

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N°d'ordre:

N°série:.....

MEMOIRE

En vu de l'obtention du diplôme de

MAGISTERE EN MATHEMATIQUES

Option:

ANALYSE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Thème

**SUR UNE CLASSE DE PROBLEMES NON
STANDARDS DECRITS PAR DES EQUATIONS
DIFFERENTIELLES**

Présenté par:

AHMED YAHIA Rakia

Devant le jury:

M^r A. Ayadi. Prof. Univ. Oum El Bouaghi..... Président

M^r S. Djeddar. M.C. Univ. Constantine..... Rapporteur

M^r M. Denche. Prof. Univ. Constantine..... Examineur

M^r A. L. Marhoune. Prof. Univ. Constantine..... Examineur

M^r M. Bouzit. M.C. Univ. Oum El Bouaghi..... Examineur

Résumé

Ce travail, concerne l'étude d'une classe de problèmes non standards, décrits par des équations différentielles; en particulier, un problème parabolique abstrait à valeur finale, pour une équation différentielle non homogène du premier ordre et à coefficient opératoire auto-adjoint positif, non borné. Ce problème est mal posé. Par la méthode des quasi-valeurs aux limites, on perturbe la donnée finale pour former une famille de problèmes dépendant d'un petit paramètre. On montre que le problème approché est bien posé et que, sa solution converge si le problème initial admet une solution classique. On obtient aussi, une estimation de la solution du problème approché, ainsi que la convergence des solutions approchées et l'estimation de l'erreur de convergence.

Mots clés : problème mal posé, théorie des semi-groupes, opérateur auto-adjoint, méthode de quasi-réversibilité, méthode des quasi-valeurs aux limites.

Table des matières

0.1	INTRODUCTION	3
1	RAPPEL SUR LES OPÉRATEURS ET LES SEMIGROUPES	6
1.1	Les opérateurs compacts	7
1.1.1	Spectre d'un opérateur compact	8
1.1.2	Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints	9
1.1.3	Opérateurs non bornés	11
1.2	Rappel sur les semigroupes	12
1.2.1	Continuité forte des semigroupes d'opérateurs linéaires bornés	13
1.2.2	Le Théorème de Hill-Yoshida	14
2	MÉTHODES DE RÉGULARISATION DE PROBLÈMES MAL POSÉS	17
2.1	Exemples de problèmes mal posés	18
2.2	Quelques Méthodes de régularisation de problèmes mal posés	28
2.2.1	Méthode de Tikhonov	29
2.2.2	Méthode de Lavrentiev	35
2.2.3	Méthode de quasi-réversibilité	36
2.2.4	Méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method)	40
3	RÉGULARISATION D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES MAL POSÉS	
	NON HOMOGENÈNE	42
3.1	Introduction	42
3.2	Condition suffisante pour l'existence de la solution du problème mal posé non homogène	43

3.3	Le problème approché	44
3.4	Existence, unicité et stabilité de la solution du problème approché	45
3.5	Estimation de la solution approchée	47
3.6	Convergence de la solution approchée	48
3.7	Estimation de l'erreur de convergence de la solution du problème approché	53

0.1 INTRODUCTION

L'analyse des équations différentielles et aux dérivées partielles, linéaires ou non, "gouvernent" tellement de situations en physique, en mécanique, en chimie, et jusqu'en économétrie. A cet effet, l'étude systématique des classes de différents problèmes mal posés pour les équations différentielles est d'origine non récente. Il est clair, d'après les travaux de Cauchy [3], Darboux [16] et Goursat [17], que ces questions avaient déjà de la considération au milieu et vers la fin du 19^{ème} siècle. Le fait est qu'il arrive dans certains cas que, les équations (différentielles, à dérivée partielle, ou autres) se présentent de telle sorte que, l'on sait calculer la solution exacte mais, que les calculs soient trop longs et compliqués; en particulier, pour les modèles physiques, où, on fini dans beaucoup de cas, par utiliser des approximations.

Ce fut Hadamard [19], [20], qui, en vue de sauver les mathématiciens et les scientifiques des calculs importants, d'ennuis et de pertes de temps, a introduit en 1902 la notion de «problème mal posé», illustrant par des exemples et contre exemples les difficultés qui se posent. Un problème est dit bien posé, si les trois conditions ci-dessous sont satisfaites:

- La solution du problème existe pour toute donnée.
- La solution du problème est unique.
- La solution dépend continûment des données.

Si la solution au problème posé existe, il est parfaitement concevable, que des paramètres différents puissent conduire aux mêmes résultats, et si elle n'existe pas, il est inutile de perdre son temps à en construire une. De toute façon, cette dernière éventualité est soulevée par un procédé classique en mathématiques qui consiste à relaxer la notion de solution.

La non-unicité est un problème plus sérieux. S'il y a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Disposer d'une information supplémentaire (information à priori)

La question la plus difficile est, sans aucun doute, celle de la stabilité: si l'on change légèrement les données (conditions initiales, conditions aux limites, coefficients, la géométrie du domaine, et les éventuelles variations en temps de ces derniers) la solution varie-t-elle peu ou beaucoup? C'est-à-dire, varie-t-elle continûment en fonction des données? Il y a

des problèmes où, une petite différence dans les paramètres entraîne un comportement totalement différent de la solution (cas des phénomènes dits "chaotiques").

Le manque de stabilité est problématique, en effet, le fait d'entrer par exemple les données sur un ordinateur électronique, ou de remplacer le problème exact par un problème approché implique en général des perturbations sur les données. Si on n'est pas assuré que de «petites» perturbations sur les données entraînent des perturbations «pas trop grandes» sur la solution, il devient très difficile de calculer une solution approchée du problème.

Néanmoins, à l'exception de quelques importants travaux de Calerman [2] dans les années 1930, et quelques attentions des mathématiciens russes pour les classes de problèmes inverses, Novicov [37], Tikhonov [50] et autres..., peu de considération a été donnée à ce genre de problèmes jusqu'au milieu des années 1950; on pensait que seuls les problèmes bien posés méritaient des investigations (Hadamard). Nous savons aujourd'hui que ce n'est pas le cas.

Dans ses travaux, A.Tikhonov a reformulé en 1943 la définition d'un problème bien posé, élargissant ainsi la classe des problèmes bien posés. Selon Tikhonov, le problème $Ax = y$ est bien posé s'il vérifie les conditions suivantes:

- La solution du problème existe et appartient à un ensemble donné a priori M inclus dans E pour une classe de données dans F .
- Cette solution est unique dans la classe M .
- A une perturbation infiniment petite du second membre telle que la solution reste dans M , correspond une variation infiniment petite de cette solution.

Les problèmes mal posés ne sont pas toujours impossibles à traiter: lorsqu'on possède des renseignements complémentaires, comme régularité assez bonne de la solution, ou une connaissance de la nature probabiliste des perturbations et de leurs effets, des techniques de "régularisation" ou de filtrage peuvent dans certains cas donner des résultats satisfaisants.

Les problèmes mal posés sont issus de divers domaines de recherche, ils nécessitent souvent une analyse mathématique sophistiquée et des méthodes numériques de haut niveau. [1], [5], [6], [15], [20], [23], [26], [29], [30], [32], [33], [34], [35], [42], [43], [45], [46],

[47], [51]...

Le présent travail est consacré à l'étude d'une classe de problèmes non standards décrits par des équations différentielles. Il est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Le premier chapitre commence par quelques rappels sur les opérateurs et des théories, spectrale des opérateurs, ainsi que celle des semigroupes de classe C_0 pour finir avec le théorème de Hill-Yoshida.

Le deuxième chapitre est consacré à quelques exemples de problèmes mal posés et, des méthodes de régularisation des problèmes mal posés illustrées par des exemples.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'une classe de problèmes mal posés non homogènes. Plus exactement, on considère l'opérateur auto-adjoint positif A sur un espace de Hilbert H , et le problème non homogène de la valeur finale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(T) = g \end{cases} \quad (F.V.P) \quad (0.1.1)$$

avec $u \in C^1([0, T], H)$, $f \in C^1([0, T], H)$, g appartenant à un espace de Hilbert H et $-A$ le générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe $S(t)$: ($S(t) = e^{-At}$). Le problème est mal posé.

Dans ce contexte, beaucoup d'approches ont été faites pour le cas homogène [5], [7], [8], [46], [47]. Pour l'étude du cas non homogène, on note Lattés et Lions [29], qui utilisent la méthode de quasi-réversibilité, puis de Hetrick et Hughes [22], ensuite de Dang Duc Trong et Nguyen Huy Tuan [49] utilisant la quasi-réversibilité stabilisée, et S. Djezzar [9] avec la méthode des quasi-valeurs aux limites.

Dans ce travail, on utilise cette dernière méthode (quasi-boundary value method) pour le traitement de la classe de problèmes non homogènes sous considération.

On s'intéresse à l'existence de la solution du problème (F.V.P). On établie des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème approché, ainsi que la dépendance continue par rapport aux données.

Enfin nous établissons des résultats de la convergence de la solution régularisée, ainsi que l'estimation de l'erreur obtenue.

Chapitre 1

RAPPEL SUR LES OPÉRATEURS ET LES SEMIGROUPES

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, les théories des opérateurs et des semigroupes et on finira avec le théorème de Hill Yoshida.

1.1 Les opérateurs compacts

Soit $L(X, Y)$ un espace normé d'opérateurs linéaires bornés de X dans Y .

Définition 1.1.1

On dit qu'un opérateur $A \in L(X, Y)$ est compact si l'image par A de la boule unité de l'espace X , est relativement compacte dans l'espace Y .

Théorème 1.1.1

Tout opérateur compact $A \in L(X, Y)$ fait correspondre à un ensemble borné dans X un ensemble compact dans Y .

On remarque que A est compact si et seulement si l'image de toute partie bornée est relativement compacte ou, de façon équivalente si et seulement si, l'image de toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

D'après le lemme de Riesz, l'identité d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si cet espace est de dimension finie.

Dans le texte qui suit, l'ensemble de tous les opérateurs de $L(X, Y)$ qui sont compacts sera désigné par $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

Théorème 1.1.2

$\sigma(X, Y)$ est un sous-espace dans $L(X, Y)$.

Théorème 1.1.3

Si X ou Y sont de dimension finie, on a $\sigma(X, Y) = L(X, Y)$.

Proposition 1.1.1

Tout opérateur de rang fini est compact.

Corollaire 1.1.1

Si $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ (au sens de la norme de $L(X, Y)$), où les A_n sont des opérateurs compacts ou de dimension finie alors, A est un opérateur compact.

Théorème 1.1.4

Soient $A \in L(X, Y)$ et $B \in L(X, Y)$. Si l'un quelconque (au moins) de ces deux opérateurs est compact, leur produit BA est un opérateur compact.

Théorème 1.1.5 (*schauder*)

Soit $A \in L(X, Y)$, où Y est complet. L'opérateur A est compact si et seulement si son adjoint A^* est compact.

1.1.1 Spectre d'un opérateur compact

Définition 1.1.2

Soit X un espace de Banach. $A \in L(X)$

L'ensemble résolvant est :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (A - \lambda I) \text{ est bijectif de } X \text{ sur } X\}$$

Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$.

On dit que λ est valeur propre – et on note $\lambda \in VP(A)$ – si

$$N(A - \lambda I) \neq 0$$

$N(A - \lambda I)$ est l'espace propre associé à λ .

Remarque 1.1.1

Si $\lambda \in \rho(A)$ alors $(A - \lambda I)^{-1} \in L(X)$.

Remarque 1.1.2

Il est clair que $VP(A) \subset \sigma(A)$. En général, l'inclusion est stricte: Il peut exister λ tel que :

$N(A - \lambda I) = \{0\}$ et $R(A - \lambda I) \neq X$. (Un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre)

Si $\dim X < \infty$ alors, $\sigma(A) = VP(A)$.

Proposition 1.1.2

Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact et

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, +\|A\|]$$

Proposition 1.1.3

Soit X un espace de Banach et A un opérateur compact de X dans X , de spectre $\sigma(A)$

1. Si X est de dimension infinie, $0 \in \sigma(A)$.
2. $\lambda \neq 0 \in \sigma(A) \iff \lambda$ est valeur propre de A . Le sous-espace propre associé est de dimension finie.
3. $\sigma(A)$ est dénombrable et s'il est infini, on peut ranger ses éléments en une suite λ_n ,

$$|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \quad \text{avec,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

Dans l'espace de Hilbert H , considérons un opérateur linéaire A défini sur un ensemble $D(A)$ dense dans H . Soit A^* l'adjoint de A .

Définition 1.1.3

Si $D(A^*) \supset D(A)$ et si $A^*x = Ax$ sur $D(A)$, *i.e* si A^* est une extension de A , on dit que A est un opérateur symétrique.

Remarque 1.1.3

Tout opérateur auto-adjoint A est fermé, $\overline{D(A)} = H$ et, pour tout x, y de $D(A)$, on a toujours

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

1.1.2 Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints

On suppose dans la suite que $X = H$ est un espace de Hilbert et que $A \in L(H)$.

Identifiant H' et H on peut considérer que $A^* \in L(H)$.

Définition 1.1.4

On dit qu'un opérateur $A \in L(H)$ est auto-adjoint si $A^* = A$; c'est à dire:

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in H$$

Proposition 1.1.4

Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Au, u) \quad \text{et} \quad M = \sup_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Au, u)$$

Alors

$$\sigma(A) \subset [m, M], m \in \sigma(A) \quad \text{et} \quad M \in \sigma(A)$$

Corollaire 1.1.2

Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(A) = \{0\}$.

Alors $A = 0$.

Théorème 1.1.6

On suppose que H est séparable. Soit A un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de A .

Théorème 1.1.7 (Hilbert schmidt)

Si A est un opérateur auto-adjoint compact sur H alors, pour tout $x \in H$, l'élément Ax se développe en Série de Fourier convergente suivant une famille orthonormée de vecteurs propres de A .

1.1.3 Opérateurs non bornés

Soit H un espace de Hilbert. On supposera que les opérateurs considérés sont fermés. Le spectre d'un opérateur fermable est tout simplement celui de sa fermeture.

Définition 1.1.5

L'ensemble résolvant $\rho(T)$ d'un opérateur fermé T d'un espace de Hilbert H , est l'ensemble des complexes λ tels que $(\lambda - T)$ soit bijectif de $D(T)$ sur H .

Dans ce cas $R_\lambda(T) = (\lambda - T)^{-1}$ est la résolvante.

Proposition 1.1.5

Si $\lambda \in \rho(T)$, $R_\lambda(T)$ est un opérateur borné.

On définit comme le cas des opérateurs bornés, le spectre de T comme étant le complémentaire de l'ensemble résolvant. Les notions de valeurs propres, de spectre résiduel sont les mêmes que dans le cas borné.

Proposition 1.1.6

L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert de \mathbb{C} , sur lequel $\lambda \rightarrow R_\lambda(T)$ est analytique et vérifie l'équation résolvante:

$$\forall \lambda \in \rho(T), \forall \mu \in \rho(T), R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T). \quad (1.1.1)$$

Il est par contre faux que le spectre soit compact ou toujours non vide.

Proposition 1.1.7

Soit T auto-adjoint. Alors:

1- Le spectre de T est réel, et on a la majoration

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \|R_\lambda(T)\| \leq 1/|\operatorname{Im} \lambda| \quad (1.1.2)$$

2- Le spectre résiduel de T est vide.

Proposition 1.1.8

Soit un opérateur auto-adjoint. Le spectre de T est donné par:

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / \exists U_n D(T), \|U_n\| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - \lambda I)U_n\| = 0 \right\} \quad (1.1.3)$$

1.2 Rappel sur les semigroupes

Définition 1.2.1

Soit X un espace de Banach. Une famille paramètre $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés de X vers X , est un semigroupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si

- (i) $T(0) = I$ (I est l'opérateur identité sur X)
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$ (propriété des semigroupes).

Un semigroupe d'opérateurs linéaires bornés $T(t)$, est uniformément continu si:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0$$

L'opérateur linéaire A défini par:

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{dT(t)x}{dt} \right|_{t=0} \text{ pour } x \in D(A)$$

est le générateur infinitésimal du semigroupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de A .

Remarque 1.2.1

Par cette définition, il est clair que si $T(t)$ est un semigroupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus, alors:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(s) - T(t)\| = 0$$

Théorème 1.2.1

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformément continu, si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.

Théorème 1.2.2

Soient $S(t)$ et $T(t)$ deux semigroupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés.

Si:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t}$$

Alors:

$$T(t) = S(t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Corollaire 1.2.1

Soit $T(t)$ un semigroupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés. Alors:

- a) Il existe une constante $\omega \geq 0$, telle que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.
- b) Il existe un unique opérateur linéaire A tel que $\|T(t)\| = e^{tA}$.
- c) L'opérateur A de la partie b) est le générateur infinitésimal de $T(t)$.
- d) $t \rightarrow T(t)$ est différentiable en norme et,

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

1.2.1 Continuité forte des semigroupes d'opérateurs linéaires bornés

Définition 1.2.2

Un semigroupe $T(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, d'opérateurs linéaires bornés sur X est un semigroupe fortement continu, d'opérateurs linéaires bornés si:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x \quad \text{pour tout } x \text{ de } X$$

Un semigroupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X est appelé un semigroupe de classe C_0 , ou simplement un C_0 semigroupe.

Théorème 1.2.3

Soit $T(t)$ un C_0 semigroupe. Il existe une constante $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Corollaire 1.2.2

Si $T(t)$ est un C_0 semigroupe, alors pour tout $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ est une fonction continue de \mathbb{R}_0^+ (l'axe non négatif) dans X .

Théorème 1.2.4

Soit $T(t)$ un C_0 semigroupe et soit A son générateur infinitésimal; alors:

a) Pour $x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$$

b) Pour $x \in X$

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$$

et

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x \tag{1.2.4}$$

c) pour $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et,

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

d) pour $x \in D(A)$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\sigma) Ax d\sigma = \int_s^t AT(\sigma)x d\sigma$$

Corollaire 1.2.3

Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe $T(t)$, alors $D(A)$ le domaine de A , est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.

1.2.2 Le Théorème de Hill-Yoshida

Soit $T(t)$ un C_0 semigroupe. Du théorème (1.2.3), on déduit qu'il y a des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Si $\omega = 0$, $T(t)$ est dit uniformément borné, et si de plus $M = 1$, on l'appelle un C_0 semigroupe de contraction.

On rappelle que si A est un opérateur linéaire pas nécessairement borné dans X , l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquels $\lambda I - A$ est inversible, *i.e.* $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire dans X .

La famille $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ des opérateurs linéaires bornés, est appelée la résolvante de A .

Théorème 1.2.5 (*Hill-Yoshida*)

Un opérateur linéaire borné A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe de contraction $T(t)$, $t \geq 0$, si et seulement si:

- i) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
- ii) l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient \mathbb{R}^+ et pour tout $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

On défini pour tout $\lambda > 0$, l'approximation Yoshida de A par:

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$$

Corollaire 1.2.4

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe de contractions $T(t)$.

L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient le demi-plan ouvert droit, *i.e.*,

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$$

tels que:

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$$

Corollaire 1.2.5

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe satisfaisant

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t},$$

si et seulement si,

i) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$

ii) l'ensemble résolvant $\rho(A)$, de A contient l'axe $\{\lambda : \text{Im } \lambda = 0, \lambda > \omega\}$, tels que:

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$$

Chapitre 2

MÉTHODES DE RÉGULARISATION DE PROBLÈMES MAL POSÉS

Ce chapitre est composé de deux parties: d'abord, des exemples variés de problèmes mal posés, puis, de quelques méthodes de régularisation illustrées par quelques exemples.

2.1 Exemples de problèmes mal posés

Résoudre un problème numérique, c'est trouver sa solution z à partir des données ou conditions initiales u , $z = R(u)$. Nous allons les assimiler aux éléments d'espaces U et F .

Un cas simple est la détermination du nombre de racines réelles d'un polynôme.

Exemple 2.1.1

Par exemple, le nombre de racines réelles du polynôme $p(x) = -x^2 + 3x - m$ varie de façon discontinue quand m varie continûment sur la droite réelle. Il y a en effet, 2 racines réelles si $m \leq 9/4$, et il n'y en a aucune si $m > 9/4$.

Démonstration:

$$\Delta = 9 - 4m$$

Si $m > 9/4$: $\Delta < 0$, pas de racines.

Si $m \leq 9/4$: $\Delta \geq 0$, deux racines distinctes.

Si $m = 9/4$: une racine double.

Exemple 2.1.2

On souhaite résoudre le système linéaire $AX = Y$, où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Si Y est le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix},$$

alors on trouve

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mais si Y est le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} 36,1 \\ 26,9 \\ 37,1 \\ 34,9 \end{pmatrix},$$

alors,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{60}{7} \\ -\frac{79}{7} \\ \frac{32}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.57 \\ -11.28 \\ 4.57 \\ -1.14 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, de très petites variations sur Y ont conduit à de grandes variations sur X .

De façon précise, si A est une matrice, son conditionnement est $K(A)$. Dans l'exemple précédent, on trouve $K(A) = 546.06$, où la norme choisie est la norme matricielle associée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{R}^4 i.e. .

Ce phénomène de mauvais conditionnement explique pour partie la difficulté de prévoir certains phénomènes. Les appareils de mesure ne sont jamais parfaits, et il est impossible de connaître exactement Y . Cela peut entraîner une très grande imprécision sur la valeur de X .

Exemple 2.1.3

Il est à noter que la définition de problèmes mal posés ne se rapporte qu'au couple donné d'espaces métriques (F, U) car, transposé dans d'autres espaces métriques, le même problème peut s'avérer bien posé, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant:

Le calcul de la série de Fourier à Coefficients approchés dans la métrique de l_2

Considérons une série de Fourier que nous écrivons:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

et supposons que chaque coefficients a_n soit entaché d'une erreur ϵ/n (à l'exception de a_0 évidemment); nous écrivons donc :

$$c_n = a_n + \epsilon/n \quad , \quad c_0 = a_0 \quad et \quad \epsilon > 0.$$

La fonction $f(x)$ est donc remplacée par la fonction $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx)$$

En supposant que f et g sont continues et bornées pour appliquer la norme (1) dans l_2 .

Dans la métrique l_2 , les coefficients diffèrent de la quantité:

$$\epsilon_1 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{1/2} = \epsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} = \frac{\epsilon\pi}{\sqrt{6}}$$

Par conséquent, ϵ_1 est aussi petite que l'on veut par un choix approprié de la quantité ϵ .

D'autre part, si la distance entre $f(x)$ et $g(x)$ est donnée par la norme de la convergence uniforme, nous avons:

$$\sup |g(x) - f(x)| = \sup \left| \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \right| = |\epsilon| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

Cette quantité peut être aussi grande que l'on veut.

Ainsi, si l'écart de la somme de la série est pris dans la métrique de C , la sommation de la série de Fourier n'est pas stable.

Si on choisit la norme de la convergence en moyenne quadratique, le problème devient bien posé sur un tel couple d'espaces métriques (F, U) ; en effet:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx \right\}^{1/2} &= \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{1/2} = E_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \left\{ \int_0^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx \right\}^{1/2} &= \left\{ \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \frac{\cos^2(nx)}{n} \right] dx \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \frac{1 + \cos(2nx)}{2} \right] dx \right\}^{1/2} \\ &= \epsilon \left\{ \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (c_n - a_n)^2 + \frac{1}{2} \frac{\sin(2nx)}{4n} \right] dx \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{1/2} = \epsilon_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exemple 2.1.4

L'équation de Fredholm de première espèce constitue un problème mal-posé. Considérons l'équation fonctionnelle suivante:

$$\int_a^b K(x, t)z(t)dt = u(x), \text{ pour } x \in (c, d), \quad (2.1.1)$$

Expression dans laquelle $z(t)$ est une fonction inconnue de l'espace F des fonctions continues sur (a, b) et $u(x)$ est une fonction connue de l'espace U . Mentionnons au passage que l'équation de convolution est un cas particulier de cette équation fonctionnelle $K(x, t)$ devenant $K(x, -t)$.

Ajoutons une hypothèse supplémentaire sur le noyau $K(x, t)$ qui est connu: c'est une fonction continue en x qui possède une dérivée partielle $\partial K(x, t)/\partial x$ également continue.

Montrons que le problème est mal-posé. Supposons que pour un second membre $u_1(x)$, nous connaissions une solution exacte $z_1(t)$; on peut alors écrire:

$$\int_a^b K(x, t)z_1(t)dt = u_1(x).$$

Maintenant supposons que l'on connaisse un second membre approché peu différent de $u_1(x)$ dans la métrique L^2 , et on se propose de rechercher une solution voisine de $z_1(t)$.

Considérons dans L_2 , la solution

$$z_2(t) = z_1(t) + \Gamma \sin(\omega t)$$

Elle est solution de l'équation :

$$\Gamma \int_a^b K(x, t) \sin(\omega t) dt + u_1(x) = u_2(x).$$

Dans une métrique quadratique μ_u (U est l'espace des fonctions carrés sommables L^2), cette expression permet de calculer la distance de $|u_1(x) - u_2(x)|$:

$$\mu_u(u_1, u_2) = \left\{ \int_c^d |u_1(x) - u_2(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\mu_u(u_1, u_2) = |\Gamma| \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x, t) \sin(\omega t) dt \right]^2 dx \right\}^{1/2}$$

Prenant $\omega \gg |\Gamma|$, on peut trouver un $K(x, t)$ où, l'intégrale converge avec ω au dénominateur. Cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut. Calculons maintenant la distance des solutions correspondantes, dans la même métrique:

$$\mu_u(z_1, z_2) = \left\{ \left[\int_a^b |z_1(t) - z_2(t)|^2 dt \right] \right\}^{1/2} = |\Gamma| \left[\int_a^b \sin^2(\omega t) dt \right]^{1/2}$$

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[\int_a^b \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{1/2}$$

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[\int_a^b \frac{dt}{2} - \int_a^b \frac{\cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{1/2}$$

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[\frac{(b-a)}{2} + \frac{\sin(2\omega b)}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega a)}{4\omega} \right]^{1/2}$$

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin[\omega(b-a)] \cos[\omega(b+a)] \right]^{1/2} \quad (2.1.2)$$

$$(\sin a - \sin b = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \sin(\frac{a-b}{2}))$$

On voit sans peine qu'on peut choisir les nombres ω et Γ tels que pour les écarts aussi petits que l'on veut de $u_1(x)$ et $u_2(x)$, l'écart des solutions respectives calculé par la formule (2.1.2) soit arbitrairement grand.

Si l'on se propose d'évaluer l'écart des solutions dans la métrique μ_z de la convergence uniforme (F peut être pris égal à L^∞).

$$\mu_z(z_1, z_2) = \sup |z_1(t) - z_2(t)| \text{ pour } t \in (a, b).$$

On calcule alors,

$$\mu_z(z_1, z_2) = \sup |z_1(t) - z_2(t)| = \sup |\Gamma \sin(\omega t)| = |\Gamma| \text{ pour } t \in (a, b).$$

Choisissant ω et Γ tels que pour que les écarts de $u_1(x)$ et $u_2(x)$ soient aussi petits que l'on veut, l'écart des solutions peut être arbitrairement grand.

Ici le problème n'a pas été modifié par le choix de la norme.

Exemple 2.1.5

Changeons le signe dans l'équation différentielle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Delta u(x, t) &= 0 & \text{pour } x \in R^d, t \in R_+ \\ u(x, 0) &= v(x) & \text{pour } x \in R^d. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

L'équation différentielle est appelée, équation rétrograde de la chaleur.

Par exemple, si $d = 1$ et $v(x) = n^{-1} \sin(nx)$, où n est un entier naturel positif, alors la solution est:

$$u(x, t) = n^{-1} e^{n^2 t} \sin(nx),$$

Vérifiée en la substituant dans l'équation.

$$\|v\|_c = n^{-1} (\rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow \infty)$$

$$\|u(t)\|_c = n^{-1} e^{n^2 t} (\rightarrow \infty \text{ qd } n \rightarrow \infty)$$

Ce problème est mal-posé.

En d'autres termes, trouver la propagation de température ultérieure, sachant la propagation de température initiale, est un problème bien posé. Cependant, trouver la propagation de température à un temps final est un problème mal-posé.

Exemple 2.1.6

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad x \in [0, 1] \text{ , } y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\pi}{n} \sin(\pi n x) \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Les fonctions $u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(\pi nx) \operatorname{sh}(\pi ny)$ sont solutions du système précédent. Or, pour chaque valeur de n , on peut trouver un nombre $x_n \in [0, 1]$ tel que

$\sin(\pi nx_n) = 1$, vérifiant:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n(x, y)| = \infty$$

Ce qui prouve que les fonctions de ce problème ne dépendent pas continûment des données initiales.

Exemple 2.1.7

Considérons le problème de Cauchy relatif à l'équation de Laplace dans le cas bidimensionnel (l'exemple cité par Hadamard [20]: trouver la solution de l'équation

$$\Delta u(x, y) = 0$$

à partir des données initiales, c'est-à-dire la solution vérifiant les conditions

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions connues

Si l'on pose

$$f_1(x) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{a} \sin ax,$$

Le problème de Cauchy a pour solution la fonction

$$u_1(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin(ax) \operatorname{sh}(ay), \quad a > 0.$$

Si l'on prend

$$f_2(x) = \varphi_2(x) \equiv 0,$$

Le problème de Cauchy a pour solution la fonction

$$u_2(x, y) \equiv 0.$$

Evaluant les écarts des données initiales et des solutions dans la métrique de C, on a:

$$\rho_C(f_1, f_2) = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0,$$

$$\rho_C(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{a}.$$

La dernière quantité peut être rendue aussi petite que l'on peut lorsque a est assez grand.

Or, l'écart des solutions

$$\rho_C(u_1, u_2) = \sup_x |u_1(x, y) - u_2(x, y)| = \sup_x \left| \frac{1}{a^2} \sin(ax) \operatorname{sh}(ay) \right| = \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ay$$

Pour tout $y > 0$ fixé, peut être arbitrairement grand quand a prend des valeurs suffisamment élevées.

Ce problème n'est pas stable et, donc, doit être considéré comme mal posé.

Considérons le problème de Cauchy qui consiste à trouver la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

vérifiant les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{1}{n} \sin nx,$$

Où n est un entier naturel. Il est immédiat de s'assurer que la solution à ce problème est la fonction

$$u(x, t) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} nt \sin nx \tag{2.1.4}$$

Puisque,

$$\left| \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \right| = \left| \frac{1}{n} \sin nx \right| \leq \frac{1}{n}$$

La quantité $u_t(x, 0)$ sera partout aussi petite que l'on veut en module pour n suffisamment grand. Par ailleurs la formule (2.1.4) montre que la solution $u(x, t)$ prendra des valeurs aussi grandes que l'on veut pour $t > 0$ arbitrairement petit si n est assez grand. Supposons que nous ayons trouvé une solution $u_0(x, t)$ satisfaisant aux conditions initiales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \varphi_1(x). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

La solution qui vérifiera les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \varphi_1(x) + \frac{1}{n} \sin nx, \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Sera la fonction

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{n^2} \sin nx \sin nt.$$

On voit qu'une petite perturbation des conditions initiales entraîne une perturbation aussi grande que l'on veut de la solution du problème de Cauchy, et ce dans un voisinage arbitrairement petit de la ligne des données initiales.

Exemple 2.1.8

Soit le problème suivant:

$$Au = f$$

$A \in \mathcal{L}(H, F)$, H, F des espaces de Hilbert.

Si A est compact et $R(A)$ non fermé alors, le problème est mal posé.

$R(A)$ est non fermé $\Rightarrow A^{-1}$ est non borné \Rightarrow la troisième condition n'est donc pas vérifiée.

Le problème reste mal posé.

Exemple 2.1.9

Considérons l'équation différentielle:

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) - 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Cette équation admet comme solution

$$u(x) = e^x - 1$$

Si la condition initiale est donnée par $u(0) = \epsilon$, la solution est alors:

$$v(x) = (1 + \epsilon)e^x - 1.$$

De sorte que la différence s'écrit:

$$v(x) - u(x) = \epsilon e^x$$

Si x varie dans l'intervalle $[0, 30]$, on a

$$v(30) - u(30) = \epsilon e^{30} \simeq 10^{13} \epsilon.$$

Si la précision des calculs est de 10^{-10} , le problème est numériquement mal posé, bien que mathématiquement bien posé.

Exemple 2.1.10

Recherche du prolongement analytique d'une fonction, connue sur une partie d'un domaine, dans le domaine tout entier.

Soit D un domaine fini, E l'arc de courbe appartenant au domaine D . Dans ce cas, le problème du prolongement analytique d'une fonction définie sur l'arc de courbe E dans le domaine D tout entier est instable.

En effet, soit z_0 un point à la frontière du domaine D , dont la distance à E est $d > 0$, et $f_1(z)$ une fonction analytique dans D .

La fonction

$$f_2(z) = f_1(z) + \frac{\epsilon}{z - z_0},$$

Où ϵ est un nombre positif connu, est analytique dans D elle aussi.

Ces fonctions diffèrent sur l'ensemble D de la quantité $\epsilon/z - z_0$ dont le module ne dépasse pas ϵ/d ,

C'est-à-dire que,

$$|f_2(z) - f_1(z)| < \epsilon/d \quad \text{sur l'ensemble } E.$$

On peut faire ϵ/d aussi petit que l'on veut par un choix convenable de la valeur de ϵ . Or, dans le domaine D , la différence des fonctions

$$f_2(z) - f_1(z) = \epsilon/z - z_0,$$

n'est pas bornée en module (voir [4], [11], [12], [24]).

Les problèmes mal posés sont issues de divers domaines de recherche, ils nécessitent souvent une analyse mathématique sophistiquée et des méthodes numériques de haut niveau. [1], [2], [3], [4], [7], [10], [11], [12], [12], [13], [14], [16], [17], [18], [20], [24], , [25], [27], [28], [29]. [28].

2.2 Quelques Méthodes de régularisation de problèmes mal posés

Longtemps, on a pensé que l'étude des problèmes mal posés n'avait pas d'intérêt et que tout problème "intéressant", devait vérifier les trois conditions d'Hadamard. Ce point de vue est trop réducteur. Beaucoup de méthodes de régularisations ont été établies, donnant suite à des résultats satisfaisants.

Pour résoudre un problème mathématique qui présente quelque difficulté, on choisit généralement une méthode approchée; parfois on remplace le problème de départ par un problème approché.

Si un problème est bien posé, il y a de bonnes chances qu'une solution soit trouvée par un algorithme stable, sur un ordinateur. Sinon, il doit être reformulé pour traitement numérique. Typiquement, cela suppose des hypothèses supplémentaires, par exemple la régularité de la solution. Ce processus est connu sous le nom de régularisation. Parmi ces méthodes, citons quelques unes:

2.2.1 Méthode de Tikhonov

Pour présenter le principe de la régularisation on va considérer un problème inverse $Kx = y$ où $K : X \rightarrow Y$ est un opérateur compact injectif. Le fait de choisir K injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace X au complément orthogonal de $N(K)$, où N désigne le noyau. Les espaces X et Y sont des espaces de Hilbert. On supposera de plus que $y \in K(X)$, *i.e.* le problème inverse possède une solution unique. Ce qui rend le problème mal-posé est la non continuité de l'opérateur inverse. Soit $\mu > 0$.

Définition 2.2.1 Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\mu : Y \rightarrow X$ est une "stratégie de régularisation" si

$$\forall x \in X, \lim_{\mu \rightarrow 0} R_\mu Kx = x$$

i.e. l'opérateur $R_\mu K$ converge simplement vers l'identité.

Soit R_μ une stratégie de régularisation pour l'opérateur $K : X \rightarrow Y$, où X est un espace de dimension infinie. Alors:

1. Les opérateurs R_μ ne sont pas uniformément bornés: il existe une suite $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ telle que

$$\lim_j \|R_{\mu_j}\|_{L(Y,X)} = \infty.$$

2. Il n'y a pas de convergence de $R_\mu K$ vers l'identité au sens de la norme d'opérateur. Pour la démonstration de ce théorème voir [27] (pp24-25)

La donnée initiale $y \in Y$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons y^δ la donnée perturbée où le nombre $\delta > 0$ est le niveau de bruit, *i.e.*

$$\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$$

Notons $x^{\mu,\delta} := R_\mu y^\delta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kx = y$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur

$$\|x^{\mu,\delta} - x\|_X \text{ on obtient}$$

$$\|x^{\mu,\delta} - x\|_X \leq \delta \|R_\mu\|_{L(Y,X)} + \|R_\mu Kx - x\|_X \quad (2.2.7)$$

Le premier terme de droite de (2.2.7) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par le Théorème (2.2.1), nous avons vu que $\|R\mu\| \rightarrow \infty$ quand $\mu \rightarrow 0$. Il ne faut donc pas choisir μ trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de l'équation tend vers 0 quand μ tend vers 0 par définition de R_μ .

Nous allons faire tendre le niveau de bruit δ vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution x .

Une stratégie de régularisation $\delta \mapsto \mu(\delta)$ est admissible si pour tout $x \in X$ $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0$ et $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y^\delta \in Y} \{ \|R_{\mu(\delta)} y^\delta - x\|_X ; \text{tel que } \|Kx - y^\delta\|_Y \leq \delta \} = 0$

Plusieurs exemples de stratégies de régularisation admissibles se trouvent dans [27].

Nous allons présenter dans la section suivante la méthode de Tikhonov pour approcher les problèmes inverses.

Le principe de cette méthode pour résoudre le problème inverse mal posé $Kx = y$ est de choisir comme solution l'élément $x_\mu \in X$ qui minimise la quantité

$$\|Kx - y\|_Y^2 + \mu \|x\|_X^2$$

L'existence et l'unicité du minimum est immédiate par coercivité et stricte convexité de $x \mapsto \|x\|_X^2$. Le paramètre μ est appelé le paramètre de régularisation. Pour que l'élément x^μ qui réalise le minimum ait une faible erreur avec la donnée y , ce paramètre doit être choisi assez petit. Il doit également être choisi assez grand pour que la stricte convexité du terme $\|x\|_X$ corrige l'instabilité du problème posé. On appelle $x \mapsto \|x\|_X^2$ la fonctionnelle régularisante. On a le résultat suivant [27], [51], [55].

Soit $\mu > 0$ et $K : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné de l'espace de Hilbert X vers l'espace de Hilbert Y . Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un unique minimum en $x_\mu \in X$. L'élément x_μ est la solution de l'équation normale

$$\mu x^\mu + K^* K x^\mu = K^* y$$

Grâce à cette équation nous pouvons définir l'opérateur de régularisation de Tikhonov par

$$R_\mu = (\mu I + K^*K)^{-1}K^* : Y \rightarrow X \quad (2.2.8)$$

Il reste à démontrer que cet opérateur est bien un opérateur de régularisation et sous quelles conditions le choix de μ en fonction du niveau de bruit δ est admissible. C'est l'objet du théorème suivant:

Théorème 2.2.1 *Soient $K : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire compact et $\mu > 0$. L'opérateur $\mu I + K^*K$ est inversible et l'opérateur R_μ défini par (2.2.8) est une stratégie de régularisation avec*

$$\|R_\mu\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq \frac{1}{2\sqrt{\mu}}.$$

Tout choix de $\mu(\delta) \rightarrow 0$ avec $\delta^2\mu(\delta) \rightarrow 0$ est admissible, [28], [55].

La méthode de régularisation de Tikhonov, *i.e.* la minimisation globale de la fonctionnelle, est en fait équivalente à un autre problème de minimisation avec contraintes. Ce résultat important permet de comprendre la méthode sous deux angles différents.

Soit x^μ la solution du problème

$$\min_{x \in X} \|Kx - y\|_Y^2 + \mu \|x\|_X^2 \quad (2.2.9)$$

Posons $\epsilon = \|Kx^\mu - y\|_Y$ et $D_\epsilon = \{x \in X \mid \|Kx - y\|_Y \leq \epsilon\}$. Alors x^μ est aussi solution du problème

$$\min_{x \in D_\epsilon} \|x\|_X^2 \quad (2.2.10)$$

Réciproquement si x_ϵ est la solution de (2.2.10) et si $0 \notin D_\epsilon$, alors il existe $\mu_\epsilon > 0$ tel que x_ϵ , soit la solution de 2.2.9.

La méthode de régularisation de Tikhonov est une des méthodes les plus employées pour résoudre les problèmes mal posés. Par exemple elle est utilisée avec succès pour inverser les matrices mal conditionnées [44], [51]. Cependant le choix de la norme au carré comme opérateur de régularisation n'est pas toujours efficace car, il faut sélectionner l'opérateur de régularisation en fonction de ce que l'on cherche à obtenir. Dans les exemples numériques qui vont suivre on verra que le choix de l'opérateur de régularisation conduit à des solutions radicalement différentes.

Le problème du calcul numérique de la dérivée d'une fonction que l'on mesure est un problème mal posé. Pour voir cela on considère l'espace de Banach X des fonctions C^∞ définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} muni de la norme de la convergence uniforme. On définit l'opérateur linéaire $I : X \rightarrow X$ par:

$$If(t) = \int_0^t f(s)ds, \forall f \in X.$$

Le problème direct consiste donc à calculer la primitive de $f \in X$ qui vaut 0 en 0, ce problème est clairement bien posé. Pour résoudre le problème inverse il faut, connaissant $F \in X$ calculer sa dérivée $f \in X$. Le problème inverse est mal posé. En effet, nous savons qu'il existe une dérivée unique de $F \in X$ mais, l'opérateur de dérivation n'est pas continu de X dans lui même. La Figure (2.2.1) permet d'observer cette instabilité, nous avons calculé la dérivée de la fonction $t \mapsto \sin(3t) + p(t)$ où la fonction p est une petite perturbation. On observe une grande déviation entre la dérivée de la fonction F et celle de la fonction perturbée.

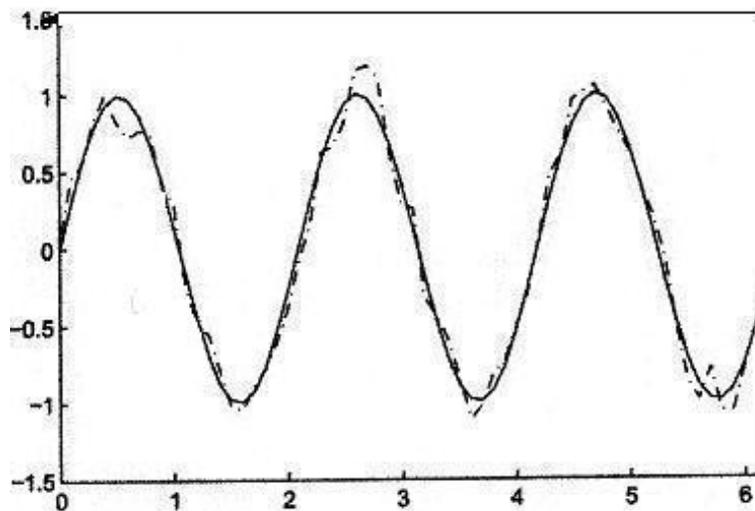


Figure 2.2.1 : $t \rightarrow F(t)$

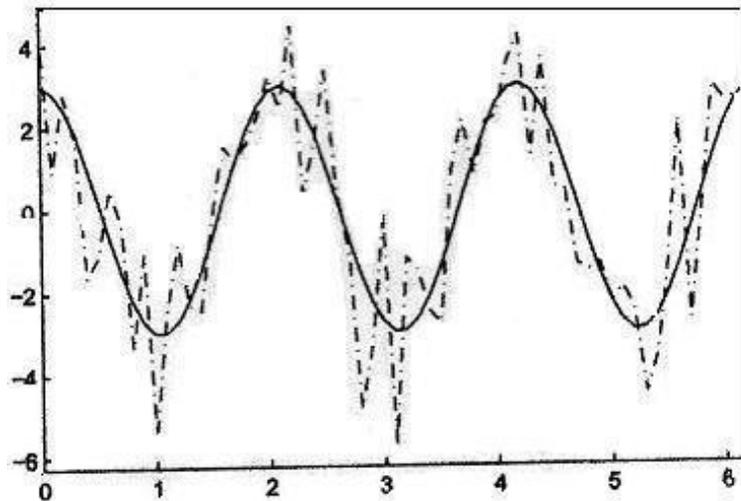


Figure 2.2.2 : $t \rightarrow F'(t)$

La Fig.1 représente la fonction $F : t \mapsto \sin(3t)$ et la même fonction perturbée par un bruit blanc. Sur la Figure (2.2.2), la dérivée de F et son évaluation numérique.

Nous allons appliquer la méthode de Tikhonov pour résoudre ce problème de la dérivation numérique. Pour cette résolution nous allons nous placer dans l'espace $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ et nous calculons la dérivée en résolvant le problème

$$\min_{f \in L^2([0, 2\pi])} \|F_b - If\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 + \mu \|f\|_{L^2([0, 2\pi])}^2$$

où $F_b : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction dont nous voulons calculer la dérivée. On suppose que cette fonction est une version perturbée de la fonction F et que l'erreur (le niveau de bruit) est $\|F - F_b\| = \delta$. On distingue sur la figure (2.2.1), la fonction F et sa version perturbée F_b , qui nous ont servi pour l'exemple. On utilisant la méthode ci-dessus pour calculer f , nous obtenons la fonction tracée sur la figure (2.2.3). Le paramètre de

régularisation ayant été choisi convenablement par rapport au niveau de bruit.

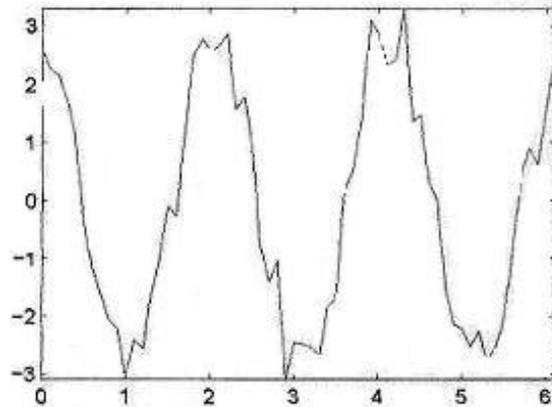


Figure 2.2.3 : Dérivée régularisée dans $L^2([0, 2\pi])$

On remarque que cette solution n'est pas satisfaisante car la fonction obtenue ne ressemble pas beaucoup à un *cosinus* comme elle le devrait; cela s'explique par le fait que la minimisation de la norme de f dans $L^2([0, 2\pi])$, n'oblige pas la fonction obtenue à être régulière. Une alternative pour apporter plus de régularité est d'utiliser la méthode de Tikhonov dans un espace de Sobolev, plutôt que dans $L^2([0, 2\pi])$.

Calculons donc la solution du problème

$$\min_{f \in H^1([0, 2\pi])} \|F_b - If\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 + \mu \|f\|_{H^1([0, 2\pi])}^2 \quad (2.2.11)$$

La figure (2.2.4) montre la dérivée calculée de cette manière.

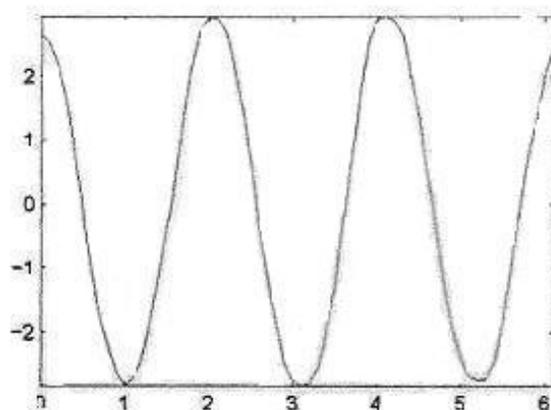


Figure 2.2.4 : Dérivée régularisée dans $H^1([0, 2\pi])$

La fonction f est ici bien plus régulière que celle trouvée précédemment, de plus, elle ressemble beaucoup à une fonction cosinus ce qui été le résultat souhaité. Cet exemple montre clairement que pour résoudre un problème inverse, il faut rajouter des hypothèses de manière à obtenir un résultat conforme à nos attentes.

2.2.2 Méthode de Lavrentiev

Soit A un opérateur linéaire compact sur un espace de Banach X . Une équation linéaire de la forme

$$Ax = y \tag{2.2.12}$$

sera appelée équation de première espèce. L'inconnue x est recherchée dans un espace de Banach X . y est un élément connu d'un espace de Banach Y . Les espaces X et Y sont tous deux réels ou tous deux complexes. L'ensemble de définition $D(A)$ de A se confond avec X tout entier. L'ensemble des valeurs $R(A)$ de l'opérateur A est en général non fermé.

Supposons que $N(A) = \{0\}$, si X est de dimension infinie, l'opérateur A admet un inverse A^{-1} sur $R(A)$ qui n'est pas borné. Cette circonstance, fait que le problème défini par $Ax = y$ devienne instable.

Cette méthode consiste à réduire l'équation $Ax = y$ à une équation de deuxième espèce ($x - Ax = y$). Voici un problème qui illustre clairement, l'idée de la régularisation.

Soient \tilde{A} et \tilde{y} des ε approximation de A et de y respectivement. Considérons l'équation approchée

$$\tilde{A}x = \tilde{y} \tag{2.2.13}$$

Si par exemple, $\tilde{A} = A$ et $\tilde{y} \notin R(A)$, l'équation $\tilde{A}x = \tilde{y}$ n'a pas de solution. Même si elle a une solution \tilde{x} , nous n'avons aucune raison de croire que $\tilde{x} \rightarrow x$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$, où, x est solution de $Ax = y$. Proposons-nous de "régulariser" cette équation. A cet effet, introduisons une équation auxiliaire de deuxième espèce

$$(\tilde{A} + \alpha I)x_\alpha = \tilde{y}, \tag{2.2.14}$$

en choisissant le paramètre de régularisation α en fonction de ε , de telle sorte que x_α tende vers x pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Cela est possible, en se donnant quelques restrictions supplémentaires.

Théorème 2.2.2

Supposons que l'opérateur A vérifie pour tout $\alpha > 0$, la condition

$$\|A + \alpha I\|^{-1} \leq \frac{c}{\alpha}.$$

Supposons aussi que $y \in D(A^{-2})$. Si le paramètre de régularisation $\alpha > 0$, est choisi en fonction de ε de telle sorte que, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on a aussi $\alpha \rightarrow 0$ et $\varepsilon\alpha^{-2} \rightarrow 0$, alors

$$x_\alpha \rightarrow x \quad \text{pour} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Si

$$\alpha = 0(\varepsilon^{1/3}) \text{ pour } \varepsilon \rightarrow 0,$$

Alors

$$\|x_\alpha - x\| = 0(\varepsilon^{1/3})$$

2.2.3 Méthode de quasi-réversibilité

Il est important de noter qu'il n'y a nullement unicité de la méthode quasi-réversibilité, dans tous les exemples que nous avons rencontré, il y a toujours une infinité de méthodes de quasi-réversibilité possibles (toutes relevant de la même idée: on change le "système " de façon que le problème qui était mal posé devienne bien posé).

L'idée générale de la méthode est de modifier convenablement les opérateurs aux dérivées partielles intervenant dans le problème. Cette modification se fait par l'introduction de termes différentiels, qui sont:

-soit "petits"(pouvant fortement tendre vers zéro);

-soit "dégénérant aux bords" (par exemple pour "éliminer " des conditions aux limites mathématiques gênantes, ou constituant précisément les inconnus à déterminer).

Ces opérateurs ainsi modifiés, sont généralement d'ordre différent de l'opérateur initial et de même nature (elliptique, etc.) ou non.

Exemple 2.2.1

Il est connu que le problème de Cauchy pour l'équation rétrograde de la chaleur est instable vis-à-vis des faibles variations des valeurs initiales. L'instabilité persiste également lorsque la solution est assujettie à certaines conditions accessoires aux limites. La méthode de quasi-réversibilité [29] vise à obtenir une solution stable à de pareils problèmes. Se plaçant dans le cas du problème directe, soit D un domaine fini de l'espace euclidien R^n à n dimensions, des points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ limité par une surface lisse par morceaux S et t le temps. Soit ensuite $\varphi(x)$ une fonction continue définie sur D . Le problème directe consiste à trouver la solution $u = u(x, t)$ de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (2.2.15)$$

dans le domaine $G \equiv \{x \in D, t > 0\}$ vérifiant les conditions aux limites

$$u(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in S$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (2.2.16)$$

Ici

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_k}.$$

On sait que ce problème a bien une solution. A chaque fonction $\varphi(x) \in C$ (C classe des solutions) répond une solution du problème (2.2.15) à (2.2.16), qui sera désignée par $u(x, t; \varphi)$.

Le problème inverse consiste à trouver $\varphi(x)$ à partir de $u(x, t; \varphi)$. Dans les problèmes pratiques, la fonction $u(x, t; \varphi)$ s'obtient en général à la suite d'une série de mesures: on ne la connaît donc, qu'approximativement. On admet que $u \in L_2$. Il se peut que cette fonction ne corresponde à aucune fonction <<initiale>> $\varphi(x)$ et, par conséquent, il est fort possible de ne pas trouver dans la classe C des fonctions la solution du problème inverse. Pour cette raison, on va s'occuper du problème de recherche d'une certaine la solution généralisée du problème inverse.

Soient connues, une quantité $T > 0$ et une fonction $\psi(x)$ définie dans le domaine D , $\psi(x) \in L_2$. On définit sur les fonctions $\varphi(x)$ de la classe C la fonctionnelle

$$f(\varphi) = \int_D |u(x, T; \varphi) - \psi(x)|^2 dx.$$

Par solution généralisée du problème inverse, nous entendrons la fonction $\varphi(x)$ sur laquelle on a:

$$f_0 = \inf_{\varphi \in C} f(\varphi).$$

Remarque 2.2.1

L'intuition suggère de choisir la fonction $\varphi(x)$ de telle façon que $f(\varphi) = 0$. Il suffirait pour cela de trouver la solution du problème direct

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0; \\ u(x, t) &= 0 \quad \text{pour } x \in S, \quad 0 < t < T; \\ u(x, T) &= \psi(x) \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

et de poser $\varphi(x) = u(x, 0)$. Or un tel problème, pour une fonction donnée $\psi(x)$ de L_2 , serait en général non résoluble et, en outre, instable vis-à-vis de faibles variations de la fonction $\psi(x)$.

Sur une certaine classe de fonctions généralisées $\varphi(x)$ on a $f_0 = 0$. Il s'agit donc de chercher une valeur approchée de f_0 à une erreur donnée près.

Etant donnée une quantité $\epsilon > 0$, trouver une fonction $\varphi_\epsilon(x)$ telle que $f(\varphi_\epsilon) \leq \epsilon$.

Ce problème se résout justement par la méthode de quasi-réversibilité.

L'idée de la méthode de quasi-réversibilité est de chercher au lieu de l'opérateur de la chaleur $\partial/\partial t - \Delta$ un opérateur B_α «voisin» pour lequel le problème rétrograde

$$\begin{aligned} B_\alpha u_\alpha &= 0, \quad x \in D, \quad 0 < t < T, \quad \alpha > 0; \\ u_\alpha(x, T) &= \psi(x); \\ u_\alpha(x, t) &= 0 \quad \text{pour } x \in S, \quad t < T \end{aligned}$$

soit stable. Une fois le problème résolu, on pose

$$\varphi(x) = u_\alpha(x, 0).$$

Généralement, on prend en quantité d'opérateur B_α l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta - \alpha\Delta^2$$

et l'on cherche la solution du problème direct

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \Delta u_\alpha - \alpha\Delta^2 u_\alpha = 0, \quad x \in D, \quad t < T, \quad \alpha > 0;$$

$$u_\alpha(x, T) = \psi(x);$$

$$u_\alpha(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \in S, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\Delta u_\alpha = 0 \quad \text{pour } x \in S, \quad 0 < t \leq T.$$

En suite on pose

$$\varphi(x) = u_\alpha(x, 0).$$

Notons que, pas plus que l'opérateur de la chaleur, l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta - \varepsilon\Delta^2)$ n'est pas réversible. Mais, l'un est "bien posé" dans le sens des *t croissants*, l'autre dans le sens des *t décroissants*, d'où la terminologie adoptée "quasi-réversibilité".

La méthode de quasi-réversibilité est applicable à une classe plus étendue de problèmes se rapportant aux équations d'évolution.

Remarque 2.2.2

De façon générale, pour un problème donné relevant de la méthode de quasi-réversibilité, il n'y a pas *une* méthode Q.R, mais une *infinité*. Pour le choix de la méthode, on peut se borner le plus souvent à celle qui paraît «la plus simple»—ou bien à celle qui est susceptible d'interprétation physique, pouvant aider par exemple, au choix numérique de certains paramètres—Bien entendu, en première analyse, on doit déterminer la nature et les propriétés des termes indispensables pour transformer le problème en un problème bien posé — [6], [15], [23], [26], [36], [33], [34], [35], [38], [39], [31].

2.2.4 Méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method)

Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H où $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact de contraction dans H . On considère le problème de trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ tel que:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(T) = f \end{cases} \quad (F.V.P) \quad (2.2.18)$$

pour une certaine valeur finale f dans H . De tels problèmes sont mal posés, du fait que même si la solution unique existe sur $[0, T]$, elle ne dépendra pas continûment de la valeur finale f .

L'idée était de remplacer $(F.V.P)$ par un problème approché qui soit bien posé et d'utiliser ensuite, les solutions de ce nouveau problème pour, construire des solutions approchées du $(F.V.P)$. Dans [29] on remplace A par une perturbation $(A - \alpha A^2)$ et on utilise la valeur initiale; seulement la méthode n'a pas considéré $u(t)$ pour $t < T$ et, l'opérateur contenant f dans $u_\alpha(0)$ avait une large norme, pour un petit paramètre α , [35].

Showalter [46] a approché le $(F.V.P)$ par:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0 \\ u_\alpha(0) = v_\alpha(0) \end{cases} \quad (2.2.19)$$

Où il montre que, les u_α sont des solutions approchées pour $(F.V.P)$; dans le sens où $u_\alpha(T)$ converge vers f quand α tend vers zéro. De même il montre que $u_\alpha(t)$ converge vers la solution du $(F.V.P)$, si et seulement si une telle solution existe. Mais la norme de la fonction f dans $v_\alpha(0)$ reste assez large pour un petit paramètre α .

Par la suite Miller [35] considéra ce problème en trouvant des perturbations optimales de l'opérateur A . Il affirma qu'il était possible de mettre la norme dans l'ordre de $(\frac{c}{\alpha})$ plutôt que, $exp(\frac{c}{\alpha})$ avec des conditions sur la perturbation de $f(A)$; et de nouveau, il utilisa la valeur initiale du problème approché; il l'appela "quasi-réversibilité stabilisée".

Finalement, showalter [47] considéra un problème plus général dans un sens différent,

il approcha le problème:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0 & 0 < t < T \\ u(0) = f \end{cases} \quad (2.2.20)$$

Par:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0 & 0 < t < T \\ u(0) + \alpha u(T) = f \end{cases} \quad (2.2.21)$$

Il appela cette méthode: "quasi-boundary value method" (méthode aux valeurs limites).

Il conclut que, cette méthode donne une meilleure approche.

Selon cette méthode, G.Clark et S.Oppenheimer [5], ont approché le problème (*F.V.P*) par:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & 0 < t < T \\ \alpha u(0) + u(T) = f, \end{cases} \quad (2.2.22)$$

Ce qui a permis d'obtenir des estimations explicites, concernant l'ordre de convergence des approximations. L'erreur introduite par de petits changements dans la valeur finale f n'est pas exponentielle mais, de l'ordre de $\frac{1}{\alpha}$ sur $[0, T]$. Il montra que ce problème est bien posé pour tout $\alpha > 0$ et que, les approximations u_α sont stables. Il montra aussi, que $u_\alpha(T)$ converge vers f quand α tend vers zéro et, que les valeurs $u_\alpha(t)$ convergent sur $[0, T]$ si et seulement si (*F.V.P*) admet une solution.

Cette méthode est celle qui a été appliquée, au chapitre III, pour régulariser un problème mal posé.

Chapitre 3

RÉGULARISATION D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES MAL POSÉS NON HOMOGENÈNE

3.1 Introduction

Soit A un opérateur auto-adjoint positif dans un espace de Hilbert séparable H . $-A$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe de contraction compact. On considère le problème à valeur finale (F.V.P) suivant, qui consiste à trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ tel que:

$$\begin{cases} u' + Au = f & 0 \leq t \leq T \\ u(T) = g \end{cases} \quad (F.V.P) \quad (3.1.1)$$

Où $f \in C^1([0, T], H)$ et $g \in H$ sont deux fonctions données. On suppose que $0 \in \rho(A)$ et que A^{-1} est compact. Soit $\{\varphi_n\}$ une base orthonormée des vecteurs associée aux valeurs propres $\{\lambda_n\}$ de A . i.e., $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$. On suppose que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

Formellement la solution du (F.V.P) si elle existe, elle s'écrit sous la forme:

$$u(t) = S(t - T)(g - \int_0^T S(T - s)f(s)ds) + \int_0^t S(t - s)f(s)ds \quad (3.1.2)$$

C'est un problème mal posé du fait que même si la solution unique existe sur $[0, T]$, elle ne dépendra pas nécessairement, continûment de la donnée finale g .

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u' + Au = f & 0 \leq t \leq T \\ \alpha u(0) + u(T) = g \end{cases} \quad (Q.B.V.P) \quad (3.1.3)$$

Où, la donnée finale $u(T) = g$, du (F.V.P) est perturbée pour former une famille de problèmes dépendant d'un petit paramètre. Cette méthode est appelée selon [5], méthode des quasi-valeurs aux limites, et son problème associé s'appelle "quasi - boundary value problem"(Q.B.V.P).

On note pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $f(t) \in H$ et pour $g \in H$:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n \quad \text{et} \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\varphi_n$$

3.2 Condition suffisante pour l'existence de la solution du problème mal posé non homogène

Lemme 3.2.1

Si $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\varphi_n$ est dans H , $f \in C^1([0, T] : H)$, tel que $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n$, alors, (F.V.P) admet une solution classique si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t) \quad \text{convergent.} \quad (3.2.4)$$

Preuve. si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ convergent, on pose:

$$u(t) = S(t - T) \left[g - \int_0^T S(T - s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t - s)f(s)ds \quad (3.2.5)$$

On a donc,

$$\begin{aligned} u(t) + Au(t) &= -AS(t - T) \left[g - \int_0^T S(T - s)f(s)ds \right] + f(t) - A \int_0^t S(t - s)f(s)ds \\ &\quad + AS(t - T) \left[g - \int_0^T S(T - s)f(s)ds \right] + A \int_0^t S(t - s)f(s)ds = f(t). \end{aligned}$$

D'où $u(t)$ est une solution de (F.V.P) et $u(t) \in C^1(]0, T[, H)$.

Vérifions que $u(t) \in H$:

$$\|u(t)\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{\lambda_n(T-t)} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right] \varphi_n \right\|^2$$

$$\|u(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n(T-t)} \left[g_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T e^{\lambda_n T} (f_n(t)) ds \right)^2$$

et donc,

$$\|u(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} T \int_0^T e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) ds + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T \int_0^T e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) ds$$

$$\|u(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2 + 6T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) \right) ds$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ convergent donc, $u(t)$ est dans H , donc $u(t)$ existe.

Vérifions que $u(t) \in D(A)$:

$$\|Au(t)\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[e^{\lambda_n(T-t)} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right] \varphi_n \right\|^2$$

$$\|Au(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n(T-t)} \left[g_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|Au(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2 + 6T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) \right) ds$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ convergent donc, $u(t) \in D(A)$, donc $u(t)$ est solution classique du (F.V.P). ■

3.3 Le problème approché

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u' + Au = f & 0 \leq t \leq T \\ \alpha u(0) + u(T) = g \end{cases} \quad (Q.B.V.P) \quad (3.3.6)$$

Où, la donnée finale $u(T) = g$, du (F.V.P) est perturbée pour former un problème non local approximatif qui, dépend d'un petit paramètre. Cette méthode est appelée selon [5], méthode des quasi-valeurs aux limites, et son problème associé s'appelle "quasi-boundary value problem"(Q.B.V.P).

Définition 3.3.1

pour tout g de H , $\alpha > 0$, $f \in C^1([0, T], H)$, on définit $u_\alpha : [0, T] \rightarrow H$, tel que :

$$u_\alpha(t) = S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \quad (3.3.7)$$

3.4 Existence, unicité et stabilité de la solution du problème approché

Théorème 3.4.1 Si $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$ est dans H , et $f \in C^1([0, T], H)$ fixé tels que

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |||f_n|||^2$ soient convergentes alors, la fonction $u_\alpha(t)$ est la solution classique du (Q.B.V.P) et elle dépend continûment de g .

$|||f_n|||$ étant la norme sup sur $([0, T], H)$.

Preuve. Commençons par prouver que $u_\alpha(t)$ est solution du (Q.B.V.P):

$$u_\alpha(t) = S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

Donc,

$$\begin{aligned} u_\alpha'(t) + Au_\alpha(t) &= -AS(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \\ &\quad - A \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)ds + f(t) \\ &\quad + AS(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \\ &\quad + A \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Il est clair que $u_\alpha(t)$ vérifie l'équation

$$\alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) = g$$

L'unicité :

On a:

$$u(T) = S(T)u(0) + \int_0^T S(T-s)f(s)ds$$

Donc,

$$\alpha u(0) + u(T) = \alpha u(0) + S(T)u(0) + \int_0^T S(T-s)f(s)ds = g$$

D'où:

$$u(0) = S(0) (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right)$$

Le (Q.B.V.P) devient:

$$\begin{cases} u' + Au = f \\ u(0) = S(0) (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \end{cases}$$

C'est le problème de Cauchy, il admet la solution unique.

Stabilité :

Pour tout g_1, g_2 de H on a:

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha g_1}(t) - u_{\alpha g_2}(t)\| &= \left\| S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g_1 - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right. \\ &\quad \left. - S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g_2 - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right\| \\ \|u_{\alpha g_1}(t) - u_{\alpha g_2}(t)\| &= \|S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} (g_1 - g_2)\| \\ \|u_{\alpha g_1}(t) - u_{\alpha g_2}(t)\| &= \|S(t) (\alpha I + S(T))^{-1}\| \|g_1 - g_2\| \\ \|u_{\alpha g_1}(t) - u_{\alpha g_2}(t)\| &\leq \frac{1}{\alpha} \|g_1 - g_2\| \end{aligned}$$

Vérifions que $u_\alpha(t) \in D(A)$:

$$\begin{aligned} \|Au_\alpha(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 + \lambda_n^2 \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s)ds \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\lambda_n e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right) \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s)ds \right) \right] \end{aligned}$$

$$\|Au_\alpha(t)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left[\lambda_n^2 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \left(2g_n^2 + \left(2 \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2\lambda_n^2 \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right]$$

$$\|Au_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(g_n^2 + \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|Au_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + 4T \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^T f_n^2(s) ds \right) + 2T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^T f_n^2(s) ds \right)$$

$$\|Au_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + 4T \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2(s) \right) ds + 2T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2(s) \right) ds$$

$$\|Au_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + 4T \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \| \|f_n\| \|^2 \right) ds + 2T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \| \|f_n\| \|^2 \right) ds$$

$$\|Au_\alpha(t)\| \leq \left[4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + \left(4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 + 2 \right) T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \| \|f_n\| \|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|Au_\alpha(t)\| \leq 2 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(2\alpha^{\frac{t-T}{T}} + \sqrt{2} \right) T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \| \|f_n\| \|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où $u_\alpha(t) \in D(A)$, $t \in [0, T]$. ■

3.5 Estimation de la solution approchée

Théorème 3.5.1 *Pour tout $g \in H$, $f \in C^1([0, T]; H)$, $t \in [0, T]$ et $\alpha > 0$, on a :*

$$\|u_\alpha(t)\| \leq 2\alpha^{\frac{t-T}{T}} \|g\| + T \left(2\alpha^{\frac{t-T}{T}} + \sqrt{2} \right) \|f\|$$

Preuve. On note $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ et $\|g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2$

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 + \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{e^{-\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right) \right] \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n^2 + \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|g\|^2 + 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(T \int_0^T (f_n(s))^2 ds \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(T \int_0^T (f_n(s))^2 ds \right)$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|g\|^2 + 4T^2 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|f\|^2 + 2T^2 \|f\|^2$$

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \left[4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|g\|^2 + \left(4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 + 2 \right) T^2 \|f\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u_\alpha(t)\| \leq 2\alpha^{\frac{t-T}{T}} \|g\| + T \left(2\alpha^{\frac{t-T}{T}} + \sqrt{2} \right) \|f\|$$

■

3.6 Convergence de la solution approchée

Théorème 3.6.1 Pour tout $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$ de H , $f \in C^1([0, T], H)$, tel que

$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n$, On a $\|u_\alpha(T) - g\|$ tend vers zéro quand α tend vers zero, ce qui signifie que, $u_\alpha(T)$ converge vers g dans H .

Preuve.

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \left\| S(T) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds - g \right\|^2$$

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - g\|^2 &= \left\| S(T) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \right. \\ &\quad \left. - (\alpha I + S(T))^{-1} (\alpha I + S(T)) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \left\| (\alpha I + S(T))^{-1} (S(T) - (\alpha I + S(T))) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \alpha^2 \left\| (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \left[(\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 \right]$$

Pour un ε fixé, on choisi N_1 et N_2 tels que :

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} g_n^2 < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=N_2}^{\infty} f_n^2 < \frac{\varepsilon}{8T^2}$$

Prenant $N = \max(N_1, N_2)$, on a:

$$\sum_{n=N}^{\infty} g_n^2 < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2 < \frac{\varepsilon}{8T^2}$$

On a alors,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 < 2 \sum_{n=N}^{\infty} g_n^2 + 2 \sum_{n=N}^{\infty} \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 \quad (3.6.8)$$

Donc,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 < 2 \sum_{n=N}^{\infty} g_n^2 + 2T \int_0^T \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2(s)ds$$

D'où:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 < \frac{\epsilon}{2}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - g\|^2 &= \sum_{n=1}^N \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < \sum_{n=1}^N \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(2g_n^2 + 2 \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2 \right) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < 2\alpha^2 \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T e^{2\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < 2\alpha^2 \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds + \frac{\epsilon}{2}$$

On note par: $I_N = \int_0^T \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds$

Soit α tel que :

$$\alpha^2 < \frac{\epsilon}{4} \left[\sum_{n=1}^N (e^{2\lambda_n T} g_n^2) + T I_N \right]^{-1}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - g\|^2 &< \\ \frac{\epsilon}{2} \left[\sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T I_N \right]^{-1} &\left[\sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T I_N \right] \\ &+ \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < \epsilon$$

Le théorème est ainsi démontré. ■

Théorème 3.6.2 Pour tout $g \in H$, $f \in C^1([0, T], H)$, tels que:

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ soient convergentes, si le (F.V.P) admet une solution classique alors, la suite $u_\alpha(0)$ converge dans H ; de plus, on aura $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$, quand α tend vers zéro uniformément en t .

Preuve. Supposons que, $u(t)$ soit la solution du (F.V.P)

$$u(t) = S(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] + \int_0^t S(t-s) f(s) ds$$

$$u(0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)$$

Comme $u(0)$ est dans H , On choisit pour $\varepsilon > 0$, N , tel que:

$$\sum_{n=N}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2 < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=N}^{\infty} e^{2\lambda_n T} f_n^2 < \frac{\varepsilon}{8T^2}$$

On aura:

$$\sum_{n=N}^{\infty} e^{2\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

et soient α et γ deux réels strictement positifs, alors:

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 = \left\| (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right) - (\gamma I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right) \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} - \frac{1}{\gamma + e^{-\lambda_n T}} \right) \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) \right] \varphi_n \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 =$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\gamma - \alpha) (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma) e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T})^{-1} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) \right] \varphi_n \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 =$$

$$\sum_{n=1}^N \left[(\gamma - \alpha)^2 (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma) e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right]$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[(\gamma - \alpha)^2 (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma) e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 &\leq \\ &\sum_{n=1}^N \left[(\gamma - \alpha)^2 e^{4\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \\ &+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{(\gamma - \alpha)^2}{(\alpha + \gamma)^2} e^{2\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq (\gamma - \alpha)^2 \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} \left(g_n^2 + T \int_0^T (f_n(s))^2 ds \right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq (\gamma - \alpha)^2 \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds + \frac{\varepsilon}{2}$$

On note $I'_N = \int_0^T \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds$.

Soit σ tel que:

$$\sigma^2 < \frac{\varepsilon}{4} \left[\sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} g_n^2 + T I'_N \right]^{-1}$$

et $\alpha < \sigma$, $\gamma < \sigma$, d'où $\gamma - \alpha < \sigma$, et donc:

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq 2\sigma^2 \sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} (g_n^2 + T I'_N) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \left[\sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} (g_n^2 + T I'_N) \right]^{-1} \left[\sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} (g_n^2 + T I'_N) \right] + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq \varepsilon.$$

$\{u_\alpha(0)\}$ est donc une suite de Cauchy, donc elle est convergente.

Par conséquent:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right\|$$

$$-S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \Big\|$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| S(t)u_0 - S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \right\|$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| S(t) \left[u_0 - (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \right] \right\|$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| u_0 - (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \right\|$$

D'où

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_0 - u_\alpha(0)\|$$

qui converge uniformément.

Donc,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(t) = u(t)$$

■

3.7 Estimation de l'erreur de convergence de la solution du problème approché

Théorème 3.7.1 *Si g est dans H , $f \in C^1([0, T], H)$ et s'il existe $\epsilon > 0$ tel que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\epsilon \lambda_n T} g_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\epsilon \lambda_n T} (f_n(t))^2$$

convergent dans H , alors, $\|u_\alpha(T) - g\|$ converge vers zéro avec l'ordre de $\alpha^\epsilon \epsilon^{-2}$.

Preuve. Soit ϵ dans $]0, 2]$, tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{\epsilon T \lambda_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\epsilon \lambda_n T} (f_n(t))^2 \quad \text{soient finies, et soit } k \text{ dans }]0, 2].$$

Pour un nombre naturel fixé n , on définit:

$$h_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \tag{3.7.9}$$

$$h_n(\alpha) \leq h_n(\alpha_0); \quad \alpha_0 = \frac{ke^{-\lambda_n T}}{2-k}.$$

$$h_n(\alpha) \leq \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \frac{e^{-k\lambda_n T}}{(\alpha_0 + e^{-\lambda_n T})^2} \quad (3.7.10)$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq$$

$$\alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-k\lambda_n T} (\alpha_0^2 + e^{-2\lambda_n T} + 2\alpha_0 e^{-\lambda_n T})^{-1} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{(2-k)\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \quad (3.7.11)$$

Si on choisit $k = 2 - \varepsilon$, on aura:

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \alpha^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} \left(2g_n^2 + 2 \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right)$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq 4\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} \left(2g_n^2 + 2 \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2 \right)$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq 4\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} g_n^2 + 2T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} (f_n(s))^2 \right) ds \right]$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq 8\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} (f_n(s))^2 \right) ds \right]$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq C\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}.$$

■

Corollaire 3.7.1 Si g est dans H , $f \in C^1([0, T], H)$ et s'il existe $\epsilon > 0$ tel que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{(2+\epsilon)T\lambda_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(t))^2 e^{(2+\epsilon)T\lambda_n},$$

convergent dans H , alors, $\|u_\alpha(t) - u(t)\|$ converge vers zéro avec l'ordre de $\alpha^\epsilon \epsilon^{-2}$ uniformément en t .

Preuve.

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u(0)\| &= (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \\ &\quad - S(-T) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u(0)\| &= (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \\ &\quad - S(-T) (\alpha I + S(T)) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\| = (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) (I - S(-T) (\alpha I + S(T)))$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\| = (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) (I - \alpha S(-T) - I)$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\| = -\alpha S(-T) (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right)$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_n T}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 = \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 e^{2\lambda_n T}$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k} \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{(2-k)\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 e^{2\lambda_n T} \quad (3.7.12)$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds\right)^2 e^{(4-k)\lambda_n T}$$

Si on choisit $k = 2 - \epsilon$,

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \alpha^\epsilon \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds\right)^2 e^{(2+\epsilon)\lambda_n T}$$

donc,

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \alpha^\epsilon \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2 \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{(2+\epsilon)\lambda_n T} + 2T \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(s))^2 e^{(2+\epsilon)\lambda_n T} ds \right]$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \alpha^\epsilon \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2 \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{(2+\epsilon)\lambda_n T} + 2T \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(s))^2 e^{(2+\epsilon)\lambda_n T} ds \right]$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq C \alpha^\epsilon \epsilon^{-2}$$

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) - u(t) &= S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right) \\ &\quad - S(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) - u(t) &= S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right) \\ &\quad - S(t-T) (\alpha I + S(T)) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$u_\alpha(t) - u(t) = (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right) (S(t) - \alpha S(t-T) - S(t))$$

$$u_\alpha(t) - u(t) = -\alpha S(t-T) (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right)$$

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_n(T-t)}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 \leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds\right)^2 e^{(4-k)\lambda_n T}$$

Posant $k = 2 - \epsilon$, et procédant de la même manière que pour $u_\alpha(0) - u(0)$, on trouve:

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 = C\alpha^\epsilon\epsilon^{-2}$$

■

Conclusion 3.7.1 *Ce travail peut être envisagé dans le futur, pour une généralisation de l'étude à d'autres classes de problèmes mal posés plus généraux, ainsi qu'il peut faire l'objet d'une étude numérique pouvant servir à résoudre d'une manière concrète un grand nombre de problèmes physiques*

Bibliographie

- [1] K. AMES, G. W. CLARK, J. F. EPPERSON, and S.F. OPPENHEIMER, A comparison of regularisations for an ill-posed problem. *Mathematics of computation.* v. 67, N°224, pp. 1451-1471, 1998.
- [2] T. CARLEMAN. Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 26B (17), 1-9, 1939.
- [3] Mémoire sur la réduction des intégrales générales d'un système d'équations linéaires aux différences partielles p.497-497, *C. R.*, t. IX, p. 288 26 août 1839
- [4] H. S. CAVAYAN, G.G.BELFORD. On computing a stable least squares solution to the inverse problem for a planar Newtonian potential, *SIAM, J.Appl. Math.* 20, 1, 1971.
- [5] G. W. CLARK and S. F.OPPENHEIMER. Quasi-reversibility methods for non well-posed problems, *Electronique Journal of Differential Equations*, no.8, pp. 1-9, 1994.
- [6] R. COURANT, Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc*, 49, pp. 1-23, 1943.
- [7] M. DENCHE, and S. DJEZZAR, A modified quasi-boundary value method for a class of abstract parabolic ill-posed problems. *Boundary value problems*, article ID37524, pp.1-8, 2006

- [8] M. DENCHE, K. BESSILA, A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, N°2, 419-426, 301, 2005
- [9] S. DJEZZAR, A regularisation method for an abstract backward Cauchy problem. *Proceedings of the Third International Conference on Mathematical Sciences-ICM2008*, pp1116-1125.
- [10] V. B. DÉMIDOVITCH Reconstitution d'une fonction et de sa dérivée d'après une information expérimentale (en russe). *Recueil <<Analyse numérique et programmation>>*, VIII, Editions de l'Université de Moscou, 1967.
- [11] J. DOUGLAS, A numerical method for analytic continuation. *Boundary Problems, Different. Equat., Univ. Wisconsin Press, Madison, 1960.*
- [12] J. DOUGLAS, Approximate continuation of harmonic and parabolic functions. *Numer. Sol. of Partial Different. Equat., Birkhauser, 1960.*
- [13] T. F. DOLGOPOLAVA Régularisation de dimension finie appliquée à la différentiation numérique des fonctions périodiques (en russe). *Anales mathématiques de l'Université d'Oural*, 7, 4, 1970.
- [14] T. F. DOLGOPOLAVA, V. K. IVANOV Sur la différentiation numérique (en russe). *Journal d'analyse numérique et de physique mathématique*, 6, 3, 1966.
- [15] K. O. FRIEDRICHS, Asymptotic Phenomena in Mathematical Physiques, *Bull. Amer. Math. Soc.* 616, pp. 485-504, 1955.
- [16] H. GISPERT, Sur les fondements de l'analyse en France (à partir de lettres inédites de G Darboux et de l'étude des différentes éditions du Cours d'analyse de C Jordan), *Archive for History of Exact Science* 28 (1), 37-106, 1983.
- [17] É. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1891.

- [18] C. GUILPIN, Manuel de calcul numérique appliqué, Publié par EDP Sciences Editions, ISBN 286883406X, 9782868834065, pp. 577, 1999.
- [19] J. HADAMARD, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Bull. Univ. Princeton, 13, 1902.
- [20] J. HADAMARD, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris, Hermann. 1932.
- [21] J. HADAMARD, Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Dover. New-York, MR14:474f. 1952.
- [22] B. M. C. HETRICK, R. J. HUGHES, Continious dependence results for inhomogeneous ill-posed problems in Banach space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 331, Issue1,pp342-357, 2007 .
- [23] D. HUET, Phénomène de perturbation singulière dans les problèmes aux limites, Anales inst.Fourier, pp.1-96, 1960.
- [24] V. IVANOV, T. I. KOROLIUK. Sur un problème de prolongement analytique numérique des fonctions harmoniques (en russe). Anales Mathématiques de l'Université d'Oural, 5, 4, 1966.
- [25] F. JEDRZEJEWSKI, Introduction aux méthodes numériques, 2^{eme} édition, Springer-Verlag, ISBN 2-287-25203-7, France 2005, 2006.
- [26] J. KOHN, L. NIRENBERG, Non coercive boundary value problems. Comm. Pure Applied Maths, vol. XVIII, pp, 446-492, 1965
- [27] A. KIRSCH, An introduction to the mathematical theory of inverse problems, Springer-Verlag, New-York, 1996.
- [28] K. KUNISCH, W. Ring, Regularization of nonlinear ill-posed problems with closed operators, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 14, 389–404, 1993.
- [29] R. LATTÉS, J. L. LIONS, Méthode de quasi-réversibilité et applications. DUNOD. Paris. 1967.

- [30] M. M. LAVRENTIEV, Some improperly posed problems of mathematical physics. Springer, Tracts in Natural Philosophy, vol.11, Springer, Berlin, 1967.
- [31] P. D. LAX, B. WENDROFF, on the stability of difference schemes with variable coefficients. *comm. Pure Applied math.*, 14, pp. 497-520. 1961.
- [32] P. LEVY-BRUH. Introduction à la théorie spectrale. Dunod, Paris, 2003, I.S.B.N210007072x.
- [33] J. L. LIONS, Sur l'approximation des solutions de certains problèmes aux limites. *Rend. Sem.Padova*, vol. XXXII, pp. 3-54., 1962.
- [34] J. L. LIONS, Cours C.I.M.E., Varenna, mai 1963.
- [35] K. MILLER, Stabilized quasi-reversibility and other nearly best possible methods for non-well posed problems, "Symposium on non-well posed problems and logarithmic convexity", *Lecture notes in mathematics*, 316, Springer Verlag, Berlin, 161-176, 1973.
- [36] J. VON. NEUMANN, R. RICHTMYER, A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks, *J.Appl, Phys.*, vol.21, p.232. 1950.
- [37] P. S. NOVICOV, Sur l'unicité du problème inverse de la théorie du potentiel (en russe). *Rapports de l'académie des sciences de l'U.R.S.S*, 18, 3, 1938.
- [38] A. OLEINIK, solution discontinues des équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ouspechi Mat.Nauk*, 12, pp3-73., 1957.
- [39] A. OLEINIK, A problem of Fichera, *Doklady Akad.Nauk*, vol.157, pp1297-1301, 1964.
- [40] L. E. PAYNE, Improperly posed problems in partial differential equations, Cornell University, Regional conference series in applied mathematics, SIAM.
- [41] A. PAZY. Semigroupes of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag. New-York. Inc, 1983.

- [42] B. L. PHILIPS, A technique for the numerical solution of certain equations of the first kind, *Journal of the A.C.M.*, vol.9, pp.84-97, 1962.
- [43] O. PROT. Méthode de régularisation antropicque et application au calcul de la fonction de distribution des ondes. Thèse, Orleans, 2005.
- [44] W.H. Press, S.A. Teutolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical recipes*, Cambridge University Press, 1986.
- [45] R. D. RICHTMYER, *Difference Methods for initial-value problems*, Acad.Press, 1957.
- [46] R. E. SHOWALTER, The final value problem for evolution equation, *J.Math. Anal.Appl.*563-572, 1974.
- [47] R. E. SHOWALTER, Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations, "Trends in the theory and practice of non-linear analysis" Elsevier. 1983.
- [48] V.TRENOGUINE. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française KOLIAR, édition Mir, 1985.
- [49] Dang Duc TRONG, Nguyen Huy TUAN, Stabilised quasi-reversibility method for a class of nonlinear ill-posed problems. *Electronic journal of differential equations*, N°84, pp1-12. ISSN: 1072-6691. 2008.
- [50] A. N. TYKHONOV, On the stability of inverse problems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*39, N° 5, 195-198, 1943.
- [51] A. N. TYKHONOV&V. ARSENINE, *Solution of ill-posed problems*, Winston, New-York, 1977.
- [52] A. N. TIKHONOV, V. V. ALIKAIEV, V. IA.ARSÉNINE V, A. A. DOUMOVA, Détermination de la fonction de répartition des électrons du plasma d'après le spectre du rayonnement de freinage (en russe). *Journal de physique expérimentale et théorique*, 55, 5, 1968.

- [53] A. N. TIKHONO, V. ARSÉNINE, A. A. DOUMOVA, L. V. MAÏOROV, V. I. MOSTOVOI, Une méthode nouvelle de reconstitution de spectre vrais (en russe). *Energie atomique*, 18, 6, 1965.
- [54] A. N. TIKHONOV, V. ARSÉNINE, L. A. VLADIMIROV, G. G. DOROCHENKO, A. A. DOUMOVA. A propos du traitement des spectres d'appareils des γ -quanta et des neutrons rapides mesurés à l'aide de spectromètres monocristalliques à scintillation (en russe). *Bulletin de l'académie des sciences de l'UR.S.S., série physique*, XXIX; 5, 1965.
- [55] A. N. TIKHONOV, A. V. GONCHARSKY, V.V. STEPANOV , A.G. YAGOLA, Numerical methods for the solution of ill-posed problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [56] V. V. VASSINE, Sur le calcul stable de la dérivée (en russe). *Journal d'analyse numérique et de physique mathématique* 13, 6, 1973.