v-\dot{u}(t)) + j(u(t),v) - j(u(t),\dot{u}(t)) \geq < f,v-\dot{u}(t) >_V$$

$$\forall v \in V, \quad t \in [0,T],$$

(III.1.65) $$u(0) = u_0.$$

Alternativement, nous considérons le second problème, où la fonctionnelle $j : V \times V \longrightarrow I\!R$ est dépend uniquement de $\dot{u}$ par

Problème $(P_2^{I.QV.EV})$**.** *Trouver* $u : [0,T] \longrightarrow V$ *tel que*

(III.1.66) $$a(u(t),v-\dot{u}(t)) + b(u(t),v-\dot{u}(t)) + j(\dot{u}(t),v) - j(\dot{u}(t),\dot{u}(t)) \geq < f,v-\dot{u}(t) >_V$$

$$\forall v \in V, \quad t \in [0,T],$$

(III.1.67) $$u(0) = u_0.$$

Pour étudier ces problèmes nous faisons appel aux hypothèses suivantes :

(III.1.68)
$$\left.\begin{array}{l} a : V \times V \longrightarrow I\!R \textit{ est une forme bilinéaire symétrique et vérifie} \\ \quad \textbf{(a)} \ \textit{il existe } M > 0 \textit{ tel que} \\ |a(u,v)| \leq M||u||_V||v||_V \quad \forall u,v \in V. \\ \quad \textbf{(b)} \ \textit{il existe } m > 0 \textit{ tel que } \ |a(v,v)| \geq m||v||_V^2 \quad \forall v \in V. \end{array}\right\}$$

(III.1.69)
$$\left.\begin{array}{l} b : V \times V \longrightarrow I\!R \textit{ est une forme bilinéaire symétrique et vérifie} \\ \quad \textbf{(a)} \ \textit{il existe } M^{'} > 0 \textit{ tel que} \\ |b(u,v)| \leq M^{'}||u||_V||v||_V \quad \forall u,v \in V; \\ \quad \textbf{(b)} \ \textit{il existe } m^{'} > 0 \textit{ tel que } \ |b(v,v)| \geq m^{'}||v||_V^2 \quad \forall v \in V. \end{array}\right\}$$

(III.1.70)
$$\left.\begin{array}{l} \textit{La fonctionnelle } j : V \times V \longrightarrow I\!R \textit{ est convexe, propre et s.c.i;} \\ \textbf{(a)} \ \forall \eta \in V, \quad j(\eta,.) \textit{ est convexe et s.c.i sur } V \, . \\ \textbf{(b)} \ \exists \alpha \geq 0 \textit{ telle que } j(\eta_1,v_2) - j(\eta_1,v_1) + j(\eta_2,v_1) - j(\eta_2,v_2) \leq \\ \alpha\|\eta_1 - \eta_2\|_V\|v_1 - v_2\|_V, \quad \forall \eta_1,\eta_1,v_1,v_2 \in V. \end{array}\right\}$$

(III.1.71)
$$f \in C^1(0,T;V).$$

(III.1.72)
$$u_0 \in V.$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité de la solution pour cette classe d'inéquation quasivariationnelle d'evolution avec viscosité.

Théorème III.1.29. *Soit V un espace de Hilbert et, supposons que (III.1.68), (III.1.69), et (III.1.71)-(III.1.72) sont satisfaites. Alors :*

(1)- Il existe une solution unique $u \in C^1([0,T];V)$ du problème $(P_1^{I.QV.EV})$.
(2)- Si, de plus $m^{'} > \alpha$, il existe une solution unique $u \in C^2([0,T];V)$ du problème $(P_1^{I.QV.EV})$.

Nous terminons cette section par une présentation d'un résultat de régularité de la solution u du problème $(P_1^{I.QV.EV})$ et $(P_2^{I.QV.EV})$, respectivement.

Théorème III.1.30. *Sous les conditions posées dans le Théorème (III.1.27), dénotons par u la solution des $(P_1^{I.QV.EV})$ et $(P_2^{I.QV.EV})$, respectivement et, supposons de plus que la fonction $f(\cdot)$ satisfait :*

$$f \in W^{1,2}(0,T;V) \quad \textit{pour certains} \quad p \in [1,\infty[.$$

Alors :

La solution du problème $(P_1^{I.QV.EV})$ *et* $(P_2^{I.QV.EV})$*, respectivement, a la régularité*

(III.1.73) $$u \in W^{2,2}(0,T;V).$$

BIBLIOGRAPHIE

Thèse de Doctorat de Mathématiques Appliquées.
DALAH MOHAMED, Université "Mentouri" de Constantine, 2008.

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, 1975.

[2] L.-E. Andersson, *A quasistatic frictional problem with normal compliance,* Nonlinear Analysis TMA **16** (1991), 407-428.

[3] L.-E. Andersson, *A global existence result for a quasistatic contact problem with friction*, Advances in Mathematical Sciences and Applications **5** (1995), 249-286.

[4] A. Amassad, M. Sofonea, *Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **4** (1998), 55-72.

[5] A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact problem for an elastic perfectly plastic body with Tresca's friction*, Nonlinear Analysis, **35** (1999), 95-109.

[6] A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Math. Meth. Appl. Sci., **22** (1999), 267-284.

[7] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity,* American Mathematical Society and International Press, a paraître.

[8] V. Barbu, T. Precupanu, *Convexity and optimisation in Banach spaces*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986.

[9] H. Brézis, *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 115–175.

[10] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.

[11] M. Burguera, J. M. Viaño, *Numerical solving of frictionless contact problems in perfectly plastic bodies*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., **121** (1995), 303-322.

[12] O. Chau, W. Han, M. Sofonea, *Analysis and approximation of a viscoelastic contact problem with slip dependent friction*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, **8** (2001), 153-174.

[13] J. Chen, W. Han, M. Sofonea, *Numerical analysis of a quasistatic problem of sliding frictional contact with wear*, à paraître dans Methods and Applications of Analysis.

[14] M. Cocu, *Existence of solutions of Signorini problems with friction* , Int. J. Engng. Sci., **22** (1984), 567-581.

[15] M. Cocu, E. Pratt, M. Raous, *Analysis of an incremental formulation for frictional contact problems*, Contact Machanics, Eds. M. Raous, M. Jean, J. J. Moreau, Plenum Press, New York (1995).

[16] M. Cocu, E. Pratt, M. Raous, *Formulation and approximation of quasistatic frictional contact,* Int. Jour. Engng. Sci., **34** (1996), 783-798.

[17] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus,* Dunod, Paris, 1998.

[18] G. Duvaut, J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod 1972.

[19] G. Fichera, *Boundary value problem unilateral constraints*, Encycl. of Physics, Editeur: S. Flugge, Springer-Verlag, Berlin, **VI a/2** 1972.

[20] J. R. Fernández-Garcia, W. Han, M. Shillor, M. Sofonea, *Numerical analysis and simulations of quasistatic frictionless contact problems*, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci., **11** (2001), 205-222.

[21] J. R. Fernández-Garcia, P. Hild, J. M. Viaño, *The mortar finite element method for elastic-viscoplastic contact*, Proc. MTNS 2000, Perpignan, France, 2000, published on CD-ROM.

[22] P. Germain, P. Muller, *Introduction à la mécanique des milieux continus,* Masson, Paris, 1980.

[23] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[24] R. Glowinski, J.-L. Lions, R. Trémolières, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[25] M. E. Gurtin, *An introduction to Continuum Mechanics,* Academic Press, New York, 1981.

[26] T.-V. Hoarau-Mantel, A. Matei, *Analysis of a viscoelastic antiplane contact problem with slip dependent friction*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., **12** (2002), 101-108.

[27] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Necǎs, J. Lovíšek, *Solutions of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[28] L. Jianu, A. Matei, M. Sofonea, *Quasistatic elastic-visco-plastic problems with friction* Ann. Univ. Buc., Math., **51** (2002), 23-38.

[29] N. Kikuchi, J.T. Oden,*Contact problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.

[30] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, *Frictional contact problems with normal compliance*, Int. J. Engng. Sci., **26** (1988), 811-832.

[31] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, *A global existence result for the quasistatic frictional contact problem with normal compliance in Unilateral Problems in Structural Analysis* Vol. 4, Eds. G. Del Piero and F. Maceri, Birkhauser, Boston (1991), p. 85-111.

[32] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris 1969.

[33] J.A.C. Martins, J. T. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws*, Nonlinear Analysis TMA, **11** (1987), 407-428.

[34] A. Matei, V. V. Motreanu, M. Sofonea, *A quasistatic antiplane contact problem with slip dependent friction*, Advances in Nonlinear Variational Inequalities, **4** (2001), 1-21.

[35] A. Matei, V. V. Motreanu, M. Sofonea, *On the Signorini frictionless contact problem for linear viscoelastic materials*, Applicable Analysis.

[36] D. Motreanu, M. Sofonea, *Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials*, Abstract and Applied Analysis, **4** (1999), 255-279.

[37] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[38] J. Nečas, I. Hlavaček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.

[39] Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Quasistatic nonlinear viscoelastic contact with normal compliance and friction*, Journal of Elasticity, **51** (1998), 105-126.

[40] M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact problem for an elastoplastic rod*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **217** (1998), 579-596.

[41] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. 655, Springer, Berlin Heidelberg, 2004.

[42] M. Sofonea, *Problèmes Nonlinéaires dans la Théorie de l'Elasticité*, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie, 1993.

[43] M. Sofonea, A. Ayadi, M. Dalah, *Analysis of an Antiplane Electro-Elastic Contact Problem*, Submitted to Adv. Math. Sci. Appl.

[44] M. Sofonea, M. Dalah, *Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 161, pp. 114.

[45] N. Strömberg, *Continuum Thermodynamics of Contact, friction and wear*, These de Ph.D, Linköping University, Sweden, 1995.

[46] N. Strömberg, L. Johansson, A. Klarbring, *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures, **33** (1996), 1817–1836.