REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : ………………
N° série : ………………

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Thème

PROPRIETES SPECRALES DES EQUATIONS DE TRANSPORT ET ETUDE DE QUELQUES RESULTATS DE PERTURBATIONS DANS LES ESPACES DE BANACH

Option

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Par :

SAOUDI KHALED

Devant le jury :

Président :	M.DENECHE	Prof	Univ. Constantine
Rapporteur . :	A.DEHICI	M.C	C.Univ. S.Ahras
Examinateurs :	R.AMIAR	M.C	Univ. Annaba
	A.L. MARHOUNE	Prof	Univ. Constantine
	N.BOUSSETILA	M.C	Univ. Guelma

Soutenue le 03-12-2009

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier chaleureusement Monsieur Abdelkader Dehici, Maître de Conférences au Centre Universitaire de Souk-Ahras qui a accepté de diriger ce travail. Ses précieux conseils et sa patience m'ont permi d'effectuer mes travaux dans de bonnes conditions.

Mes sincères remerciements vont à Monsieur Mohamed Denneche, Professeur à l'Université de Constantine, d'avoir accepter de présider le Jury, je tiens à lui exprimer mon extrême gratitude.

Je voudrais exprimer ma plus vive reconnaissance à Monsieur Nadjib Boussetila, Maître de Conférences à l'Université de Guelma et à Monsieur Ahmed Lakhdar Marhoune, Professeur à l'Université de Constantine, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en me faisant l'honneur d'en être des rapporteurs.

Je remercie bien vivement Madame Rachida Amiar, Maître de Conférences à l'Université d'Annaba, d'avoir aimablement accepté de prendre de son temps malgrè ses tâches administratives pour juger ce travail. Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Enfin, Je serais reconnaissant envers les Enseignants-Chercheurs et les Doctorants ainsi que tout le Staff Administratif de l'Université de Constantine.

Table des Matières

Introduction Générale

Cette thèse est composée de deux parties totalement indépendantes :

Dans la première partie, on s'intéresse aux résultats de compacité intervenant en théorie du transport. Ils sont liés au comportement asymptotique, lorsque $t \to +\infty$, des solutions du problème de Cauchy associé à des classes d'équations de type neutronique apparaîssant en cinétique des gaz complétées par des conditions aux bords générales. Le travail réalisé dans cette partie utilise des approches simples et différentes de celles établies par les autres auteurs.

La deuxième partie a pour thème central l'étude de certaines classes de perturbations ainsi que d'autres résultats rentrant dans le cadre de la théorie de Fredholm.

Afin de rendre ce travail plus autonome et de limiter les renvois systématiques à la littérature, on a rappelé dans le premier chapitre quelques résultats classiques et définitions dont on fera l'usage dans ce travail.

L'objectif du chapitre 2 est de montrer la compacité des opérateurs $(\lambda - T_H)^{-1}K$ et $K(\lambda - T_H)^{-1}$ dans le cadre multidimensionnel pour des conditions aux bords assez générales et sous certaines conditions sur la mesure $d\mu$.

Les résultats de ce chapitre sont obtenus par K. Latrach [85], néanmoins, la technique utilisée ici est plus simple ; elle est basée sur les résultats de M. Mokhtar-Kharroubi dans le cadre neutronique et sur le fait que la propriété de compacité est héritée en passant aux restrictions.

Dans le troisième chapitre, nous étudierons le comportement asymptôtique des solutions du problème de Cauchy (associé à une équation de transport) avec des conditions aux bords réflexives et périodiques moyennant la théorie des semigroupes, les résultats de domination et d'interpolation dans les espaces $L_p (1 < p < \infty)$ ce qui nous permettra de montrer la compacité d'ordre 1, $R_H^1(t)$, de la série de Dyson-Phillips. (On note que le problème est toujours ouvert pour $p = 1$).

Au chapitre 4, on montre que si X est un espace réflexif héréditairement indécomposable de type Gowers et Maurey, alors on a les inclusions suivantes:

$$S(X \times X, X) \subsetneq \mathcal{F}_+(X \times X, X), \qquad CS(X^*, X^* \times X^*) \subseteq \mathcal{F}_-(X^*, X^* \times X^*),$$
$$S\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \subsetneq \mathcal{F}_+^b\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \quad \text{et} \quad CS\left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right) \subsetneq \mathcal{F}_-^b\left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

(où $X_i = X$, $Y_i = X^*$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $n > 2$) pour des classes d'opérateurs semi-Fredholm supérieures et inférieurs bornés et non bornés.

Les deux dernières inclusions sont basées sur un résultat affirmant que si le spectre essentiel (de Wolf) de chaque opérateur borné sur un espace de Banach X est un ensemble maigre (d'intérieur vide) alors, on a nécéssairement $\mathcal{F}^b(X) = \mathcal{F}_+^b(X) = \mathcal{F}_-^b(X)$. Notons que cette classe d'espaces de Banach ayant cette propriété contient en particulier celle des espaces héréditairement indécomposables. L'étude faite dans ce chapitre a permi de donner des réponses à quelques questions qui sont restées longtemps ouvertes.

Il est bien connu que la théorie de Fredholm est un outil indispensable pour la résolution des équations de la forme $(I - T)\mu = f$ (alternative de Fredholm). Moyennant les propriétés remarquables de la mesure de non compacité d'un opérateur borné, on établit quelques résultats généralisant ceux obtenus dans cette direction par pas mal d'auteurs (voir [76], [77], [78], [84], [127]) et donnant une nouvelle caractérisation du spectre essentiel de Schechter d'un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans un espace de Banach. Ceci fait l'objet du chapitre 5.

0.1 Partie I

On considère le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(x, v, t) = -v.\nabla_x \psi(x, v, t) - \sigma(x, v, t)\psi(x, v, t) + \displaystyle\int_V k(x, v, v')\psi(x, v', t)d\mu(v') \\ \qquad\qquad = T_H + K \\ \psi(x, y, 0) = \psi_0(x, v) \qquad (x, v) \in \Omega \times V \\ \psi_{|\Gamma_-}(x, v, t) = H(\psi_{|\Gamma_+})(x, v, t) \qquad (x, v) \in \Gamma_-,\ t > 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, V désigne le support d'une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n$ et $\psi_0 \in X_p = L^p(\Omega \times V, dxd\mu(v))(1 \leq p < +\infty), \sigma(.,.) \in L^\infty(\Omega \times V)$. Le noyau $k(.,.,.)$ est une fonction mesurable telle que l'opérateur

$$K : \psi(x,v) \in X_p \mapsto \int_V k(x,v,v')\psi(x,v')d\mu(v') \in X_p$$

est borné.

Les ensembles Γ_- (resp. Γ_+) représentent la partie rentrante (resp. sortante) de l'espace des phases $\Omega \times V$:

$$\Gamma_\pm = \{(x,v) \in \partial\Omega \times V \,;\pm v.n(x) > 0\}$$

où $n(x)$ est la normale unitaire extérieure au point $x \in \partial\Omega$.

Les conditions aux bords données dans le problème (0.1) signifient que le flux rentrant $\psi_{|\Gamma_-}$ est relié au flux sortant $\psi_{|\Gamma_+}$ par un opérateur linéaire H supposé borné sur des espaces de traces convenablement choisis.

Dans cette partie, on aborde l'étude du comportement asymptotique, $t \to +\infty$, des solutions du problème de Cauchy précédent lorsque l'opérateur frontière H modélise des conditions aux bords générales ; cette question est liée à des résultats de compacité. En effet, en théorie du transport, l'étude du comportement asymptotique remonte aux travaux de J. Lehner et M. Wing [78, 88] et K. Jorgens [65,66]. Pour cette analyse, on dispose essentiellement de deux approches, la première consiste à exprimer la solution comme transformée de Laplace inverse de la résolvante de l'opérateur $T_H + K$ comme cela a été fait pour des modèles particuliers. Cette technique a été systématiquement utilisée par Mokhtar-Kharroubi [101, 102]. Elle est basée sur deux arguments:

- (i) $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tel que $[(\lambda - T_H)^{-1}K]^m$ est compact pour $\operatorname{Re}\lambda > n$.
- (ii) $\lim\limits_{|\operatorname{Im}\lambda| \to +\infty} \|\,[(\lambda - T_H)^{-1}K]^m\,\| = 0$ uniformément sur $\{\operatorname{Re}\lambda > w > n\}$

où n est le type du semigroupe $(e^{tT_H}, t \geq 0)$. Ainsi, si (i) et (ii) sont satisfaites, il est possible de décrire le comportement des solutions (quand t est assez grand) pour des données initiales assez régulières.

La seconde approche, dite du semigroupe, dûe à Jorgens-Vidav (*cf.* [65, 66], [139, 140]) est basée sur la compacité d'un reste de la série de Dyson-Phillips. Cette approche a l'avantage de n'imposer aucune condition sur la donnée initiale. Dans le cadre du transport neutronique ($H = 0$), cette technique a été souvent exploitée par de nombreux auteurs (*cf.* [79, 101, 102,...]).

On a, sous certaines conditions sur l'opérateur de collision K, le reste d'ordre 1 de la série de Dyson-Phillips $R_1^0(t)$ est compact sur $L_p(1 < p < +\infty)$. La possibilité d'un tel résultat est dûe au fait que ces restes sont calculables parce que l'expression du semigroupe e^{tT_0} est explicite.

Malheureusement, lorsque H est un opérateur borné vérifiant $||H|| < 1$, T_H engendre un C^0-semigroupe non explicite et donc il est difficile de montrer la compacité d'un reste de la série de Dyson-Phillips ($H \neq 0$). Toutefois, pour des conditions aux bords périodiques et réflexives, on a pu établir l'expression du semi-groupe $(U^H(t), t \geq 0)$ engendré par T_H. D'autre part, typiquement, dans les domaines bornés Ω et particulièrement pour des opérateurs de collisions réguliers lorsqu'une puissance $[(\lambda - T_H)^{-1}K]^m$ est compact, $\sigma(T + K)$ (le spectre de l'opérateur $T_H + K$) se compose du demi-plan $\{\lambda, \text{Re } \lambda \geq -\lambda^*\}$ ($-\lambda^*$ est l'abscisse spectrale de T_H) et, au plus, à des valeurs propres isolées $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, (Re $\lambda_i \geq -\lambda^*$), de multiplicités algébriques finies, où $\{\lambda_i, \text{Re } \lambda_i \geq -\alpha\}$ est au plus un ensemble fini pour tout $\alpha > -\lambda^*$, ce qui montre l'intérêt de la compacité d'une itérée de l'opérateur $[(\lambda - T_H)^{-1}K]^m$ pour l'étude du comportement asymptotique des solutions.

0.2 Partie II

Cette partie est composée de deux chapitres.

Étant donné deux espaces de Banach X et Y, on note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires fermés à domaines denses de X dans Y et $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs bornés de X dans Y. Si $A \in \mathcal{C}(X, Y)$, $N(A)$ (resp. $R(A)$) désigne le noyau (resp. l'image) de A. Si on pose $\alpha(A) = \dim[N(A)]$, $\beta(A) = \text{Codim}[R(A)]$, $\Phi_+(X, Y)$ (resp. $\Phi_-(X, Y)$) est défini comme étant l'ensemble des opérateurs $A \in \mathcal{C}(X, Y)$ vérifiant $\alpha(A) < +\infty$ et $R(A)$ fermé (resp. $B(A) < +\infty$). On désigne par $\Phi(X, Y)$ l'ensemble $\Phi_+(X, Y) \cap \Phi_-(X, Y)$; c'est l'ensemble des opérateurs de Fredholm. Si $A \in \Phi(X)$, on appelle l'indice de A le nombre entier $i(A) = \alpha(A) - \beta(A)$.

Si $F \in \mathcal{L}(X,Y)$, on dit que F est une perturbation de Fredholm si pour tout $A \in \Phi(X,Y)$, $A+F \in \Phi(X,Y)$, F est une perturbation sur semi-Fredholm (resp. sous semi-Fredholm) si $A+F \in \Phi_+(X,Y)$ pour tout $A \in \Phi_+(X,Y)$ (resp. si $A+F \in \Phi_-(X,Y)$ pour tout $A \in \Phi_-(X,Y)$). Les ensembles des perturbations de Fredholm, sur semi-Fredholm et sous-semi Fredholm sont notés, respectivement $\mathcal{F}(X,Y), \mathcal{F}_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}_-(X,Y)$. D'autre part, on va noter par $\Phi^b(X,Y), \Phi^b_+(X,Y)$ et $\Phi^b_-(X,Y)$ les ensembles $\Phi(X,Y)\bigcap\mathcal{L}(X,Y), \Phi_+(X,Y)\bigcap\mathcal{L}(X,Y), \Phi_-(X,Y)\bigcap\mathcal{L}(X,Y)$ et les ensembles $\mathcal{F}^b(X,Y), \mathcal{F}^b_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}^b_-(X,Y)$ sont les classes qui leur sont associées. Il est bien connu que:

$$\mathcal{F}^b(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y) \qquad \text{si} \qquad \Phi(X,Y) \neq \emptyset.$$

D'autre part, si $X = Y$ alors $\mathcal{F}^b(X), \mathcal{F}^b_+(X)$ et $\mathcal{F}^b_-(X)$ forment des idéaux bilatères fermés de $\mathcal{L}(X)$. Un des problèmes importants dans l'étude de ces classes est la relation entre l'ensemble des opérateurs strictement singuliers (resp. strictement cosinguliers) et celle des perturbations semi-Fredholm supérieurs (resp. l'ensemble des perturbations semi-Fredholm inférieures), en d'autres termes, existe-t-il des espaces de Banach $X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z_1, Z_2$ ($X_1 \neq Y_1, X_2 \neq Y_2$) tels que les inclusions

$$S(X_1,Y_1) \subseteq \mathcal{F}_+(X_1,Y_1), CS(X_2,Y_2) \subseteq \mathcal{F}_-(X_2,Y_2), S(Z_1) \subseteq \mathcal{F}^b_+(Z_1) \text{ et } CS(Z_2) \subseteq \mathcal{F}^b_-(Z_2)$$

soient strictes? Ce problème a été posé par plusieurs auteurs, il date depuis le fameux papier de I. Gohberg, A. Markus et A. Feldman [49], il a fallu plus de 40 ans pour le résoudre. Plus précisément, Il a fallu la découverte des espaces héridètairement indécomposables par T. Gowers et B. Maurey pour donner des réponses positives à la question mentionnée au dessus.

Dans le chapitre 5, on va établir quelques nouveaux résultats intéressants en théorie de Fredholm. Soient X un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$ et soient P et Q deux polynômes complexes, désignons par δ la fonctionnelle de la mesure de non compacité définie sur $\mathcal{L}(X)$, soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ avec $P(\lambda_0) \neq 0$ et Q divise $P - P(\lambda_0)$, si on suppose que $\delta(P(tA)) < |P(\lambda_0)|$ pour tout $t \in [0,1]$ et $Q(0) \neq 0$ alors $Q(A)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0. L'étude faite dans ce chapitre a permi de trouver un cadre assez général unifiant tous les résultats déjà connus dans la littérature, de plus, elle nous donne une nouvelle caractérisation du spectre essentiel de Schechter d'un opérateur linéaire fermé à domaine dense sur un espace de Banach quelconque.

Chapitre 1

Notions Préliminaires et Rappels

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions et résultats classiques sur la théorie de Fredholm et les semigroupes fortement continus.

1.1 Théorie de Fredholm et spectres essentiels

Étant donné un espace de Banach X, on note $C(X)$ l'espace des opérateurs linéaires fermés à domaines denses, pour tout $A \in C(X)$, Φ_A désigne l'ensemble des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda - A \in \Phi(X)$. Dans la proposition suivante, on donne quelques propriétés bien connues de cet ensemble.

Proposition 1 (*cf.* **[48]**, **[69]**)

(i) Φ_A *est un ensemble ouvert.*

(ii) $i(\lambda - A)$ *est constant sur chaque composante connexe de* Φ_A.

Énonçons à présent le théorème d'Atkinson (*cf.* [84]) :

Théorème 2 *Soient* X, Y *et* Z *des espaces de Banach. Si* $A \in \Phi(X,Y)$ *et* $B \in \Phi(Y,Z)$, *alors* $BA \in \Phi(A,Z)$ *et*

$$\boxed{i(BA) = i(A) + i(B)}$$

Désignons par $\mathcal{K}(X,Y)$ le sous-espace fermé des opérateurs compacts de X dans Y. Le théorème suivant est une extension aux opérateurs de $\mathcal{C}(X,Y)$ du théorème classique de Riesz.

Théorème 3 *Soient $A \in \Phi(X,Y)$ et $K \in K(X,Y)$, alors*

$$\boxed{A + K \in \Phi(X,Y) \quad et \quad i(A+K) = i(A)}$$

Il est bien connu que si A est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert, alors son spectre essentiel est l'ensemble des points limites de son spectre, c'est à dire tous les points du spectre excepté les valeurs propres isolées de multiplicité algébriques finies. Lorsque A est fermé à domaine dense sur un espace de Banach X, il y a plusieurs définitions du spectre essentiel qui coincident toutes pour le cas auto-adjoint sur un espace de Hilbert. Aux moins six ont été mentionnées dans la littérature (voir *cf.* [76], [77], [78]). Plus précisément, Soient X un espace de Banach et $A \in C(X)$, on définit les spectres essentiels :

$$\begin{array}{rrcl}
\textbf{de Gustafson} & \sigma_{e1}(A) & = & \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \notin \Phi_+(X)\} \\
\textbf{de Weidman} & \sigma_{e2}(A) & = & \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \notin \Phi_-(X)\} \\
\textbf{de Kato} & \sigma_{e3}(A) & = & \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \notin \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)\} \\
\textbf{de Wolf} & \sigma_{e4}(A) & = & \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \notin \Phi(X)\} \\
\textbf{de Schechter} & \sigma_{e5}(A) & = & \mathbb{C} \setminus \rho_5(A) \\
\textbf{de Browder} & \sigma_{e6}(A) & = & \mathbb{C} \setminus \rho_6(A)
\end{array}$$

où

$\rho_5(A) = \{\lambda \in \Phi_A : i(\lambda - A) = 0\}$ et $\rho_6(A) = \{\lambda \in \rho_5 :$ tout scalaire voisin de λ est dans $\rho(A)\}$.

On note, qu'en général, on a les inclusions

$$\sigma_{e1}(A) \cap \sigma_{e2}(A) = \sigma_{e_3}(A) \subseteq \sigma_{e4}(A) \subseteq \sigma_{e5}(A) \subseteq \sigma_{e6}(A).$$

On rappelle une autre caractérisation du spectre de Schechter. Soit $A \in \mathcal{C}(X)$, on définit $\sigma_{e5}(A)$ par

$$\boxed{\sigma_{e5}(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(A+K) \qquad (*)}$$

M. Schechter a établit une équivanlence entre (*) et le résultat suivant :

Théorème 4 *Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{C}(X)$. Alors,*

$$\lambda \notin \sigma_{e5}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \Phi_A^{\circ} = \{\lambda \in \Phi_A : i(\lambda - A) = 0\}.$$

Soient X et Y deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{C}(X,Y)$. Pour tout $x \in D(A)$ (le domaine de A), on pose

$$||x||_A := ||x||_X + ||Ax||_Y.$$

Comme A est fermé, $D(A)$ muni de la norme $||.||_A$ est un espace de Banach que nous notons X_A. Ainsi, A en tant qu'opérateur de X_A dans Y est borné. Soit J un opérateur de X dans Y. Si $D(A) \subseteq D(J)$, alors J est dit A-défini. Dans ce cas, on désigne par $\hat{J}$ la restriction de J à $D(A)$. De plus, si $\hat{J} \in \mathcal{L}(X_A, X)$ on dit que J est A-borné.

Définition 1 *Soient X et Y deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est dit strictment singulier si sa restriction à chaque sous-espace fermé de dimension infinie n'est pas un isomorphisme.*

On note $\mathcal{S}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs strictement singuliers de X dans Y. Si $X = Y$, on écrit $\mathcal{S}(X)$. Le concept d'opérateurs strictement singuliers a été introduit par T. Kato [69] comme généralisation des opérateurs compacts. A noter que tout opérateur compact est strictment singulier, la réciproque est en général fausse. Néanmoins, si X est un espace de Hilbert séparable et $X = \ell_p$ $(1 \leq p < +\infty)$, on a $\mathcal{K}(X) = S(X)$. De plus, $\mathcal{S}(X)$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(X)$ (*cf.*[97]).

Soit X un espace de Banach et N un sous-espace fermé de X. On désigne par π_N la surjection canonique $X \to X/N$. La codimension de N, codim(N), est définie comme étant la dimension de l'espace vectoriel X/N.

Définition 2 *Soit X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. T est dit strictment cosingulier s'il n'existe pas des sous-espaces fermés de codimension infinies (codim$(N) = \infty$) tel que l'application π_N soit surjective.*

On désigne par $\mathcal{CS}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs strictment cosinguliers de X dans Y. Cette classe d'opérateurs a été introduites par A. Pelczynski [114], [115], l'ensemble $\mathcal{CS}(X,Y)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(X,Y)$. Lorsque $X = Y$, $\mathcal{CS}(X)$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(X)$ (*cf.* [141]).

Notons que les trois familles de perturbation de Fredholm, sur semi-Fredholm et sous-semi Fredholm ont été initialement introduites dans [49] pour les opérateurs de Fredholm et semi-Fredholm bornés c'est-à-dire

$$\Phi^b(X,Y) = \Phi(X,Y) \bigcap \mathcal{L}(X,Y), \quad \Phi^b_+(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \bigcap \mathcal{L}(X,Y)$$

et

$$\Phi^b_-(X,Y) = \Phi_-(X,Y) \bigcap \mathcal{L}(X,Y).$$

Ces ensembles seront notés, respectivement $\mathcal{F}^b(X,Y)$, $\mathcal{F}^b_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}^b_-(X,Y)$. On rappelle qu'ils sont tous fermés dans $\mathcal{L}(X,Y)$ et que, lorsque $X = Y$, $\mathcal{F}^b(X)$, $\mathcal{F}^b_+(X)$ et $\mathcal{F}^b(X)$ sont des idéaux bilatères fermés [49]. De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(X,Y) &\subseteq \mathcal{S}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b_+(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b(X,Y), &(1.1)\\ \mathcal{K}(X,Y) &\subseteq \mathcal{CS}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b_-(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b(X,Y). &(1.2) \end{aligned}$$

Notons que l'inclusion $\mathcal{S}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b_+(X,Y)$ est dûe à T. Kato [69], tandis que l'inclusion $\mathcal{CS}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b_-(X,Y)$ a été obtenue par Vladimirskii [141].

Soient X un espace de Banach et $R \in \mathcal{L}(X)$. Par définition R est dit de Riesz si $\Phi_R = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour les propriétés de cette famille d'opérateurs notée $\mathcal{R}(X)$, on pourra consulter [31]. Toutefois, on signale le fait important que $R(X)$ n'est pas un idéal de $\mathcal{L}(X)$, M. Schechter a montré que $\mathcal{F}^b(X)$ est le plus grand idéal de $\mathcal{L}(X)$ (au sens de l'inclusion) contenu dans $\mathcal{R}(X)$. On déduit alors en vertu de (1.1) et (1.2) que les ensembles $\mathcal{K}(X), \mathcal{S}(X), \mathcal{CS}(X), \mathcal{F}^b_+(X)$ et $\mathcal{F}^b_-(X)$ sont contenus dans $\mathcal{R}(X)$. Par conséquent si R est dans l'un des ensembles, alors son spectre admet 0 comme unique point d'accumulation.

On termine cette section par rappeler un lemme fondamental qui va jouer un rôle essentiel dans le cadre du chapitre 5.

Soit B_X la boule unité fermée de l'espace de Banach X, on définit la mesure de non-compacité d'un ensemble borné $A \subset X$ par

$$\delta(A) = \inf\{\delta > 0 : \exists\ M \text{ sous-ensemble fini de } X \text{ tel que } A \subset M + \delta B_X\}.$$

Il est clair que $\delta(A) = 0$ si et seulement si A est un ensemnle relativement compact dans X. De plus, pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$, $\delta(T)$ est défini comme étant le nombre $\delta[T(B_X)]$.

Lemme 5 *Soit X un espace de Banach, alors*

- *Si $A \subset B \subset X$, on a $\delta(A) \leq \delta(B)$.*
- *Si $T \in \mathcal{L}(X)$, alors δ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(X)$ et $\delta(T) \leq ||T||$.*
- *Si $B \in \mathcal{L}(X)$, alors $\delta(BT) \leq \delta(B)\delta(T)$.*
- *Si $K \in \mathcal{K}(X)$, alors $\delta(B+K) = \delta(B)$ pour tout $B \in \mathcal{L}(X)$*
- *Si A^* désigne le dual de l'opérateur A, alors*

$$\frac{1}{2}\delta(A^*) \leq \delta(A) \leq 2\delta(A^*).$$

1.2 Théorie spectrale des opérateurs

Soit X un espace de Banach et $T : D(T) \subset X \to X$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé et à domaine dense. On appelle l'ensemble résolvant de T, l'ensemble

$$\boxed{\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda - T : D(T) \to X \text{ est bijectif}\}.}$$

Son complément dans le plan complexe s'appelle le spectre de T et sera noté $\sigma(T)$. On notera que si $\lambda \in \rho(T)$, l'inverse $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, c'est-à-dire : $R(\lambda, T) \in \mathcal{L}(X)$.

Cet opérateur est appellé la résolvante de T au point λ. L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert du plan complexe et l'application

$$\lambda \in \rho(T) \mapsto R(\lambda, T)$$

est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(T)$. La résolvante vérifie l'équation fonctionnelle, dite identité de la résolvante, suivante

$$\boxed{R(\lambda, T) - R(\lambda_0, T) = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda, T)R(\lambda_0, T), \quad \lambda, \lambda_0 \in \rho(T).}$$

Le spectre de T est un fermé de $\mathbb{C}$, et si de plus T est borné alors $\sigma(T)$ est un ensemble compact non vide. On appelle alors rayon spectral de T, le nombre que l'on note

$$\boxed{r_\sigma(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.}$$

Lorsque T n'est pas borné, un paramètre utile pour localiser son spectre est donné par l'abscisse spectrale

$$s(T) = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$$

avec la convention $s(T) = -\infty$ si $\sigma(T) = \emptyset$ et $s(T) = +\infty$ si l'ensemble $\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(T)\} \cap [0, +\infty[$ est non borné et qui permet de définir le spectre périphérique par

$$\sigma_+(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \mathrm{Re}(\lambda) = s(T)\}.$$

Donnons à présent la structure du spectre. Le premier sous-ensemble important du spectre est le spectre ponctuel

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\text{tel que } \lambda - T : D(T) \longrightarrow X \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément de $\sigma_p(T)$ est dit valeur propre de T, s'il lui correspond un x non nul appartient à $D(T)$ tel que $(\lambda - T)x = 0$ que l'on appelle vecteur propre (fonction propre lorsque X est un espace fonctionnel) correspondant à λ.

On définit le spectre approché de T par

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda/\lambda - T : D(T) \mapsto X \ \text{ n'est pas injectif ou à image non fermée}\}.$$

(L'image d'un opérateur non borné A est défini par $\{Ax : x \in D(A)\}$). Le spectre résiduel est donné par

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\text{tel que } \lambda - T : D(T) \mapsto X \text{ est à image non dense}\}.$$

On a toujours

$$\sigma(T) = \sigma_{ap} \bigcup \sigma_r(T) \ \text{ et } \ \sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T).$$

La proposition suivante donne une autre caractérisation du spectre approché :

Proposition 6 *Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Alors $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n \subset D(T)$, dite* **suite approximante***, telle que*

$$||x_n|| = 1 \quad et \quad ||(\lambda - T)(x_n)|| \to 0 \ quand \ n \to +\infty.$$

Notons que le spectre essentiel de Schechter défini précédemment est un ensemble fermé de $\sigma(T)$. Il repésente la partie de $\sigma(T)$ invariante par perturbation de T par tout opérateur compact. On a donc $\sigma_{e5}(T+K) = \sigma_{e_5}(T)$. Ces résultats ont été raffinés par K. Latrach et A. Dehici [78] moyennant la classe des perturbations de Fredholm $\mathcal{F}^b(X)$.

Lorsque X est de dimension infinie et T est un opérateur borné, $\sigma_{e5}(T)$ est un ensemble compact non vide, son rayon spectral essentiel est défini par

$$\boxed{r_{e5}(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{e5}(T)\}}.$$

Signalons aussi le résultat de stabilité du spectre essentiel dû à M. Schechter [126], [127], [128].

Proposition 7 *Soient T et S deux opérateurs fermés à domaine dense dans X. S'il existe $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$ tel que $R(\lambda, T) - R(\lambda, S)$ soit compact, alors*

$$\sigma_{e5}(T) = \sigma_{e5}(S).$$

Ce résultat est d'un intérêt majeur, il a été étendu aussi par K. Latrach et A. Dehici au cas des perturbation strictement singulières. Cet intérêt provient du fait qu'il peut déterminer le spectre eseentiel de l'opérateur de transport avec des conditions aux bords compactes, strictement singulières, en connaissant seulement celui du cadre neutronique $(H = 0)$.

1.3 Théorie spectrale des semigroupes

Commençons par rappeler la définition d'un semigroupe fortement continu, noté C_0-semigroupe.

Définition 3 *On appelle C_0-semigroupe sur un espace de Banach X, toute famille $(S(t), t \geq 0)$ d'opérateurs bornés sur X tels que*

- $T(t+s) = T(t)T(s)$ *pour tous* $t, s \in \mathbb{R}^+$
- $T(0) = Id_X$ *(l'opérateur identité sur X).*
- $\lim\limits_{t \to 0} ||T(t)x - x|| = 0$ *pour tout* $x \in X$.

Le générateur A du semigroupe $(S(T), t \geq 0)$ est l'opérateur défini sur le domaine

$$D(A) = \left\{ x \in X \text{ tel que } \lim_{t \to 0} \frac{U(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

par

$$\boxed{Ax = \lim_{t \to 0} \frac{U(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).}$$

Remarque : le semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ admet un unique générateur sur X.

Proposition 8 *Soit $(S(t), t \geq 0)$ un C_0-semigroupe sur X alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $\mu \geq 1$ telles que*

$$||S(t)|| \leq \mu . e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, pour tout $x \in X$, l'application $t \to S(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X. L'existence des nombres μ et ω est une conséquence du théorème de Banach-Steihauss ([22], [50], [63]).

Si $\omega = 0$, le C_0-semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ est dit uniformément borné. De plus, si $\mu = 1$, on dit que $(S(t), t \geq 0)$ est un semigroupe de contraction.

Le nombre ω est le type du semigroupe $(S(t), t \geq 0)$. Il est défini par

$$\omega = \inf_{t \geq 0} \left[\frac{\ell\text{n}||S(t)||}{t} \right] = \lim_{t \to \infty} \frac{\ell\text{n}||S(t)||}{t}.$$

On note que le type ω du semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ possède les propriétés suivantes :

a) $r_\sigma(S(T)) = e^{\omega t}$ $(t \geq 0)$.

b) $s(A) \leq \omega$ ce qui montre que $\{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re} \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec Re $\lambda > \omega$ on a $R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$ $(x \in X)$.

On note que la propriété c) affirme que la résolvante de A est la transformée de Laplace du semigroupe. Le théorème de Hille-Yoshida donne une caractérisation des générateurs des C_0-semigroupes (*cf.* [63], [113]).

Théorème 9 *un générateur infinitésimal A du C_0-semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ vérifie*

$$||S(t)|| \leq M.e^{\omega t} \quad t \geq 0$$

si et seulement si

(i) *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *$]\omega, +\infty[\subseteq \rho(A)$ et $||(R(\lambda, A))^n|| \leq \dfrac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}$ $\quad (Re\lambda > \omega, \ n \in \mathbb{N})$.*

Définition 4 *Un C_0-groupe sur X est une famille d'opérateurs $(S(t), t \in \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(X)$ vérifiant les conditions de la définition 3 où $\mathbb{R}^+$ est remplacé par $\mathbb{R}$. Le générateur A d'un C_0-groupe $(S(t), t \in \mathbb{R})$ sur X est défini par*

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

Le domaine $D(A)$ de A est l'ensemble de tous les $x \in X$ pour lesquels la limite précédente existe.

On note que A est générateur d'un C_0-groupe $(S(t), t \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\pm A$ engendrent des C_0-semigroupes $S_\pm(t)$. Dans ce cas,

$$S(t) = \begin{cases} S_+(t), & t \geq 0 \\ S_-(-t), & t \leq 0 \end{cases}$$

On note que si T est le générateur d'un C_0-semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ d'un espace de Banach X, alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Tu(t) & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases}$$

admet une solution unique donnée par $u(t) = S(t)u_0$.

La connaissance du spectre du semigroupe est un outil de base pour la compréhension du comportement asymptotique de la solution $u(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

Dans le cas où T est un opérateur borné, ceci se traduit par un théorème d'application spectrale complet interprété par l'identité

$$\boxed{\sigma\left(e^{tT}\right) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(T)} = \left\{e^{\lambda t} : \lambda \in \sigma(T)\right\}.}$$

Malheureusement, dans le cas général, on a une inclusion stricte

$$e^{t\sigma(T)} \subset \sigma\left(U(t)\right).$$

(Pour des exemples où l'inclusion précédente est stricte, on peut consulter [57]). Le fait que l'égalité n'est pas satisfaite provient du spectre approché $\sigma_{ap}(.)$ et en particulier du spectre continu car le théorème de l'application spectrale est vérifié pour les deux autres types de spectres, c'est à dire le ponctuel et le résiduel, en d'autres termes, on a seulement

$$e^{t\sigma_{ap}(T)} \subset \sigma_{ap}\left(U(t)\right).$$

Le manque d'un théorème d'application spectrale complet a poussé plusieurs auteurs à chercher des théorèmes d'applications spectrales qui se traduisent par l'existence des réels $r \leq s(T)$ tels que

$$\sigma(S(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{tr}\} = e^{t\sigma(T)} \cap \{e^{t\lambda} : \text{ Re } > r\}.$$

Remarque : On note que si le théorème de l'application spectrale a lieu alors le type du semigroupe $S(t)$ coïncide avec l'abscisse spectrale de son générateur $(\omega(S(T)) = s(T))$.

1.4 Type essentiel et comportement asymptotique

Soit $(S(t), t \geq 0)$ un C_0-semigroupe dans $\mathcal{L}(X)$ de type ω. Le type essentiel de $(S(t), t \geq 0)$ est $\omega_e \in [-\infty, \omega]$ défini par

$$\omega_e = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ell\text{n}[\delta(S(t))] = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \exists M, \delta(S(t)) \leq Me^{\lambda t}\}.$$

où δ est la fonctionnelle de la mesure de non compacité définie dans [152]. De plus, on a

$$r_e(S(T)) = e^{\omega_e t}.$$

L'existence de ce réel a été démontré par L. Weis [152]. De plus, il vérifie

$$w(S(t)) = \max\{s(T) : \omega_e(S(T))\}.$$

Expliquons maintenant pourquoi le type essentiel ω_e est lié au comportement asymptotique du semigroupe.

Soit $(S(t), t \geq 0)$ un C_0-semigroupe, T son générateur et ω son type. Si $\omega_e < \omega$, alors pour tout α tel que $\omega_e < \alpha < \omega$, $\sigma(T) \cap \{\lambda, \mathrm{Re}\lambda \geq \alpha\}$ est formé d'un ensemble non vide fini de valeurs propres de multiplicités algébriques finis. De plus la projection spectrale P_α correspondant à l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T) : \mathrm{Re}\lambda \geq \alpha\}$ commute avec $S(t)$ et il existe une constante C_α telle que

$$||S(t)(I - P_\alpha)|| \leq C_\alpha e^{\alpha t}.$$

Donc le comportement asymptotique du semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ est déterminée par sa partie dans l'espace de dimension finie $P_\alpha(X)$. De plus, si X est un espace de Banach lattice et $S(t)_{t\geq 0}$ est un semigroupe positif, alors $\{\lambda \in \sigma(T) : \ \mathrm{Re}\lambda \geq \omega - \varepsilon\} = \{\varepsilon\}$ pour ε suffisament petit et si $\{S(t) : t \geq 0\}$ est irréductible (*cf.* [102, Chapitre 5]) alors ω est algébriquement simple (de multiplicité 1) et la projection spectrale associée est strictement positive (voir [102, Chapitre 5] pour plus de détails).

1.5 Perturbations bornées

Commençons cette section par rappeler le théorème classique des perturbations dû à Phillips [63], [113].

Théorème 10 *Soient X un espace de Banach et A le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $(S(t), t \geq 0)$ sur X vérifiant $||S(t)|| \leq M.e^{\omega t}$. Si $B \in \mathfrak{L}(X)$, alors $A + B$ engendre un C_0-semigroupe $(T(t), t \geq 0)$ sur X vérifiant*

$$||T(t)|| \leq Me^{(\omega + M||B||)t}, \qquad t > 0.$$

De plus, pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, on a

$$T(t)x = S(t)x + \int_0^t S(t-s)BT(s)xds \qquad (*)$$

On note que le semigroupe $(T(t), t \geq 0)$ est donné en itérant l'équation $(*)$ au moyen de la série de Dyson-Phillips

$$T(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} T_j(t) \qquad (**)$$

où $T_0(t) = S(t)$ et $T_j(t) = \int_0^t S(s)BT_{j-1}(t-s)ds \quad (j \geq 1)$. La série (∗∗) converge dans $\mathcal{L}(X)$ uniformément sur les intervalles bornés. De plus, le reste d'ordre n de cette série est donnée par

$$\int_{s_1+\cdots+s_n \leq t, s_i \geq 0} S(s_1)B...BS(s_n)BT\left(t - \sum_{i=1}^{n} s_i\right) ds_1 \cdots ds_n.$$

L'intérêt des perturbations réside dans le fait que dans la plupart des situations les problèmes rencontrés n'ont pas des solutions classiques, comme dans le cas de l'opérateur de transport (ils ne sont pas auto-adjoints ni à résolvantes compactes) mais ils peuvent s'écrire sous la forme d'une perturbation d'opérateurs dont l'étude spectrale est plus au moins connue. Le recours aux techniques de perturbations permet d'obtenir des résultats spectraux importants aussi bien pour le générateur que pour le semigroupe.

Présentons maintenant le théorème fondamental suivant qui illustre le rôle de la compacité d'un reste de la série de Dyson-Phillips dans l'étude du comportement asymptotique.

Théorème 11 *On suppose que X est l'un des espaces $L_p([0,1])$. Alors, avec les mêmes notations ci-dessus, si un certain reste de la série de Dyson-phillips est compact pour $t \geq t_0$, alors*

$$r_e(S(t)) = r_e(T(t)), \qquad t \geq 0.$$

En particulier, l'ensemble

$$\sigma(T(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega}\}, \quad t \geq 0$$

est formé des valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies.

On a aussi les récents résultats pertinents de S. Brendle et ses collaborateurs [27], [28] qui s'affranchissent de la compacité.

Théorème 12 *Si pour un certain $t_0 > 0$, $R_1(t) = V(t) - U(t)$ $(t_0 < t)$ est continu (à droite) en norme ou plus généralement, si pour un certain $k \geq 1$, l'application $t \in \mathbb{R}_+^* \to R_k(t)$ est continue (à droite) en norme, alors*

$$\sigma(T(t)) \bigcap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega}\} = e^{t\sigma(T+K)} \bigcap \{e^{t\lambda} : Re\lambda > \omega\}.$$

1.6 Compacité et continuité en norme des restes de la série de Dyson-Phillips

Dans cette section, on présente quelques outils qui nous permettent de faciliter l'étude des restes de la série de Dyson-Phillips, ils se résument dans la propriété de la stricte convexité introduite et utilisée par l'école allemande (L. Weis [152], G. Schluchtermann [129], [130] et J. Voigt [148]) et celle de la convolution qui assure la conservation de la compacité et la continuité en norme.

Théorème 13 *Soient X et Y deux espaces de Banach. On note $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ le sous-espace des opérateurs compacts. Soit (ω, μ) un espace de mesure finie et*

$$G : \omega \mapsto \mathcal{L}(X,Y)$$

une application bornée et fortement mesurable (c'est-à-dire que $\omega \to G(\omega)x$ est mesurable pour tout $x \in X$). Si $G(\omega) \in \mathcal{K}(X,Y)$ p.p. $\omega \in \Omega$, alors l'intégrale forte

$$x \in X \mapsto \int_\Omega G(\omega)x dv(\omega) \in Y$$

est compacte.

Définition 5 *Soient $f, g :]0, +\infty[\to \mathcal{L}(X)$ deux applications fortement continues. Leur convolution est donnée par*

$$f * g(t) : x \in X \mapsto \int_0^t f(t-s)g(s)xds \in \mathcal{L}(X), \quad t \geq 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $[f]^n = f * f * \cdots * f$ (n fois). L'opération $*$ est associative et on peut écrire

Proposition 14 *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$U_m(t) = [UK]^m * U(t) \qquad et \qquad R_m(t) = [UK]^m * V(t).$$

On a aussi les résultats de conservation et de régularité suivante (*cf.*, [102, Chapitre 2]) :

Proposition 15 *Soient $f, g :]0, +\infty[\mapsto \alpha(X)$ deux applications fortement continues et soit $0 < M \leq +\infty$:*

- *Si $f(t)$ ou $g(t)$ est compacte pour tout $t \in]0, M[$ alors $(f * g)(t)$ est compacte pour tout $t \in]0, M[$.*
- *Si $]0, M[\ni t \to f(t)$ ou $]0, M[\ni t \to g(t)$ est continue en norme, alors $]0, M[\ni t \to (f * g(t))$ l'est aussi.*

Théorème 16 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors*

- *Si $[UK]^n(t)$ est compact pour tout $t > 0$, alors $U_n(t)$ l'est aussi.*
- *Si $0 < t \mapsto [UK]^n(t)$ est continue en norme, alors $0 < t \mapsto U_m(t)$ l'est également.*

Théorème 17 *Soit $0 < M \leq +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

- *Le reste $R_n(t)$ est compact pour tout $t \in]0, M[$ si et seulement si $U_m(t)$ est compacte pour tout $t \in]0, M[$.*
- *L'application $]0, M[\ni t \mapsto R_n(t) \in \mathfrak{L}(x)$ est continue en norme si et seulement si $]0, M[\ni t \mapsto U_m(t) \in \mathfrak{L}(X)$ est aussi continue en norme.*

On termine cette section par des arguments d'interpolation et de domination pour les opérateurs compacts positifs.

Théorème 18

- *Soit $K \in \bigcap_{q \geq 1} \mathfrak{L}(L^q(\bigwedge))$. S'il existe $1 \leq q_0 \leq +\infty$ tel que K soit compact dans $\mathfrak{L}((L^{q_0}(\bigwedge)))$, alors K est compact dans $L^q(\bigwedge)$, $1 < q < +\infty$.*
- *Soit $0 \leq t \mapsto f(t) \in \bigcap_{q \geq 1} \mathfrak{L}(L^q(\bigwedge))$ une application fortement continue en tant qu'une application à valeurs dans $\mathfrak{L}(L^q(\bigwedge))$ pour tout $1 \leq p < +\infty$. S'il existe $1 \leq q_0 < +\infty$ tel que $t \longrightarrow f(t)$ soit continue en norme à valeurs dans $\mathfrak{L}(L^{q_0}(\bigwedge))$, alors elle est continue en norme à valeurs dans $\mathfrak{L}(L^q(\bigwedge))$, $1 < q < +\infty$.*

Théorème 19 *Soient A et B deux opérateurs bornés sur $L^p(\bigwedge)$ avec $1 < p < +\infty$. Si B est compact et $0 \leq A \leq B$, alors A est compact.*

Ce théorème est un cas particulier d'un résultat dû à Doods et Fremlin établi dans un cadre général (sur un espace lattice quelconque c'est A^3 qui est compact, sur L^1 c'est A^2 qui est compact et sur $L^p, p > 1$, on tombe sur la compacité).

Chapitre 2

Résultats de compacité en théorie du transport avec des conditions aux bords générales

2.1 Résumé

L'objectif principal de ce chapitre est de donner une analyse systématique des résultats de compacité pour des équations de transport où le flux rentrant est lié aux flux sortant par un opérateur frontière borné pour une classe large de mesures dont les supports sont les espaces de vitesses et sous certaines conditions sur les opérateurs de collisions. On présente ici une méthode différente (plus simple et plus courte) que celle établie par K. Latrach (2001) qui illustre d'une part le fait que ces résultats obtenus sont indépendants des propriétés de l'opérateur aux bords (en effet, il suffit qu'il soit borné) et d'autre part le rôle dominant du cadre neutronique dans les techniques de démonstrations. Cette analyse est d'une grande utilité dans la compréhension du comportement asymptotique des solutions.

2.2 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier les propriétés de compacité de l'opérateur de transport pour des géométries bornées (couvrant à la fois le cadre monodimensionnel et multidimensionnel) qui peut être modélisé par un opérateur intégro-différentiel suivant:

$$\begin{aligned} A_H\psi(x,\xi) &= -v.\nabla_x\psi(x,v) - \sigma(v)\psi(x,v) + \int_V k(x,v,v')\psi(x,v')d\mu(v') \\ &= T_H\psi + K\psi, \end{aligned}$$

où $(x,v) \in D \times V$. Ici D est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, $d\mu(.)$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que $d\mu(0) = 0$ et V est le support de $d\mu$. Cet opérateur décrit le transport des particules (neutrons, photons, molécules des gaz, ...) dans le domaine D. la fonction $\psi(x,v)$ désigne la densité de probabilité des particules de gaz ayant la position x et la vitesse v. Les fonctions $\sigma(.)$ et $k(.,.)$ sont respectivement, la fréquence et le noyau de collision.

L'évolution de la théorie du transport a été directement liée au développement de l'industrie nucléaire depuis la deuxième guerre mondiale, néanmoins, comme il a été mentionné et précisé par I. Kuscer [71] , elle a des racines en théorie radiative du transfert. Le domaine de la théorie neutronique, entre mathématiques appliquées et ingénierie a bénéficié au début des travaux pionniers de physiciens, d'ingénieurs et de mathématiciens qui ont donné au sujet un intérêt majeur et ont laissé aux générations futures un champ cohérent de problèmes et de techniques.

En tenant compte des problèmes spectraux en théorie neutronique qui ont apparu avec les travaux de M. Wing, J. Lehner, K. Jorgens, V. S. Vladimirov, S. Ukaï [65], [66], [87], [88], [137] [139], [140], [142] et d'autres, la théorie du transport a commencé à avoir des connections strictes dans les années cinquantes avec la théorie des semigroupes, la théorie spectrale des opérateurs non auto-adjoints, la positivité, ..., donc il n'est pas surprenant de voir que la théorie du transport est liée à l'analyse fonctionnelle.

On signale qu'en général les équations de transport sont de nature linéaire, ceci se traduit par le fait que la proportion des neutrons est infinitésimale par rapport aux atomes du milieu dans lequel ils se propagent (de l'ordre 10^{-11}) de sorte que les intéractions neutrons-neutrons sont négligeables par rapport aux intéractions des neutrons avec le milieu ambiant dont les propriétés sont supposées indépendantes de la population neutroniques.

Dans le cas des conditions aux bords générales ($H \neq 0$), les intéractions entre les particules et le milieu peuvent être de nature très complexe et déterminées par plusieurs facteurs concurrents et donc leurs formulations mathématiques précises sont très controversées. Néanmoins, le modèle souvent uitlisé consiste à supposer que la partie du flux sortant est re-émise dans une direction déterministe (réflexion spéculaire) tandis que l'autre partie est re-émise dans des directions aléatoires (réflexions diffusives).

Ici les conditions aux bords sont modélisées par :

$$\psi_- = H(\psi_+)$$

où ψ_- (resp. ψ_-) est la resctriction de ψ à Γ_- (resp. Γ_+) avec Γ_- (resp. Γ_+) est la partie rentrante (resp. sortante) de l'espace des phase frontière et H est un opérateur linéaire borné défini sur des espaces de traces bien choisis, couvrant en particulier tous les modèles physiques bien connus (périodiques, réflexives, mixtes,...).

Dans ce chapitre, on va étendre l'analyse réalisée par M. Mokhtar-Kharroubi [101] dans le cadre absorbant ($H = 0$) au cadre général via des techniques plus simples que celles utilisées par M. K. Latrach [85] où le rôle joué par l'opérateur de transport avec des conditions aux bords absorbantes apparaît avec plus d'impact et d'importance sur les résultats obtenus en géométrie bornée quelconque, notamment en dimension supérieur ($N > 1$).

Tout d'abord, énonçons le théorème fondamental suivant qui porte le nom d'alternative de Gohberg-Shmulyan et qu'on peut le trouver par exemple dans [121], [139].

Théorème 20 *Soit X un espace de Banach complexe et $\lambda \mapsto N(\lambda)$ une famille holomorphe d'opérateurs linéaires compacts dans X, définie sur une partie connexe du plan complexe. On a alors l'alternative suivante :*

① *Soit 1 est une valeur propre de $N(\lambda)$ pour tout λ.*

② *Soit $R(1, N(\lambda))$ existe sauf sur un ensemble discret de λ, qui sont des pôles de $N(.)$ de parties principales dégénérées (c'est-à-dire les cœfficients associés sont de rang finis).*

Remarque 1. En pratique, on montre que si l'assertion ① qui est satisfaite après avoir vérifié que ② n'est pas possible.

Corollaire 6 *Si la famille $\lambda \mapsto N(\lambda)$ admet seulement une puissance compacte d'ordre m, alors l'alternative reste vrai.*

Remarque 2. Soit C un ouvert connexe de $\rho(T)$. Si une puissance de $KR(\lambda, T)$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(T)$, alors grâce au corollaire précédent on peut montrer que soit $C \bigcap \sigma(T+K) \subset \sigma_p(T+K)$, soit $C \bigcap \sigma(T+K)$ est réduit, au plus, à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Il suffit d'appliquer le corollaire à $N(\lambda) = KR(\lambda, T)$ et de remarquer que 1 est une valeur propre de $KR(\lambda, T)$ si et seulement si λ est une valeurr propre de $T + K$ (voir [144, Théorème1] pour plus de détails sur la multiplicité algébrique de ces valeurs propres).

Pour l'ensemble $\sigma(T+K) \cap \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\}$, on montre que c'est la deuxième situation qui se produit, c'est à dire, il est formé, au plus de valeurs propres de multiplicités algébriques finies , cela permet, en se servant de la formule de Dunford et moyennant quelques hypothèses supplémentaires, de donner une description asymptotique de $V(t)\varphi_0$ (semigroupe perturbé appliqué à la donnée initiale) lorsque $\varphi_0 \in D[(T+K)^2]$ (voir [86]). C'est pour cette raison qu'on étudie la compacité des puissances de $KR(\lambda, T)$.

2.3 Notations et Préliminaires

Soit D un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ et soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n$ qui satisfait $\mu(\{0\}) = 0$. On note par V le support de μ qui n'est autre que l'espace des vitesses. Soit $(x, v) \in \overline{D} \times \overline{V}$ et soit

$$t^{\pm}(x, v) = \sup\{t > 0, x \pm sv \in D,\ 0 < s < t\}.$$

On désigne par

$$\Gamma_{\pm} = \{(x, v) \in \partial D \times V, \pm v.n_x \geq 0\}$$

où n_x désigne le vecteur normal extérieur au point $x \in \partial D$. Donc, pour $(x, v) \in \Gamma_{\pm}$, on a $t^{\pm}(x, v) = 0$, $t^{\pm} > 0$ et dans tous les cas $(x \pm t^{\pm}(x, v), v) \in \Gamma_{\pm}$. Soit $1 < p < +\infty$, on introduit les espaces fonctionnels

$$W_p = \{\psi \in X_p \text{ telle que } v.\nabla_x \psi \in X_p\},$$

où

$$X_p = L_p(D \times V, dxd\mu(v)).$$

Un espace L^p convenable de traces est défini comme suit :

$$L^{p,\pm} := L^p(\Gamma_{\pm}; |v.n_X| d\gamma_x d\mu(v)),$$

$d\gamma_x$ est la mesure de Lebesgue sur ∂D. On peut définir les traces $\psi_\pm$ sur $\Gamma_\pm$ de $\psi \in W_p$; notons qu'en général, ces traces n'appartiennent pas à $L^{p,\pm}$, mais elles appartiennent à $L^{p,\pm}_{\ell oc}$, ou plus précisément à un espace L^p à poids (voir [34] pour plus de détails). On définit

$$\widehat{W_p} = \{\psi \in W_p, \psi_- \in L^{p,-}\} \subseteq W_p.$$

Remarque : L'inclusion précédente peut s'écrire sous la forme

$$\widehat{W_p} = \{\psi \in W_p, \psi_- \in L^{p,-}\} = \{\psi \in W_p, \psi_+ \in L^{p,-}\} \subseteq W_p.$$

Ceci est dû au fait que pour $\psi \in W_p$, on a $\psi_+ \in L^{p,+} \Longleftrightarrow \psi_- \in L^{p,-}$.

Soit H un opérateur aux bords défini par

$$H : L^{p,+} \mapsto L^{p,-}, \qquad H \in \mathcal{L}(L^{p,+}, L^{p,-}).$$

L'opérateur d'advection T_H est défini par

$$\begin{cases} T_H\psi(x,v) = -v.\nabla_x\psi(x,v) - \sigma(v)\psi(x,v) \\ D(T_H) = \{\psi \in \widehat{W_p} \text{ telle que } \psi_- = H(\psi_+)\} \end{cases}$$

où la fréquence de collision $\sigma(.) \in L^\infty(V)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \lambda\psi(x,v) + v.\nabla_x\psi(x,v) + \sigma(v)\psi(x,v) = \varphi(x,v) \\ \psi_- = H(\psi_+) \end{cases} \tag{2.1}$$

où φ est une fonction donnée dans X_p et l'inconnue ψ doit appartenir à $D(T_H)$.

Soit

$$\lambda^* = \mu - \operatorname*{ess\,inf}_{v \in V} \sigma(v).$$

Pour $\mathrm{Re}\lambda + \lambda^* > 0$, l'équation (1) peut-être formellement résolue comme suit

$$\psi(x,v) = \psi(x - t^-(x,v)v, v)e^{-(\lambda+\sigma(v))t^-(x,v)} + \int_0^{t^-(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s}\varphi(x-sv,v)ds. \tag{2.2}$$

De plus, pour $(x,v) \in \Gamma_+$, (2.2) devient

$$\psi_{|\Gamma_+} = \psi_{|\Gamma_-} e^{-(\lambda+\sigma(v))\tau(x,v)} + \int_0^{\tau(t,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s}\varphi(x-sv,v)ds, \tag{2.3}$$

où $\tau(x,v) = t^{+}(x,v) + t^{-}(x,v)$ (notons que, puisque $(x,v) \in \Gamma_{+}$, $t^{+}(x,v) = 0$). Pour donner les formulations abstraites de (2.2) et (2.3), définissons les opérateurs dépendants de λ suivants :

$$\begin{array}{rcl} M_{\lambda} & : & L^{p,-} \mapsto L^{p,+} \qquad u \mapsto M_{\lambda}u = ue^{-(\lambda+\sigma(v))\tau(x,v)} \\ B_{\lambda} & : & L^{p,-} \mapsto X_{p} \qquad u \mapsto B_{\lambda}u = ue^{-(\lambda+\sigma(v))t^{-}(x,v)} \\ G_{\lambda} & : & X_{p} \mapsto L^{p,+} \qquad \varphi \mapsto G_{\lambda}\varphi = \displaystyle\int_{0}^{\tau(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s}\varphi(x-sv,v)ds \end{array}$$

et

$$C_{\lambda} : X_{p} \mapsto X_{p} \qquad \varphi \mapsto G_{\lambda}\varphi = \int_{0}^{t^{-}(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s}\varphi(x-sv,v)ds.$$

Un calcul simple utilisant l'inégalité de Hölder montre que ces opérateurs sont bornés sur les espaces sur lesquels ils sont définis et leurs normes satisfont les inégalités suivantes

$$\begin{array}{rcl} ||M_{\lambda}|| & \leq & 1, \\ ||B_{\lambda}|| & \leq & \dfrac{1}{[p(\mathrm{Re}\lambda+\lambda^{*})]^{1/p}}, \\ ||G_{\lambda}|| & \leq & \dfrac{1}{[q(\mathrm{Re}\lambda+\lambda^{*})]^{1/q}}, \\ ||C_{\lambda}|| & \leq & \dfrac{1}{\mathrm{Re}\lambda+\lambda^{*}} \qquad \left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right). \end{array}$$

Eu utilisant ces opérateurs et le fait que ψ doit satisfaire les conditions aux bords, l'équation (2.3) devient :

$$\psi_{+} = M_{\lambda}H\psi_{+} + G_{\lambda}\varphi.$$

En posant $H(\lambda) = I - M_{\lambda}H$. Alors, si $[H(\lambda)]^{-1}$ existe, on obtient :

$$\psi_{+} = [H(\lambda)]^{-1}G_{\lambda}\varphi. \tag{2.4}$$

D'autre part, l'équation (2.2) peut s'écrire :

$$\psi = B_{\lambda}H\psi_{+} + C_{\lambda}\varphi.$$

Par substitution de (2.4) dans l'équation précédente, il vient

$$\psi = B_{\lambda}H[H(\lambda)]^{-1}G_{\lambda}\varphi + C_{\lambda}\varphi$$

et par suite

$$(\lambda - T_{H})^{-1} = B_{\lambda}H[H(\lambda)]^{-1}G_{\lambda} + C_{\lambda} \tag{2.5}$$

Remarque 2 : On peut montrer que si $||H|| \leq 1$ ou bien une des puissances de l'opérateur $M_\lambda H$ est compact, alors l'existence de l'opérateur $(\lambda - T_H)^{-1}$ est assurée pour $\mathrm{Re}\lambda$ assez grand.

2.4 Résultats principaux

Commençons cette section par un résultat principal de génération de semigroupes fortement continus pour les opérateurs d'advection.

Théorème 21 *Soit $X_p = L^p(]-a,a[\times[-1,1],dxd\xi)$ $(1 \leq p < \infty)$. Pour tout $H \in \mathcal{L}(L^{p,+},L^{p,-})$, l'opérateur d'advection T_H engendre un C_0-semigroupe $\{U_H(t); t \geq 0\}$ dans X_p. De plus,*

$$||U_H(t)|| \leq \max\{1, ||H||\}e^{t\max\{\frac{1}{2a}ln||H||,0\}}, \quad (t \geq 0) \tag{2.6}$$

Il est bien connu que le fait que T_H engendre ou non un c_0-semigroupe est lié directement à la géométrie de $D \times V$, en effet, comme l'illustre l'exemple suivant, on peut construire des modèles pour lesquels T_H n'engendre pas un semigroupe fortement continu.

Exemple : Considérons le modèle du transport suivant dans L^1. On définit

$$\Omega =]0,1[\qquad \text{et} \qquad V = [0,+\infty[$$

et supposons que $\nu(.)$ est la mesure de Lebesgue sur V. On voit que

$$\Gamma_+ = \{1\} \times V \text{ et} \qquad \Gamma_- = \{0\} \times V.$$

Par suite

$$L^{1,\pm} = L^1([0,+\infty[, vdv),$$

d'autre part, l'opérateur aux bords H satisfait l'identité suivante

$$H(\psi(1,.)) = \psi(0,.) \qquad \psi \in W_1. \quad \blacklozenge$$

Dans ce qui suit, on va prouver que T_H n'est pas fermé dans L^1. Soit $h \in L^1([0,+\infty[,dv)$ telle que

$$\int_0^{+\infty} |h(v)|vdv = +\infty \tag{2.7}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\varphi_n(x,v) = \begin{cases} h(v) & \text{si } 0 < v < n \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Il est clair que $\varphi_n \in W_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque

$$\int_0^n |h(v)| v dv < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

on obtient $\varphi_{n|_{\Gamma_\pm}} \in L^{1,\pm}$ et $\varphi_n \in D(T_H)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Maintenant, on peut vérifier facilement que

$$\varphi_n \mapsto \varphi \quad \text{et} \qquad T_H \varphi_n \mapsto 0 \quad (n \to +\infty).$$

avec $\varphi(x,v) = h(v)$ pour presque tout $(x,v) \in \Omega \times V$ et $\varphi \in X_1$. En tenant compte de (2.7), il vient

$$\varphi_{|\Gamma_-} = h \notin L^{1,\pm}.$$

Ce qui prouve que $\varphi \notin D(T_H)$ et T_H n'est pas un opérateur fermé et par suite, il n'engendre pas un C_0-semigroupe dans X_1.

On suppose que la transformation de Laplace inverse de l'opérateur $(\lambda - T_H)^{-1}$ existe et notons la par $S(t)$, il vient que la transformation de Laplace inverse de l'opérateur $B_\lambda H[H(\lambda)]^{-1} G_\lambda$ existe, elle va être notée par $M(t)$, il est facile de voir que

$$M(t) = S(t) - U_0(t)$$

où $U_0(t)$ est le semigroupe du transport dans le cadre neutronique ($H = 0$).

Enonçons à présent le résultat suivant

Théorème 22 *Pour que l'opérateur d'advection T_H engendre un C_0-semigroupe $\{S(t)\_t \geq 0\}$, il faut et il suffit que la famille d'opérateurs bornés $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ satisfait les conditions suivantes*

1. $M(0) = 0$,
2. $\forall t_1, t_2 \geq 0,\ M(t_1 + t_2) = M(t_1)M(t_2) + U_0(t_1)M(t_2) + M(t_1)U_0(t_2)$,
3. $\forall \varphi \in X_p$, *on a* $\lim_{t \to 0^+} ||M(t)\varphi|| = 0$.

Preuve : Montrons que ces conditions sont nécessaires, par un même raisonnement, on peut conclure qu'elles sont suffisantes :

1. $M(0) = S(0) - U_0(0) = \mathrm{Id} - \mathrm{Id} = 0.$

2. $S(t_1) = M(t_1) + U_0(t_1)\rho S(t_2) = M(t_1) + U_0(t_2)$, de plus $S(t_1+t_2) = M(t_1+t_2) + U_0(t_1+t_2) = S(t_1).S(t_2)$ et par identification, on obtient $M(t_1+t_2) = M(t_1)M(t_2) + U_0(t_1)M(t_2) + M(t_1)U_0(t_2)$.

3. On a pour tout $\varphi \in X_p$, $\lim\limits_{t\to 0^+} ||S(t)\varphi - \varphi|| = 0$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} ||M(t)\varphi + U_0(t)\varphi - \varphi|| = 0$. Comme
$$0 \leq \lim_{t\to 0^+} |||M(t)\varphi|| - ||U_0(t)\varphi - \varphi||| \leq \lim_{t\to 0^+} ||M(t)\varphi + U_0(t)\varphi - \varphi|| = 0$$
on aura $0 \leq \lim\limits_{t\to 0^+} ||M(t)\varphi|| \leq 0$ et alors $\lim\limits_{t\to 0^+} ||M(t)\varphi|| = 0.$ ◆

Remarque 3 : Dans le cadre neutronique $H = 0$, la famille $M(t)$ est réduit à 0, elle vérifie trivialement les conditions 1), 2) et 3), tandis que, pour des conditions périodiques ou reflexives monodimensionnelles $M(t)$ s'écrit explicitement comme suit :

1. (Cadre périodique et σ paire)
$$M(t)\varphi(x,\xi) = e^{-\sigma(\xi)t}\left[\sum_{n>0}\varphi[(sgn\xi)2na + x - t\xi, \xi]\chi_{\left[\frac{(sgn\xi)x+(2n-1)a}{|\xi|}, \frac{(sgn\xi)x+(2n+1)a}{|\xi|}\right]}\right].$$

2. (Cadre réflexif et σ paire)
$$\begin{aligned} M(t)\varphi(x,\xi) &= e^{-\sigma(\xi)t}\left[\sum_{n>0}\varphi[(sgn\xi)4na + x - \xi t, \xi]\chi_{\left[\frac{(sgn\xi)x+(4n-1)a}{|\xi|}, \frac{(sgn\xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}\right]}(t)\right] \\ +e^{-\sigma(\xi)t} & \left[\sum_{n\geq 0}\varphi[-(sgn\xi)(4n+2)a - x + \xi t, \xi]\chi_{\left[\frac{(sgn\xi)x+(4n+1)a}{|\xi|}, \frac{(sgn\xi)x+(4n+3)a}{|\xi|}\right]}(t)\right]. \end{aligned}$$

Conjecture : On conjecture que :
$$T_H \text{ engendre un } C_0\text{-semigroupe} \iff \exists\lambda_0 \in \mathbb{R} \; texttel \; que \;]\lambda_0, +\infty[\subseteq \rho(T_H)$$
.

2.5 Propriétés de compacité

L'opérateur de transport A_H peut-être écrit sous la forme $A_H := T_H + K$, où K est l'opérateur borné défini sur X_p par

$$\begin{cases} K : X_p \mapsto X_p \\ \psi \mapsto \displaystyle\int_V k(x,v,v')\psi(x,v')d\mu(v'), \end{cases}$$

où le noyau de collision $k : D \times V \times V \mapsto \mathbb{R}$ est supposé être mesurable. On note que l'opérateur K est local en x donc il peut être vu comme une application :

$$K(.) : x \in D \mapsto K(x) \in \mathcal{L}(L^p(V;d\mu)).$$

Supposons que $K(.)$ est strictement mesurable, c'est-à-dire :

$$x \in D \mapsto K(x)f \in L^p(V;d\mu) \text{ est mesurable pour tout } f \in L^p(V;d\mu)$$

et borné, dans le sens

$$\text{ess} - \sup_{x\in D} ||K(x)||_{\mathcal{L}(L^p(V;d\mu))} < +\infty.$$

Donc K définit un opérateur borné sur X_p suivant la règle

$$\varphi \in X_p \mapsto K(x)\varphi(x) \in X_p.$$

Alors

$$||K(x)||_{\mathcal{L}(X_p)} \leq \text{ess} - \sup_{x\in D} ||K(x)||_{\mathcal{L}(L^p(V;d\mu))}.$$

Dans le reste de cette section, on va utiliser le concept des opérateurs de collisions réguliers introduits par M. Mokhtar-Kharroubi [102, Chapitre 4].

Définition 7 *Soit $\mathcal{K}(L^p(V;d\mu))$ le sous-espace des opérateurs compacts. Un opérateur de collision*

$$K : x \in D \mapsto K(x) \in \ \mathcal{L}(L^p(V;d\mu))$$

est régulier si $K(x) \in \mathcal{K}(L^p(V;d\mu))$ pour presque tout x, $x \mapsto K(x) \in \mathcal{K}(L^p(V;d\mu))$ est mesurable et

$$\{K(x), x \in D\} \text{ est relativement compact dans } \mathcal{L}(L^p(V;d\mu)).$$

Désignons par $\mathcal{R}(X_p)$ l'ensemble des opérateurs de collisions réguliers dans X_p. Cette classe d'opérateurs possède la propriété d'approximation suivante :

Lemme 23 *Un opérateur de collision K peut être approché en topologie uniforme, par une suite $(K_n)_n$ d'opérateurs de collision ayant des noyaux de la forme*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i(x) f_i(\xi) g_i(\xi'),$$

où $\alpha_i \in L^\infty(D, dx)$, $f_i \in L^p(V; d\mu)$ et $g_i \in L^q(V; d\mu)$ avec $q = \dfrac{p}{p-1}$ et I un ensemble fini.

Preuve : Voir pour plus de détails [102, Chapitre 4].

Désignons par $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et supposons maintenant que la mesure μ satisfait l'hypothèse suivante :

H1) $\forall c \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\mu\{v \in \mathbb{R}^n / v.c = 0\}$ **(la mesure μ des hyperplans est nulle).**

En tenant compte de cette hypothèse, on a

Théorème 24 *Soit $1 < p < +\infty$ et soit D un ensemble borné convexe de $\mathbb{R}^n$ et supposons que l'hypothèse H1) est satisfaite. Si $\{H(\lambda)\}^{-1}$ existe et $K \in \mathcal{R}(X_p)$, alors, pour tout nombre complexe λ qui satisfait $Re\lambda > -\lambda^*$, les opérateurs $K(\lambda - T_H)^{-1}$ et $(\lambda - T_H)^{-1}K$ sont compact sur X_p.*

Preuve : Comme K est régulier, en tenant compte du Lemme 23, il suffit d'établir la preuve pour des opérateurs de collision de la forme

$$k(x, v, v') = \alpha(x) f(v) g(v'),$$

où $\alpha(.) \in L^\infty(D; dx)$, $f(.) \in L^p(V; d\mu(v))$ et $g \in L^q(V; d\mu(v))$ $\left(q = \dfrac{p}{p-1}\right)$. ◆

Sans perdre de généralité, on peut supposer que f et g sont à supports compacts, d'autres part moyennant des arguments d'interpolation (voir Théorème 18), on peut restreindre notre étude aux cas $p = 2$. La propriété de dualité $K(\lambda - T_H)^{-1} = \left[[(\lambda - T_H)^{-1}]^* K^*\right]^*$ et le théorème de Schauder montrent qu'on peut considérer seulement l'opérateur $(\lambda - T_H)^{-1}K$, de plus, l'existence de l'opérateur $[H(\lambda)]^{-1}$ permet d'écrire $(\lambda - T_H)^{-1}$ sous la forme

$$(\lambda - T_H)^{-1} = S_\lambda + (\lambda - T_0)^{-1} \tag{2.8}$$

où

$$S_\lambda = \sum_{n\geq 0} B_\lambda H [H(\lambda)]^{-1} G_\lambda.$$

Ce qui donne

$$(\lambda - T_H)^{-1} = \sum_{n\geq 0} B_\lambda H[H(\lambda)]^{-1} G_\lambda K + (\lambda - T_0)^{-1} K. \tag{2.9}$$

L'opérateur $(\lambda - T_0)^{-1}K$ est compact d'après les résultats de M. Mokhtar-Kharroubi [101], par suite pour montrer la compacité de l'opérateur $(\lambda - T_H)^{-1}K$, il suffit d'établir celle de l'opérateur $G_\lambda K$ (ceci est dû à la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 0} B_\lambda H[H(\lambda)]^{-1} G_\lambda K$).

On a, pour tout $\varphi \in X_p$:

$$(G_\lambda K)(\varphi) = G_\lambda[K\varphi] = (C_\lambda K)(\varphi)_{|\Gamma_+}.$$

D'autre part, on peut montrer que l'opérateur $G_\lambda : X_p \mapsto L^{p,+}$ peut s'écrire sous la forme $G_\lambda = T_r \circ C_\lambda$ où T_r est l'opérateur trace défini de $D(T_0)$ dans $L^{p,+}$.

On note par B_p la boule unité de X_p, on va montrer que $(G_\lambda K)(B_p)$ est une partie relativement compacte dans $L^{p,+}$.

En effet,

$$(G_\lambda K)(B_p) = (C_\lambda K)(B_p)_{|\Gamma_+} = [(\lambda - T_0)^{-1}K](B_p)_{|\Gamma_+} = T_r\left[(\lambda - T_0)^{-1}K](B_p)\right].$$

Mais la partie $(\lambda - T_0)^{-1}K(B_p)$ est relativement compact dans X_p et par suite, elle conserve cette même propriété dans $(D(T_0), ||.||)$ (où $||.||$ est la norme du graphe sur $D(T_0)$). D'autre part, $Tr : (D(T_0), ||.||) \mapsto L^{p,+}$ est borné, ce qui entraine que l'image d'un ensemble compact dans $(D(T_0), ||.||)$ est compacte dans $L^{p,+}$, ce qui prouve que $(G_\lambda K)(B_p)$ est une partie relativement compacte dans $L^{p,+}$ et donne le résultat.

Remarque : On observe que les propriétés de compacité des opérateurs $K(\lambda - T_H)^{-1}$ ou bien $(\lambda - T_H)^{-1}K$ sont indépendantes de l'opérateur aux bords H, en effet dans les démonstrations, on a utilisé seulement la bornitude de ce dernier.

Chapitre 3

Propriétés spectrales et comportement asymptotique des équations de transport monodimensionnelles

Résumé. Le but de ce chapitre est d'analyser quelques propriétés spectrales des équations de transport monodimensionnelles avec des conditions ax bords réflexives. En effet, on donne une investigation bien détaillée des propriétés de compacité du reste d'ordre 1 de la série de Dyson-Phillips pour une classe large d'opérateurs de collision. On discute aussi la validité de ces résultats pour des conditions aux bords périodiques.

3.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de donner une investigation au comportement asymptotique des solutions du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(x,\xi,t) &= -\xi \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,\xi,t) - \sigma(\xi)\psi(x,\xi,t) + \displaystyle\int_{-1}^{1} k(\xi,\xi')\psi(x',\xi,t)d\xi' \\ & = A_H\psi(x,\xi,t) = T_H\psi(x,\xi,t) + K\psi(x,\xi,t) \\ \psi(x,\xi,0) &= \psi_0(x,\xi) \end{cases}$$

où $x \in]-a,a[$ pour un paramètre $0 < a < +\infty$ et $\xi \in [-1,1]$. Il décrit le transport des particules (neutrons, photons, molécules de gaz, etc...) en géométrie plane. La fonction $\psi(x,\xi)$ reprsésente la densité (densité de probabilité) des particules de gaz ayant la poisition x et la vitesse de propagation ξ. Les fonctions $\sigma(.)$ et $k(.)$ sont appelées respectivement, la fréquence de collision et le noyau de collision. Les conditions aux bords sont modélisées par :

$$\psi|_{\Gamma_-} = H\left(\psi|_{\Gamma_+}\right)$$

où Γ_- (resp.Γ_+) est la partie du flux rentrant (resp. la partie du flux sortant) de l'espace frontière des phases, $\psi|_{\Gamma_-}$ (resp. $\psi|_{\Gamma_+}$ est la restriction de ψ à Γ_- (resp.Γ_+)) et H est un opérateur linéaire borné (on le prend positif en applications) défini sur des espaces de traces convenables. La littérature traitant les équations de transport dans le cadre monodimensionnel est vaste et assez riche (voir [75], [79], [87], [88]).

Soit X un espace de Banach et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $((S(t))_{t\geq 0}$. Il est bien connu (voir rappels) que si B est un opérateur borné sur X alors $A+B$ engendre un c_0-semigroupe $((H(t))_{t\geq 0}$ donnée par la série de Dyson-Phillip suivante :

$$H(t) = \sum_{j=0}^{n} U_j(t) + R_n(t)$$

où

$$U_0(t) = S(t), \quad U_j(t) = \int_0^t S(s)BU_{j-1}(t-s)ds \qquad (j \geq 1)$$

et le reste d'ordre n de la série est donnée par

$$R_n(t) = \int\limits_{s_1+\cdots+s_n\leq t,\ s_i\geq 0} S(s_1)B\cdots S(s_n)BH\left(t-\sum_{i=1}^{n} s_i\right) ds_1\cdots ds_n.$$

On sait que (voir [101], [102]) que si $B(\lambda-A)^{-1}$ ou $(\lambda-A)^{-1}B$ admet une itérée compacte sur X, alors $\sigma(A+B)\bigcap\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda > s(A)\}$ où $s(A) = \sup\{\mathrm{Re} : \lambda \in \sigma(A)\}$ est formé au plus à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Malheureusement, cette condition ne guarantit pas que la partie du spectre du semigroupe perturbé $H(t)$ en dehors du disque spectral de $S(t)$ consiste au plus à des valurs propres isolées. Ceci est dû au fait que si A est non borné alors le théorème spectral $e^{t\sigma(A+B)} = \sigma(H(t))$ est en général faux. Plus précisément, il peut exister un $\alpha \neq 0$ dans le spectre continu de $H(t)$ qui n'appartient pas à la fermeture de l'ensemble $e^{t\sigma(A+B)}$. Donc, il est nécessaire d'attaquer le problème en étudiant directement le spectre du semigroupe $(H(t))_{t\geq 0}$.

Motivé par l'étude du comportement asymptotique des solutions ($t \to +\infty$) dans le contexte de la théorie du transport, K. Jörgens [65], [66], L. Vidav [139], [140] et d'autres auteurs (voir aussi [101], [102]) ont développé une technique de perturbation liée au rayon spectral essentiel des opérateurs $(H(t)_{t\geq 0})$. Pour l'étude du spectre des semigroupes perturbés et pour d'autres informations (voir [144], [145], [146], [147]).

On note que si $U \in\in \mathcal{L}(X)$, alors son rayon spectral essentiel est désigné par $r_e(U)$. D'autre part, si ω est le type d'un C_0-semigroupe $(S(t))_{t\geq 0}$, alors son type essentiel $\omega_e \in [-\infty, \omega]$ est donné par la relation

$$r_e(S(t)) = e^{t\omega_e}, \quad (t \geq 0).$$

Récemment, Mokhtar-Kharroubi a montré que si un reste d'ordre n, $R_n(t)$, de la série de Dyson-Phillips est compact sur $L_p(\mu)(1 \leq p < +\infty)$, alors les semigroupes $(S(t))_{t\geq 0}$ et $(H(t))_{t\geq 0}$ possède les mêmes types essentiels (voir [Théorème 11, Chapitre 1]). Par suite $\sigma(H(t)) \cap \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| > e^{\omega_e t}\}$ est formé au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. En particulier, pour tout $v \geq \omega_e$, $\sigma(A+B) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > v\}$ est formé au plus d'un nombre fini de valeurs propres de multiplicité algébrique finie $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. Si P_i et D_i désignent respectivement la projection spectrale et l'opérateur nilpotent associées à la valeur propre $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$, alors on obtient la décomposition spectrale

$$H(t) = H(t)(I-P) + \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} e^{D_i t} P_i \tag{3.1}$$

avec $||H(t)(I-P)|| = o\left(e^{(\lambda'-\varepsilon)t}\right)$ quand $t \mapsto +\infty$, où $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$, $\lambda' = \min\{\mathrm{Re}\lambda_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ et $\varepsilon > 0$ suffisament petit.

Cette méthode a été utilisée par plusieurs auteurs pour étudier le comportement asyptotique des solutions des équations de transport dans le cadre absorbant $(H = 0)$ pour une géométrie bornée. Dans [79], [101], les auteurs ont montré que le reste d'ordre 1 de la série de Dyson-Phillips est compact sur L_p $(1 < p < +\infty)$, ce qui montre que la décomposition spectrale (3.1) est satisfaite. La possibilité d'un tel résultat est dûe au fait que les restes de la série de Dyson-Phillips sont calculables, car pour $H = 0$, le semigroupe $\left(e^{tT_0}\right)_{t\geq 0}$ est explicite. Malheureusement, dans le cas général, c'est à dire dans le cas où ces conditions aux bords sont modélisées par un opérateur borné abstrait $H \neq 0$, l'opérateur d'advection T_H va engendrer un c_0-semigroupe $\left(e^{tT_0}\right)_{t\geq 0}$ qui est en général non explicite (voir [80]). Donc, l'étude de la compacité du reste dans ce contexte est une tâche difficile. Néanmoins, pour des conditions aux bords périodiques ou de réflexion pure, l'opérateur d'advection T_H engendre un C_0-groupe $\left(e^{tT_0}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ et il est possible d'établir son expression via des calculs assez lourds.

Dans ce chapitre, on considère le cas où H est une réflexion pure, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \psi(-a,\xi) = \psi(-a,-\xi) & 0<\xi<1 \\ \psi(a,-\xi) = \psi(a,\xi) & 0<\xi<1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Donc, notre problème principal consiste à discuter les propriétés de compacité du reste d'ordre 1 de la série de Dyson-Phillips. On va procéder comme suit:

Tout d'abord, on va déterminer l'expression de la résolvante de l'opérateur d'advection T_H noté $(\lambda - T_H)^{-1}$, elle est donnée par une série faisant intervenir l'opérateur H. Ensuite, sachant que l'opérateur T_H engendre un C_0-groupe $\left(e^{tT_H}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ et utilisant l'unicité de la transformation de Laplace, on va établir l'expression du semigroupe $U^H(t)$ pour $t>0$. Ceci va nous permettre d'expliciter l'expression du reste d'ordre 1 de la série de Dyson-phillips $R_1(t)$ et de montrer sa compacité sur l'espace $L_p\left(]-a,a[\times[-1,1], dxd\xi\right), 1<p<+\infty$. Nos techniques de démonstrations utilisent des résultats abstraits dans le cadre Hilbertien ($p=2$), de plus moyennant des arguments d'interpollation on peut passer au cadre des espaces $L_p(1<p<+\infty)$. Par suite, on conclut que les semigroupes $\left(e^{tT_H}(t)\right)_{t\geq 0}$ et $\left(e^{t(T_H+K)}(t)\right)_{t\geq 0}$ ont le même type essentiel ce qui entraine que le comportement asymptotique des solutions du problème (0.1) est déterminé par la partie de $\left(e^{t(T_H+K)}(t)\right)_{t\geq 0}$ dans un espace de dimension finie (voir [146]).

3.2 Préliminaires

Dans cette section, on va donner quelques notations et préliminaires liés à notre problème. Soit

$$X_p = L_p(D, dxd\xi)$$

où $D =]-a,a[\times[-1,1], (a>0)$ et $p\in]1,+\infty[$. On définit les ensembles suivants représentant les parties rentrante et sortante de l'espace des phases D :

$$\begin{aligned} D^i &= D_1^i \cup D_2^i = \{-a\}\times[0,1]\bigcup\{a\}\times[-1,0] \\ D^0 &= D_1^0 \cup D_2^0 = \{-a\}\times[-1,0]\bigcup\{a\}\times[0,1]. \end{aligned}$$

De plus, on introduit les espaces frontières suivants :

$$\begin{aligned} X_p^i &= L_p(D^i, |\xi|d\xi) \simeq L_p(D_1^i, |\xi|d\xi) \oplus L_p(D_2^i, |\xi|d\xi) \\ &:= X_{1,p}^i \oplus X_{2,p}^i \end{aligned}$$

équippé de la norme

$$\begin{aligned} ||\psi^i, X_p^i|| &= \left(||\psi_1^i, X_{1,p}^i||^p + ||\psi_2^i, X_{2,p}^i||^p\right)^{1/p} \\ &= \left[\int_0^1 |\psi(-a,\xi)|^p|\xi|d\xi + \int_{-1}^0 |\psi(a,\xi)|^p|\xi|d\xi\right]^{1/p} \\ X_p^0 &:= L_p\left(D^0, |\xi|d\xi\right) \simeq L_p\left(D_1^0, |\xi|d\xi\right) \oplus L_p\left(D_2^0, |\xi|d\xi\right) \\ &:= X_{1,p}^0 \oplus X_{2,p}^0 \end{aligned}$$

équippé de la norme

$$\begin{aligned} ||\psi^0, X_p^0|| &= \left(||\psi_1^0, X_{1,p}^0||^p + ||\psi_2^0, X_{2,p}^i||^p\right)^{1/p} \\ &= \left[\int_{-1}^0 |\psi(a,\xi)|^p|\xi|d\xi + \int_0^1 |\psi(a,\xi)|^p|\xi|d\xi\right]^{1/p} \end{aligned}$$

où $\simeq$ définit l'identification naturelle de ces espaces.

Les conditions aux bords (3.2) peuvent être modélisées abstraitement comme un opérateur frontière H reliant les flux rentrant et sortant, comme suit

$$\begin{cases} H : X_{1,p}^0 \oplus X_{2,p}^0 \mapsto X_{1,p}^i \oplus X_{2,p}^i \\ \\ H \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} H_{11} : X_{1,p}^0 \mapsto X_{1,p}^i \\ \psi(-a,\xi) \mapsto \psi(-a,-\xi), \quad (-1 < \xi < 0). \end{cases} \qquad \begin{cases} H_{22} : X_{2,p}^0 \mapsto X_{2,p}^i \\ \psi(a,\xi) \mapsto \psi(a,-\xi), \quad (0 < \xi < 1). \end{cases}$$

Remarque : Il est clair que H est un opérateur inversible. D'autre part, si $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in X_p^0$, alors

$$||Hu||_{X_p^i}^p = ||H_{11}u_1; X_{1,p}^i||^p + ||H_{22}u_2; X_{2,p}^i||^p$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 |u_1(-a,-\xi)|^p|\xi|d\xi + \int_{-1}^0 |u_2(a,-\xi)|^p|\xi|d\xi \\
&= ||u_1||^p_{X^0_{1,p}} + ||u_2||^p_{X^0_{2,p}} = ||u||^p_{X^0_p}
\end{aligned}
$$

Soit donc H une réflexion pure et soit T_H l'opérateur d'advection T_H associé à H de domaine $D(T_H) \subseteq X_p$ incluant les conditions aux bords :

$$
\begin{aligned}
T_H : D(T_H) &\mapsto X_p \\
\psi &\mapsto T_H\psi(x,\xi) = -\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\xi) - \sigma(\xi)\psi(x,\xi)
\end{aligned}
$$

où

$$
D(T_H) = \{\psi \in X_p, \xi\frac{\partial\psi}{\partial x} \in X_p,\ \psi_{|_{D^i}} = \psi^i \in X^i_p, \psi_{|_{D^0}} = \psi^0 \in X^0_p \text{ et } \psi^i = H\psi^0\}
$$

et

$$
\sigma(.) \in L^\infty[-1,1], \quad \psi^0 = (\psi^0_1, \psi^0_2)^T, \quad \psi^i = (\psi^i_1, \psi^i_2)^T
$$

avec $\psi^0_1, \psi^0_2, \psi^i_1, \psi^i_2$ sont données par

$$
\begin{cases}
\psi^i_1(\xi) = \psi(-a,\xi), & \xi \in [0,1] \\
\psi^i_2(\xi) = \psi(a,\xi), & \xi \in [-1,0] \\
\psi^0_2(\xi) = \psi(-a,\xi), & \xi \in [-1,0] \\
\psi^i_2(\xi) = \psi(a,\xi), & \xi \in [0,1]
\end{cases}
$$

Remarque : La dérivée de ψ dans la définition de T_H est donnée au sens des distributions. On note que si $\psi \in D(T_H)$, alors ψ est absolument continue par rapport à x. Ainsi, les restrictions de ψ à D^i et D^0 sont bien significatives. Notons aussi que $D(T_H)$ est dense dans X_p car il contient $C_0^\infty(]-a,a[\times]-1,1[)$.

Soit $\varphi \in X_p$ et considérons l'équation de la résolvante de T_H:

$$
(\lambda - T_H)\psi = \varphi \tag{3.3}
$$

où λ est un nombre complexe et l'inconnue ψ doit appartenir à $D(T_H)$. Soit λ^* désigne le nombre réel défini par

$$
\lambda^* = \lim \inf_{|\xi|\to 0} \sigma(\xi).
$$

Donc, pour $\mathrm{Re}\lambda > -\lambda^*$ la solution de (3.3) est formellement donnée par

$$
\psi(x,\xi) = \begin{cases}
\psi(-a,\xi).e^{\frac{-(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|}{|\xi|}} + \dfrac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{-a}^x e^{\frac{-(\lambda+\sigma(\xi))|x-x'|}{|\xi|}}\varphi(x',\xi)dx', & 0 < \xi < 1 \\
\psi(a,\xi).e^{\frac{-(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|}{|\xi|}} + \dfrac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_x^a e^{\frac{-(\lambda+\sigma(\xi))|x-x'|}{|\xi|}}\varphi(x',\xi)dx', & -1 < \xi < 0
\end{cases} \tag{3.4}
$$

où $\psi(a,\xi)$ et $\psi(-a,\xi)$ sont données par

$$\psi(a,\xi) = \psi(-a,\xi).e^{\frac{-2a(\lambda+\sigma(\xi))}{|\xi|}} + \frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a} e^{\frac{-(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|}{|\xi|}}\varphi(x,\xi)dx, \quad 0<\xi<1 \quad (3.5)$$

$$\psi(-a,\xi) = \psi(a,\xi).e^{\frac{-2a(\lambda+\sigma(\xi))}{|\xi|}} + \frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a} e^{\frac{-(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|}{|\xi|}}\varphi(x,\xi)dx, \quad -1<\xi<0 \quad (3.6)$$

Pour donner la formulation abstraite des équations (3.5) et (3.6), définissons à présent les opérateurs suivants dépendants de λ :

$$\begin{cases} M_\lambda : X_p^i \mapsto X_p^0, \quad M_\lambda u = (M_\lambda^+ u_1, M_\lambda^- u_2) \\ \\ (M_\lambda^+ u_1)(a,\xi) := u_1(-a,\xi)\exp\left(-2a\dfrac{(\lambda+\sigma(\xi))}{|\xi|}\right), \quad 0<\xi<1 \\ \\ (M_\lambda^- u_2)(a,\xi) := u_2(-a,\xi)\exp\left(-2a\dfrac{(\lambda+\sigma(\xi))}{|\xi|}\right), \quad -1<\xi<0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_\lambda : X_p^i \mapsto X_p, \quad B_\lambda u = \chi_{]0,1[}(\xi)B_\lambda^+ u_1 + \chi_{]-1,0[}(\xi)B_\lambda^- u_2 \\ \\ B_\lambda^+(x,\xi) := u_1(-a,\xi)\exp\left(-\dfrac{-(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|}{|\xi|}\right), \qquad 0<\xi<1 \\ \\ B_\lambda^-(x,\xi) := u_2(a,\xi)\exp\left(-\dfrac{(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|}{|\xi|}\right), \qquad -1<\xi<0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_\lambda : X_p \mapsto X_p^0, \quad G_\lambda u = (G_\lambda^+\varphi, G_\lambda^-\varphi) \\ \\ (G_\lambda^+\varphi)(x,\xi) := \dfrac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{-a}^{a}\exp\left(\dfrac{-(\lambda+\sigma(\xi))|a-x|}{|\xi|}\right)\varphi(x,\xi)dx, \quad 0<\xi<1 \\ \\ (G_\lambda^-\varphi)(x,\xi) := \dfrac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{-a}^{a}\exp\left(\dfrac{-(\lambda+\sigma(\xi))|a+x|}{|\xi|}\right)\varphi(x,\xi)dx, \quad -1<\xi<0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_\lambda : X_p \mapsto X_p, \quad C_\lambda\varphi = \chi_{]0,1[}(\xi)C_\lambda^+\varphi + \chi_{]-1,0[}(\xi)C_\lambda^-\varphi \\ \\ (C_\lambda^+\varphi)(x,\xi) := \dfrac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{-a}^{x}\exp\left(\dfrac{-(\lambda+\sigma(\xi))|x-x'|}{|\xi|}\right)\varphi(x',\xi)dx', \quad 0<\xi<1 \\ \\ (C_\lambda^-\varphi)(x,\xi) := \dfrac{1}{|\xi|}\displaystyle\int_{x}^{a}\exp\left(\dfrac{-(\lambda+\sigma(\xi))|x-x'|}{|\xi|}\right)\varphi(x',\xi)dx', \quad -1<\xi<0. \end{cases}$$

ou $\chi_{]0,1[}(\xi)$ et $\chi_{]-1,0[}(\xi)$ désignent respectivement les fonctions caractéristiques des intervalles $]0,1[$ et $]-1,0[$.

Un calcul simple, utilisant l'inégalité de Hölder, montre que ces opérateurs sont bornés sur les espaces sur lesquels ils sont définis. En particulier, on vérifie que

$$||M_\lambda^+|| \leq e^{-2a(\mathrm{Re}\lambda+\lambda^*)}. \tag{3.7}$$

Pour plus de détails on renvoie à [80, Chapitre 1].

En utilisant les opérateurs définis ci-dessus et le fait que ψ devrait satisfaire les conditions aux bords, les équations (3.5) et (3.6) peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \psi_1^0 & = & M_\lambda^- H_{22}\psi_2^0 + G_\lambda^-\varphi \\ \psi_2^0 & = & M_\lambda^+ H_{11}\psi_1^0 + G_\lambda^+\varphi. \end{array}$$

Par substitution, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \psi_1^0 & = & M_\lambda^- H_{22}\psi_2^0 + G_\lambda^-\varphi \\ \psi_2^0 & = & \mathcal{F}'(\lambda)\psi_2^0 + \mathcal{F}(\lambda)\varphi. \end{array}$$

où $\mathcal{F}'(\lambda) = M_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22}$ et $\mathcal{F}(\lambda) = M_\lambda^+ H_{11} G_\lambda^- + G_\lambda^+$. Il est clair que pour $\mathrm{Re}\lambda > -\lambda^*$, on a $||\mathcal{F}'(\lambda)|| < 1$ (en utilisant (3.7)) et par suite

$$\begin{array}{rcl} \psi_1^0 & = & M_\lambda^- H_{22}(I-\mathcal{F}'(\lambda))^{-1}\mathcal{F}(\lambda)\varphi + G_\lambda^-\varphi \\ \psi_2^0 & = & (I-\mathcal{F}'(\lambda))^{-1}\mathcal{F}(\lambda)\varphi \end{array}$$

De même pour l'équation (3.4), elle devient

$$\psi(x,\xi) = \begin{cases} B_\lambda^+ H_{11}\psi_1^0 + C_\lambda^+\varphi & 0<\xi<1 \\ B_\lambda^- H_{22}\psi_2^0 + C_\lambda^-\varphi & -1<\xi<0. \end{cases}$$

En combinant ceci avec ce qui précède, on établit que

$$\psi(x,\xi) = R(\lambda,T_H)\varphi(x,\xi) = \xi_{]0,1[}(\xi)R^+(\lambda,T_H)\varphi(x,\xi) + \xi_{]-1,0[}(\xi)R^-(\lambda,T_H)\varphi(x,\xi)$$

où

$$R^+(\lambda,T_H) = \sum_{n\geq 0} B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22}(\mathcal{F}'(\lambda))^n\mathcal{F}(\lambda) + B_\lambda^+ H_{11} G_\lambda^- + C_\lambda^+.$$

et

$$R^-(\lambda,T_H) = \sum_{n\geq 0} B_\lambda^- H_{22} H_{22}(\mathcal{F}'(\lambda))^n\mathcal{F}(\lambda) + C_\lambda^-$$

Remarque : Pour les conditions aux bords périodiques, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} H : X_{1,p}^0 \oplus X_{2,p}^0 \mapsto X_{1,p}^i \oplus X_{2,p}^i \\ H \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_{12} \\ H_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} H_{12} : X_{2,p}^0 \mapsto X_{1,p}^i \\ \psi(a,\xi) \mapsto \psi(-a,-\xi) \end{cases} \qquad \begin{cases} H_{21} : X_{1,p}^0 \mapsto X_{2,p}^i \\ \psi(-a,\xi) \mapsto \psi(a,\xi). \end{cases}$$

Des calculs analogues donnent

$$\begin{aligned} R^+(\lambda, T_H) &= \sum_{n\geq 0} B_\lambda^+ H_{12}(M_\lambda^+ H_{21})^n G_\lambda^+ + C_\lambda^+ \\ R^-(\lambda, T_H) &= \sum_{n\geq 0} B_\lambda^- H_{21}(M_\lambda^- H_{12})^n G_\lambda^- + C_\lambda^- \end{aligned}$$

3.3 L'expression analytique de $U^H(t)$

On va montrer ici que l'opérateur d'advection T_H engendre un C_0-groupe sur X_p, $1 \leq p < +\infty$, ensuite on va déterminer son expression explicite.

Supposons que H est un opérateur aux bords conservatif, c'est-à-dire

$$||Hu|| = ||u||, \qquad \forall u \in X_p^0 \tag{3.1}$$

Remarque : Notons que les conditions aux bords de réflexion pure et les conditions aux bords périodiques vérifient l'hypothèse précédente.

Commençons notre investigation par le résultat suivant :

Théorème 25 *Soit $p \in [1, +\infty[$ et supposons que l'hypothèse (3.1) est satisfaite. Si H est inversible, alors T_H engendre un C_0-groupe sur X_p.*

Pour montrer ce théorème, on a besoin de quelques résultats préparatifs.

Soit $\mathcal{M}_\sigma$ l'opérateur de multiplication

$$\psi \in X_p \mapsto (\mathcal{M}_\sigma \psi)(x,\xi) = \sigma(\xi)\psi(x,\xi).$$

En tenant compte du fait que $\sigma(.) \in L^{\infty}([-1,1])$, on déduit que $\mathcal{M}_{\sigma} \in \mathcal{L}(X_p)$. Soit T_H^0 l'opérateur d'advection libre défini par :

$$T_H^0 = T_H + \mathcal{M}_{\sigma}.$$

Il est clair que T_H^0 est un opérateur fermé à domaine dense sur X_p et

$$D(T_H^0) = D(T_H).$$

Donc, T_H peut être regardé comme une perturbation de T_H^0.

Lemme 26 *Si l'opérateur frontière H satisfait la condition (3.1), alors les opérateurs T_H^0 et $-T_H^0$ sont dissipatifs.*

Preuve : Soit $1 < p < +\infty$. Si $\psi \in D(T_H^0)$, alors on a :

$$< \pm T_H^0, |\psi|^{p-2}\psi >= \pm \int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} \left[|\psi|^{p-2}\psi \left(-\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] (x,\xi) dx d\xi.$$

En tenant compte de la relation

$$\xi \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (|\psi|^p) = p|\psi|^{p-2}\psi\xi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} < \pm T_H^0, |\psi|^{p-2}\psi > &= \pm \frac{1}{p} \int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} \xi \frac{\partial}{\partial x}(|\psi|^p)(x,\xi) dx d\xi \\ &= \pm \frac{1}{p} \left[||\psi^i||^p_{X_p^i} - ||\psi^0||^p_{X_0^i} \right] = 0 \quad (\text{car } ||H\psi^0|| = ||\psi^0||). \end{aligned}$$

Pour $p = 1$, on définit la fonction $s_0(.)$ sur X_1 par

$$s_0(\psi)(x,\xi) = \begin{cases} 1 & \text{quand} \quad \psi(x,\xi) > 0 \\ 0 & \text{quand} \quad \psi(x,\xi) = 0 \\ -1 & \text{quand} \quad \psi(x,\xi) < 0. \end{cases}$$

Donc, pour tout $\psi \in D(T_H^0)$, on a

$$\begin{aligned} < \pm T_H^0, s_0(\psi)) > &= \pm \int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} \xi \frac{\partial}{\partial x}(\psi)(x,\xi) s_0(\psi)(x,\xi) dx d\xi \\ &= \pm \int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} \xi \frac{\partial}{\partial x}(|\psi|) dx d\xi \end{aligned}$$

$$= \pm \left[||\psi^i||_{X_p^i} - ||\psi^0||_{X_0^i} \right] = 0 \quad (\text{car } ||H\psi^0|| = ||\psi^0||).$$

Par suite les deux opérateurs T_H^0 et $-T_H^0$ sont dissipatifs sur X_p (voir [113, Théorème 4.3, p.14]).

Enonçons à présent le lemme suivant :

Lemme 27 *On suppose que H est un opérateur conservatif. Si H est inversible, alors les opérateurs $\lambda \pm T_H^0$ sont surjectives pour tout $\lambda > 0$.*

Preuve du théorème 25 : Il s'en suit des lemmes 26 et 27 et le théorème de Lomer-Phillips [113, Théorème 4.3, p.14] que T_H^0 engendre un C_0-groupe de contractions sur X_p. Maintenant, sachant que $\mathcal{M}_\sigma \in \mathcal{L}(X_p)$ et en tenant compte de [63, Théorème 13.2.2], on obtient le résultat. ◆

Le résultat suivant donne la forme explicite du C_0-groupe $U^H(t)$ engendré par l'opérateur d'advection T_H dans le cas où H est une réflexion pure.

Théorème 28 *Si H est une réflexion pure et si $\sigma(.)$ est une fonction paire sur $[-1, 1]$, alors T_H engendre un C_0-groupe sur X_p donné par*

$$\begin{aligned} U^H(t)\varphi(x,\xi) &= e^{-t\sigma(\xi)} \sum_{n\geq 0} \varphi\left(sgn(\xi)4na + x - \xi t, \xi\right) .\chi_{\left[\frac{(4n-1)a+sgn(\xi)x}{|\xi|}, \frac{(4n+1)a+sgn(\xi)x}{|\xi|}\right]}(t) \\ &+ \varphi(sgn(\xi)(4n+2)a - x + \xi t, -\xi).\chi_{\left[\frac{(4n+1)a+sgn(\xi)x}{|\xi|}, \frac{(4n+3)a+sgn(\xi)x}{|\xi|}\right]}(t) \end{aligned}$$

pout $t \geq 0$ et $\varphi \in X_p$ et $sgn(\xi) = \dfrac{\xi}{|\xi|}$.

Preuve : Il s'ensuit du Théorème 25 et la remarque qui le précède que T_H engendre un C_0-groupe $\left(U^H(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$ sur X_p. Pour établir l'expression analytique du semigroupe, considérons $\varphi \in X_p$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les différents opérateurs définis précédemment

(3.2)
$$(B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22} (\mathcal{F}'(\lambda))^n M_\lambda^- H_{11} G_\lambda^- \varphi)(x,\xi) = \frac{1}{|\xi|} \int_{-a}^{a} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))\frac{[(4n+6)a+x+x']}{|\xi|}} \varphi(x', -\xi) dx'$$

$$(B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- (\mathcal{F}'(\lambda))^n G_\lambda^+ \varphi)(x,\xi) = \frac{1}{|\xi|} \int_{-a}^{a} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))\frac{[(4n+4)a+x-x']}{|\xi|}} \varphi(x', \xi) dx' \qquad (3.3)$$

et

$$(B_\lambda^+ H_{11} G_\lambda^- \varphi)(x,\xi) = \frac{1}{|\xi|}\int_{-a}^{a} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))\frac{[2a+x+x']}{|\xi|}} \varphi(x',-\xi)dx' \tag{3.4}$$

Faisons un changement de variables $x' = \xi t - x - (4n+6)a$, il vient $dx' = |\xi|dt$ et par suite

$$\begin{aligned}&(B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- H_{22}(\mathcal{F}'(\lambda))^n M_\lambda^- H_{11} G_\lambda^- \varphi)(x,\xi) = \\ &\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\varphi(-(4n+6)a - x + \xi t, -\xi) \quad . \quad \chi_{\left[\frac{(4(n+1)+1)a+x}{|\xi|}, \frac{(4n+8-1)a+x}{|\xi|}\right]}(t)dt.\end{aligned} \tag{3.5}$$

D'une façon analogue, en utilisant des changements de variables adéquats, les équations (3.3) et (3.4) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}&(B_\lambda^+ H_{11} M_\lambda^- (\mathcal{F}'(\lambda))^n G_\lambda^+ \varphi)(x,\xi) = \\ &\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\varphi((4n+4)a + x - t\xi, \xi).\chi_{\left[\frac{((4n+4)-1)a+x}{|\xi|}, \frac{(4(n+1)+1)a+x}{|\xi|}\right]}(t)dt.\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$(B_\lambda^+ H_{11} G_\lambda^- \varphi)(x,\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\varphi(-x-2a+t\xi,-\xi).\chi_{\left[\frac{(x+a)}{|\xi|}, \frac{(x+3a)}{|\xi|}\right]}(t)dt. \tag{3.7}$$

et

$$(C_\lambda^+ \varphi)(x,\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\varphi(x-t\xi,\xi).\chi_{\left[0,\frac{a+x}{|\xi|}\right]}(t)dt. \tag{3.8}$$

Par suite, les expressions de $R^+(\lambda, T_H)$ montrent que

$$\begin{aligned}&R^+(\lambda, T_H)\varphi(x,\xi) = \\ &\quad\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\left\{\sum_{n\geq 0}\varphi(-(4n+2)a - x + t\xi, -\xi).\chi_{\left[\frac{(4n+1)a+x}{|\xi|}, \frac{(4n+3)a+x}{|\xi|}\right]}\right. \\ &\qquad\left. +\varphi(4na + x - t\xi, \xi).\chi_{\left[\frac{((4n-1)a+x}{|\xi|}, \frac{(4n+1)a+x}{|\xi|}\right]}\right\} dt.\end{aligned}$$

D'une façon similaire l'expression de $\widetilde{R}(\lambda, T_H)$ donne :

$$\begin{aligned}&R^-(\lambda, T_H)\varphi(x,\xi) = \\ &\quad\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t}\sum_{n\geq 0}\left\{\varphi((4n+2)a - x + t\xi, -\xi).\chi_{\left[\frac{(4n+1)a-x}{|\xi|}, \frac{(4n+3)a+x}{|\xi|}\right]}\right. \\ &\qquad\left. +\varphi(-4na + x - t\xi, \xi).\chi_{\left[\frac{(4n-1)a-x}{|\xi|}, \frac{(4n+1)a-x}{|\xi|}\right]}\right\} dt.\end{aligned}$$

Ensuite, en tenant compte des expressions précédentes, $R(\lambda, T_H)$ peut s'écrire sous la forme

$$R(\lambda, T_H)\varphi(x,\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\sigma(\xi))t} \sum_{n\geq 0} \Big\{ \varphi(\text{sgn}(\xi)(4n+2)a - x + t\xi, -\xi).\chi_{\left[\frac{(4n+1)a+\text{sgn}(\xi)x}{|\xi|}, \frac{(4n+3)a+x\text{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]} + \varphi(\text{sgn}(\xi)4na + x - t\xi, \xi).\chi_{\left[\frac{(4n-1)a+\text{sgn}(\xi)x}{|\xi|}, \frac{(4n+1)a+x\text{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]} \Big\} dt.$$

Maintenant, cette expression combinée avec l'unicité de la transformée de Laplace (voir, par exemple, [42, Lemme 15, p. 626]), donne par identification :

$$U^H(t)\varphi(x,\xi) = e^{-\sigma(\xi)t} \sum_{n\geq 0} \Big\{ \varphi(4na.\text{sgn}(\xi) + x - t\xi, \xi).\chi_{\left[\frac{(4n-1)a+x\text{sgn}(\xi)}{|\xi|}, \frac{(4n+1)a+x\text{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]} + \varphi(-(4n+2)a.\text{sgn}(\xi) - x + t\xi, -\xi).\chi_{\left[\frac{(4n+1)a+x\text{sgn}(\xi)}{|\xi|}, \frac{(4n+3)a+x\text{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]} \Big\} dt.$$

Remarque : Pour un même calcul, l'expression du semi-groupe dans le cadre périodique peut être établi sous la forme :

$$U^H(t)\varphi(x,\xi) = e^{-\sigma(\xi)t} \sum_{n\geq 0} \varphi\left[2na.\text{sgn}(\xi) + x - t\xi, \xi\right].\chi_{\left[\frac{(2n-1)a+x\text{sgn}(\xi)}{|\xi|}, \frac{(2n+1)a+x\text{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]}.$$

3.4 Résultats de compacité

Rappelons que l'opérateur de transport A_H est défini comme une perturbation de l'opérateur d'advection T_H :

$$A_H = T_H + K$$

où K est l'opérateur d'advection défini par

$$\begin{cases} K : X_p \mapsto X_p \\ \psi \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \kappa(\xi,\xi')\psi(x,\xi')d\xi'. \end{cases}$$

Le noyau de collision $k : [-1,1] \times [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ est supposé être une fonction mesurable.

On a montré précédemment (voir Théorème 28) que T_H engendre un groupe $\left(U^H(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$ de classe C^0 sur $X_p, 1 \leq p < +\infty$. Comme K est supposé borné, alors en utilisant la théorie des perturbations des semigroupes, il vient que $T_H + K$ engendre un groupe $\left(V^H(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$ de classe C^0 donné par la série de Dyson-Phillips.

Ici, on va s'intéresser à la compacité du reste $R_1^H(t)$ d'ordre 1 donné par

$$R_1^H(t) = \int_0^t U^H(t-s)KU^H(s)ds.$$

Dans notre contexte ici, un opérateur de collision est dit régulier si sa restriction à $L_p([-1,1])$ (en fixant le x) est un opérateur compact.

Commençons par donner l'expression de $R_1^H(t)$ pour un opérateur de collision de rang 1. Soit

$$\varphi \in X_p \mapsto K\varphi = \int_{-1}^{1} f(\xi)g(\xi')\psi(x',\xi)d\xi'$$

où $f \in L_p[-1,1]$ et $g \in L_q[-1,1]$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

$$U^H(t-s)K\varphi(x,\xi) = e^{-\sigma(\xi)(t-s)} \Bigg\{ \int_{-1}^{1} f(\xi)g(\xi')\sum_{n\geq 0}\varphi\left(4na.\mathrm{sgn}(\xi) + x - \xi(t-s),\xi'\right).\chi_{\left[\frac{(4n-1)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|},\frac{(4n+1)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]}(t-s)d\xi' +$$
$$\int_{-1}^{1} f(-\xi)g(\xi')\sum_{n\geq 0}\varphi\left(-x-(4n+2)a\ \mathrm{sgn}(\xi) + \xi(t-s),\xi'\right).\chi_{\left[\frac{(4n+1)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|},\frac{(4n+3)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]}(t-s)d\xi' \Bigg\}.$$

$$U^H(s)\varphi(x,\xi) = e^{-\sigma(\xi)s}\Bigg\{\sum_{m\geq 0}\varphi\left(4ma.\mathrm{sgn}(\xi) + x - \xi s,\xi\right).\chi_{\left[\frac{(4m-1)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|},\frac{(4m+1)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]}(s)$$
$$+\sum_{m\geq 0}\varphi\left[-x-(4m+2)a.\mathrm{sgn}(\xi)+\xi s,-\xi\right].\chi_{\left[\frac{(4m+1)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|},\frac{(4m+3)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]}(s)\Bigg\}.$$

$$KU^H(s)\varphi(x,\xi) = \int_{-1}^{1} f(\xi)g(\xi')e^{-\sigma(\xi')s}\Bigg\{\sum_{m\geq 0}\varphi\left(4ma.\mathrm{sgn}(\xi') + x - \xi's,\xi'\right).\chi_{m,1}$$
$$+\varphi\left((4m+2)a.\mathrm{sgn}(\xi') - x + \xi's, -\xi'\right).\chi_{m,2}\Bigg\}d\xi'$$

où $\chi_{m,1}(s,x,\xi) = \chi_{\left[\frac{(4m-1)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|},\frac{(4m+1)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]}(s)$ et $\chi_{m,2}(s,x,\xi) = \chi_{\left[\frac{(4m+1)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|},\frac{(4m+3)a+x\mathrm{sgn}(\xi)}{|\xi|}\right]}(s)$

$$U^H(t-s)KU^H(s)\varphi(x,\xi) = e^{-\sigma(\xi)(t-s)}$$

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)g(\xi')e^{-\sigma(\xi')s}\Bigg\{ \sum_{n,m\geq 0} \varphi\left(\mathrm{sgn}(\xi)4na + x - \xi(t-\xi) + 4ma.\mathrm{sgn}(\xi') - \xi' s, \xi'\right)\chi_{m,1}\chi_{n,1}$$
$$+ \sum_{n,m\geq 0} \varphi\left(x + \mathrm{sgn}(\xi)(4n+2)a - (t-s)\xi - (\mathrm{sgn}(\xi'))(4m+2)a + \xi' s, \xi'\right)\chi_{m,2}\chi_{n,2}$$
$$+ \sum_{n,m\geq 0} \varphi\left(-x - \mathrm{sgn}(\xi)(4n+2)a + (t-s)\xi + (\mathrm{sgn}(\xi'))4ma - \xi' s, -\xi'\right)\chi_{m,1}\chi_{n,2}$$
$$+ \sum_{n,m\geq 0} \varphi\left(-x - \mathrm{sgn}(\xi)4na - (t-s)\xi - (\mathrm{sgn}(\xi'))(4m+2)a + \xi' s, -\xi'\right)\chi_{m,2}\chi_{n,1}\Bigg\} dsd\xi'$$

Ce qui nous ramène à écrire

$$R_1^H(t) = \sum_{m,n\geq 0} R_1^{m,n}(t).$$

D'autre part, pour un réel fixé $t > 0$, il existe $n_0(t)$ tel que $t < (4n_0(t) - 2)$, ce qui montre que, pour $n > n_0(t)$, on a

$$t < (4n_0(t) - 2)a < -a + (4n-1)a \leq \frac{\mathrm{sgn}(\xi)x + (4n-1)a}{|\xi|} \qquad \forall (x,\xi) \in]-a,a[\times[-1,1].$$

Un calcul simple montre que $R_1^H(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$R_1^H(t) = \sum_{n,m}^{n_0(t)} R_1^{H,n,m}(t)$$

où

$$R_1^{H,n,m}(t) = R_{1,1}^{H,n,m}(t) + R_{1,2}^{H,n,m}(t) + R_{1,3}^{H,n,m}(t) + R_{1,4}^{H,n,m}(t)$$

où

$$\begin{aligned} R_{1,1}^{H,n,m}(t) &= \int_0^t e^{-\sigma(\xi)(t-s)} \int_{-1}^{1} f(\xi)g(\xi')e^{-\sigma(\xi')s} \Bigg\{ \sum_{n,m\geq 0}^{n_0(t)} \varphi\left(x - \xi(t-s) + 4na.\mathrm{sgn}(\xi)\right. \\ &\left. -\xi' s + 4ma.\mathrm{sgn}(\xi'), \xi'\right)\chi_{m,1}\chi_{n,1}. \Bigg\} dsd\xi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1,2}^{H,n,m}(t) &= \int_0^t e^{-\sigma(\xi)(t-s)} \int_{-1}^{1} f(\xi)g(\xi')e^{-\sigma(\xi')s} \Bigg\{ \sum_{n,m\geq 0}^{n_0(t)} \varphi\left(-x + \xi(t-s) - 4na.\mathrm{sgn}(\xi)\right. \\ &\left. -(4m+2)a\ \mathrm{sgn}(\xi) + s\xi'\ , -\xi'\right)\chi_{m,2}\chi_{n,1} \Bigg\} dsd\xi'. \end{aligned}$$

$$R_{1,3}^{H,n,m}(t) = \int_0^t e^{-\sigma(\xi)(t-s)} \int_{-1}^{1} f(\xi)g(\xi')e^{-\sigma(\xi')s} \Bigg\{ \sum_{n,m\geq 0}^{n_0(t)} \varphi\Bigg(x - \xi(t-s) + (4n+2)a.\mathrm{sgn}(\xi)$$

$$-(4m+2)a.\mathrm{sgn}(\xi') + s\xi' \,, \xi') \, \chi_{m,2}\chi_{n,2} ds d\xi' \quad \Bigg\}$$

$$R_{1,4}^{H,n,m}(t) = \int_0^t e^{-\sigma(\xi)(t-s)} \int_{-1}^1 f(\xi)g(\xi')e^{-\sigma(\xi')s} \left\{ \sum_{n,m\geq 0}^{n_0(t)} \varphi\left(-x+\xi(t-s)-(4n+2)a.\mathrm{sgn}(\xi)\right.\right.$$
$$\left.\left. +4ma.\mathrm{sgn}(\xi') - s\xi' \,, \xi'\right) \chi_{n,2}\chi_{m,1} ds d\xi' \right\}.$$

Enonçons à présent le résultat principal de cette section.

Théorème 29 *Soit H un opérateur frontière de réflexion pure. Si K est un opérateur de collision régulier sur X_p $(1 < p < +\infty)$ et $\sigma(.)$ est une fonction paire sur $[-1,1]$, alors $R_1^H(t)$ est compact sur X_p.*

Avant de montrer ce résultat, on va présenter quelques résultats essentiels dans la preuve du théorème.

Le premier résultat dans ce sens est fourni par le lemme suivant :

Lemme 30 *Soit H une réflexion pure. Supposons qu'il existe $v > w$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que*

$$(H_1) \qquad \sum_{i=0}^{m} ||[R(v+iy,T]^i K[R(v+iy,T]^{m-i}|| \mapsto 0 \quad \text{quand} \quad |y| \mapsto +\infty.$$

Alors $0 \leq t \mapsto U_1(t)$ est continue en norme.

De plus, moyennant des techniques analogues à [124, Lemme 4.3.1], on peut montrer

Lemme 31 *Soit $p = 2$ et H une réflexion pure. Si K est un opérateur de collision régulier, alors pour tout $v > w$ on a $||K[R(v+iy,T)]|| \mapsto 0$ et $||R(v+iy,T)K|| \mapsto 0$ quand $|y| \mapsto +\infty$.*

Preuve du théorème : Comme l'opérateur K est régulier sur les espaces $L_p(1 < p < +\infty)$, il existe donc une suite d'opérateurs de rangs finis sur $L_p[-1,1]$ qui convergent en norme vers K, il suffit d'établir le théorème pour un opérateur de collision de rang 1 donné par :

$$\varphi \mapsto (K\varphi)(x,\xi) = \int_{-1}^{1} f(\xi)g(\xi')\varphi(x,\xi')d\xi'.$$

où $f(.) \in L_p[-1,1], g(.) \in L_q[-1,1]$ et $q = \dfrac{p}{p-1}$. Ce sont quatres opérateurs qui ont la même structure. Le fait que la compacité est stable par sommation montre qu'il suffit de restreindre notre étude à l'opérateur

$$R_{1,1}^{H,n,m}(t) = \int_0^t e^{-\sigma(\xi)(t-s)} \int_{-1}^{1} f(\xi) g(\xi') e^{-\sigma(\xi')s} \times \varphi(x + (\mathrm{sgn}\xi)4na - \xi(t-s) + (\mathrm{sgn}\xi')4ma - \xi' s, \xi') \chi_{m,1}\chi_{n,1} ds d\xi'.$$

Démontrons le résultat pour $p = 2$, le cadre général se déduit par un argument d'interpolation.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que les fonctions $f(.) \in L^2([-1,1])$ et $g(.) \in L^2([-1,1])$ sont positives.

Soit $\widetilde{R_{1,1}^{H,n,m}}(t)$ l'analogue de $R_{1,1}^{H,n,m}(t)$ lorsque $\widetilde{\sigma}(\xi) = \inf\limits_{\xi \in [-1,1]} \sigma(\xi)$. On peut facilement voir que

$$R_{1,1}^{H,n,m}(t) \leq \widetilde{R_{1,1}^{H,n,m}}(t).$$

Grâce à un argument de domination (voir Théorème 19), la compacité de $\widetilde{R_{1,1}^{H,n,m}}(t)$ (qui est liée à la convexité de l'intervalle $]-a, a[$ [104] entraîne la compacité de l'opérateur $R_{1,1}^{H,n,m}(t)$ d'après le résultat de Doods-Fremlin. Dans ce cas les Lemmes 30 et 31 nous guarantissent que $t \mapsto R_{1,1}^{H,n,m}(t)$ est continue en norme pour $t \geq 0$. Par ailleurs, on sait que $KR(v + iy, T_H)$ est compact pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pour tout opérateur frontière H borné, donc en particulier, si H est une réflexion pure alors $KR(v + iy, T_H)$ est compact pour tout $y \in \mathbb{R}$. Maintenant le théorème de S. Brendle [27, Théorème 3.2] montre que $R_{1,1}^{H,n,m}(t)$ est compact pour tout $t \geq 0$ et termine la preuve. ◆

Chapitre 4

Quelques remarques sur les classes de perturbations semi-Fredholm et Fredholm

On montre l'existence des espaces de Banach X et Y tels que l'ensemble des opérateurs strictement singuliers $S(X,Y)$ (resp., l'ensemble des opérateurs strictement cosinguliers $\mathcal{CS}(X,Y)$) est strictement inclu dans l'ensemble $\mathcal{F}_+(X,Y)$ (resp. $\mathcal{F}_-(X,Y)$) pour une classe non vide d'opérateurs semi-Fredholm (fermés à domaines denses) supérieurs $\Phi_+(X,Y)$ (resp. pour une classe non vide d'opérateurs semi-Fredholm (fermés à domaines denses) inférieurs $\Phi_-(X,Y)$).

4.1 Introduction

Le travail de T. Kato [69] sur les opérateurs strictement singuliers a été le point de départ d'un domaine assez complexe en théorie des opérateurs, celui des perturbations semi-Fredholm et Fredholm entre deux espaces de Banach X et Y notés par $\mathcal{F}(X,Y)$, $\mathcal{F}_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}_-(X,Y)$, il a fait l'objet de plusieurs travaux traitant ces opérateurs, spécialement les inclusions entre toutes ces classes et le problème de stabilité par passage au dual. La difficulté d'étudier ces questions provient du fait qu'elles sont liées directement à la géométrie des espaces de Banach. La nouvauté ici consiste à étudier toutes ces classes pour des opérateurs semi-Fredholm et Fredholm fermés à domaines denses qui ne sont pas nécéssairement bornés. Pour $X = Y$, K. Latrach et A. Dehici [78, Lemme 2.3] ont montré que $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}^b(X)$ où $\mathcal{F}^b(X)$ désigne la classe des perturbations de Fredholm agissant sur $\Phi(X) \cap \mathcal{L}(X)$. Le cadre des ensembles $\mathcal{F}_+(X)$, $\mathcal{F}_+^b(X)$ et $\mathcal{F}_-(X)$ et $\mathcal{F}_-^b(X)$ est différent, on note juste les inclusions $\mathcal{F}_+(X) \subset \mathcal{F}_+^b(X)$ et $\mathcal{F}_-(X) \subset \mathcal{F}_-^b(X)$. Ces commentaires sont aussi applicables si $X \neq Y$. Ici, moyennant les espaces hériditionnairement indécomposables construits par T. Gowers et B. Maurey et notés par X_{GM}; on va montrer que $\mathcal{S}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \subsetneq \mathcal{F}_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$ (resp., $\mathcal{CS}(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}^*) \subsetneq \mathcal{F}_-(X_{GM}^*, X_{GM} * \times X_{GM}^*)$, de plus, on va prouver que les inclusions $\mathcal{S}(Z) \subsetneq \mathcal{F}_+^b(Z)$ (resp. $\mathcal{CS}(Z^*) \subsetneq \mathcal{F}_-^b(Z)$) sont strictes pour une infinité d'espaces de Banach.

4.2 Quelques rappels nécessaires

Soient X et Y deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{C}(X,Y)$ (l'ensemble des opérateurs fermés à domaines denses). Pour tout $x \in D(A)$ (*le domaine de* A), on écrit :

$$||x||_A = ||x||_X + ||Ax||_Y \quad \text{(la norme du graphe)}.$$

Comme il a été mentionné dans la partie rappels, $D(A)$ muni de la norme $||.||_A$ est un espace de Banach noté par X_A, et A comme opérateur défini de X_A dans Y est borné. Si $D(A) \subseteq D(J)$, alors J est A-défini.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \beta(\widehat{A}) &= \beta(A) \\ \alpha(\hat{A}) &= \alpha(A),\ R(\hat{A}) = R(A), \alpha(\hat{A}+\hat{B}) = \alpha(A+B) \\ \beta(\hat{A}+\hat{J}) &= \beta(A+J), R(\hat{A}+\hat{J}) = R(A+J). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Il est clair que les relations (4.1) entraînent que

$$A \in \Phi_+(X,Y) \Leftrightarrow \hat{A} \in \Phi_+(X_A,Y) \qquad (4.2),$$
$$A \in \Phi_-(X,Y) \Leftrightarrow \hat{A} \in \Phi_-(X_A,Y) \qquad (4.3),$$
$$A \in \Phi(X,Y) \Leftrightarrow \hat{A} \in \Phi(X_A,Y) \qquad (4.4).$$

4.3 Résultats principaux

On commence cette étude par donner le résultat suivant:

Proposition 32 *Soient X et Y deux espaces de Banach ($\Phi(X,Y) \neq \emptyset$), donc*

$$\mathcal{F}^b(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y).$$

Avant de compléter cette analyse, présentons quelques détails nécéssaires pour la suite. Tout d'abord, donnons la définition des espaces totalement incomparables.

Définition 8 *Deux espaces de Banach X et Y sont dits totalement incomparables si leurs sous-espaces fermés de dimensions infinies ne sont jamais isomorphes.*

Il est facile d'observer que chaque deux espaces de l'ensemble $\{c_0\} \bigcup \{\ell_p\}$ sont totalement incomparables. Plus précisément, on a :

Soit $p \in [1, +\infty[$, si $p < r$ (resp. $r < p$), donc

$$\mathcal{L}(\ell_r, \ell_p) = K(\ell_r, \ell_p) = \mathcal{S}(\ell_r, \ell_p) = \mathcal{F}^b(\ell_r, \ell_p) = \mathcal{F}(\ell_r, \ell_p)$$

(resp. $\mathcal{L}(\ell_r, \ell_p) = S(\ell_r, \ell_p) = \mathcal{F}^b(\ell_r, \ell_p) \neq K(\ell_r, \ell_p)$). Ici on a $\Phi((\ell_r, \ell_p) = \emptyset$ $(r \neq p)$ mais on a aussi

$$\mathcal{F}^b(\ell_r, \ell_p) = \mathcal{F}(\ell_r, \ell_p) \quad (r \neq p).$$

D'autres part, il est facile de voir que si X et Y sont totalement incomparables, alors chaque opérateur borné de X dans Y est strictement singulier. De plus, la définition des perturbations de Fredholm permet d'affirmer ce qui suit

Lemme 33 *Soient X et Y deux espaces de Banach tels que*

$$\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{F}^b(X,Y) \quad \textit{alors} \quad \Phi^b(X,Y) = \emptyset.$$

On donne maintenant la définition des espaces hériditairement indécomposables qui jouera un rôle primordial dans les résultats qui suivent :

Définition 9 *Un espace de Banach X st dit indécomposable s'il ne peut pas être décomposable en la somme directe de deux sous-espaces fermés de dimension infinies.*

Définition 10 *Un espace de Banach X est dit héréditairement indécomposable (H.I) si tous ses sous-espaces fermés de dimension infinies sont indécomposables.*

En 1993, T. Gowers et B. Maurey ont donné l'exemple d'un espace réflexif séparable héréditairement indécomposable noté X_{GM} ayant un quotient héritant de cette propriété.

Théorème 34 *On a*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) &= \mathcal{F}_+^b(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq S(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \\ \mathcal{L}(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}^*) &= \mathcal{F}^b(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}^*) \neq CS(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}^*)\end{aligned}$$

Remarque : Comme conséquence immédiate de ce théorème, on déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) &= \mathcal{F}^b(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq S(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \\ \mathcal{L}(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}) &= \mathcal{F}^b(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}^*) \neq CS(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}^*)\end{aligned}$$

On va montrer que le Théorème 34 reste vrai, respectivement, pour les classes de perturbations $\mathcal{F}_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$ et $\mathcal{F}_-(X_{GM}, X_{GM} \times X_{GM})$, néanmoins les preuves sont plus compliquées.

Le lemme suivant est essentiel pour prouver le Théorème 37 qui peut être regardé comme une extension du Théorème 34 au cas des opérateurs semi-Fredholm fermés à domaines denses (non bornés).

Théorème 35 *On a*

a) $\Phi_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \emptyset$

b) $\Phi_-(X_{GM}^*, X_{GM}^* \times X_{GM}^*) \neq \emptyset$.

Preuve : Pour la classe $\Phi_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$, la preuve est basée sur la séparabilité de l'espace $X_{GM} \times X_{GM}$ et celle de l'espace X_{GM}^* muni de la topologie $*$-faible. On peut montrer alors l'existence d'un opérateur compact injectif à image dense de X_{GM} dans $X_{GM} \times X_{GM}$; Ceci implique que l'opérateur $K^{-1} : R(K) \subseteq X_{GM} \times X_{GM} \to X_{GM}$ est un opérateur de Fredholm fermé à domaine dense, ce qui entraîne que $\Phi(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \emptyset$ et par suite $\Phi_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq \emptyset$. Pour b), une approche similaire par dualité permet d'établir le résultat pour la classe des opérateurs semi-Fredholm inférieurs.

La proposition suivante dûe à L. Weis [155], va jouer aussi un rôle fondamental dans la preuve du Théorème 37.

Proposition 36 *Soit Y un espace de Banach, alors*

a) $\mathcal{L}(Y,Z) = \mathcal{S}(Y,Z)\bigcup\Phi_+(Y,Z)$ *pour tout espace de Banach Z si et seulement si Y est un espace héréditairement indécomposable.*

b) $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{CS}(X,Y)\cup\Phi_-(X,Y)$ *pour tout espace de Banach X si et seulement si les quotients de Y sont héréditairement indécomposables.*

Montrons maintenant le théorème suivant :

Théorème 37 *On a*

a) $\mathcal{L}(X_{GM}\times X_{GM}, X_{GM}) = \mathcal{F}_+(X_{GM}\times X_{GM}, X_{GM}) \neq \mathcal{S}(X_{GM}\times X_{GM}, X_{GM})$,

b) $\mathcal{L}(X^*_{GM}, X^*_{GM}\times X^*_{GM}) = \mathcal{F}_(X^*_{GM}, X^*_{GM}\times X^*_{GM}) \neq \mathcal{CS}(X^*_{GM}, X^*_{GM}\times X^*_{GM})$.

Preuve : Pour a) il suffit d'établir l'inclusion $\mathcal{L}(X_{GM}\times X_{GM}, X_{GM}) \subsetneqq \mathcal{F}_+(X_{GM}\times X_{GM}, X_{GM})$. Soit $S \in \Phi_+(X_{GM}\times X_{GM}, X_{GM})$ et j l'application définie de X_S dans $X_{GM}\times X_{GM}$ par $j : (D(S), ||.||_S) = X_S \mapsto X_{GM}\times X_{GM}$, $j(x) = x$, on va montrer que j est strictement singulier. En effet, comme $S \in \Phi_+(X_{GM}\times X_{GM}, X_{GM})$, la relation (4.2) montre que $\hat{S} \in \Phi_+(X_S, X_{GM})$, ceci implique l'existence d'un sous-espace de codimension finie H dans X_S qui est isomorphe à $R(\hat{S}) = R(S)$. D'autre part, $R(S)$ est un sous-espace héréditairement indécomposable fermé dans X_{GM}, donc H va hériter cette propriété dans l'espace de Banach X_S ce qui permet de conclure que X_S est un espace de Banach héréditairement indécomposable. De plus, $j \notin \Phi_+(X_S, X_{GM}\times X_{GM})$ car si $j \in \Phi_+(X_S, X_{GM}\times X_{GM})$, on aura $X_S \cong X_{GM}\times X_{GM}$, ceci contredit le fait que $X_{GM}\times X_{GM}$ est un espace qui n'est pas héréditairement indécomposable. Ensuite, en appliquant la Proposition 36 (assertion a)), on en déduit que j est strictement singulier de X_S dans $X_{GM}\times X_{GM}$. Prenons maintenant un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(X_{GM}\times X_{GM}, X_{GM})$, tout d'abord, on va montrer que les espaces $X_{S+T} = (D(S+T), ||.||_{S+T})$ et $X_S = (D(S), ||.||_S)$ sont isomorphes. En effet, soit $x \in X_{S+T}$ donc

$$\begin{aligned} ||x||_{S+T} &= ||x|| + ||(S+T)(x)|| \\ &\leq ||x|| + ||S(x)|| + ||T(x)|| \\ &\leq ||x|| + ||S(x)|| + M||x|| \\ &\leq (1+M)(||x|| + ||S(x)||) \end{aligned}$$

$$\leq \ (1+M)||x||_S.$$

De plus, si $x \in X_S$, on peut établir les estimations suivantes:

$$\begin{aligned}
||x||_S &= ||x|| + ||S(x)|| \\
&\leq ||x|| + ||(S+T)(x) - T(x)|| \\
&\leq ||x|| + ||(S+T)(x)|| + ||T(x)|| \\
&\leq ||x|| + ||(S+T)(x)|| + M||x|| \\
&\leq (1+M)||x||_{S+T}
\end{aligned}$$

et finalement,

$$\frac{||x||_S}{1+M} \leq ||x||_{S+T} \leq (1+M)||x||_S.$$

Ce qui assure que les espaces X_{S+T} et X_S sont isomorphes. Cet ismorphisme va être noté par h et défini par $h(x) = x$.

D'autre part, l'opérateur $\widehat{T+S} : X_{S+T} \mapsto X_{GM}$ défini par $\widehat{T+S}(x) = (T_j h)(x) + (S_j h)(x)$ pour tout $x \in X_{S+T}$ est un élément de l'ensemble $\Phi_+(X_{S+T}, X_{GM})$, ceci provient directement du fait que les opérateurs $T_j h$ et $S_j h$ appartiennent respectivement aux classes $\mathcal{S}(X_{S+T}, X_{GM})$ et $\Phi_+(X_{S+T}, X_{GM})$. Ensuite, en utilisant la relation ( ), on obtient $T+S \in \Phi_+(X_{G_M} \times X_{G_M}, X_{GM})$ et, par suite $T \in \mathcal{F}_+(X_{G_M} \times X_{G_M}, X_{GM})$. Considérons maintenant l'opérateur de projection $Pr : X_{GM} \times X_{GM} \rightarrow X_{GM}$ défini par $Pr(x,y) = x$. Il est évident que $Pr \in \mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$, mais cet opérateur n'est pas strictement singulier car sa restriction à l'espace $X \times \{0\}$ est un isomorphisme; donc $\mathcal{L}(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) = \mathcal{F}_+(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM}) \neq S(X_{GM} \times X_{GM}, X_{GM})$. Ceci achève la preuve de a).

Pour b), soit $S \in \Phi_-(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$ et soit $X_S = (D(S), ||.||_S)$, alors l'opérateur J^* défini par $J^* : X_S \rightarrow X^*_{GM}$, $J^*(x) = x$ n'est pas un élément de la classe $\Phi_-(X_S, X^*_{GM})$ car si on suppose l'inverse on aura $X_S \simeq X^*_{GM}$ et par suite

$$X^*_{GM}/N(S) \simeq X_S/N(S) \simeq R(S)$$

qui est un sous-espace décomposable de codimension finie de l'espace $X^*_{GM} \times X^*_{GM}$; Ceci contredit le fait que les quotients de l'espace X^*_{GM} sont indécomposables. De plus, la Proposition 36 (assertion b)) assure que J^* est un opérateur strictement cosingulier.

Prenons $T \in \mathcal{L}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$; Comme dans la preuve de a), l'opérateur $\widehat{T+S}$ défini de X_{S+T} dans $X^*_{GM} \times X^*_{GM}$ peut être écrit sous la forme $\widehat{T+S}(X) = (TJ^*h)(x) +$

$(SJ^*h)(x)$ pour tout $x \in X^*_{GM}$ ce qui montre que cet opérateur est un élément de la classe $\Phi_-(X_{S+T}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$, ceci provient immédiatement du fait que les opérateurs $T_{J^*}h$ et $S_{J^*}h$ appartiennent respectivement aux classes $\mathcal{CS}(X_{S+T}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$ et $\Phi_-(X_{S+T}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$; ensuite en utilisant la relation (4.3), on déduit que $T+S \in \Phi_-(X_{S+T}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$ et par conséquent $T \in \mathcal{F}_-(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$, ceci entraîne que $\mathcal{L}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}) = \mathcal{F}_-(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$.

Maintenant, considérons l'opérateur i défini par $i : X^*_{GM} \mapsto X^*_{GM} \times X^*_{GM})$, $i(x) = (x, 0)$, cet opérateur n'est pas strictement cosingulier. En effet, puisque $i \in \mathcal{L}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM})$ et notons par π_H l'application quotient $\pi_H : X^*_{GM} \times X^*_{GM} \mapsto (X^*_{GM} \times X^*_{GM})/H$ où $H = \{(x, y) \in X^*_{GM} \times X^*_{GM}/y = 0\}$. Il est clair que l'opérateur $\pi_H \circ i : X^*_{GM} \mapsto (X^*_{GM} \times X^*_{GM})/H$ est surjective. Comme $\text{Codim}(H) = \infty$, on déduit que i n'est pas strictment cosingulier de X^*_{GM} dans $X^*_{GM} \times X^*_{GM}$. Par conséquent,

$$\mathcal{F}_-(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}) \neq \mathcal{CS}(X^*_{GM}, X^*_{GM} \times X^*_{GM}).$$

Ce qui termine la preuve. ◆

Soit X un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$, on définit

$$\begin{aligned}
\sigma_e(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi^b(X)\}, \\
\sigma_+(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi^b_+(X)\}, \\
\sigma_-(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi^b_-(X)\}.
\end{aligned}$$

On sait que $\sigma_e(T)$ est un ensemble compact non vide de $\mathbb{C}$ car il coincide avec le spectre de l'image de T dans l'algèbre de Calkin $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$.

D'autre part, il est facile de voir que

$$\sigma_+(T) \cup \sigma_-(T) \subseteq \sigma_e(T) \qquad (4.5).$$

De plus, la stabilité de l'indice des opérateurs semi-Fredholm soumis à des petites perturbations donne les inclusions

$$\begin{aligned}
Fr(\sigma_e(T)) &\subseteq \sigma_+(T) \qquad (4.6) \\
Fr(\sigma_e(T)) &\subseteq \sigma_-(T) \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

où $Fr(\sigma_e(T))$ désigne la frontière de l'ensemble $\sigma_e(T)$.

Le résultat suivant montre que le fait que les ensembles $\sigma_e(T)$ possèdent des intérieurs vides dans le plan complexe $\mathbb{C}$ permet d'établir des informations intéressantes sur les classes de perturbations de Fredholm et semi-Fredholm. Plus précisément, on a la proposition suivante:

Proposition 38 *Soit X un espace de Banach tel que $(\sigma_e(T))^\circ = \emptyset$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$, alors*

$$\mathcal{F}_+^b(X) = \mathcal{F}_-^b(X) = \mathcal{F}^b(X).$$

Preuve : Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, il s'en suit des inclusions (4.5), (4.6) et (4.7) que

$$Fr(\sigma_e(T)) = \sigma_e(T) \setminus (\sigma_e(T))^\circ = \sigma_e(T) = \sigma_+(T) = \sigma_-(T).$$

Pour prouver le résultat, il suffit d'établir les identités $\Phi^b(X) = \Phi_+^b(X) = \Phi_-^b(X)$. On va restreindre notre preuve à l'inclusion $\Phi_+^b(X) \subseteq \Phi^b(X)$ (l'inclusion $\Phi_-^b(X) \subseteq \Phi^b(X)$ se vérifie en utilisant le même raisonnement). Ceci est équivaut à montrer l'inclusion $[\Phi^b(X)]^c \subseteq [\Phi_+^b(X)]^c$ sur $\mathcal{L}(X)$ (où $[\Phi^b(X)]^c$ et $[\Phi_+^b(X)]^c$ sont les complémentaires des ensembles $[\Phi^b(X)]$ et $[\Phi_+^b(X)]^c$ dans $\mathcal{L}(X)$) .
Soit $A \in [\Phi_b(X)]^c$, donc $A \notin \Phi_b(X)$, ceci implique que $0 \in \sigma_e(A) = \sigma_+(A)$ et par conséquent $A \notin \Phi_+^b(X)$, ceci montre que $A \in [\Phi_+^b(X)]^c$. ◆

Finalement, notre dernier résultat dans ce chapitre est traduit par:

Théorème 39 *Soit Z un espace de Banach X_{GM} et soit $X = X_{GM} \times X_{GM} \times \cdots \times X_{GM}$ ($n \geq 2$ fois). On note $Y = X \times Z = X_{GM} \times X_{GM} \times \cdots \times X_{GM}$ ($n+1$ fois), alors*

$$\mathcal{F}_+^b(Y) = \mathcal{F}^b(Y) \neq \mathcal{S}(Y) \ (4.5).$$

et

$$\mathcal{F}_-^b(Y^*) = \mathcal{F}^b(Y^*) \neq \mathcal{CS}(Y^*) \ (4.6).$$

Preuve : Tout d'abord, on observe que chaque opérateur $A \in \mathcal{L}(Y)$ peut être mis sous la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A_{ij} \in \mathcal{L}(X_{GM})$ pour tout $i, j = 1, \cdots, n$, $D \in \mathcal{L}(X_{GM})$, $B \in \mathcal{L}(X_{GM}, X) = \mathcal{F}^b(X_{GM}, X)$, $C \in \mathcal{L}(X, X_{GM}) = \mathcal{F}^b(X, X_{GM})$ car

$$\mathcal{F}^b(H, M) = \mathcal{L}(H, M) \text{ si et seulement si } \mathcal{F}^b(M, H) = \mathcal{L}(M, H).$$

On note par

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

On a $\sigma_e(A) = \sigma_e(A_0)$. Comme $\mathrm{Card}(\sigma_e(A_{ij}) = \mathrm{Card}(\sigma_e(D) = 1$ pour tout $i, j = 1, \cdots, n$, on déduit que l'ensemble $\mathcal{S}_e(A)$ est formé d'un ensemble fini de points dans $\mathbb{C}$, donc il est évident que son intérieur est vide. De plus, suivant la Proposition 38, on obtient $\mathcal{F}^b(Y) = \mathcal{F}^b_+(Y)$. Donc $P_j = \begin{pmatrix} 0 & J_Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $J_Z : X_{GM} \mapsto X$, $J_Z(x) = (x, 0, \cdots, 0)$ donne l'exemple d'un opérateur appartenant à $\mathcal{F}^b(Y) = \mathcal{F}^b_+(Y)$ mais qui n'est pas strictement singuliers. Deuxièmement, on montre que si H est réflexif alors $[\mathcal{F}^b_+(H)]^* = \mathcal{F}^b_-(H^*)$. Donc $P_j^* \in \mathcal{F}^b_-(Y^*)$. Mais P_j^* n'est pas strictement cosingulier car J_{Z^*} est surjectif. ◆

Chapitre 5

Mesure de non-compacité et quelques résultats en théorie de Fredholm

Soit X un espace de Banach et soit $\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs bornées sur X. On montre que si $T \in \mathcal{L}(X)$ et P, Q deux polynômes complexes tels que $P(\lambda_0) \neq 0$ (en d'autres termes λ_0 n'est pas un zéro de P), Q divise $P - P(\lambda_0)$ et la mesure de non-compacité de l'opérateur $P(T)$ est inférieure à $|P(\lambda_0)|$, alors $Q(T)$ est un opérateur de Fredholm, on va constater que le cas des opérateurs de Riesz ainsi que beaucoup d'autres résultats dans le domaine s'inscrivent comme des cas particuliers de notre cadre général. Ces résultats seront exploités pour donner une nouvelle caractérisation du spectre essentiel d'un opérateur fermé à domaine dense.

5.1 Introduction

Le travail présenté ici a comme sujet central l'étude d'une certaine classe d'opérateurs permettant d'obtenir des résultats intéressants en théorie de Fredholm, qui représente l'une des clés pour la résolution des équations de type $\nu - T\nu = f$ (alternative de Fredholm voir [29], [49], [69]). Notre analyse est basée sur les propriétés remarquables satisfaites par le concept de la mesure de non compacité des opérateurs bornés. Ces propriétés vont nous donner des conditions suffisantes pour lesquelles $Q(T)$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul pour une certaine classe de polynômes. L'objectif des premiers résultats est d'établir un cadre fonctionnel général permettant d'obtenir de nouveaux résultats dans cette direction. En effet, on montre que si $A \in \mathcal{L}(X)$ et P, Q deux polynômes complexes qui satisfont à $P(\lambda_0)$ et $Q(0) \neq 0$ et Q divise $P - P(\lambda_0)$, alors si $\delta(P(tA)) < |P(\lambda_0)|$ pour tout $t \in [0,1]$, on obtient que $Q(A)$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul. Ceci représente une étude quasi-macroscopique de certaines contributions établies par plusieurs auteurs, la deuxième partie des résultats est consacrée au cas des opérateurs de Riesz. D'autre part, une extension d'une partie de l'analyse faite par les auteurs dans [76], [77], [84], [126], [127] est établie, il s'agit de donner une nouvelle caractérisation du spectre essentiel de Schechter pour les opérateurs fermés à domaines denses

5.2 Résultats principaux

Théorème 40 *Soit X un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$, on suppose qu'il existe deux polynômes complexes P, Q tels que $P(\lambda_0) \neq 0$, Q divise $P - P(\lambda_0)$ et $\delta(P(A)) < |P(\lambda_0)|$ alors $Q(A) \in \Phi(X)$. De plus si $\delta(P(tA)) < |P(\lambda_0)|$ pour tout $t \in [0,1]$ et $Q(0) \neq 0$, alors $Q(A)$ est d'indice nul.*

Preuve : Sans perdre de généralité, on peut supposer que $P(\lambda_0) = 1$.

a) Commençons par montrer que $\alpha(Q(A)) < +\infty$ Pour cela, il suffit d'établir que $N(Q(A)) \cap B_X$ (où B_X est la boule unité de l'espace de Banach X) est un ensemble compact. Plus précisement, on va prouver que si M est un sous-ensemble compact de X alors $S = \{x \in B_X : Q(A)(x) \in M\}$ est ou bien vide ou bien c'est un sous-ensemble compact de X. En effet, supposons que S n'est pas vide, le fait que Q divise $P - \lambda$ montre l'existence d'un polynôme complexe (à cœfficients complexes) H tel que $P - 1 = HQ$ donc $P = HQ + 1$. Considérons $z \in M$ et $x \in B_X$ avec $Q(A)(x) = z$ donc $H(A)Q(A)(x) + x = H(A)(z) + x$ ce qui implique que $x = P(A)(x) - H(A)(z)$. Comme l'image d'un ensemble compact par un opérateur borné est compact, il s'en suit que l'ensemble

$$\widetilde{A} = \{-H(A)(z) : z \in M\}$$

est un ensemble compact aussi. Observons que $S \subseteq P(A)S + \widetilde{A}$. En utlisant l'assertion 3 du Lemme 5, il vient

$$\delta(S) \leq \delta(P(A)(S) + \widetilde{A}) \leq \delta(P(A)(S)) \leq \delta(P(A))\delta(S).$$

On a $\delta(P(A)) < 1$. Ceci donne $\delta(S) = 0$ et montre que S est un sous-ensemble compact de X. Pour établir le résultat concernant l'ensemble $N(Q(A)) \cap B_X$, il suffit de prendre $M = \{0\}$.

b) Pour compléter la preuve, tout d'abord on va montrer que l'image $R(Q(A))$ de l'opérateur $Q(A)$ dans X est fermée. Comme $N(Q(A))$ est un espace de dimension finie, il va exister un sous-espace fermé Y de dimension infinie tel que $X = N(Q(A)) \oplus Y$. Maintenant, on va établir l'inégalité

$$\alpha||Q(A)x|| \geq ||x||, \quad \forall x \in Y \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

Supposons que c'est la réciproque qui est vraie, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ de norme 1 qui satisfait à $||Q(A)(x_n)|| \leq \frac{1}{n}$, il s'ensuit que $Q(A)(x_n)) \to 0$ quand n tend vers l'infini. En prenant

$$M = \{Q(A)(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

et en tenant compte de la première partie, on déduit que la suite $\{x_n\}$ admet une sous-suite $\{x_{nk}\}_k$ qui converge vers $x_0 \in Y$. De plus, il est facile de voir que $\|x_0\| = 1$ et $Q(A)x_0 = 0$. Ceci est une contradiction, ce qui entraîne l'existence d'un nombre $\alpha > 0$ tel que $\alpha\|Q(A)(x)\| \geq \|x\|$ et montre la fermeture de l'ensemble $R(Q(A))$.

c) On désigne par $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ les polynômes conjugués de P et Q. Il est facile d'observer que $\overline{Q}$ divise $\overline{P} - 1$ et d'autre part on a $\overline{Q}(A^*) = [Q(A)]^*$ et $\overline{P}(A^*) = [P(A)]^*$. Comme $\delta(P(A)) < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta[P(A)^n] = 0$ ce qui implique l'existence d'un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\delta[P(A)^k] < \frac{1}{2}$. En utilisant l'assertion 5 du lemme 5, on obtient $\delta[P(A)^k] = \delta[\overline{P^k}(A^*)] \leq 2\delta[P^k(A)]$, $k > 1$, où l'opérateur $[(P(A))^k]^*$ désigne le dual de l'opérateur $[P(A)]^k$. Il est clair que si Q divise $P - 1$ alors Q divise $P^k - 1$ et par conséquent $\overline{Q}$ divise $\overline{P^k} - 1$. En procédent comme dans la preuve de la première partie du théorème mais cette fois-ci pour les polynômes $\overline{P^k}$, $\overline{Q}$ et l'opérateur A^*, on obtient

$$\alpha\left[[Q(A)]^*\right] = \alpha\left[\overline{Q}(A^*)\right] = \beta[Q(A)] < +\infty$$

et par suite

$$Q(A) \in \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X) = \Phi(X).$$

Maintenant si $Q(0) \neq 0$, on établit que $Q(tA)$ est un opérateur de Fredholm pour tout $t \in [0, 1]$, la stabilité de l'indice par les petites perturbations et la compacité de l'intervalle $[0,1]$ impliquent que

$$i(Q(tA)) = i(Q(0A)) = i(Q(A)) = 0. \quad \blacklozenge$$

Théorème 41 *Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\delta(A^m) < 1$ pour un ceratin $m > 0$, alors $T = I - A$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

Pour la preuve, le fait que $I - A \in \Phi(X)$ provient immédiatement du Théorème 40 en prenant $Q(z) = 1 - z$ et $P(z) = z^n$ et $\lambda_0 = 1$.

Remarque : Soit $P(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$ un polynôme à coefficients complexes et soit A un opérateur borné sur X qui satisfait à l'inégalité

$$\delta[b_0 I + b_1 A + \cdots + b_n A^n] < \left| \sum_{i=0}^{n} b_i \right| = |P(1)|.$$

Une condition essentielle assurant l'appartenance de l'opérateur $I - A$ à l'ensemble $\Phi(X)$ est que $P(1) = 1$. Si cette condition n'est pas satisfaite, le résultat est en général faux. En effet, soit X un espace de Banach décomposable en la somme de deux sous-espaces de dimensions infinies X_1 et X_2 c'est à dire $X = X_1 \oplus X_2$. On note par A la projection sur l'espace X_1 et soit $P(z) = z^2 - z$. Il est facile d'observer que $A^2 - A = 0$ ce qui implique que $P(A) = 0$ et par conséquent $\delta(A^2 - A) = 0 < 1$, tandis que $I - A \notin \Phi(X)$ car $N(I - A) = X_1$ est un sous-espace fermé de dimension infinie (ici $P(1) = 0 \neq 1$).

5.3 Le cadre des opérateurs de Riesz

Commençons cette section par donner la définition des opérateurs de Riesz.

Définition 11 *Soit X un espace de Banach et soit $R \in \mathcal{L}(X)$, on dit que R est un **opérateur de Riesz** si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda I - A \in \Phi(X)$.*

Désignons par $\mathcal{R}(X)$ l'ensemble des opérateurs de Riesz sur X.

Une des questions clé en théorie des opérateurs consiste à donner une caractérisation pour cette classe d'opérateurs via celle des opérateurs compacts et quasinilpotents. Un des problèmes lié à ce sujet est la fameuse décomposition de West qui a été démontrée positivement que sur les espaces $\ell_p(1 \leq p < +\infty)$ et $L_p(\nu), (1 < p < +\infty)$, signalons que le problème est toujours ouvert sur un espace de Banach quelconque. Dans cette section, en utilisant le concept de la mesure de non-compacité, on va montrer que beaucoup de résultats connus dans cette direction s'inscrivent comme des cas particuliers de notre cadre général.

Notre premier résultat préparatoire est donné par la proposition suivante :

Proposition 42 *Soit X un espace de Banach et soit $R \in \mathcal{R}(X)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n(\varepsilon) \geq 1$ tel que $\delta(R^{n(\varepsilon)}) < \varepsilon$.*

Preuve : Le fait que $R \in \mathcal{R}(X)$ satisfait à la théorie de Riesz-Schauder montre que l'ensemble des points $\lambda \in \sigma(R)$ qui satisfont à l'inégalité $|\lambda| > \varepsilon$ est formé d'un ensemble fini $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m_\varepsilon}\}$. Soit P_i la projection de X sur les sous-espaces $N(\lambda_i I - R)$ dans la décomposition

$$X = N(\lambda_i I - R) \oplus H(\lambda_i) \ (1 \leq i \leq m_\varepsilon).$$

On désigne par V l'opérateur $R - \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} R \circ P_i$. Il est facile d'observer que $\sum_{i=1}^{m_\varepsilon} R \circ P_i$ est un opérateur de rang fini donc il est compact de plus on a

$$r_\sigma(V) = \lim_{n \to +\infty} ||V^n||^{1/n} < \varepsilon,$$

ceci montre l'éxistence d'un entier n_ε tel que $||V^{n_\varepsilon}|| < \varepsilon$. D'autre part, on peut ecrire $R^{n_\varepsilon} = V^{n_\varepsilon} + F_{n_\varepsilon}$ où F_{n_ε} est un opérateur compact et explique que $\delta(R^{n_\varepsilon}) = \delta(V^{n_\varepsilon}) < \varepsilon$.

Comme conséquence immédiate de ce résultat, on a le corollaire suivant qui donne une prpopriété classiques des opérateurs de Riesz.

Lemme 43 *Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{R}(X)$, donc $i(\lambda I - A) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

Preuve : On utilise la décomposition $\lambda I - A = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)$. Il suffit donc de montrer que $\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)$ est d'indice nul. Le fait que $A \in \mathcal{R}(X)$ montre que $\frac{1}{\lambda} A$ est aussi un opérateur de Riesz, en appliquant la Proposition 42 à l'opérateur $\frac{1}{\lambda} A$ (en prenant $\varepsilon = 1$) et en tenant compte du Théorème 41, on obtient que $I - \frac{1}{\lambda} A \in \Phi(X)$ est d'indice nul ce qui donne le résultat. ◆

5.4 Stabilité du spectre essentiel

Soit X un espace de Banach et A un opérateur fermé à domaine dense sur X

Dans [76], [77], [84], [126], [127], les auteurs ont donné une caractérisation du spectre essentiel de Schechter ou de Weyl moyennant la classe des perturbations de Fredholm. Posons

$$\mathcal{M}_A(X) = \left\{M \in \mathcal{L}(X) : \forall\lambda \in \rho(A+M), \exists m > 0 \ \text{ tel que } \ \delta\left(\left[(\lambda - A - M)^{-1}M\right]^m\right) < 1\right\}.$$

Donnons à présent la caractérisation suivante du spectre $\sigma_{e5}(A)$ qui généralise celle établie par les auteurs mentionnés au dessus.

Théorème 44 *Soit A un opérateur fermé à domaine dense sur X, donc on a*

$$\sigma_{e5}(A) = \bigcap_{M\in\mathcal{M}_A(X)} \sigma(A+M)$$

Preuve : Comme $\delta(K) = 0 < 1$ pour tout opérateur compact alors $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{M}_A(X)$ et par suite $\bigcap\limits_{M\in\mathcal{M}_A(X)} \sigma(A+M) \subseteq \sigma_{e5}(A)$.

Montrons maintenant l'inclusion inverse. On considère $\lambda \in \sigma_{e5}(A)$ et supposons que $\lambda \notin \bigcap_{M\in\mathcal{M}_A(X)} \sigma(A+M)$, ce qui implique l'existence d'un opérateur $M_0 \in \mathcal{M}_A(X)$ tel que $\lambda \in \rho(A+M_0)$. D'autre part, on peut écrire

$$\lambda - A = \left[I + (\lambda - A - M)^{-1}M_0\right](\lambda - A - M_0).$$

En tenant compte du Théorème 40, on a

$$\left[I + (\lambda - A - M)^{-1}M_0\right] \in \Phi(X) \ \text{ et } \ i\left[I + (\lambda - A - M_0)^{-1}M_0\right] = 0.$$

De plus,

$$\lambda - A = (\lambda - A - M_0)\left[I + (\lambda - A - M_0)^{-1}M_0\right] \in \Phi(X)$$

et

$$i(\lambda - A) = i(\lambda - A - M_0) + i\left[I + (\lambda - A - M_0)^{-1}M_0\right] = 0 + 0 = 0.$$

Ceci implique que $\lambda \in \sigma_{e5}(A)$. Ceci est une contradiction, donc

$$\sigma_{e5}(A) \subseteq \bigcap_{M\in\mathcal{M}_A(X)} \sigma(A+M).$$

Ce qui achève la preuve. ◆

Bibliographie

[**1**] *N. Angelescu, N. Marinescu and V. Protopopescu, Neutron transport with periodic boundary conditions,* Trans. Theor. Stat. Phys. **5** *(1976), 115-125.*

[**2**] *N. Angelescu, N. Marinescu and V. Protopopescu, Linear monoenergetic transport with reflecting boundary conditions,* Rev Rou. Phys., **19** *(1974), 17-26.*

[**3**] *N. Angelescu and V. Protopopescu, On a problem in linear transport theory,* Rev Rou. Phys., **22** *(1977), 1055-1061.*

[**4**] *N. Angelescu, N. Marinescu and V. Protopopescu, On the spectrum of the linear transport operator with generalized boundary conditions,* Letters in Math. Phys. **1** *(1976), 141-146.*

[**5**] *S. Albertoni and B. Montagnini, On the spectrum of neutron transport eqaution in infinite bodies, J. Math. Anal. Appl.* **13** *(1966). 19-48. .*

[**6**] *D. Aliprantis and O. Burkinshaw,* Positive Operators. *Academic Press. 1985.*

[**7**] *F. Andreu and J. M. Mazon, On the boundary spectrum of dominated C_0-semigroup Forum* **38** *(1989), 129-139.*

[**8**] *F. Andreu , J. Martinez and J. M. Mazon, A spectral mapping theorem for the perturbed strongly continuous semigroups,* Math Ann. **291** *(1991), 453-462.*

[**9**] *W. Arendt, Kato's equality and spectral decomposition for positive C_0-groups,* Manuscripta *Math.* **40** *(1982), 277-298.*

[**10**] *W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber and F. Neubrander, Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems,* Birkhauser Verlag, *2001.*

[**11**] *L. Arlotti, A perturbation theorem for positive contraction semigroups on L_1-spaces with application to transport equations and Kolmogorov's differential equations, Act. Appl. Math.* **23** *(1991), 129-144.*

[**12**] J. Banasiak, *Mathematical properties of inelastic scaterring models in kenetic theory, Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **10 (2),** *(2000), 163-186.*

[**13**] J. Banasiak, *On well-posedness of a Boltzmann-like semiconductor model, Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **13,** *(2003), 875-892.*

[**14**] J. Banasiak, G. Frosali and G. Spiga, *Interplay of elastic and inelastic scattering operators in extended kinetic models and their hydrodynamic limits-reference manual,* Transport *Theory Stat. Phys.* **10 (31),** *(2002), 187-248.*

[**15**] *C. Bardos,* Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à cœfficients réels: théorèmes d'approximation; application à l'équation de trnasport, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **3** (1970), 185-233.

[**16**] *C. Bardos and M. Cessenat, Décomposition de l'opérateur de transport dans une bande, C. R. Acad. Sci. Paris,* **289** Série A *(1979), 95-98.*

[**17**] R. Beals and V. Protopopescu, *Abstract time-dependent transport equations J. Math. Anal. Appl.* **121***(1987), 370-405.*

[**18**] *G. I. Bell and S. Glasstone,* Nuclear reactor theory. *Van Norstrandt, 1970.*

[**19**] *A. Belleni-Morante, The initial value problem for neutron transport in a slab with perfect reflexion boundary conditions, J. Math. Anal. Appl.* **30** *(1970), 353-374.*

[**20**] A. Belleni-Morante, *A Mathematical model for particle transport with mollified boundary conditions, Math. Comput. Modelling,* **16** *(1992), 131-137.*

[**21**] *A. Belleni-Morante,* Applied Semigroup Theory, *Oxford University Press, 1979.*

[**22**] N. Bellomo, Ed., *Lectures Notes on the Mathematical Theory of the Boltzmann Equation, Adv. Math. Applied Sci.,* **Vol. 33** *World Sci.,* **Vol. 33**, *World Scientific 1995.*

[**23**] *M. D. Blake, A spectral bound for asymptotically norm-continuous semi-groups, J. Operator Theory,* **45** *(2001), 111-130.*

[24] *M. D. Blake, S. Brendle and R. Nagel, On the structure of the critical spectrum of strongly continuous semigroup, J. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenally, 1998),* **55-65.** *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **215,** *Dekker, New York, 2001.*

[25] *C. Borgioli and S. Totaro On the spectrum of the transport operator with mixed type boundary conditions, Atti congruso, Aimeta.,* **1** *(1986), 393-398.*

[26] *M. Borysiewicz and J. Mika, Time behaviour of thermal neutrons in moderating media, J. Math. Anal. Appl.* **26 (1969), 461-478.**

[27] *S. Brendle, On the asymptotic behavior of perturbed strongly continuous semigroups, Math. Nachr* **226** *(2001), 35-47.*

[28] *S. Brendle, R. Nagel and J. Poland, On the spectral mapping theorem for perturbed strongly continuous semigroups, Arch. Math.* **74 (5)** *(2000), 365-378.*

[29] *H. Brezis,* Analyse fonctionnelle, théorie et applications. *Paris, Masson. 1983.*

[30] *J. W. Calkin, Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert spaces, Ann. of Math., (2)* **42** *(1941), 839-873.*

[31] *S. R. Caradus, Operators of Riesz type, Pacific J. Math.,* **18** *(1966), 61-71.*

[32] *M. Chabi and M. Mokhtar-Kharroubi, Transport neutronique sigulier dans L^1. Preprint.*

[33] *M. Chabi and M. Mokhtar-Kharroubi, On perturbations of positive C^0-semigroups on Banach lattices and applications, J. Math. Appl.,* **202** *(1996), 843-861.*

[34] *M. Cessenat, Théorème de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique, C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math.* **300(3)** *(1985), 89-92.*

[35] *Ph. Clément et al, One parameter semigroups, North-Holland, 1987.*

[36] *A. Corciovei and V. Protopopescu, On the spectrum of the linear transport operator with diffuse reflexions, Rev. Roum. Phys.,* **21** *(1996), 713-719.*

[37] *J. R. Cuthbert, On semigroups such that $U(t) - I$ is compact for some $t > 0$, Z. Whar.,* **18** (1971), 9-16.

[38] *R. Dautray and J. L. Lions, Analyse mathématiques et calcul numérique, Volume* **9** *Masson, 1988.*

[39] *E. B. Davies, One-parameter semigroups, Academic Press, London, 1980.*

[**40**] *D. Doods and J. Fremlin, Compact operators in Banach lattices, Israel J. Math,* **34** *(1979), 287-320.*

[**41**] *J. J. Duderstadt and W. R. Martin,* Transport theory, *John Wiley and Sons Inc., 1979.*

[**42**] *N. Dunford and J. T. Schwartz,* Linear Operators, part I, *Interscience, New-York, 1958.*

[**43**] *D. E. Edmunds and W. D. Evans, Spectral theory and differential operations, Oxford Mathematical Monographs, 1989.*

[**44**] *O. EL-Mennaoui and K.-J. Engel, On the characterization of eventually norm continuous semigroups in Hilbert spaces, Arch. Math.* **63,** *(1994), 437-440.*

[**45**] *K.-J. Engel and R. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer, New-York, Berlin Heidelberg, 1999.*

[**46**] *L. Gearhart, Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces. Trans. Amer. Math. Soc.* **236** *(1978), 385-394.*

[**47**] *P. Gerard, Regularization by averaging for solutions of Partial Differential equations, Recent developments in hyperbolic equations (Pisa, 1987), 59-66. Pitman Res. Notes Math. Ser., 183, Longman Sci. Tech.; Harlow, 1988.*

[**48**] *I. Gohberg and G. Krein, Fundamental theorems on deficiency numbers, root numbers and indices of linear operators, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2,* **13** *(1960), 185-264.*

[**49**] *I. Gohberg, A. Markus and A. Feldman, Normaly solvable operators and ideals associated with terme, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2,* **61** *(1967), 63-84.*

[**50**] *J. Goldstein, Semigroups of linear operators ans applications, Oxford Press, 1985.*

[**51**] *F. Golse, P-L. Lions, B. Perthame and R. Sentis, Regularity of the moments of the solution of a transport equation. J. Func. Anal,* **76** *(1988), 110-125.*

[**52**] *B. Gramsch and D. Lay, Spectral mapping theorems for essential spectra, Math. Ann.* **192** *(1971), 17-32.*

[**53**] *W. Greenberg, C. Van Der Mee and V. Propopescu, Boundary value problems in abstract kinetic Theory, Birkhauser, Basel, 1987.*

[**54**] G. Greiner, *Positivity in time dependent linear transport opertaor theory,* Semesterbericht Funktionalanalysis. *Tübingen, Sommermester, 1982.*

[**55**] G. Greiner, *Spectral properties and asymptotic behavior of the linear transport equations. Math. Z.* **85** *(1984), 167-177.*

[**56**] G. Greiner and R. Nagel, *On the stability of strongly continuous semigroups of positive operators on* $L^2(\nu)$, Ann. Sup. Pisa Cl. Sci- **X(2),** *(1983), 257-262.*

[**57**] G. Greiner, J. Voigt and M. Wolff, *On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators,* J. Operator Theory **5** *(1981), 245-256.*

[**58**] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes du type* $C(K)$, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2,Canad. J. Math. **5** *(1953), 129-173.*

[**59**] K. Gustafon, *On algebraic multiplicity,* Indiana Univ. Math. J., **25** *(1976), 769-781.*

[**60**] K. Gustafson and J. Weidman, *On the essential spectrum,* J. Math. Anal. Appl., **25** *(1969), 121-127.*

[**61**] J. Hejtmanek and H. G. Kaper, *Counterexample to the spectral mapping theorem for the exponential function,* Proc. Amer. Math. Soc. **96** *(4), (1986), 563-568.*

[**62**] R. H. Herman, *On the uniqueness of the ideals of compact and strictly singular operators,* Studia Math., **XXIX** *(1968), 161-165.*

[**63**] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and semigroups,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31** Providence R. I. *(1957).*

[**64**] P. D. Hislop and I. M. Segal, Introduction to spectral theory with application to Schrodinger operators, Springer, New-York, *1966.*

[**65**] K. Jörgens, *An asymptotic expansion in the theory of neutron transport,* Comm. Pure Appl. Math. **XI (1958), 219-242.**

[**66**] K. Jörgens, *Linear Integral Operators,* Pitman Advanced Publishing Program, *1982.*

[**67**] M. A. Kaashoek and D. C. Lay, *Ascent, descent, and commuting perturbations,* Trans. Amer. Math. Soc., **169** *(1972), 35-47.*

[**68**] H. G. Kaper , C. G. Lekkerkerker and J. Hejtmanek, *Spectral methods in linear transport theory,* Birkhauser Verlag, *1982.*

[**69**] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* Springer-Verlag, *1966.*

[**70**] *M. Krasnoselski, Integral operators in spaces of summable functions,* Nordhoff International Publishing, *(1976).*

[**71**] *I. Kuščer, A survey of neutron transport theory,* Acta Physica Austriaca supp. **X** *(1973), 491-528.*

[**72**] *J. P. Labrousse, Relation entre deux définitions possible du spectre essentiel d'un opérateur,* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **25***(8), (1980), 1391-1394.*

[**73**] *E. W.* Larsen and *P. F. Zweifel, Spectrum of the linear transport operator,* J. Math. Phys. **15(11)***(1974), 1987-1997.*

[**74**] *K. Latrach, Quelques propriétés spectrales d'opérateurs de transport avec des conditions aux limites abstraites.* C. R. Acad. Sci. Paris. Série I, **320** *(1995), 804-814.*

[**75**] *K. Latrach, On the spectrum of the transport operator with abstract boundary conditions in slab geometry,* J. Math. Anal. Appl., **252** *(2000), 1-17.*

[**76**] *K. Latrach, Essential spectra on spaces with the Dunford-Petit property,* J. Math. Anal. Appl., **233** *(1999), 607-622.*

[**77**] *K.* Latrach and *A. Dehici, Relatively strictly singular paerturbations, essential spectra and application to transport operators,* J. Math. Anal. Appl. *252* **2 (2000), 767-789.**

[**78**] *K.* Latrach and *A. Dehici, Fredholm, semi-Fredholm perturbations and essential spectra,* J. Math. Anal. Appl. *259* **1 (2001), 277-301.**

[**79**] *K.* Latrach and *A. Dehici, Spectral properties and time asymptotique behavior of linear transport equations in slab geometry,* J. Math. Meth. Appl. Sci. *259* **24 (2001), 689-711.**

[**80**] *K. Latrach, Théorie spectrale d'équation cinétiques.* Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté, *Besançon, 1992.*

[**81**] *K. Latrach, Description of the real point spectrum for a class of neutron transport operators,* Transport theory stat. Phys., **22 (1993), 595-629.** *1992.*

[**82**] *K.* Latrach and *M. Mokhtar-Kharroubi, Spectral analysis and generation results for streaming operators with multiplying boundary conditions,* Positivity, **3** *(1999), 273-296.*

[**83**] *K. Latrach, Time asymptotic behaviour for linear transport equation with abstract boundary conditions in slab geometry,* Transp. Theo. Stat. Phys., **23** *(1994), 633-670.*

[84] K. Latrach and A. Jeribi, *Some results on Fredholm operators, essential spectra and applications, J. Math. Anal. Appl.,* **225** *(1998), 461-485.*

[85] K. Latrach, *Compactness results for transport equations and applications,* Math. *Models Math. Appl. Sci.,* **11(2001), 1181-1202.**

[86] K. Latrach and B. Lods, *Regularity and time asymptotic behaviour of solutions to transport equations,* Transp. Theory Stat. Phys., **30** *(7), (2001), 617-639.*

[87] J. Lehner and G. M. Wing, *On the spectrum of unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons,* Comm. Pure Appl. Math. **8** *(1955), 217-234.*

[88] J. Lehner and G. M. Wing, *Solution of the linearized Boltzman transport equation for slab geometry,* Duke Math. J. **23** *(1956), 125-142.*

[89] M. Li, X. Gu and F. Huang, *On unbounded perturbations of semigroups compactness and norm continuity Semigroup Forum* **65***(2002), 58-70.*

[90] B. Lods, *Théorie spectrales des equations cinétiques,* Thèse de doctorat de l'université de Franche-Comté, Besançon, 2002.

[91] B. Lods, *On linear kinetic equations involving unbounded cross-sections,* Math. Methods Appl. Sci., **27***(9) (2004), 1049-1075.*

[92] B. Lods and M. Sbihi, *Stability of essential spectrum for 2D-transport models with Maxwell boundary conditions,* Math. Meth. Appl. Sci., A paraître.

[93] A. Majorana and C. Milazzo, *space homogeneous solutions of the linear semiconductor Boltzman equation,* J. Math. Anal. Appl. **259** *(2001), 609-629.*

[94] I. Marek, *Frobenius theory of positive operators,* SIAM J. Appl. Math. **19 (3)***(1970), 607-628.*

[95] J. Martinez and J. M. Mazon, C_0-semigroups norm continuous at infinity. Semigroup Forum **52** *(1996), 213-224.*

[96] J. Mika, R. Stankiewicz and T. Trombetti, *Effective solution to the initial value problem in neutron thermalization theory,* J. Math. Anal. Appl. **25** *(1969), 149-161.*

[97] V. D. Milman, *Some properties of strictly singular operators,,* Funct. Anal. Appl. **3** *(1969), 77-78.*

[**98**] *I. Miyadera, On perturbation theory for semigroups of operators,* Tohoku, Math. J., **18** *(1966), 299-310.*

[**99**] *M. Mokhtar-Kharroubi, La compacité dans la théorie du transport des neutrons, C. R. Acad. Sci. I Math.* **303***(13) (1986), 617-619.*

[**100**] M. Mokhtar-Kharroubi, *Compactnesss propreties for positive semigroups in Banach lattices and applications,* Houston J. Math. **17***(1) (1991), 25-38.*

[**101**] *M. Mokhtar-Kharroubi, Time asymptotic behavior and compactness in neutron transport theory, Europ. J. Mech. B Fluid* **11 (1992), 39-68.**

[**102**] *M. Mokhtar-Kharroubi, Mathematical topics in neutron transport theory new aspects,* World Sci. Series on advances in Mathematics for applied Sciences. Vol. **46**, *1997.*

[**103**] M. Mokhtar-Kharroubi, *On the convex compactness property for the strong operator and related topics,* Math. Meth. Appl. Sci. **27***(2004), 687-701.*

[**104**] *M. Mokhtar-Kharroubi, Optimal spectral theory of the linear Boltzman equations, J. Funct. Anal.* **226 (2005), 21-47.**

[**105**] *M. Mokhtar-Kharroubi, On L^1-spectral theory of neutron transport, J. Diff. Int. Eq.,* A paraître.

[**106**] *M. Mokhtar-Kharroubi, spectral properties of a class of positive semigroups on Banach lattices and transport absorption operators,* Positivity, A paraître.

[**107**] M. Mokhtar-Kharooubi and M. Sbihi, *spectral mapping theorems for neutron transport, L^1-theory. Semigroups Forum.,* A paraître.

[**108**] B. Montagnini, *The eigenvalue spectrum of the linear Boltzman operator in $L^1(\mathbb{R}^n)$ and $L^2(\mathbb{R}^n)$,* Mecanica **14** *(1979), 134-144.*

[**109**] B. Montagnini and M. L. Demuru, *Complete continuity of the fre gas scattering operator in neutron thermalization theory,* J. Math. Anal. Appl. **12** *(1965), 49-57.*

[**110**] *R. Nagel (ed), One-parameter semigroups of positive operators,* Lect. Notes Math. **1187,** *Springer-Verlag, 1986.*

[**111**] *R. Nagel* and J.Poland, *The critical spectrum of a strongly continuous semigroup,* Advances in Mathematics **152** *(2000), 120-133.*

[**112**] *R. D. Nussbaum, Spectral mapping theorems and perturbations theorems for Browder's essential spectrum,* Trans. Amer. Math. Soc. **150** *(1970), 445-455.*

[**113**] *A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* Springer, New-York, *1983.*

[**114**] *A. Pelczynski, Strictly singular and strictly cosingular operators I. Strictly singular and cosingular operators on $C(\omega)$-space,* Bull. Acad. Polon. Sci., **13** *(1965), 31-36.*

[**115**] *A. Pelczynski, Strictly singular and strictly cosingular operators II. Strictly singular and cosingular operators on $L(\mu)$-space,* Bull. Acad. Polon. Sci., **13** *(1965), 37-41.*

[**116**] *J. G. Peng, M. S. Wang and G. T. Zhu, The distribution of the spectra of the generators of a class of perturbed semigroups and its application,* (in Chinese) Acta Math. Appl. Sinica **20***(1)(1997), 107-113.*

[**117**] *R. S. Phillips, Perturbation theory for semigroups for linear operators,* Trans. Amer. Math. Soc., **74** *(1953), 199-221.*

[**118**] *V. Protopopescu and A. Corciovei, On the spectrum of the linear transport operator with diffuse reflexion,* Rev. Roumanie Phys. **21***(1976), 713-719.*

[**119**] *M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics IV. Analysis of operators,* Academic Press, New York, *1978.*

[**120**] *F. Riesz and B. S. Nagy, Leçon d'analyse fonctionnelle, Akad. Kiado, Budapest, 1952.*

[**121**] *M. Ribaric and I. Vidav, Analytic properties of the inverse $A(z)^{-1}$ of an analytic linear operator valued $A(z)$,* Arch. Rational Mech. Anal. **32 (1969), 298-310.**

[**122**] *M. Rotenberg, Transport theory for growing cell populations,* J. Theor. Biol. **103** *(1983), 181-199.*

[**123**] *M. Sbihi, A resolvant approach to the stability of essential and critical spectra of perturbed C_0-semigroups on Hilbert spaces with applications to transport theory,* Prépublications du Laboratoire de Mathématiques de Besançon, *No* **2005/27.**

[**124**] *M. Sbihi, Analyse spectrale de modèles neutroniques,* Thèse de Doctorat, *2005* (Université Franche-Comté).

[**125**] *H. H. Schaefer, Topological Vector Spaces,* Springer-Verlag, *3eme édition, 1971.*

[**126**] M. Schechter, *On the essential spectrum of an arbitrary operator,* J. Math. Anal. Appl., **13**, *(1968), 1139-1144.*

[**127**] M. Schechter, *Invariance of essential spectrum,* Bull. Amer. Math. Soc., New-York, **71** *(1965), 365-367.*

[**128**] M. Schechter, *Spectra of partial differential operators,* North-Holland, Amerterdam, *1971.*

[**129**] G. Schlüchtermann, *On weakly- compact operators,* Math. Ann.**292** *(1992), 263-266.*

[**130**] G. Schlüchtermann, *Perturbation of linear semigroups,* Recent progress in operator theory *(Regensburg 1995), pp 263-277,* Oper. theory Adv. Appl. **103, Birkhäuser, Basel 1998.**

[**131**] G. P. Shannon, *Strictly singular and cosingular operators on topological vector spaces,* Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A, **73** *(1973), 308-308*

[**132**] D. G. Song, *A note on the growth bound of C_0-semigroups,* Semigroup Forum **54** *(1997), 190-198.*

[**133**] D. G. Song, *Some notes on the spectral properties for C_0semigroups generated by linear transport operators,* Transp. Theory Stat. Phys. **26** *(1997), 233-242.*

[**134**] A. Suhadolc, *Linearized Boltzman equation in L^1-space,* J. Math. Anal. Appl. **35** *((1971), 1-13.*

[**135**] P. Takac, *A spectral mapping theorem for the exponential function in linear transport theory,* Transp. Theory Stat. Phys. **14** *(1985), 655-667.*

[**136**] P. Takac, *Two counterexamples to the spectral mapping theorem for semigroups of positive operators,* Integral Equations Operator Theory **9***(3) (1986), 460-467.*

[**137**] S. Ukai, *Eigenvalues of neutron transport operator for a homogeneous moderator,* J. Math. Anal. Appl. **18** *(1967), 297-314.*

[**138**] R. Van-Norton, *On the real spectrum of a monoenergetic neutron transport operator,* Comm. Pure and Appl. Math. **15** *(1962), 149-158.*

[**139**] L. Vidav, *Existence and uniqueness of nonnegative eigenfunction of the Boltzman operator,* Comm. Pure and Appl. Math. **22** *(1968), 144-155.*

[**140**] L. Vidav, *Spectrum of perturbed semigroups with applications to transport theory, J. Math. Anal. Appl.* **30** *(1970), 264-279.*

[**141**] V. S. Vladimirskii, *strictly cosingular operators,* Soviet. Math Dokl., **8** *(1967), 739-740.*

[**142**] *V. S. Vladimirov, Mathematical Problems in the one velocity theory of particle Transport,* Atomic Energy of canada Ltd Chalk River, Ont. *Report AECL-1661 (1963).*

[**143**] *J. Voigt, On the perturbation theory for strongly continuous semigroups,* Math. Ann. **229** *(1977), 163-171.*

[**144**] *J. Voigt, A perturbation theorem for the essential spectral radius of strongly continuous semigroups,* Mh. Math. **90** *(1980), 153-161.*

[**145**] *J. Voigt, Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases.* München, Habilitationsschrift Math. Ann. **229** *(1977), 163-171.*

[**146**] *J. Voigt, Positivity in time-dependent linear transport theory.* Acta. Appl. Math. **2** *(1984), 311-331.*

[**147**] *J. Voigt, Spectral properties of the neutron transport equation.* J. Math. Anal. Appl. Math. Ann. **106***(1) (1985), 140-153.*

[**148**] J. Voigt, *On the convex compactness property for the strong operator topology,* Note di. Mat. **12** *(1992), 259-269.*

[**149**] J. Voigt, *Stability of the essential type of n continuous semigroups.* Trans. Steklov. Math. Inst. **203** *(1994), 469-477.*

[**150**] J. Voigt, *On the resolvent positive operators ans positive c_0-semigroups in Al-spaces,* **38** *(1989), 263-266.*

[**151**] *J. Voigt, On substochastic C_0-semigroups and their generators,* Semesterbericht Funktionalanalysis, Tubingen, *(1984/85).*

[**152**] *L. Weis, A Genaralization of the Vidav-Jörgens perturbation theorem for semigroup and its application to transport theory.* J. Math. Anal. Appl. **129** *(1988), 6-23.*

[**153**] L. Weis, *The stability of positive semigroups on L_p-space.* Proc. Amer. Math. Soc. **123** *(1995), 3089-3094.*

[**154**] L. Weis, *On perturbations of Fredholm operators in $L_p(\nu)$-spaces,* Amer. Math. Soc., **67** *(1978), 287-292.*

[**155**] L. Weis, *Perturbations clases of Semi-Fredholm operators,* Math. Z., **178** *(1981), 429-442.*

[**156**] R. J. Whitley, *Strictly singular operators and their conjugates,* Trans. Amer. Math. Soc., **18** *(1964), 252-261.*

[**157**] M. M. R. Williams, *Mathematical methods in particle transport theory.* London Butterworths *(1971).*

[**158**] F. Wolf, *On the invariance of the essential spectrum under a change of the boundary conditions of partial differential operators,* Indag. Math., **21** *(1959), 142-147.*

[**159**] P. F. Yao, *On the inversion of the Laplace transform of C_0-semigroups and its applications,* SIAM J. Math. Anal. **26** *(1995), 1331-1341.*

[**160**] K. Yosida, *Functional Analysis,* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, *1968.*

[**161**] B. Yood, *Properties of linear transformations preserved under addition of completly continuous transformation,* Duke Math. J. **18** *(1951), 599-612.*

[**162**] P. F. You, *Characteristic conditions for C_0-semigroup with continuity in the uniform opertor topology fir $t > 0$ in Hilbert Space.* Proc. Amer. Math. Soc. **116** *(1992), 991-997.*

[**163**] J. Zabczyk, *A note on C_0-semigroups,* Bull. Acad. Polon, Sci. Sér. Sci., Math Astronom Phys. **23** *(1975), 895-898.*

[**164**] Q. C. Zhang and F. L. Huang, *Compact perturbation of C_0-operator semigroups (in Chinese) Sichuan Daxue Xuebao* **35***(6) (1998), 829-833.*